МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ
ГЕОМЕТРИЯ
I БӨЛҮК

Орто билим берүүчү мекемелеринин 10-классы үчүн окуу китеби

1-басылышы

Өзбекстан Республикасынын Элге билим берүү министрлиги бекиткен

ТАШКЕНТ 2017

УӨК 51(075.3)
KBK 22.1
M 54

Алгебра жана анализдин негиздери бөлүмүнүн авторлору:

М.А. Мырзахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.К. Аманов.

Геометрия бөлүмүнүн автору:

Б.К. Хайдаров

Пикир билдиргендер:

Б. К. Бешимов – Мырза Улугбек атындагы Өзбекстан Улуттук Университетинин "Геометрия жана топология" кафедрасы башчысы, физика-математика илимдеринин доктору.

М. Д. Пардаева – Республикалык Билим берүү борборунун директору орун басары.

Д. Е. Давлетов – Низамий атындагы ТМПУнин "Математика окутуу методикасы" кафедрасы башчысы, физика-математика илимдери кандидаты.

Г. М. Рахимов – ТЭХММИ алдындагы академиялык лицей мугалими, физика-математика илимдери кандидаты, доцент.

А.А. Акмалов – Ташкент шаар ЭБККДКАИ проректору, педагогика илимдеринин кандидаты, доцент.

Окуу китебинде колдонулган белгилер жана алардын мааниси:

– мисалды чыгаруу (далилдөө) башталды

– мисалды чыгаруу (далилдөө) аяктады

– текшерүү иштери жана тест (сыноо) көнүгүүлөрү

– суроо жана тапшырмалар

– негизги маалымат

– татаал көнүгүүлөр

Республикалык максаттуу китеп фондунун каражаттары эсебинен басылды.

ISBN 978-9943-48-595-2

I БӨЛҮМ

КӨПТҮКТӨР. ЛОГИКА

1-4 КӨПТҮК ТҮШҮНҮГҮ, КӨПТҮКТӨР ҮСТҮНДӨ АМАЛДАР. ТОЛТУРУУЧУ КӨПТҮК

Көптүк математиканын башталгыч түшүнчөсү болуп, аны өзүндөгү жөнөкөй түшүнчөлөр аркылуу мүнөздөөгө болбойт. Турмушта белгилүү объекттердин жыйнагын бир бүтүн нерсе деп кароого туура келет. Айталы, биолог бир өлкөдөгү өсүмдүктөр жана жаныбарлар дүйнөсүн үйрөнөт, ал жаныбарлардын түрү боюнча, түрлөрдү болсо уруктар боюнча класстарга ажыратып чыгат. Ар бир түр бир бүтүн деп карала турган жаныбарлар жыйнагы болот.

Көптүк табигаттуу объекттерден түзүлүшү мүмкүн. Мисалы, Азия материгиндеги бардык дарыялар же сөздүктөгү бардык сөздөр көптүк болуп саналат.

Комплекстердин математикалык мүнөздөмөсүн берүү үчүн көптүк түшүнүгүн атактуу немис математиги **Г.Кантор** (1845–1918) төмөнкүдөй берет: *«Көптүк ой жүгүртүүдө бир бүтүн деп каралуучу көптүк»* деп аталат.

Көптүктү түзгөн объекттер анын *элементтери* дейилет.

Көптүк, негизинен, ыңгайлуу болушу үчүн, латын алфавитинин баш тамгалары, мисалы, $A, B, C, \ldots$, анын элементтери болсо кичине тамгалары, мисалы, $a, b, c, \ldots$ менен белгиленет.

Элементтери $a, b, c, \ldots$ болгон A көптүк кашаалар жардамында $A = \{a, b, c, \ldots\}$ сыяктуу жазылат.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ жазуулар бир көптүктү билдирет.

Мисалы, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – ондук санак системасындагы сандар көптүгү, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – англис тилиндеги үндүү тамгалар көптүгү. 10-а классындагы окуучулар көптүгүн $\{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$ менен белгилесек, a_1 – журналдагы биринчи номерлүү окуучуну, ..., a_{30} – журналдагы отузунчу номерлүү окуучуну билдирет.

x тин A көптүктүн элменти экенин $x \in A$ сыяктуу, элементи эместигин болсо $x \notin A$ сыяктуу жазылат жана биринчи абалда "*x элемент A га тиешелүү*", экинчи абалда "*x элемент A га тиешелүү эмес*" деп окулат.

Мисалы, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ үчүн $4 \in A$, бирок $9 \notin A$.

Эгер көптүктү түзгөн элементтер чектүү санда болсо, мындай көптүк **чектүү көптүк,** тескери абалда **чексиз көптүк** дейилет.

Мисалы, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ көптүк чектүү, $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ − бардык натуралдык сандар көптүгү болсо чексиз көптүк болот.

$n(A)$ деп чектүү A көптүктүн бардык элементтери санын белгилесек, $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ көптүктүн бардык элементтери саны 6 га тең болгондуктан, $n(A)=6$ болот.

Чексиз көптүккө дагы бир мисал 13 төн кичүү болбогон бардык натуралдыкдык сандар көптүгүн келтирсе болот.

Эч кандай элементке ээ болбогон көптүк **бош көптүк** дейилет жана $\emptyset$ сыяктуу белгиленет.

$\emptyset$ көптүгү дагы чектүү эсептелет жана ал үчүн $n(\emptyset)= 0$.

Чексиз A көптүк үчүн $n(A)= \infty$ белгилөө кабыл алынган.

Эгер A көптүктүн бардык элементтери B көптүккө тиешелүү болсо, A көптүк B көптүктүн **бөлүм көптүгү** дейилет жана $A \subseteq B$ сыяктуу жазылат.

Мындай абалда "*A көптүк B да жатат* " же "*A көптүк B нын бөлүмү*" деп дагы айтылат.

$\{a\}$ көптүк $\emptyset$ жана $\{a\}$, эки бөлүм көптүккө ээ.

$\{a, b\}$ көптүк болсо төртөө: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ жана $\{a, b\}$ бөлүм көптүктөргө ээ.

Мисалы, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, анткени биринчи көптүктүн бардык элементтери экинчи көптүктүн дагы элементтери болот.

A көптүктүн B көптүккө тиешелүү болбогон элементтери бар болсо, A көптүк B нын бөлүм көптүгү боло албайт жана мындай абалда $A \not\subset B$ сыяктуу жазылат.

Мисалы, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ болсун. $1 \notin B$ болгондуктан $A \not\subset B$.

Анда, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ мамилелер орундуу.

$A \subseteq B$ жана $B \subseteq A$ болсо, бул көптүктөр дал ошол бир түрдүү элементерден түзүлгөн болуп, алар **тең** (үстмө-үст түшүүчү) **көптүктөр** дейилет жана бул $A = B$ сыяктуу жазылат.

Мисалы, туруктуу үч бурчтуктар көптүгү бардык бурчтары өз ара тең болгон үч бурчтуктун көптүгү менен үстмө-үст түшөт. Себеби туруктуу үч бурчтуктун бардык бурчтары тең жана тескерисинче, эгер үч бурчтукта бардык бурчтары тең болсо, ал туруктуу болот.

Негизги сандуу көптүктөрүн эскерип өтөбүз:

N={1, 2, 3, 4, 5, ...} – натуралдык сандар көптүгү; Z={0, ±1, ±2, ±3, ...} – бүтүн сандар көптүгү; $Q=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ – рационалдык сандар көптүгү; $R=(-\infty;+\infty)$ – чыныгы сандар көптүгү.

Көптүктөрдүн биригишүүсү жана кесилишүүсү

1) *A, B* көптүктөрүнүн **биригишүүсү** деп бул көптүктөрдөн эң кеминде бирөөсүнүн элементи болгон элементтеринен түзүлгөн көптүккө айтылат.

A, B көптүктөрүнүн биригишүүсү $A \cup B$ сыяктуу белгиленет.

Мисалы, $P=\{1, 3, 4\}$ жана $Q=\{2, 3, 5\}$ үчүн $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) *A, B* көптүктөрдүн **кесилишүүсү** деп бул көптүктөрдүн жалпы элементтеринен түзүлгөн көптүккө айтылат.

A, B көптүктөрүнүн кесилишүүсү $A \cap B$ сыяктуу белгиленет.

Мисалы, $P=\{1, 3, 4\}$ жана $Q=\{2, 3, 5\}$ үчүн $P \cap Q=\{3\}$. жалпы элементтерге ээ болбогон эки көптүк **өз ара кесишпей турган** көптүктөр дейилет.

1-мисал. $M=\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ жана $N=\{3, 4, 6, 9, 10\}$ көптүктөр үчүн төмөнкүлөрдү аныктагыла :

a) чын же жалган экенин:	**I** $4 \in M$;	**II** $6 \notin M$;
b) көптүктөрүн тапкыла:	**I** $M \cap N$;	**II** $M \cup N$;
c) чын же жалган экенин:	**I** $M \subseteq N$;	**II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

a) 4 саны *M* көптүктүн элемент болбогону үчүн $4 \in M$ мамилеси жалган. 6 саны *M* көптүктүн элементи болбогону үчүн $6 \notin M$ мамилеси чын.

b) $M \cap N=\{3, 9\}$, анткени жалаң 3 жана 9 сандары гана эки көптүктүн дагы элементтери эсептелет. $M \cup N$ көптүктү табуу үчүн же *M* ге, же *N* ге тиешелүү болгон элементтерди жазабыз: $M \cup N=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ мамилеси жалган, анткени *M* көптүктө *N* ге тиешелүү болбогон элементтери бар. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ мамиле чын, анткени *N* де $\{9, 6, 3\}$ көптүк элементтери бар.

Көнүгүүлөр

1. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ белгилерден пайдаланып, жазгыла:

a) 5 саны *Д* көптүктүн элементи;

b) 6 саны *Д* көптүктүн элементи эмес;

c) $\{2, 5\}$ көптүк $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ көптүктүн бөлүм көптүгү;

d) $\{3, 8, 6\}$ көптүк $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ көптүктүн бөлүм көптүгү эмес;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ көптүктөр үчүн $A \cup B$ жана $A \cap B$ ларды тапкыла.

3. Көптүктөрдүн элементтери санын тапкыла:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$; d) $A \cup B$.

4. Көптүктөрдүн чектүү же чексиз экенин аныктагыла:
a) 10 дон чоң бирок 20 дан кичине натуралдык сандар көптүгү;
b) 5 тен чоң болгон натуралдык сандар көптүгү.

5. Көптүктөрдөн кайсылары өз ара кесишпейт:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Айрым абалдарда көптүктү берүү үчүн анын элементтери үчүн орундуу, башка элементтер үчүн орундуу болбогон *характеристикалык касиет* көрсөтүлөт. Эгер x элемент *P касиетке* ээ деген ой жүгүртүү кыскача $P(x)$ деп жазылган болсо, P касиетке ээ болгон бардык элементтер көптүгү $\{x|P(x)\}$ көрүнүшүдө белгиленет.

Мисалы, $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$ жазылса төмөнкүчө окулат : "–2 ден чоң же тең жана 4 төн кичине же тең болгон бардык бүтүн сандар көптүгү".

Бул көптүк сандар огунда төмөнкүчө көрсөтүлөт:

Көрүнүп тургандай, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ жана ал чектүү, мында $n(A) = 7$.

Дал ошондой $B = \{x \mid -2 \leqslant x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ жазылса төмөнкүчө окулат: "–2 ден чоң же тең жана 4 төн кичине болгон бардык бүтүн сандар көптүгү". Бул көптүк сандар огунда төмөнкүчө көрсөтүлөт:

Көрүп тургандай, $B = [-2, 4)$ жана ал чексиз, мында $n(B) = \infty$.

2-мисал. $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ болсун.
a) Бул жазуу кандай окулат?
b) Бул көптүктүн элементтерин аттарын жазып чыккыла;
c) $n(A)$ ны тапкыла.

a) "3 төн чоң жана 10 дон кичине же тең болгон бардык бүтүн сандар көптүгү";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; c) $n(A) = 7$.

Көнүгүүлөр

6. Көптүктөрдөн кайсылары чектүү, кайсылары чексиз:

a) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{ x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Жазууларды окугула :

a) $A = \{ x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{ x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Эгер мүмкүн болсо, ушул көптүктөр элементтерин аттарын жазып чыккыла.

8. Төмөнкү көптүктөрдү жазгыла :

a) "−100 дөн чоң жана 100 дөн кичине болгон бардык бүтүн сандар көптүгү";

b) "1000 ден чоң болгон бардык бүтүн сандар көптүгү";

c) "2 ден чоң же тең жана 3 төн кичине же тең болгон бардык рационалдык сандар көптүгү".

9. Суроолорго жооп бергиле:

a) $\{a, b, c\}$ жана $\{a, b, c, d\}$ көптүктөрдүн бардык бөлүм көптүктөрүн жазгыла. Алар канча?

b) Эгер B көптүктөргө n элементке ээ болсо, андай абалда B көптүк канча бөлүм көптүккө ээ?

10. Кайсы абалдарда $A \subseteq B$ болот?

a) $A = \varnothing$ жана $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ жана $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ жана $B = \{ x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ жана $B = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{ x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ жана $B = \{ z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ жана $B = \{ y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Оюбузча, бизди 1 ден чоң же тең жана 8 ден кичине же тең болгон бардык натуралдык сандар көптүгү кызыктырсын жана биз анын бөлүм көптүктөрүн карасак.

Адатта, бул абалда $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$ көптүк киргизилет жана ал **универсал көптүк** деп жүргүзүлөт.

A көптүктүн A' **толтуруучусу** деп U универсал көптүктүн A га тиешелүү болбогон бардык элементтери көптүгүнө айтылат.

Мисалы, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ универсал көптүк болсо, $A=\{1,3,5,7,8\}$ көптүктүн **толтуруучусу** $A'=\{2,4,6\}$ көптүк болот.

Анык эле, • $A \cap A' = \emptyset$ • $A \cup A' = U$ • $n(A)+n(A')=n(U)$, ошондой эле A жана A' көптүктөр жалпы элементтерге ээ эмес жана аларды түзгөн бардык элементтер U ны пайда кылат.

3-мисал. Универсал көптүк $U=\{$*бардык натуралдык сандар*$\}$ болсо, C' ны тапкыла.

a) $C=\{$*бардык жуп сандар*$\}$; b) $C=\{x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U=\mathbb{Z}$.

a) $C'=\{$*Бардык так натуралдык сандар*$\}$;

b) $C'=\{x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$.

4-мисал. $U=\{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B=\{x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ болсо, төмөнкү көптүк элементтерин жазгыла:

a) A; b) B; c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

a) $A=\{1,2,3,4\}$;
b) $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$
c) $A'=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,5\}$;
d) $B'=\{-5,-4,2,3,4,5\}$
e) $A \cap B=\{1\}$;
f) $A \cup B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$
g) $A' \cap B=\{-3,-2,-1,0\}$;
h) $A' \cup B'=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

Көнүгүүлөр

11. C' ны тапкыла.

a) $U=\{$*англис тили тамгалары*$\}$, $C=\{$үндүү тамгалар$\}$;
b) $U=\{$*бүтүн сандар*$\}$, $C=\{$*терс бүтүн сандар*$\}$;
c) $U=\mathbb{Z}$, $C=\{x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;
d) $U=\mathbb{Q}$, $C=\{x \mid x \leqslant 2$ *же,* $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. $U=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B=\{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

a) A; b) A'; c) B; d) B;'
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. $n(U)=15$, $n(P)=6$, $n(Q')=4$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. $U=\{x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B=\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C=\{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

a) B' b) C' c) A' d) $A \cap B$
e) $(A \cap B)'$ f) $A' \cap C$ g) $B' \cup C$ h) $(A \cup C) \cap B'$

5-мисал. $U = \mathbb{N}$, P = {*4 санынын 50 дөн кичине болгон көбөйтүндүлөрү*} жана Q = {*6 санынын 50 дөн кичине болгон көбөйтүндүлөрү*} болсун.

a) P, Q көптүктөр элементтерин жазгыла;

b) $P \cap Q$ ны тапкыла;

c) $P \cup Q$ ны тапкыла;

d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле .

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;

b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;

c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;

d) $n(P \cup Q) = 16$ жана $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Демек, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ барабардык орундуу экен. ▲

Көнүгүүлөр

15. $U = N$, P = {*25 тен кичине болгон жөнөкөй сандар*} жана $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ болсун.

a) P көптүк элементтерин жазгыла; b) $P \cap Q$ ны тапкыла;
c) $P \cup Q$ ны тапкыла; d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(\mathrm{Q}) - n(P \cap Q)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле.

16. $U = \mathbb{N}$, P = {*30 дун бөлүүчүлөрү*} жана Q = {*40 тын бөлүүчүлөрү*} болсун.

a) P, Q көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла; b) $P \cap Q$ ны тапкыла;
c) $P \cup Q$ ны тапкыла; d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле.

17. $U = \mathbb{N}$, P = {*4 санынын 30 жана 60 сандары арасындагы көбөйтүндүлөрү*} жана Q = {*6 санынын 30 жана 60 сандары арасындагы көбөйтүндүлөрү* } болсун.

a) P, Q көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;
b) $P \cap Q$ ны тапкыла; c) $P \cup Q$ ны тапкыла;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле.

18. $U = \{x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

a) B'; b) C'; c) A'; d) $A \cap B$;
e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. $U = \mathbb{Z}$, $C = \{y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ жана $Д = \{y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ болсун.

a) C, $Д$ көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;

b) $C \cap Д$ ны тапкыла; c) $C \cup Д$ ны тапкыла;

d) $n(C \cup Д) = n(C) + n(Д) - n(C \cap Д)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле.

20. $U = \mathbb{N}$, $P = \{12$ *нин бөлүүчүлөрү*$\}$, $Q = \{18$ *дин бөлүүчүлөрү*$\}$ жана $R = \{27$ *нин бөлүүчүлөрү*$\}$ болсун.

a) P, Q, R көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;

b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$; **III** $Q \cap R$;

IV $P \cup Q$; **V** $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;

c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup \mathrm{R}$, лерди тапкыла.

21. $U = \mathbb{N}$, $A = \{4$ *санынын* 40 *тан кичине болгон көбөйтүндүлөрү*$\}$, $B = \{6$ *санынын* 40 *тан кичине болгон көбөйтүндүлөрү*$\}$ жана $C = \{12$ *санынын* 40 *тан кичине болгон көбөйтүндүлөрү*$\}$ болсун.

a) A, B, C көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;

b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$; **III** $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.

c) $A \cup B \cup C$ ны тапкыла;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле.

22. $U = \mathbb{N}$, $A = \{6$ *санынын* 31 *ден кичине болгон көбөйтүндүлөрү*$\}$, $B = \{30$ *дун бөлүүчүлөрү*$\}$ жана $C = \{30$ *дан кичине болгон жөнөкөй сандар*$\}$ болсун.

Көптүктөрдүн элементтерин жазгыла:

a) A, B, C;

b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$; **III** $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.

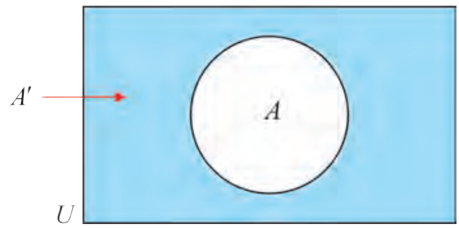
c) $A \cup B \cup C$ ны тапкыла;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)$ барабардыктын аткарылышын текшергиле

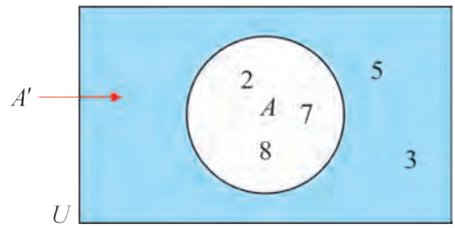
Венн диаграммалары

Көптүктөрдүн *Венн диаграммасы* жардамында көрүү максатка ылайык. Венн диаграммасында U универсал көптүк – туура төрт бурчтук, көптүк болсо ушул туура төрт бурчтуктун ичинде айлана сыяктуу сүрөттөлөт.

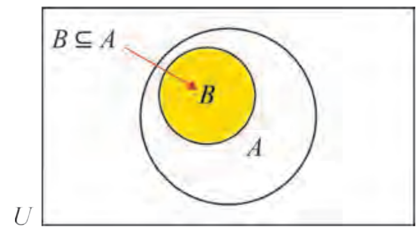
Мисалы, сүрөттө U универсал көптүк ичинде A көптүк сүрөттөлгөн. Айлана сыртындагы боёлгон бөлөгү A көптүктүн A' толтуруучусун билдирет:



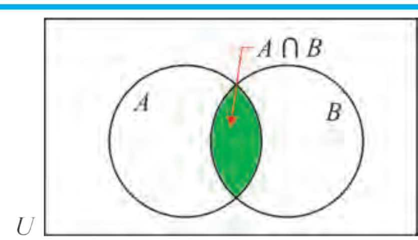
$U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ жана $A' = \{3,5\}$ болсо, ушул көптүктөр Венн диаграммасында төмөнкүчө сүрөттөлөт:



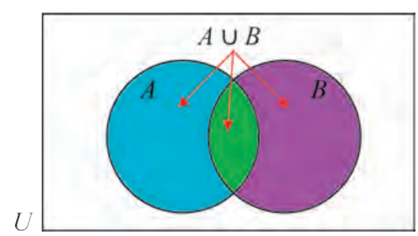
Эгер $B \subseteq A$ болсо, андай абалда B көптүктүн каалаган элементи A көптүккө тиешелүү. Демек, ушуга ылайык Венн диаграммасында B көптүгүн билдирүүчү айлана A көптүгүн билдирүүчү айлана ичинде жатат:



$A \cap B$ кесишүүчү элементтери дагы A га, дагы B га тиешелүү болот. Демек, ушуга ылайык Венн диаграммасында $A \cap B$ көптүктү билдирүүчү боёлгон бөлүм ушундай сүрөттөлөт:



$A \cup B$ биригишүүчү элементтери же A га , же B га, же экөөсүнө да тиешелүү болот. Демек, ушуга ылайык Венн диаграммасында $A \cup B$ көптүгүн билдирүүчү бөлүм төмөнкүчө сүрөттөлөт :

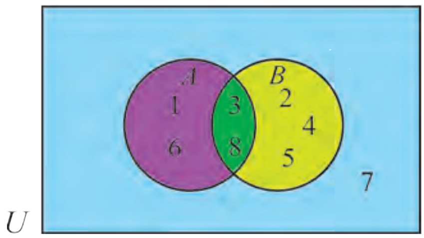


6-мисал. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ болсо, төмөнкү көптүктөрдү Венн диаграммасында сүрөттөгүлө :

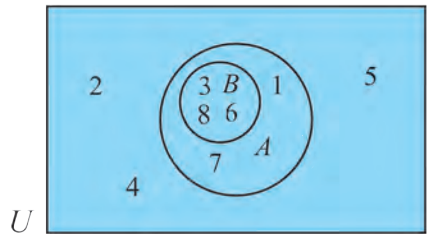
a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ жана $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ жана $B = \{3, 6, 8\}$.

a) $A \cap B = \{3, 8\}$



b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$



Көнүгүүлөр

23. A, B көптүктөрдү Венн диаграммасында сүрөттөгүлө:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ жана $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ жана $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ жана $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ жана $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{10$ *дон кичине болгон так сандар*$\}$ жана $B = \{10$ *дон кичине болгон жөнөкөй сандар*$\}$ болсун.

a) A, B көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;

b) A, B көптүктөрүн Венн диаграммасында сүрөттөгүлө;

c) $A \cap B$ жана $A \cup B$ көптүктөрүн тапкыла.

25. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{6$ *нын көбөйтүндүлөрү*$\}$ жана $B = \{9$ *дун көбөйтүндүлөрү*$\}$ болсун.

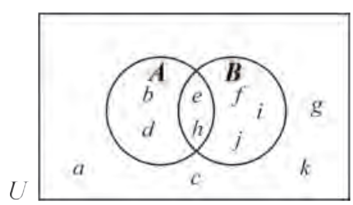
a) A, B көптүктөрүнүн элементтерин жазгыла;

b) $A \cap B$ жана $A \cup B$ көптүктөрүн тапкыла;

c) A, B көптүктөрүн Венн диаграммасында сүрөттөгүлө.

26. A, B көптүктөр Венн диаграммасында сүрөттөлгөн.

Төмөнкү көптүктөрдүн элементтерин жазгыла:

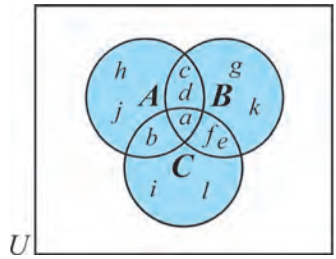


I A; **II** B; **III** A'; **IV** B';

V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VIII** $A' \cup B'$.

27.

A, B, C көптүктөр Венн диаграммасында сүрөттөлгөн.



а) Көптүктөрдүн элементтерин жазгыла:

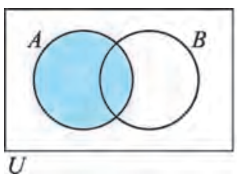
I A;	**II** B;
III C;	**IV** $A \cap B$;
V $A \cup B$;	**VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$;	**VIII** $A \cup B \cup C$.

b) Төмөнкүлөрдү тапкыла:

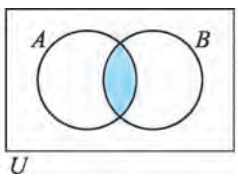
I $n(A \cup B \cup C)$;

II $n(A) + n(B) + n(C) -$
$- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

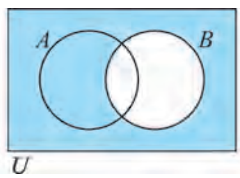
Венн диаграммасында көптүктөрдү боёп сүрөттөө мүмкүн.
Мисалы, сүрөттө, ылайык түрдө, A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$ көптүктөр боёлгон :



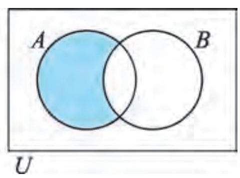
A



$A \cap B$



B'

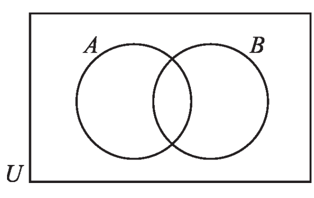


$A \cap B'$

Көнүгүүлөр

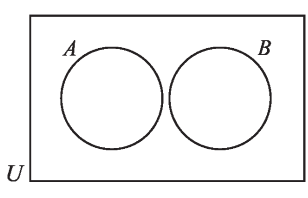
Диаграммаларды дептериңерге көчүргүлө жана көрсөтүлгөн көптүктөрдү боёгула:

28.



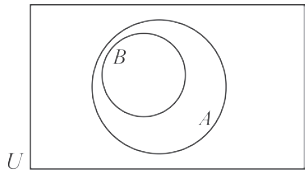
а) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; д) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



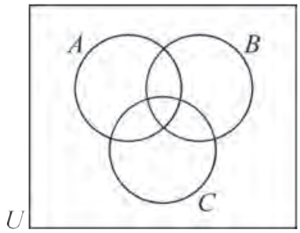
а) A; b) B;
c) A'; д) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)$`.

30.



a) A;
b) B;
c) A';
d) B';
e) $A \cap B$;
f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$;
h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A;
b) B';
c) $B \cap C$;
d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$;
h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 ОЙ ЖҮГҮРТҮҮ. ТАНУУ, КОНЪЮНКЦИЯ ЖАНА ДИЗЪЮНКЦИЯ

Чын же жалган экенин билдирүүчү жай сүйлөм ***ой жүгүртүү*** дейилет.

Суроо формасындагы сүйлөмдөр, адамдын мамилесин билдирүүчү жай сүйлөмдөр, мисалы, "Жашыл түсү жагымдуу" ой жүгүртүү боло албайт.

Айрым ой жүгүртүүлөрдүн чын-жалгандыгы бир маанилүү аныкталбайт.

Мисалы, "Бул жазуучу Ташкентте туулган" ой жүгүртүү анык бир жазуучуга карата чын да жалган да болушу мүмкүн.

1-мисал. Төмөнкүлөрдөн кайсы бири ой жүгүртүү болот? Эгер ал ой жүгүртүү болсо, анын чын-жалгандыгы бир маанилүү аныкталабы?

a) 20:4=80;
b) 25·8=200;
c) Менин калемим каерде?
d) Сенин көздөрүң көгүш түстө.

△ a) Бул ой жүгүртүү жана ал жалган, анткени 20:4=5 болот;

b) бул ой жүгүртүү жана ал чын;

c) бул сүйлөм суроо болгондуктан, ал ой жүгүртүү болбойт;

d) бул ой жүгүртүү, анын чын-жалгандыгы бир маанилүү аныкталбайт, анткени айрым адамдарга салыштырмалуу ал жалган, айрымдарына салыштырмалуу болсо чын. ▲

Биз ой жүгүртүүлөрдү *p, q, r* ... тамгалар менен белгилейбиз.

Мисалы, *p:* Дүйшөмбү күнү жамгыр жаады;
q: 20:4=5; *r:* x – жуп сан.

Татаал ой жүгүртүүлөрдү түзүү үчүн $\wedge$ (конъюнкция – "жана", "бирок"),

∨ (дизъюнкция – "же"), ¬ (тануу – "... эмес", "... туура эмес") ***логикалык байланыштар*** деп аталуучу атайын белгилерден пайдаланылат.
Аларды карап чыгабыз.

Тануу

p ой жүгүртүү үчүн "*p* эмес" же "*p* экени туура эмес" формадагы ой жүгүртүү *p* нын ***тануусу*** дейилет жана ¬*p* сыяктуу белгиленет.

Мисалы, *p*: Дүйшөмбү күнү жамгыр жаады
ой жүгүртүүнүн тануусу
¬*p*: Дүйшөмбү күнү жамгыр жааган жок;

p:Мадинанын көзү кара
ой жүгүртүүнүн тануусу
¬*p*: Мадинанын көзү кара эмес болот.

Көрүнүп тургандай, *p* чын болсо, ¬*p* жалган, *p* жалган болсо ¬*p* чын ой жүгүртүү болот. Бул маалымат ***чындык жадыбалы*** жардамында түшүндүрүлөт. Мындай жадыбал *p* га карап жаңы¬*p* ой жүгүртүүнүн чындык мааниси чын T[1] же жалган F[1] экенин аныктайт:

p	¬*p*
T	F
F	T

Көнүгүүлөр

32. Төмөнкүлөрдөн кайсы бири ой жүгүртүү болот? Эгер ал ой жүгүртүү болсо, анын чын-жалгандыгы бир маанилүү аныкталабы?
a) 11−5=7; b) 12 − жуп сан; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
e) Параллелограмм 4 жакка ээ;
f) 37 – жөнөкөй сан;
g) Сенин боюң канча сантиметр?
h) Бардык квадраттар төрт бурчтук ;
i) Кар жааган жокпу?
j) Төрт бурчтук параллелограмм эмес;
k) Сенин иниң 13 жашта;
l) Сага тарыхый китептер жагабы?
m) Мадина жакшы ырдайт;
n) Сен Самаркандда туулгансың;
o) Карама-каршы бурчтар өз ара тең;
p) Параллель туура сызыктар кесишет.

[1] T жана F тамгалары ылайык түрдө, англисче "true" (чын), "false" (жалган) сөздөрүнүн баш тамгалары

33. Ой жүгүртүүлөрдүн тануусун жазгыла. Бул ой жүгүртүү жана анын тануусу чын-жалгандыгын аныктагыла.

a) *p:* бардык төрт бурчтуктар параллелограмм болот;

b) *q:* $\sqrt{5}$ – иррационалдык сан; c) *r:* 7 – рационалдык сан;

d) *s:* 23–14=12; e) *t:* 52:4=13;

f) *u:* каалагандай эки жуп сандар айырмасы так болот;

g) *p:* удаалаш натуралдык сандар көбөйтүндүсү дайым жуп болот;

h) *q:* бардык кең бурчтар өз ара тең;

i) *r:* бардык трапециялар параллелограммдар эсептелет;

j) *s:* эгер үч бурчтуктун эки бурчу өз ара тең болсо, ал тең жактуу болот;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ болсун. ой жүгүртүүлөрдүн тануусун жазгыла:

a) $x > 5$; b) $x \geqslant 3$;

c) $y < 8$; d) $y \leqslant 10$.

35. Берилген *r, s* ой жүгүртүүлөрү үчүн *s* ой жүгүртүү *r* ой жүгүртүүнүн тануусу болобу?
Эгер *s* ой жүгүртүү *r* ой жүгүртүүнүн тануусу болбосо, *r* ой жүгүртүүнүн туура тануусун тапкыла.

a) *r:* Мадинанын бою 140 см ден бийик; *s:* Мадинанын бою 140 см ден төмөн;

b) *r:* Акбар футбол менен машыгат; *s:* Акбар музыка менен машыгат;

c) *r:* Мен бүгүн кара чай ичтим; *s:* Мен бүгүн көк чай ичтим;

d) *r:* Мен Самаркандда болгонмун; *s:* Мен эч качан Самаркандда болбогонмун.

2-мисал.

Ой жүгүртүүнүн тануусун түзгүлө:

a) x – коон, $x \in$ {*коондор, дарбыздар*}; b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$; c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;

△ a) x – дарбыз; b) $x = 1$; c) $x < 2$ жана $x \in \mathbb{Z}$. ▲

Көнүгүү

36. Ой жүгүртүүнүн тануусун түзгүлө.

a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;

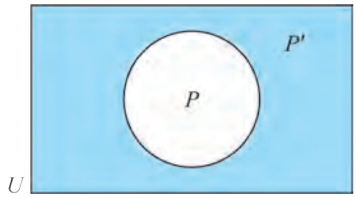
b) $x \in$ {*чөптөр, койлор*};

c) $x \geqslant 0, x \geqslant \mathbb{Z}$;

d) x – окуучу бала, $x \in$ {*окуучулар*};

e) x – окуучу кыз, $x \in$ {*кыздар*}.

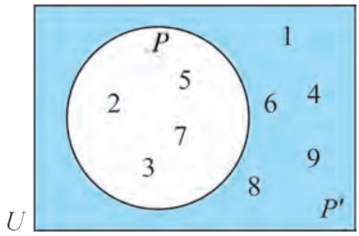
Ой жүгүртүүнүн тануусун Венн диаграммасынан пайдаланып дагы түзүү мүмкүн.



Диаграммада U − бардык сандар көптүгү, P көптүк p ой жүгүртүүнүн **чындык көптүгү** болуп, ал чын ой жүгүртүү боло турган *x тердин* көптүгү, P' көптүк деп $\neg p$ тануунун чындык көптүгү сүрөттөлгөн.

3-мисал. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ да p: x − **жөнөкөй сан** ой жүгүртүүн көрөлү. p жана $\neg p$ нын чындык көптүктөрүн тапкыла.

△ P көптүк p ой жүгүртүүнүн **чындык көптүгү**, P' көптүк $\neg p$ тануунун чындык көптүгү болсун. Андай абалда $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$. Бул көптүктөр Венн диаграммасында төмөнкүдөй сүрөттөлөт:



▲

Көнүгүүлөр

37. Ой жүгүртүүлөрдүн тануусун түзгүлө, Венн диаграммасында сүрөттөгүлө:

a) $U = \{x \mid 20 < x < 30\}$ да p: x − жөнөкөй сан;

b) $U = \{x \mid 1 < x < 10\}$ до p: x − жуп сан.

38. U = {*10-класс окуучулары*}, M = {*музыка кружогуна катышуучу окуучулар*}, O = {*оркестрде музыка чала турган окуучулар*} болсо, төмөнкү ой жүгүртүүлөрдү Венн диаграммасында сүрөттөгүлө:

a) музыка кружогуна катышуучу бардык окуучулар оркестрде музыка ойношот;

b) оркестрде музыка ойной турган окуучулардын бирөөсү да музыка кружогуна катышпайт;

c) оркестрде музыка ойной турган окуучулардын бардыгы музыка кружогуна катышпайт.

39. $U = \{ x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$ ди p: $x < 9$ маегин Венн диаграммасында сүрөттөгүлө жана $\neg p$ тануунун чындык көптүгү элементтерин жазгыла.

40. $U = \{ x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ ди p: x – жуп сан маегин Венн диаграммасында сүрөттөгүлө жана тануунун чындык көптүгү элементтерин жазгыла.

Конъюнкция

Эгер эки ой жүгүртүү **"жана"** сөзү менен байланышса, пайда болгон жаңы ой жүгүртүү берилген ой жүгүртүүлөр *конъюнкциясы* дейилет.

p, q ой жүгүртүүлөрүнүн конъюнкциясы $p \wedge q$ сыяктуу белгиленет.

Мисалы,

p: Элдар түшкү тамакка палоо жеди ;

q: Элдар түшкү тамакка самса жеди.

Ой жүгүртүүлөрдүн конъюнкциясы төмөнкүчө болот:

p∧q: Элдар түшкү тамакка палоо жана самса жеди.

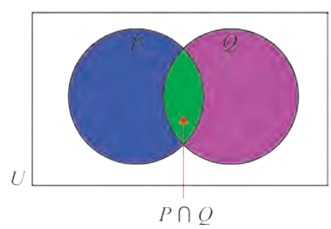
Көрүнүп тургандай, $p \wedge q$ ой жүгүртүү Элдар түшкү тамакта палоо дагы, самса дагы жегенде, p, q ой жүгүртүүлөрүнүн экөөсү тең чын болгондо гана чын болот.Эгер p, q ой жүгүртүүлөрүнүн бирөөсү жалган болсо дагы, андай абалда $p \wedge q$ ой жүгүртүү чын болбойт.

p, q ой жүгүртүүлөрдүн конъюнкциясы төмөнкү чындык жадыбалына ээ:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	p, q ой жүгүртүүлөрүнүн экөө да чын болгондо $p \wedge q$ чын болот.
T F F	F T F	F F F	p, q ой жүгүртүүлөрүнүн бирөөсү жалган болсо дагы $p \wedge q$ ой жүгүртүү жалган болот.

Биринчи жана экинчи устундар p, q ой жүгүртүүлөрүнүн мүмкүн болгон чындык маанилеринен түзүлгөн.

Диаграммада P көптүк p ой жүгүртүүнүн, Q көптүк болсо, q ой жүгүртүүнүн чындык көптүктөрү болсо, $p \wedge q$ ой жүгүртүүнүн чындык көптүгү экөө ой жүгүртүү чын болгон $P \cap Q$ көптүк болот:



Көнүгүүлөр

41. Төмөнкү ой жүгүртүүлөрдүн конъюнкциясын жазгыла:

a) p: Мадина – терапевт; q: Муниса – стоматолог;

b) p: x сан 15 тен чоң; q: x сан 30 дан кичине;

c) p: аба булуттуу; q: жамгыр жаап жатат;

d) p: Алымдын чачтары кара; q: Алымдын көздөрү көгүш .

42. $p \wedge q$ ой жүгүртүүнүн чын-жалган экендигин аныктагыла:

a) p: 5 – так сан; q: 5 – жөнөкөй сан;

b) p: квадрат төрт жакка ээ; q: үч бурчтук беш жакка ээ;

c) p: $39 < 27$; q: $16 > 23$;

d) p: 12 саны 3 кө бөлүнөт ; q: 12 саны 4 кө бөлүнөт;

e) p: $5+8 = 12$; q: $6+9 = 15$.

43. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ үчүн p: x –жуп сан, q: x саны 7 ден кичине ой жүгүртүүлөр берилген.

a) Венн диаграммасында p, q ой жүгүртүүлөрүнүн чындык көптүктөрүн;

b) $p \wedge q$ ой жүгүртүүнүн чындык көптүгүн сүрөттөгүлө.

Дизъюнкция

Эгер эки ой жүгүртүү **"же"** сөзү менен байланышса, пайда болгон жаңы ой жүгүртүү берилген ой жүгүртүүлөр *дизъюнкциясы* дейилет.

p, q ой жүгүртүүлөрүнүн дизъюнкциясы $p \vee q$ сыяктуу белгиленет.

Мисалы,

p: Бекзат бүгүн китепканага барды; *q: Бекзат бүгүн театрга барды.*

Ой жүгүртүүлөрүнүн дизъюнкциясы төмөнкүчө түшүндүрүлөт:

p∨q: Бекзат бүгүн же китепканага же театрга барды.

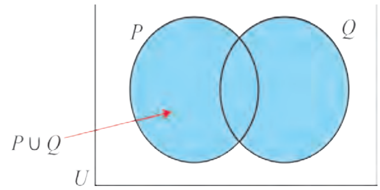
Көрүнүп тургандай, $p \vee q$ ой жүгүртүү Бекзат бүгүн китепкана же театрдын бирине же экөөсүнө да барганда чын болот.

Эгер p, q ой жүгүртүүлөрүнүн экөөсү жалган болсо, андай абалда $p \vee q$ ой жүгүртүү чын болбойт.

p, q ой ой жүгүртүүлөрүнүн дизъюнкциясы төмөнкү чындык жадыбалына ээ:

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	p, q ой жүгүртүүлөрүнүн биреөсү чын болгондо $p \wedge q$ чын болот.
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	p, q ой жүгүртүүлөрүнүн экөөсү дагы жалган болгондо $p \vee q$ ой жүгүртүү жалган болот.

Диаграммада P көптүк p ой жүгүртүүнүн, Q көптүк болсо q ой жүгүртүүнүн чындык көптүктөрү болсо, $p \vee q$ ой жүгүртүүнүн чындык көптүгү экөө ой жүгүртүү чын болгон $P \cup Q$ көптүк болот:



Көнүгүүлөр

44. $p \vee q$ ой жүгүртүүнүн чын-жалган экендигин аныктагыла:
a) p: 24 саны 4 кө бөлүнөт, q: 24 саны 6 га бөлүнөт;
b) p: $-8>-5$, q: $5<0$.

45. $p \vee q$ ой жүгүртүүнүн чын-жалган экендигин аныктагыла:
a) p: 5 жана 9 сандарынын орто арифметиги 7 ге тең, q: 8 жана 14 сандардын орто арифметиги 10 го тең;
b) p: $5+8 = 12$, q: $6+9 = 15$.

46. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20,\ x \in \mathbb{Z}\}$ үчүн:
p: x сан 3 кө эселүү, q: x – жөнөкөй сан ой жүгүртүүлөрүн көрөлү.
a) Венн диаграммасында p, q ой жүгүртүүлөрүнүн чындык көптүктөрүн сүрөттөгүлө;
b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ ой жүгүртүүнүн чындык көптүктөрүн сүрөттөгүлө.

47. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12,\ x \in \mathbb{Z}\}$ үчүн:
p: x – жөнөкөй сан, q: x сан 12 нин бөлүүчүсү ой жүгүртүүлөрүн көрөлү.
a) Берилген Венн диаграммасында p, q ой жүгүртүүлөрүнүн чындык көптүктөрүн сүрөттөгүлө;
b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ ой жүгүртүүнүн чындык көптүктөрүн сүрөттөгүлө.

48. x: Сардар эртең сүзүүгө барат; y: Сардар эртең футболго барат.
Төмөнкүлөрдү x, y жана $\neg$, $\vee$, $\wedge$ логикалык байланыштар жардамында түшүндүргүлө:
a) Сардар эртең сүзүүгө барбайт;
b) Сардар эртең сүзүүгө жана футболго барат;
c) Сардар эртең же сүзүүгө, же футболго барат;
d) Сардар эртең сүзүүгө да, футболго да барбайт;
e) Сардар эртең сүзүүгө барат, бирок футболго барбайт.

49. Сүйлөмдөрдү $\neg$, $\vee$, $\wedge$ логикалык байламталар жардамында түшүндүргүлө:
a) Сардарга балмуздак жана суусундуктар жагат;
b) Сардарга балмуздак жагат, бирок суусундуктар жакпайт;
c) x саны 10 дон чоң болгон жөнөкөй сан;
d) компьютер иштебейт.

50. Ой жүгүртүүлөр Сардардын болжолдуу күн тартибин белгилейт:
p: Сардар эрте турду;
q: Сардар эрте мененки тамакка каймак жеди;
r: Сардар түшкү тамакка шорпо ичти;
s: Сардар кечки тамакка палоо жеди;
u: Сардар спорт менен машыкты
v: Сардар китеп окуду.
Төмөнкүлөрдү табигый тилде түшүндүргүлө (айткыла):
a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 ЛОГИКАЛЫК ТЕҢ КҮЧТҮҮЛҮК. ЛОГИКАЛЫК ЗАКОНДОР.

Манисине карап табигый тилдеги жөнөкөй ой жүгүртүүлөрдү тамгалар менен эркин белгилеп тануу, конъюнкция жана дизъюнкция сыяктуу логикалык байламталар жардамында татаал ой жүгүртүүлөрдүн чын-жалгандыгына көңүл бурбастан символдук көрүнүштөрүн түзөлү.

Табигый тилдеги ой жүгүртүү	Символикалык формасы
Тануу:	
1. Салим үйдө **эмес**.	$\neg S$
2. Каражат оңойлукча табылбайт.	$\neg M$
3. Рашиттин китеп окуп жаткандыгы **туура эмес**	$\neg R$
4. Мариямдын Бухарадан экендиги **жалган**.	$\neg B$
Конъюнкция:	
5. Акмал жана Сүннөт экөөсү мугалим.	$A \wedge S$
6. Бабыр **жана** Айгүл спорт менен машыгат.	$B \wedge A$
7. Бабыр күчтүү, бирок Айгүл андан да күчтүү.	$B \wedge A$
8. Бардык медиа (информация) ыкмалары каршы болсо **дагы**, "Барселона" футбол клубу эң жакшы клуб деп табылды.	$M \wedge B$
Дизъюнкция:	
9. Айнура же метродо же автобуста келет.	$M \vee A$
10. Бабыр же Айгүл спорттун бул түрүн тандады.	$B \vee A$

Тануу, конъюнкция жана дизъюнкция үчүн чындык жадыбалдарын жалпылап, татаалыраак ой жүгүртүүлөр үчүн чындык жадыбалдарын түзүү мүмкүн:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-мисал. $p \vee \neg q$ ой жүгүртүүнүн чындык жадыбалын түзгүлө.

1-кадам

Биринчи жана экинчи устундар p жана q лардын мүмкүн болгон чындык маанилеринен түзүлгөн жадыбалын жазабыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-кадам

Үчүнчү устундагы q нун чындык маанилерине карап $\neg q$ нун чындык маанилерин жазабыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-кадам

Төртүнчү устундагы p жана $\neg q$ нын чындык маанилерине карап $p \vee \neg q$ нун чындык маанилерин жазабыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Ар дайым чын болгон ой жүгүртүү ***логикалык закон же тавтология*** дейилет.

Ой жүгүртүү логикалык закон экендигин чындык жадыбалы жардамында далилдөө мүмкүн.

2-мисал. $p \vee \neg p$ ой жүгүртүү тавтология экендигин далилдегиле.

Чындык жадыбалын түзөбүз:

$p \vee \neg p$ ой жүгүртүү дайым чын маанилерин (үчүнчү устунга карагыла) кабыл кылгандыктан ал тавтология болот.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Эки ой жүгүртүүнүн чындык жадыбалдарындагы ылайык устундар бирдей болсо, бул ой жүгүртүүлөр логикалык **тең күчтүү** дейилет.

3-мисал. $\neg(p \wedge q)$ жана $\neg p \vee \neg q$ ой жүгүртүүлөр логикалык тең күчтүү экендигин далилдегиле.

$\neg(p\wedge q)$ жана $\neg p \vee \neg q$ ой жүгүртүүлөр үчүн чындык жадыбалдарын түзөбүз:

p	q	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p\wedge q)$ жана $\neg p \vee \neg q$ ой жүгүртүүлөрүнүн чындык жадыбалдарындагы ылайык устундар бирдей, демек, бул ой жүгүртүүлөр логикалык тең күчтүү.

Бул мамилени $\neg(p\wedge q) = \neg p \vee \neg q$ сыяктуу жазабыз.

Көнүгүүлөр

51. Ой жүгүртүүлөр үчүн чындык жадыбалдарын түзгүлө:
a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p\vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p\vee p$.

52. Ой жүгүртүүлөр тавтология болобу?
a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p\vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Логикалык тең күчтүүлүктөрдү далилдегиле:
a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p\wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p\vee q$;
d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p\vee q)$.

54. Ой жүгүртүүлөр берилген болсун:
p: Сардар алманы жакшы көрөт; q: Сардар жүзүмдү жакшы көрөт.
Төмөнкү ой жүгүртүүлөрдү табигый тилде түшүндүргүлө:
a) $p \vee q$; b) $\neg(p\vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Чындык жадыбалын түзүп, $\neg(p\vee q)$ жана $\neg p \wedge \neg q$ ой жүгүртүүлөр логикалык тең күчтүү экендигин далилдегиле.

10-11 ИМПЛИКАЦИЯ, КОНВЕРСИЯ, ИНВЕРСИЯ ЖАНА КОНТРАПОЗИЦИЯ

Импликация

Эки ой жүгүртүү "эгер ... болсо, андай абалда ..." фраза менен байланса, анда ой жүгүртүүлөр ***импликациясына*** ээ болобуз.

"Эгер p болсо, анда q" импликативдүү ой жүгүртүү $p\Rightarrow q$ сыяктуу белгиленет жана" p дан q келип чыгат, "p ой жүгүртүү q үчүн жетерлүү," q ой жүгүртүү p үчүн зарыл" маанилерин дагы билдирет.

Мында p ой жүгүртүү q үчүн ***жетерлүү шарт***, q ой жүгүртүү p үчүн ***зарыл шарт*** деп жүргүзүлөт.

Мисалы, *p: Сардардын телевизору бар*; *q: Сардар кинону көрөт* ой жүгүртүүлөр үчүн

$p \Rightarrow q$: Сардардын телевизору болсо, ал кинону көрөт ой жүгүртүүнү билдирет.

Так ошондой $p \Rightarrow q$: *Сардар кинону көрүшү үчүн анда телевизор болушу жетерлүү* ой жүгүртүүнү пайда кылабыз.

$p \Rightarrow q$ ой жүгүртүү жалаң гана p чын болуп, q жалган болсо, p ой жүгүртүү чын болгондуктан төмөнкү чындык жадыбалы түзүлөт:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Жөнөкөй ой жүгүртүүлөр жана логикалык байланыштар жардамында чын-жалгандыгына көңүл бурбастан татаалыраак ой жүгүртүүлөрдү түзүү мүмкүн.

1-мисал. p: *"Анара кинофильмдерди көп көрөт"*; q: *"Барна кинофильмдерди көп көрөт* ; r: *"Барна экзаменден өтө албайт"*; s: *"укмуш болот"* ой жүгүртүүлөр берилген болсун.

Анда төмөнкүлөргө ээ болобуз:

1. $p \wedge \neg q$: *"Анара кинофильмдерди көп көрөт, Барна болсо жок.*
2. $p \Rightarrow \neg q$: *"Анара кинофильмдерди көп көрсө, Барна кинофильмдерди көп көрбөйт.*
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: *"Барна кинофильмдерди көп көрсө, ал же экзаменден өтө албайт же укмуш болот"*.
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: *"Барна кинофильмдерди көп көрсө жана укмуш болбосо, анда Барна экзамен ден өтө албайт"*.
5. $(q \wedge s) \vee r$: *"Же Барна кинофильмдерди көп көрөт жана укмуш болот, же Барна экзаменден өтө албайт"*.

Эквиваленсия

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ көрүнүшүндөгү ой жүгүртүү p жана q ой жүгүртүүлөрүнүн эквиваленсиясы дейилет жана $p \Leftrightarrow q$ сыяктуу белгиленет.

$p \Leftrightarrow q$ жазуу "p ой жүгүртүү q үчүн зарыл жана жетерлүү" же"p ой жүгүртүү q болгондо гана орундуу болот", деп окулат.

2-мисал. *p: x* – жуп сан, *q: x сандын акыркы саны жуп* ой жүгүртүүлөр үчүн $p \Leftrightarrow q$ ой жүгүртүү кандай окулат?

$p \Leftrightarrow q$: *x жуп сан болсо, анын акыркы саны жуп болот*;

$q \Leftrightarrow p$: *x сандын акыркы саны жуп болсо, ал жуп болот.*

Ой жүгүртүүлөрүн карасак, $p \Leftrightarrow q$ жазуу "x сан жуп болушу үчүн анын акыркы саны жуп болушу зарыл жана жетерлүү" же" x сан анын акыркы саны жуп болгондо гана жуп болот" деп окулат.

Эми каалаган p жана q ой жүгүртүүлөр берилген болсо $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ой жүгүртүү үчүн чындык жадыбалын түзөбүз:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Демек, $p \Leftrightarrow q$ ой жүгүртүүнүн чындык жадыбалын төмөнкүчө болот. Көрүнүп тургандай, $p \Leftrightarrow q$ ой жүгүртүү p жана q ой жүгүртүүлөрүнүн чындык маанилери бирдей (же экөөсү да чын, же экөөсү да жалган) болгондо гана чын болот.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Көнүгүүлөр

56. Төмөнкү импликатив ой жүгүртүүлөрдө зарыл жана жетерлүү шарттарын аныктагыла жана бул ой жүгүртүүлөрдү "зарыл", "жетерлүү" сөздөрүн колдонуп башкача түшүндүргүлө:

a) эгер мен эрте мененки автобуска үлгүрбөсөм, мектепке кеч каламын;
b) эгер температура жетерликче төмөндөсө, арыктагы суу муздап калат;
c) эгер $x > 20$ болсо, $x > 10$ болот;
d) эгер мен гол урсам, биздин команда жеңип чыгышы мүмкүн.

57. $p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнү табигый тилде түшүндүргүлө :

a) p: күн чайыттай ачык, q: мен чөмүлүшкө барамын;
b) p: x сан 6 га бөлүнөт, q: x – жуп сан;
c) p: муздаткычта жумурткалар бар, q: Мадина торт жасайт.

58. a) $p \Rightarrow \neg q$; b) $\neg q \Rightarrow \neg p$; c) $(p \vee q) \Rightarrow p$;
d) $q \wedge (p \Rightarrow q)$; e) $p \Leftrightarrow \neg q$; f) $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg p$;
g) $p \Rightarrow (p \wedge \neg q)$; h) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

Ой жүгүртүүлөрүнүн чындык жадыбалдарын түзгүлө.

59. Ой жүгүртүүлөрдү символдук формада түшүндүргүлө:
p: жамгыр жаады, q: көлмөктөр пайда болду;

a) жамгыр жааса, көлмөктөр пайда болот;
b) көлмөктөр пайда болду, демек, жамгыр жаады;
c) көлмөктөр жок;
d) жамгыр жааган жок;
e) эгер жамгыр жаабаса, көлмөктөр пайда болбойт;
f) эгер көлмөктөр пайда болбосо, жамгыр жаабаган;

g) эгер көлмөктөр пайда болбосо, жамгыр жаабаган

h) көлмөктөр пайда болушу үчүн жамгыр жаашы зарыл жана жетерлүү.

60. Чындык жадыбалдарын түзүп,

$\neg p \Rightarrow q = p \vee q$;

$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ экендигин далилдегиле.

61. $q \Rightarrow p$ ой жүгүртүүгө логикалык тең күчтүү ой жүгүртүүнү тапкыла:

a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;

c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Ой жүгүртүүлөрдон кайсылары дайым чын, дайым жалган болот?

a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$; c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Конверсия

$p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнүн ***конверсиясы*** деп $q \Rightarrow p$ ой жүгүртүүнө айтылат.

Конверсия төмөнкү чындык жадыбалына ээ:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-мисал.

p: Үч бурчтук тең жактуу,

q: үч бурчтуктун эки бурчу тең ой жүгүртүүлөрүн карайлы.

$p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнү жана анын конверсиясын табигый тилде түшүндүргүлө.

$p \Rightarrow q$: Эгер үч бурчтук тең жактуу болсо, анда анын эки бурчу тең.

$q \Rightarrow p$: Эгер үч бурчтуктун эки бурчу тең болсо, анда мындай үч бурчтук тең жактуу болот.

Инверсия

$p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнүн ***инверсиясы*** деп $\neg p \Rightarrow \neg q$ ой жүгүртүүнө айтылат.

Инверсия төмөнкү чындык жадыбалына ээ:

Бул жадыбал $q \Rightarrow p$ ой жүгүртүүнүн чындык жадыбалы менен дал келет, демек, конверсия жана инверсия логикалык тең күчтүү экен.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Контрапозиция

$p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнүн контрапозициясы деп $\neg q \Rightarrow \neg p$ ой жүгүртүүнө айтылат.
Контрапозиция төмөнкү чындык жадыбалына ээ: Бул жадыбал $p \Rightarrow q$ ой жүгүртүүнүн чындык жадыбалы менен дал келет, демек, импликация жана контрапозиция логикалык тең күчтүү экен.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-мисал. "Бардык мугалимдер мектепке жакын жерде жашашат" ой жүгүртүүнүн контрапозициясын түзгүлө.

△Анда ой жүгүртүүнү төмөнкүчө түшүндүрүү мүмкүн: "Эгер бул киши мугалим болсо, ал мектепке жакын жерде жашайт".
Бул билдирүүчү сүйлөм $p \Rightarrow q$ формага ээ, бул жерде:
p: Бул киши– мугалим, q: Бул киши мектепке жакын жерде жашайт .
$\neg q \Rightarrow \neg p$ контрапозиция төмөндөгүчө түшүндүрүлөт: "Эгер бул киши мектепке жакын жерде жашабаса, анда ал мугалим эмес."▲

5-мисал. *p: Бекзат китепканада,* *q: Бекзат китеп окуп жатат*
Ой жүгүртүүлөрүн көрөлү. Анда импликация, конверсия, инверсия жана контрапозицияны түзгүлө.

△**Импликация** $p \Rightarrow q$	Бекзат китепканада болсо, ал китеп окуйт.
Конверсия $q \Rightarrow p$	Бекзат китеп окуса, ал китепканада болот.
Инверсия $\neg p \Rightarrow \neg q$	Бекзат китепканада болбосо, ал китеп окубайт .
Контрапозиция $\neg q \Rightarrow \neg p$	Бекзат китеп окубай жаткан болсо, ал китепканада эмес.

Бул жерде, импликация жана конверсия логикалык тең күчтүү болбойт, анткени, Бекзат китепти класста окушу дагы мүмкүн.▲

Көнүгүүлөр

63. Конверсия жана инверсияны түзгүлө:

a) эгер Дияра жемпер кийсе, ал ысынат;

b) эгер эки үч бурчтук окшош болсо, алардын тиешелүү бурчтары барабар болот;

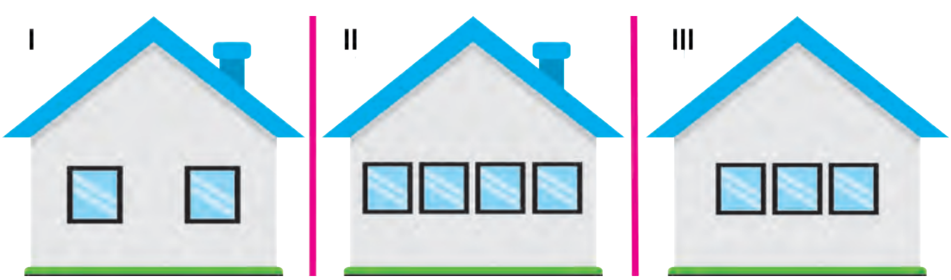
c) эгер $2x^2 = 12$ болсо, анда $x = \pm\sqrt{6}$ болот;
d) эгер Алым оюн ойносо, ал кубанат;
e) эгер үч бурчтук туура үч бурчтук болсо, анда анын жактары барабар болот.

64. Төмөнкү ой жүгүртүүлөрүнүн контрапозицияларын түзгүлө:
a) бардык роза гүлдөрү тикендүү;
b) бардык судьялар ар дайым туура чечим чыгарышат;
c) бардык жакшы футболчулар топту анык мишенге тебишет;
d) суюктук идишке куюлганда идиштин формасын кабыл алат;
e) эгер инсан адал жана окумуштуу болсо, ал ийгиликке жетет.

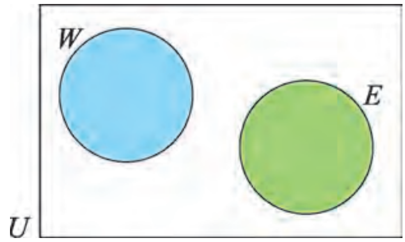
65. a) "бардык 10-класс окуучулары математиканы үйрөнүшөт" ой жүгүртүүнүн контрапозициясын түзгүлө;
b) "бардык 10-класс окуучулары математиканы үйрөнүшөт" ой жүгүртүү чын болсо, төмөнкүлөр жөнүндө кандай чечимге келесиңер:
"Шавкат – 10-класс окуучусу;
"Мирислам математиканы үйрөнөт;
"Данияр математиканы да, англис тилин да үйрөнүп жатат"?

66. Ой жүгүртүүлөрдүн контрапозицияларын түзгүлө:
a) x сан 3 кө бөлүнөт $\Rightarrow x^2$ саны 9 га бөлүнөт;
b) x сандын акыркы саны 2 болсо: $\Rightarrow x$ – жуп сан;
c) $АВСД$ – туура төрт бурчтук $\Rightarrow AB \| СД$ жана $АД \| BC$;
d) ABC – туура үч бурчтук $\Rightarrow \angle ABC = 60$.

67. *p:* Үй эң көбү менен 3 терезелүү болот,
q: Үй сыртка түтүн чыгара турган моруга ээ
ой жүгүртүүлөрдү каралы.
Ал абалда $p \Rightarrow q$: Эгер үй эң көбү менен 3 терезелүү болсо, ал сыртка түтүн чыгара турган моруга ээ;
a) конверсия, инверсия жана контрапозицияны түзгүлө;
b) төмөнкү абалдарда импликация, конверсия, инверсия жана контрапозиция үчүн чын-жалгандыгын аныктагыла:



68. Диаграммада W – начар өздөштүрө турган окуучулар, E болсо 10-класс окуучулары көптүгүн сүрөттөйт.
Төмөнкү ой жүгүртүүлөрдү толтургула:



a) .... ган начар өздөштүрүүчү окуучулар жок;
b) .... ган 10-класс окуучулары жок;
c) эгер $x \in W$ болсо, анда ......;
d) эгер $x \in E$ болсо, анда ......;
e) с жана д мамилелер арасында кандай байланыш бар?

12-13 ПРЕДИКАТТАР ЖАНА КВАНТОРЛОР

Предикаттар жана кванторлор

Кээ бир ой жүгүртүүлөрдө өзгөрүүчүлөр катышып, ушул өзгөрүүчүлөр ордуна анык маанилерин койсок, ой жүгүртүү пайда болот.
Мындай ой жүгүртүү ***предикат*** дейилет.

1-мисал. $P(x)$: "$x^2 > x$" предикат болсо,
$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ ой жүгүртүүлөрүнүн чын-жалгандыгын аныктагыла.

△ $P(2)$: $2^2>2$ – чын. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$ – жалган. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2>-\frac{1}{2}$ – чын. ▲

Кээ бир предикаттарда өзгөрүүчүнү анын маанисине карап аныктоо мүмкүн.

Мисалы, "Бул жазуучу Ташкетте төрөлгөн" жана "Ал Ташкетте төрөлгөн" билдирүүчү сүйлөмдөрдө өзгөрүүчү "Бул жазуучу" сөз бирикмеси же "ал" ат атооч. Алардын ордуна "Абдулла Кадырий" маанисин койсок, "Аблулла Кадырий Ташкентте төрөлгөн" чын ой жүгүртүүнү, "Шекспир" маанисин койсок, "Шекспир Ташкентте төрөлгөн" жалган ой жүгүртүүнү пайда болот.

x аркылуу өзгөрүүчүнү белгилесек, жогорудагы билдирүүчү сүйлөмдөрдү "x Ташкентте төрөлгөн" көрүнүшүндө жазуу мүмкүн.

Предикатда бир же бир нече өзгөрүүчү катышуусу мүмкүн, катышкан өзгөрүүчүлөргө карап предикат $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ... сыяктуу белгиленет.

Предикаттар менен бирге ∀ (жалпылык квантору, "бардык ... дар үчүн") жана ∃ (барлык квантору, "ушундай ... барлык") атайын белгилеринен пайдаланып, жаңы ой жүгүртүүлөр пайда болот. Мисалы, $\forall xP(x)$ көрүнүштөгү жаңы ой жүгүртүү x тин бардык маанилери үчүн $P(x)$ экендигин, $\exists xP(x)$ көрүнүштөгү жаңы ой жүгүртүү болсо x тин $P(x)$ болуп жаткан мааниси экендигин билдирет.

Мисалы, $P(x)$: "x Самарканда төрөлгөн" предикатын карайбыз. Анда $\forall xP(x)$ көрүнүштөгү жаңы ой жүгүртүү "бардык Самарканда төрөлгөн" сыяктуу, $\exists xP(x)$ көрүнүштөгү жаңы ой жүгүртүү болсо "ушундай кишилер бар, алар Самарканда төрөлгөн" сыяктуу окулат.

$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$ көрүнүштөгү ой жүгүртүүлөрүнүн чын-жалгандыгын аныктоо үчүн мисалдар келтиребиз.

2-мисал.

$D = \{1,2,3,4,5\}$ болсо, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ ой жүгүртүү чын экендигин далилдегиле.

Анык болгон,

$1^2 \geqslant 1$, $2^2 \geqslant 2$, $3^2 \geqslant 3$, $4^2 \geqslant 4$, $5^2 \geqslant 5$.

Демек, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ ой жүгүртүү чын экен.

Айтуу керек, $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ ой жүгүртүү жалган болушун далилдөө үчүн x тин ал жалган болгон бир гана маанисин табуу жетерлүү.

Чындыгында, $x=\frac{1}{2}$ болгондо $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$ болот.

x тин $\forall xP(x)$ ой жүгүртүүнүн жалгандыгын көрсөтүүчү мааниси ***контрмисал*** дейилет.

3-мисал. $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ ой жүгүртүү чын экендигин далилдегиле.

$1^2=1$ болгондуктан, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ ой жүгүртүү чын экен.

Эгер $E=\{5,6,7,8\}$ болсо, $\exists m \in E,\ m^2 \geqslant m$ ой жүгүртүү жалган, анткени

$5^2 = 25 \neq 5$; $6^2 = 36 \neq 6$; $7^2 = 49 \neq 7$; $8^2 = 64 \neq 8$.

Тануу амалы менен байланыштуу эки маанилүү логикалык законун келтиребиз:

$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)), \qquad \neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Ушул закондордун маанисин түшүнтүрүү үчүн мисал келтирели.

$P(x)$: "x классташым үлгүлүү " предикатын карайлы.

$\neg(\exists xP(x))$ жазуу "классташтарым ичинде үлгүлүүлөр жок" ой жүгүртүүнүн, $\forall x(\neg P(x))$ жазуу болсо ага тең күчтүү ой жүгүртүү болгон "Бардык классташтарым үлгүлүү эмес" ой жүгүртүүн билдирет.

Дал ушундай, $\neg(\forall xP(x))$ формула "Бардык классташтарым үлгүлүү экендиги туура эмес" ой жүгүртүүнү, $\exists x(\neg P(x))$ формула болсо ага тең күчтүү ой жүгүртүү болгон "Кээ бир классташтарым үлгүлүү эмес" ой жүгүртүүн билдирет.

Анык болгон, $P(x,y)$ предикаттан кванторлор жардамында

$$\forall x P(x,y), \qquad \forall y P(x,y), \qquad \exists x P(x,y), \qquad \exists y P(x,y)$$

көрүнүштөгү бир өзгөрүүчү предикаттарды, алардан болсо, өз кезегинде.

$$\forall x \exists y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y), \quad \exists x \forall y P(x,y), \quad \forall y \exists x P(x,y),$$
$$\forall x \forall y P(x,y), \quad \forall y \forall x P(x,y), \quad \exists x \exists y P(x,y), \quad \exists y \exists x P(x,y)$$

көрүнүштөгү ой жүгүртүүлөрдү куруу мүмкүн.

Андыктан $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ жана $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ ой жүгүртүүлөрүнүн маанилери бирдей болсо да, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ ой жүгүртүүлөр тең күчтүү эмес экен.

Мисалы, $P(x,y)$*: ал инсан x класcташымдын атасы* предикатты карайбыз.

Мында $\forall x \exists y P(x,y)$ = "*ыктыярдуу класcташымдын атасы бар*"; $\exists y \forall x P(x,y)$ "*ушундай инсандар бар, ал бардык класcташтарымдын атасы болот*" ой жүгүртүүлөрүн билдирет.

Ушул сыяктуу, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ ой жүгүртүүлөр тең күчтүү эместигин көрсөтүү мүмкүн (өз алдынча мисалдар түзгүлө).

Предикаттар жана кванторлор жардамында логикалык закондорду пайда кылуу мүмкүн.

Мисалы, "Эгер бардык каргалар кара болсо, кара болбогон куштардын эч бири карга эмес" ой жүгүртүү

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\,(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

логикалык законго мисал боло алат.

Көнүгүүлөр

69. Ой жүгүртүүлөрдү предикаттар жана кванторлор жардамында түшүндүргүлө:

a) кээ бир куштар уча албайт;
b) кээ бир жазуучулар акын эмес;
c) кээ бир чиркейлер чакпайт;
d) бардык планеталар шар формасында;
e) бардык аскерлер күчтүү инсандар;
f) бардык хирургдар − врачтар;
g) бардык аюулар бал жешет;
h) ар кандай айлана – жалпак формада;
i) кээ бир коёндор капустаны жакшы көрүшөт;
j) кээ бир китептер кызыктуу;
k) бардык апалар балдарды эркелешет.

Ушул ой жүгүртүүлөрдүн тануусун түзгүлөчү?

70. Ой жүгүртүүлөрдү, мүмкүн болсо, уланткыла:

a) эч кандай сүт эмүүчү жабралардан дем албайт. Сазан жабралары менен дем алат. Демек, ...;

b) бардык адамдардын кемчиликтери бар. Бардык падышалар – адамдар. Демек, ...;

c) кызыл түстөгү гүлдөрдүн жыты жок. Бул гүлдүн жыты жок. Демек...;

d) бөрүлөр козуларды жейт. Бул айбан козуну жейт. Демек...;

e) бардык планеталар – асман телолору. Ай – планета эмес. Демек...;

f) бардык металлдар электр тогун жакшы өткөрөт. Алтын – металл. Демек....;

g) бардык куштар жумуртка коёт. Бардык куштар омурткалуу. Демек....;

h) эгер адамдын температурасы жогору болсо, ал ооруланган болот. Бул адамдын температурасы жогору. Демек...;

i) эгер адамдын температурасы жогору болсо, ал ооруланган болот. Бул адам ооруланган эмес. Демек....

71. $P(x,y)$: y адам x тин баласы, предикаттар берилген болсун, ой жүгүртүүлөрдү табигый тилде түшүндүргүлө:

a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. $F(x,y)$: x адам y ны өз досу деп эсептейт предикат берилген болсун. Ой жүгүртүүлөрдү табигый тилде түшүндүргүлө:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;
b) $\forall x \exists y F(x,y)$;
c) $\exists y \forall x F(x,y)$;
д) $\forall x \exists y F(y,x)$;
e) $\exists y \forall x F(y,x)$;
f) $\forall y \exists x F(x,y)$;
g) $\exists x \forall y F(y,x)$.

73. $Д(m,n)$: n бүтүн сан m бүтүн санга калдыксыз бөлүнөт предикат берилген болсун. Ой жүгүртүүлөрдөн кайсы бири чын:

a) $\forall m \forall n Д(m,n)$;
b) $\forall n \exists m Д(m,n)$;
c) $\exists m \forall n Д(n,m)$;
d) $\exists n \forall m Д(n,m)$;
e) $\forall n \exists m Д(n,m)$;
f) $\exists m \forall n Д(n,m)$,

74. Ой жүгүртүүлөрдөн кайсылары туура? Тиешелүү мисалдар келтиргиле.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) бардык башка сандардан кичине болгон сан бар;

c) эгер $\forall x \exists y P(x,y)$ болсо, ал абалда $\exists y \forall x P(x,y)$ болот.

14-15 ТУУРА ОЙ ЖҮГҮРТҮҮ ЖҮРҮГҮЗҮҮ (АРГУМЕНТАЦИЯ) ЗАКОНДОРУ. СОФИЗМДЕР ЖАНА ПАРАДОКСТОР

Пикирди туура баян кылууга пикирлөө законДору талаптарын сактаганда гана жетишүү мүмкүн. ***Пикирлөө закону*** ой жүрүтүү процессинде ой жүгүртүүлөр (пикирлөө элементтери) ортосундагы болгон керектүү байланыштардан турат. Пикирлөө законДору мазмунунан келип чыккан, ой жүрүтүүнү туура куруу үчүн зарыл болгон талаптар ой жүгүртүүдин анык, жетерлүү даражада негизделген болушунан турат.

Чечимдерде предмет менен анын касиети, предметтер ортосундагы мамилелер, предметтин бар же жоктугу тууралуу пикирлер тастыгы же тануу формасында түшүндүрүлөт. Мисалы, "Темир металл" деген чечимде предмет (темир) менен анын касиети (металл экендиги) ортосундагы мамиле катталган. "Ахлак укуктан илгери пайда болгон" – деген чечимде болсо экөө предмет (ахлак жана укук) ортосундагы мамиле катталган. Мазмунунан ар түрдүү болгон бул чечимдөр түзүлүшүнө бирдей: аларда предмет жөнүндөгү түшүнүктөр жыйнагы (S) менен предмет белгиси жөнүндөгү түшүнүк (R) ортосундагы мамиле катталган, демек R дин S ке байланыштуулугу тастыкталган.

Жалпы абалда чечим $S \Rightarrow R$ логикалык формасында түшүндүрүлөт.

Биз S ой жүгүртүүлөр жыйнагын **негиз**, R ой жүгүртүү болсо **жыйынтык** деп атайбыз.Чыгарууда негиз жана жыйынтык "демек" байламта сөзү менен байланышат.

Адатта $S \Rightarrow R$ чечимде негиз жана жыйынтык горизонтал сызык менен мындай ажыратылат: $\dfrac{S}{P}$. Жөнөкөй гана мисал келтирели.

Эгер Сабыр спорт менен машыкса, анын дени соо болот.

Сабыр спорт менен машыгып жатат.

Демек, Сабырдын дени чың болот.

Бул чечимдин логикалык формасын табалы.

p: Сабыр спорт менен машыгып жатат.

q: Сабырдын дени соо

Ой жүгүртүүлөрүн карасак, чыгаруу төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$\frac{\left.\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{негиз}}{q \quad \} \textit{ жыйынтык}}$$

$p \Rightarrow q$ жана p ой жүгүртүүлөрүнөн q ой жүгүртүү келип чыкканы үчүн, чечим $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ логикалык формага ээ.

Чечимдин чындык жадыбалын түзөбүз:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Натыйжада тавтологияны пайда кылдык. Бул абал чечимдин **тууралыгын** көрсөтөт, берилген негиздерден туура жыйынтык чыгарылгандыгын билдирет

1-мисал. Төмөнкү чечимдин туура эместигин далилдегиле:

Эгер үч бурчтук үч жакка ээ болсо, анда 2+4=7.

Демек, үч бурчтук үч жакка ээ.

△Бул чечимдин логикалык формасын табалы.

p: үч бурчтук үч жакка ээ.

q: 2+4=7

Ой жүгүртүүлөрүн карасак, чечим төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$\frac{\left.\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}\right\} \textit{негиз}}{q \;\; \} \textit{жыйынтык}}$$

▲

$p \Rightarrow q$ жана q ой жүгүртүүлөрүнөн p ой жүгүртүү келип чыкканы үчүн, чечим $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ логикалык формага ээ.

Чындык жадыбалын түзөбүз:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Натыйжада тавтология пайда болбоду. Бул абал чечимдин **туура эместигин** көрсөтөт, демек берилген негиздерден туура жыйынтык чыгарылбагандыгын билдирет.

Төмөндө биз туура чечимдерди (**аргументация** законлорун) келтиребиз:

Т.р	Чечим	Мааниси	Мисал
1°.	$\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{q}$	p туура болгондо q туура болсун. Мында p туура. Демек, q дагы туура.	Эгер сабакты окусам мыкты баа аламын . Сабакты окудум . Демек, мыкты баа аламын.

2°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$	p туура болгонда, q туура-болсун. Бирок q туура эмес. Демек, p дагы туура эмес.	Эгер китеп окусам мыкты баа аламын . Мыкты баа албадым. Демек, китеп окубадым.
3°.	$\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$	p же q туура жана p туура эмес болсун. Демек, q туура эмес.	Мен же китеп окуймун , же кино көрөмүн. Мен китеп окубадым. Демек, мен кино көрдүм.
4°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow r}{p\Rightarrow r}$	p дан q жана q дан r келип чыксын. Анда p дан r келип чыгат.	Эгер аба ачык болсо, мен стадионго барамын. Эгер мен стадионго барсам,футбол ой-ноймун. Демек, аба ачык болсо, мен футбол ойноймун.

Биз чечимдердин тууралыгын далилдөөнү көнүгүү иретинде окуучуга сунуш кылабыз.

Көнүгүүлөр

75. Төмөнкү чечимди карайлы:

Алижан ооруганда гана, анын температурасы жогору болот. Алижандын температурасы жогору эмес. Демек, Алижан оорубаган.

a) чечимдин логикалык формасын жазгыла;

b) чечимдин туура экендигин далилдегиле.

76. Чечимдердин логикалык формасын жазгыла:

a) **I** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$ **II** $\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$ **III** $\dfrac{p\vee q}{p}$ **IV** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$ **V** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow p}{p}$

b) ар бир чечим үчүн чындык жадыбалын жазып, алардын кайсылары туура экендигин тапкыла.

c) табигый тилде туюнтмаларга мисалдар келтиргиле.

77. Ой жүгүртүүлөрүн чечим формасында жазгыла:

a) $(p\wedge q)\Rightarrow p$;

b) $(p\Rightarrow q)\wedge\neg q\Rightarrow p$;

c) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$;

d) $(p\wedge\neg q)\Rightarrow(\neg p\vee p)$.

Пайда болгон чечимдерден кайсылары туура?

78. p: x – жөнөкөй сан жана q: x – так сан ой жүгүртүүлөрүн каралы: Төмөнкү чечимдерден кайсылары туура?

a) Эгер x – жөнөкөй сан болсо, ал так болот. x – так же жөнөкөй сан. Демек, x – так сан;

b) x – так же жөнөкөй, бирок бир убакта эмес. x – так сан. Демек, x – жөнөкөй сан.

79. Чечим берилген: Доорон мелдеште катышуу үчүн ал же Сингапурга, же Гонгконгго барат. Доорон Сингапурга барышы маалым. Демек, Доорон Гонгконгго барбайт.

a) чындык жадыбалы жардамында бул чечим туура эмес экендигин далилдегиле;

b) Эмне үчүн бул чечим туура эмес экендигин түшүндүргүлө .

80. Төмөнкү чечимдерден кайсылары туура, кайсылары туура эмес:

a) Бакыт саат 10.00 до же киного, же театрга барат. Бакыт саат 10.00 до киного барбады. Демек, Бакыт саат 10.00 да театрга барды;

b) x саны 4 кө эселүү болсо, ал жуп сан болот. x – жуп сан, демек, ал 4 кө эселүү;

c) x саны же 30 дун же 50 нүн бөлүүчүсү. Демек, x саны 50 нүн бөлүүчүсү;

d) эгер удаалаштык арифметикалык прогрессия болбосо, ал геометриялык прогрессия болот. Демек, удаалаштык же арифметикалык же геометриялык прогрессия болот;

e) бардык классташтарым жакшы окуйт. Мухлиса жакшы окуйт. Демек, Мухлиса менин классташым.

81. Ой жүгүртүүлөрдү уланттырып, туура чечимдерди пайда кылгыла:

Мен кирбеймин. Демек ....;

a) Мен же мектепке барам, же апам мени катуу урушат. Бүгүн мен мектепке анык барбаймын. Демек ....;

b) Эгер мен мисалды туура чечсем, анын жообу китептеги жооп менен бирдей болот. Менин жыйынтыгым боюнча китептеги жооптон айырмалуу. Демек ....;

c) Эгер Генри үйлөнгөн болсо, анын мүлкүгө жубайы ээ болот. Эгер үйлөнбөгөн болсо, анын мүлкүгө агасы ээ болот. Демек, анын мүлкүгө .....;

d) Же поезд кечигүүдө, же аны бекер кылышкан. Эгер аны бекер кылышкан болсо, мен бүгүн эч жака барбаймын. Эгер ал кеч калып жаткан болсо, мен жумушка убагында бара албаймын. Демек мен.....;

e) Эгер 2 – жөнөкөй сан болсо, ал эң кичине жөнөкөй сан болот. 2 – жөнөкөй сан. Демек ... .

Софизмдер жана парадокстор

Софизм[2] – атайын чыгарыла турган туура эмес жыйынтык, тастыктын туура эмес далили. Мында далилдеги ката чеберлик менен, сезилбеген даражада жашырылат.

2 Байыр. грек. σόφισμα – айла.

Софизмге тиешелүү маселелерди алгач, биздин заманга чейинки V кылымда Байыркы Грецияда жашаган математик Зенон түзгөн.

Зенон, таанымал чапкыр Ахиллестин алдында сойлоп жүргөн ташбакага эч качан куул жете албастыгын математикалык ой жүгүртүүлөр жардамында төмөнкүчө "далил" жасаган. Ахиллес ташбакага салыштырмалуу 10 ирет тезирээк жүгүрө алат. Алгач, ташбака 100 метр алдында болсун. Ахиллес бул 100 метрди жүгүрүп өткөнүчө, ташбака 10 метр илгерилейт. Ахиллес бул 10 метрди жүгүргөнчө ташбака дагы 1 метр жылат жана д.б. Алар арасындагы аралык дайым кыскарып барат, бирок эч качан нолгө айланбайт.

Зенон маселелери чексиздик, аракет, космос түшүнүктөрү менен байланыштуу болуп, алар математика жана физика илимдеринин өнүгүүсүндө чоң мааниге ээ болду.

Кээ бир софизмдер улуу ата-бабаларыбыз Фарабий чыгармаларында, Беруний менен Ибн Синонун кол жазмаларында маек кылынган.

Биз төмөндө эң жөнөкөй софизмдерге мисалдар келтирип, аларды түшүндүрүүгө аракет жасайбыз.

2-мисал. *1000 сум кайда кетти?* 3 дос ашканада тамактанышты кызматчы аларга 25000 сумдук эсебин берди . 3 достун ар бири 10000 сумдан акча берип, 30000 сумду кызматчыга беришти. Кызматчы аларга 5000 сум кайтым берди. Достор 1000 сумдан бөлүшүп алышты жана 2000 сумду такси үчүн беришти. Кайтаарда достордон бири эсептей баштады, "Ар бирибиз 9000 сумдан каражат кылдык, бул 27000 сум болот, 2000 сум таксиге бердик, аны кошсок 29000 сум болот. 1000 сум кайда кетти ?"

△Бул жерде негизги "каталык" эсептөө туура эмес болгондугунда. 3 дос 9000 сумдан 27000 сум акча төлөштү. Мындан 25000 сумду тамак үчүн, 2000 сумду такси үчүн досуна беришти, демек, жалпы эсеп 27000 сум болот. Жогорудагы эсеп боюнча 2000 сум 27000 сумдун ичинде жатат. ▲

3-мисал. *"2·2=5" софизмы:* $20-16-4=25-20-5$ туура барабардыгын жөнөкөйлөштүрөбүз : $2(10-8-2)=25-20-5$

$$2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$$

Акыркы барабардыктын оң жана сол бөлүмдөрүн жалпы $(5-4-1)$ көбөйтүүчүгө кыскартып, $2\cdot2=5$ барабардыгын пайда кылабыз.

△Бул жерде негизги "каталык" $2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$ барабардыктын эки бөлүмүн нөлгө тең болгон $(5-4-1)$ көбөйтүүчүгө кыскартыргандыгы. ▲

Парадокс[3] – көпчүлүк тарабынан кабыл алынган адаттагы пикирге өз мазмуну же формасы менен каршы-каршы болгон, күтүлбөгөн ой жүгүртүү. Ар кандай парадокс "сөзсүз туура" (негиздүүбү, негизсизби – мындан айырмасыз) эсептелген ал же бул ой пикирди танып жибергендей көрүнөт. "Парадокс" терминин өзү дагы байыркы анти философияда ар кандай кызыктай, оригинал пикирин түшүндүрүү үчүн колдонулган.

Парадокстор, адатта, логикалык негиздеги толук аныкталбаган теорияларга учурайт.

4-мисал *Жалган парадокс.* "Мен тастыктап жаткан бардык нерсе жалган" ой жүгүртүүнү карайлы.

△Эгер бул ой жүгүртүү чын болсо, бул ой жүгүртүүнүн маанисине көбүнчө айтылган ой жүгүртүү жалган экендиги акыйкат. Эгер бул ой жүгүртүү жалган болсо, ой жүгүртүүдөгү баян – жалган. Демек, бул ой жүгүртүү жалган деген ой жүгүртүү жалган, ушундай экен, бул ой жүгүртүү акыйкат. Карама-каршылык. ▲

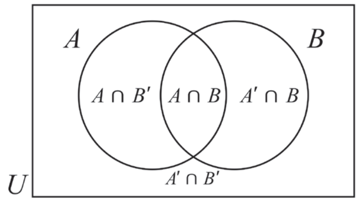
5-мисал *Рефлексив парадокс.* Өзбек тилиндеги сөздүн мааниси өзүндө түшүндүрүлсө, аны рефлексивдүү деп атайт.

Мисалы, "өзбекче" сөзү рефлексивдүү, "ангисче" сөзү болсо рефлексивдүү эмес. Дал ошондой, "он тамгалуу" сөзү андагы тамгалар саны чындыгында, 10 го тең болгондуктан рефлексивдүү, "алты тамгалуу " сөзү болсо рефлексивдүү эмес. Бардык рефлексивдүү сөздөр көптүгүн каралы. "Рефлексивдүү эмес" сөзүнүн өзү рефлексивпи?

△Эгер бул сөз рефлексивдүү болсо, анда маанисине көрө, ал рефлексивдүү эмес. Эгер бул сөз рефлексивдүү эмес болсо, анда анын мааниси өзүндө түшүндүрүлгөндүгү үчүн, ал рефлексивдүү болот. Карама-каршылык. ▲

16-18 МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУ

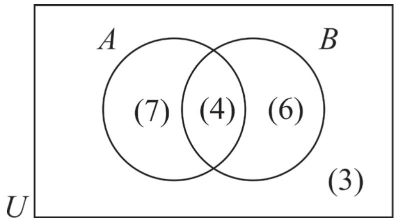
1-маселе. Кесише турган эки *A, B* көптүктөр универсал көптүгүн төрт бөлүккө ажыратат :



3 Байыр. грек. παράδοξος – күтүлбөгөн кызыктай.

Демек, универсал көптүк элементтери саны ушул бөлүмдөр элементтери саны жыйындысы экен.

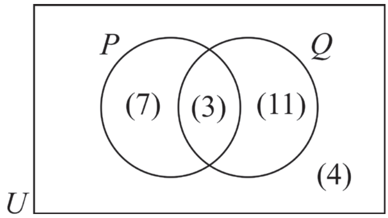
Төмөнкү диаграммада универсал көптүк теңдеш бөлүмдөрүнүн элементтери саны кашаага алынып жазылган:



Бул жерде, мисалы, A, B көптүктөрүнүн экөөсүнө 4 элемент тиешелүү, 3 элемент болсо эч кайсысына тиешелүү эмес.

U көптүктүн ыктыярдуу элементи 4 бөлүмдөрдөн бирөөсүнө тиешелүү болгондуктан U көптүк элементтеринин саны 7+4+6+3=20 га тең.

2-маселе. Сүрөткө карап, төмөнкү көптүктөрдүн элементтери санын тапкыла:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) P га тиешелүү, бирок Q га тиешелүү болбогон элементтер көптүгү;

e) Q га тиешелүү, бирок P га тиешелүү болбогон элементтер көптүгү;

f) na P га, na Q га тиешелүү болбогон элементтер көптүгү.

a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q')=7+4=11$;

c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P$, бирок Q эмес$)=7$;

e) $n(Q$, бирок P эмес$)=11$.

3-маселе. Эгер $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ жана $n(A \cap B)$ болсо,

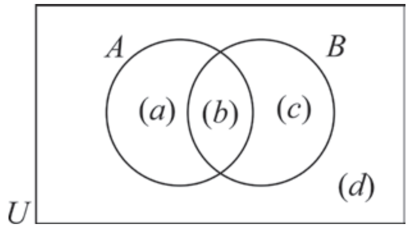
a) $n(A \cup B)$ ны тапкыла.

b) A га таандык, бирок B га таандык болбогон элементтер көптүгү канча элементтен түзүлгөн?

Венн диаграммасын түзөбүз:

$n(A \cap B)$ дан $b=6$; $n(A)$ дан $a+b=14$; $n(B)$ дан $b+c=17$; $n(U)$ дан $a+b+c+д=30$ барабардыгы келип чыгат.

Демек, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $д=5$.



Диаграммадан төмөнкүлөргө ээ болобуз :

a) $n(A \cup B)=a+b+c=25$;

b) A га тиешелүү, бирок B га тиешелүү болбогон элементтер саны $a=8$ ге тең. ▲

Көнүгүүлөр

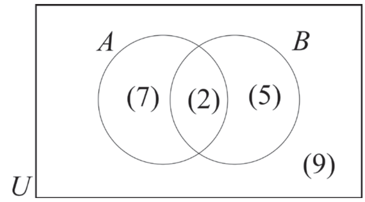
Диаграммадан пайдаланып, төмөнкү көптүктөрдүн элементтеринин санын тапкыла:

82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;

d) A га тиешелүү, бирок B га тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү;

e) B га тиешелүү,бирок A га тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү;

f) A га дагы, B га дагы тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү.

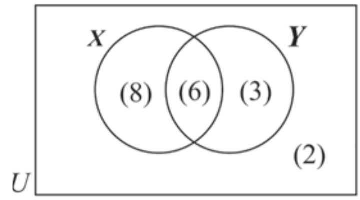


83. a) X'; b) $x \cap Y$; c) $x \cup Y$;

d) x ке тиешелүү, бирок Y ке тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү;

e) Y ке тиешелүү, бирок x ке тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү;

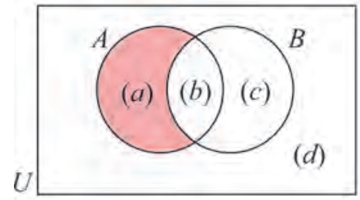
f) x ке дагы, Y ке дагы тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү.



84. a) $n(B)$; b) $n(A')$;

c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;

e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



85. $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ жана $n(A \cap B)=8$ болсо:

a) $n(A \cup B)$ ны тапкыла;

b) B га тиешелүү, бирок A га тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү канча элементтен түзүлгөн?

86. $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ жана $n(M \cap N)=5$ болсо:

a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$ ди тапкыла.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ жана $n(R \cup S)=48$ болсо:

a) $n(R \cap S)$;

b) S ке тиешелүү, бирок R ге тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү канча элементтен түзүлгөн?

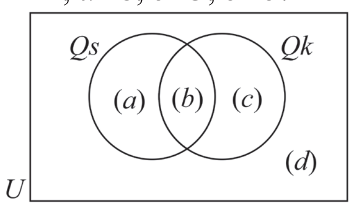
4-маселе. Спорт кружогуна катышкан 27 окуучудан 19 баланын чачы кара, 14 баланын көзү кара жана 11 баланын чачы дагы, көзү дагы кара.

a) Бул маалыматты Венн диаграммасында сүрөттөгүлө жана түшүндүргүлө. b) **I** Же кара чачтуу, же кара көздүү; **II** кара чачтуу, бирок кара көз эмес окуучулар канча?

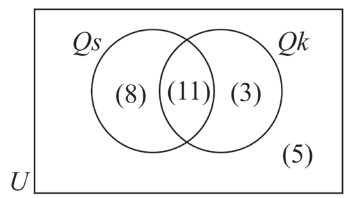
△ a) *Кч* – кара чачтуу, *Кк*–болсо кара көз окуучулар көптүгү болсун. Төмөнкү диаграммага ээ болобуз:

Мында

$a+b+c+\partial=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;
$b=11$; $a=8$; $c=3$; $\partial=5$.



анда



b) Диаграммага карап, төмөнкүлөрдү аныктайбыз:

I Же кара чачтуу, же кара көз окуучулар саны

$n(Кч \cap Кк)=8+11+3=22$;

II кара чачтуу, бирок кара көз эмес окуучулар саны

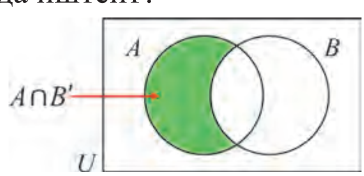
$n(Кк \cap Кк)=8$. ▲

Көнүгүүлөр

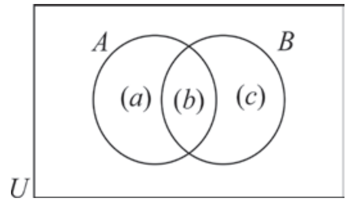
88. Бадминтон клубунда 41 катышуучудан 31 жеке тартибте жана 16 сы жуптуктарда ойношот. Канча катышуучу жеке тартипте дагы, жуптуктарда дагы ойношот ?

89. Ишканада 56 жумушчу иштейт.1 жума ичинде 47 жумушчу күндүзгү жана 29 ишчи кечки сменаларда иштешет. Канча жумушчу күндүзгү дагы кечки дагы сменада иштейт?

90. Төмөнкү Венн диаграммасына карап
$n(A \cap B')= n(A)–n(A \cap B)$,
$n(A' \cap B)= n(B)–n(A \cap B)$
барабардыктар орундуу экендигин көрсөткүлө.



91. Венн диаграммасыдан пайдаланып $n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$ формуласын келтирип чыгаргыла .



92. 50 студенттен 40 кы англис тилин, 25и болсо немец тилин үйрөнүп жатышат. Эки тилди да үйрөнүп жаткан студент канча?

4-маселе. Футбол жарышында шаардан 3 команда, A, B жана C команда катышууда. Шаар тургундарынын 20 пайызы A командага, 24 пайызы B командага жана 28 пайызы C командага көрөрмандык кылышат . Шаар тургундарынын 4 пайызы A жана B командага, 5 пайызы A жана C командага, 6 пайызы болсо B жана C командага көрөрмандык кылат. Мындан тышкары, шаар тургундарынын 1 пайызы бардык командаларга көрөрмандык кылганы маалым болду.

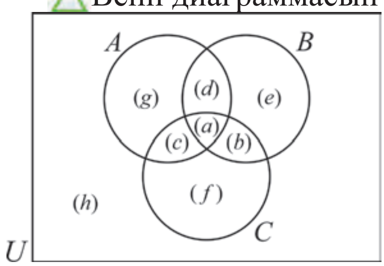
Шаар тургундарынын нече пайызы:

а) жалаң A командага көрөрмандык кылат;

b) A дагы, B дагы командага көрөрмандык кылып, C командага көрөрмандык кылбайт;

c) эч кандай командага көрөрмандык кылбайт;

Венн диаграммасын маалыматтар менен толтурабыз .



a=1, анткени шаар тургундарынын 1 пайызы бардык командаларга көрөрмандык кылат.

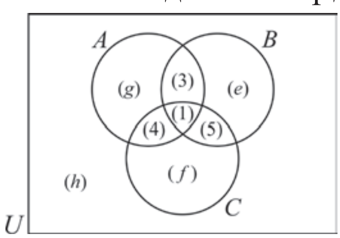
$a+\partial=4$, анткени шаар тургундарынын 4 пайызы A, жана B командага көрөрмандык кылат.

$a+b=6$, анткени шаар тургундарынын 6 пайызы B жана C командага көрөрмандык кылат.

$a+c=5$, анткени шаар тургундарынын 5 пайызы B жана C командага көрөрмандык кылат.

Демек, $\partial=3$, $b=5$, $c=4$.

Натыйжада төмөнкү диаграмма пайда болот:



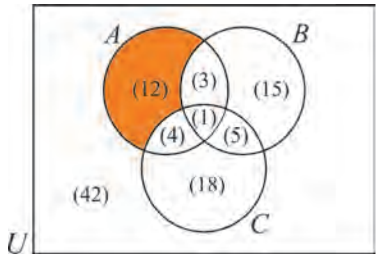
Мындан тышкары, шаар тургундарынын 20 пайызы A командага көрөрмандык кылганы үчүн $g+1+4+3=20$, демек $g=12$.

Дал ушундай, шаар тургундарынын 24 пайызы B командага көрөрмандык кылганы үчүн $e+1+5+3=24$, демек $e=15$.

Акыры, шаар тургундарынын 28 пайызы C командага көрөрмандык кылганы үчүн f+1+5+4=28, демек f=18.

Шаар тургундарынын 100 пайыз болгондуктан, эч кайсы командага көрөрмандык кылбагандар пайызы h=42 га тең.

a) жалаң A командага көрөрмандык кылатгандардын пайызын тиешелүү бөлүмдү боёп табабыз: g=20–4–3–1=12.



b) A жана B командасына көрөрмандык кылып, C командага көрөрмандык кылбагандар пайызы 12+3+15=30 га тең.

c) эч кандай командага көрөрмандык кылбагандар саны h=42 ге тең.

Көнүгүүлөр

93. Эл аралык симпозиумда 58 катышуучу түрлүү тилдерде,алардан 28и араб, 27си кытай 39у болсо англис тилинде маектеше алат.

a) жалаң кытай тилинде маек кура ала тургандар;

b) ушул тилдерде маек кура албай тургандар;

c) араб жана кытай тилинде маек кура албай тургандар нечөө?

94. Төмөнкү ой жүгүртүүлөрдин тануусун түзгүлө:

a) күн ачык жана аба ысык; b) эгер асман булутсуз болсо, мен дарыяга барамын; c) жамгыр жааган жок; d) мен же контрол ишине даярданамын, же контрол ишин жакшы жаза албаймын; e) кээ бир окуучулар таланттуу; f) бардык окуучулар таланттуу; g) таланттуу окуучулар жок; h) кээ бир окуучулардын көздөрү көгүш.

Ой жүгүртүүлөрүн логикалык байланыштар жардамында түшүндүргүлө **(95-104):**

95. Эгер студент математиканы өздөштүрсө, анын аң сезими кеңейет.

96. Эгер мен математиканы жана чет тилини өздөштүрсөм, мен эс алууга же үйгө, же тоого кетемин.

97. Каникул башталганы жалган.

98. Эгер инсан жаштыгынан өзүн башкара алса ,анда анын айланасындагылар андан таарынышпайт жана аны урмат кылышат.

99. Эгер металлдан электр тогу өтсө, анын температурасы ашат.

100. Ал үйүнө же таксиде, же поездде кетет.

101. Бул өнүм үчүн кара же түстүү металл иштетилген.
102. Каникул башталышы үчүн чейрек бүтүшү жетерлүү.
103. Каникул башталышы үчүн чейрек бүтүшү керек.
104. Каникул башталышы үчүн чейрек бүтүшү керек жана жетерлүү.

ой жүгүртүүлөрүн логикалык байланыштар жардамында түшүндүргүлө жана чын-жалгандыгын аныктагыла (**105–117**):

105. Эгер инсан рухий оорукчан болсо, ал жакындарын тааныбайт. Бул инсан рухий оорукчан. Демек, ал жакындарын тааныбайт.

106. Эгер мен сага ишенсем, сен мени алдайсын. Демек, мен сага ишенбесем, сен мени алдай албайсын.

107. Эртең биз театрга же музейге барабыз. Эгер театрга барсак, үйгө кеч кайтабыз. Эгер музейге барсак, үйгө эртерээк жетип келебиз .Бирок биз үйгө кеч кайтпайбыз . Демек, биз театрга эмес, музейге барабыз.

108. Эгер ал Алишердин атасы болсо, ал Мураттын атасы боло албайт. Ал Алишердин жана Жамшиттин атасы экендиги туура эмес экен. Ал же Жамшиттин же Мураттын атасы экендиги аныкталды. Демек, ал Алишердин атасы эмес.

109. Эгер азыр кыш болсо, температура төмөн болот. Азыр күз болбосо, кыш болот. Азыр күз. Демек, температура төмөн эмес.

110. Эгер Болот кызыкпаса, ал журналист болбойт. Эгер Болот журналист болсо, ал мугалим болбойт. Болот аябай кызыгат, бирок ал мугалим эмес. Демек, Болот – журналист.

111. Эгер жамгыр жааса, асман булуттуу болот. Эгер асман булуттуу болбосо, күн чыгат. Жамгыр жаап жатат, бирок күн чыгып турат. Демек, күн чыкса, асман булуттуу болбойт.

112. Эгер Мурат дагы ылдамдыкты ашырса анын документтерин алып коюлат. Эгер Мурат ичкен абалда рулга отурса, ал ылдамдыкты ашырбайт. Бүгүн Мурат алкогол ичпейт жана ылдамдыкты ашырбайт. Демек, анын документтерин бүгүн алып коюшпайт.

113. Көбөйтүрүү жадыбалын билбегендер сабатсыз эсептелет. Алиппени билбегендер дагы сабатсыз эсептелет. Ал же көбөйтүрүү жадыбалын, же алиппени билбейт. Демек, ал сабатсыз.

114. Эгер ал туура болсо, анда мен кечирим сурашым керек. Эгер мен туура болсом, ал менден кечирим сурашы керек. Экөөбүздөн бирибиз албетте кечирим сурашыбыз керек. Жыйынтык: бирибиз туура.

115. Мен же мектепке барамын, же мени апам урушат. Мен мектепке барбаймын. Демек, мени апам албетте урушат.

116. Эгер мен маселени катасыз чечсем, алынган натыйжа сабактагы жооп менен бирдей болот. Менин натыйжам менен сабактагы жооп айырмаланат. Демек, мен маселени чечүүдө катага жол койгонмун.

117. Предмет татаал эмес же ал жакшы окутулуп жатат.Эгер предмет татаал болбосо, аны өздөштүрөмүн.Эгер предмет жакшы окутулса, аны өздөштүрөмүн. Демек, бардык абалда предметти өздөштүрөмүн.

118. Чындык жадыбалдары жардамында төмөнкү ой жүгүртүүлөрдүн түрүн аныктагыла жана табигый тилдеги ылайык билдирүүчү сүйлөмгө мисал келтиргиле.

a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$; d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;

b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$; e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;

c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$; f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$.

Төмөнкү ой жүгүртүүлөрдү логикалык байланыштар жардамында түшүндүргүлө жана чын-жалгандыгын аныктагыла:

119. Бардык дельфиндер – сүт эмүүчүлөр. Бир дагы балык сүт эмүүчү эмес. Демек, бир дагы балык дельфин эмес.

120. Бардык уйлар – сүт эмүүчүлөр. Бардык уйлар саман жейт. Демек, кээ бир сүт эмүүчүлөр саман жебейт.

121. Кээ бир студенттер иштейт жана кээ бир студенттер жакшы окушат. Демек, кээ бир жакшы окуган студенттер ичинде иштей тургандар бар.

122. Бардык металлдар катуу формада. Сымап – металл. Демек,сымап катуу формада.

123. Эч кайсы металл газ эмес. Кээ бир заттар металлдар. Демек, кээ бир заттар газ эмес.

124. Бардык металлдар жылуулукту жакшы өткөрөт. Бардык металлдар электр тогун өткөрөт. Демек, кээ бир электр өткөрүүчүлөр жылуулукту жакшы өткөрөт.

125. Кээ бир эркектер математик болушат. Кээ бир математиктер – философ болушат. Демек, кээ бир философтор эркектер болушат.

126. Бардык альпинисттер коркпос. Кээ бир альпинисттер эркектер. Демек, кээ бир эркектер коркпос болот.

127. Бардык окумуштуулар акылдуу. Кээ бир акылдуу инсандардын тили курч. Демек, кээ бир тили кучтар окумуштуулар болот .

128. Бардык чет тили мугалимдери чет тилин жакшы билишет. Чет тилин жакшы биле тургандардын кээ бирлери математиканы жакшы көрүшпөйт. Демек, математиканы жакшы көрө тургандарынын кээ бирлери чет тили мугалими эмес.

129. Бардык кроманъондор – агрессивдүү. Бир дагы неандертал кроманъон эмес. Демек, эч кандай неондертал агрессивдүү эмес.

130. Кээ бир сүт эмүүчүлөр – киттер. Бардык киттер – ири айбандар. Демек, кээ бир ири айбандар сүт эмүүчүлөр.

Текстти окугула жана абалды талкуулагыла (**131–138**):

131. Крит философу Эпименид бардык криттиктер жалганчы экендигин тастыктады. Эпименид чын сүйлөдүбү?

132. Платон: Азыр Сократ айткан бардык нерсе жалган.
Сократ: Азыр Платон айткан сөз жалган.
Ким чын сүйлөдү?

133. Кагаздын бир тарабына: "Кагаздын башка тарабына жазылган сөз жалган", ушул кагаздын экинчи тарабына: "Кагаздын башка тарабына жазылган сөз жалган" деп жазылган. Кагаздын кайсы тарабына чын сөз жазылган?

134. Атактуу философ Протагор Эватлды тегинге укукту үйрөтүү үчүн шакирттикке алды. Мында эгер Эватл өзүнүн биринчи сот залында жеңип чыкса, мага акча төлөйт деген маанисинде келишим түзүлдү. Окуудан кийин Эватл ишке эч чыкпады. Натыйжада анын биринчи сот залында катышуу-катышпастыгы анык болуп калды. Протагор Эватлды үстүнөн сотко арызданды. Сот процессинен үзүндү:
Протагор: Ар кандай абалда бул жигит мага төлөө керек. Чындыгында да, эгер ал бул сотто жеңип чыкса, келишимге көрө ал мага төлөйт. Эгер жеңип чыкпаса, сот чечимине көрө мага төлөйт.
Эватл: Мен Протагорго эч нерсе бербеймин! Эгер мен сотто жеңип чыксам, жеңип чыккан адам катары эч нерсе бербеймин. Бирок мен жеңилүүгө да даярмын. Бул абалда келишимге көрө мен эч нерсе төлөбөймүн.

135. Бул кызыктуу сөздө сөздөр саны жетиге тең.

136. Бул сөздү окууга тыюу салынат.

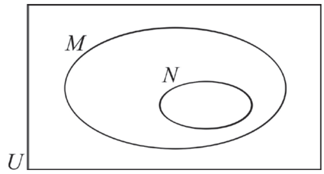
137. Бир адам тоту кушту сөгүп жатканда тоту куш ыктыярдуу тилде уккан ар бир сөзүн кайталайт, деп ишентирди. Бирок сатып алынган тоту куш эч нерсе сүйлөбөдү. Эгер сатуучу алдабагандыгы маалым болсо, абалды түшүндүргүлө.

138. Даниярдагы китептер саны 1000 ден көп.
Жок, андагы китептер 1000 ден кем.
Анда жок дегенде бир китеп бар.
Ушул үч ой жүгүртүүден бирөөсү чын. Даниярда канча китеп бар?

Текшерүү тапшырмалары
I вариант

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
A = {0 *жана* 9 *арасындагы бардык жуп сандар*}, *B* = {18 *санынын натуралдык бөлүүчүлөрү*} болсо, $A \cap B$ көптүк элементтерин жазгыла.

2. Диаграмманы дептериңерге көчүргүлө жана $M \cap N$ көптүгүн белгилегиле.



3. *p*: *x* – жуп сан, *q*: *x* сан 3 кө бөлүнөт ой жүгүртүүлөрүн көрөлү. ой жүгүртүүлөрдү сөздөр жардамында түшүндүргүлө. Алар кайсы *x* терде чын? Жалган?
   a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

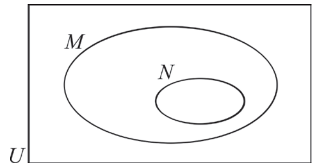
4. Төмөнкүлөрдөн кайсылары логикалык тең күчтүү?
   a) $p \Rightarrow q$ жана $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ жана $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Чечимдеринин логикалык формаларын жазгыла. Бул чечимдердин туура же туура эместигин текшергиле.
Эгер асман булуттуу болсо, мен тумагымды киемин. Асман булуттуу. Демек, мен тумагымды киемин.

II вариант

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, *A* = {0 *жана* 9 *арасындагы бардык жуп сандар*},
B = {18 *санынын натуралдык бөлүүчүлөрү*} болсо, $(A \cap B)'$ көптүк элементтерин жазгыла.

2. Диаграмманы дептериңерге көчүргүлө жана $M \cap N'$ көптүгүн белгилегиле.



3. *p*: *x* – жуп сан, *q*: *x* сан 3 га бөлүнөт ой жүгүртүүлөрүн каралы. ой жүгүртүүлөрдү сөздөр жардамында түшүндүргүлө. Алар кайсы *x* терде чын? Жалган? a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Төмөнкүлөрдөн кайсылары логикалык тең күчтүү?
   a) $\neg(p \wedge q)$ жана $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ жана $q \Rightarrow p$.

5. Чечимдеринин логикалык формаларын жазгыла. Бул чечимдердин туура же туура эместигин текшергиле. Бардык мугалимдер билимге чаңкак Муаззам Алимова мугалим эмес. Демек, Муаззам Алимова билимге чаңкак эмес.

II БӨЛҮМ

КАРЖЫЛЫК МАТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРИ

19-21 ЖӨНӨКӨЙ ПАЙЫЗДАР, ТАТААЛ ПАЙЫЗДАР

Белгилүү суммада акча карызга берилгенде карыз алуучу белгиленген мөөнөткө карыз берүүчүгө (кредиторго) алынган сумманы (карызды) кайтарышы жөнүндө келишилет.

Мындан тышкары, ар бир карыз алуучу кредиторго кошумча төлөө‘ төлөмүн өз жоопкерчилигине алат.

Анык болгон,карыз алуучу тарабынынан төлөнө турган акча карыз суммасына,төлөө мөөнөтүнө жана кредитор тарабынан пайда алуу максатында белгиленген пайыз ставкасына байланыштуу.

Кредитордун карыз алуучуга белгилүү суммадагы акчаны белгиленген мөөнөттө карызга бергендиги жөнүндөгү ала турган пайданы эсептөө үчүн адатта эки усул: **жөнөкөй пайыздар жана татаал пайыздар** усулдары колдонулат.

Жөнөкөй пайыздар

Жөнөкөй пайыздар – кредитордун карыз алуучуга белгилүү суммадагы акчаны белгиленген мөөнөткө карызга бергендиги натыйжасында ала турган пайдасыны эсептөө усулу саналат

Мисалы, 2 000 000 сум 3 жылга карызга алынды. Анда кредитор тарабынан ар жыл сайын 17 пайыз ставкасы белгиленди.

Анда 1 жылдан кийин $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000$ сум, 3 жылдан кийин болсо кошумча сумма‘ $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 1\,020\,000$ сум төлөөсү керек .

Бул мисалдан төмөнкү **жөнөкөй пайыздар формуласы** келип чыгат:

$$I = \frac{Crn}{100},$$

бул жерде C – баштап алынган карыз суммасы, I – C суммасындагы акчаны иштеткени үчүн карыз алуучунун кредиторго төлөй турган пайыз төлөмү. Ушул параметр *пайыз* төлөмү же, жөнөкөй эле, пайыз деп аталат, r – жыл сайын белгиленген пайыз ставкасы пайыз, n – жылдар саны

1-мисал. 8 000 000 сум жылына 7 пайыз ставкасында 18 айга алынган болсо, пайыз төлөмүн эсептегиле.

$$C = 8000000, \quad r=7\%, \quad n=\frac{18}{12} = 1,5 \text{ жыл.}$$

Демек, $I=\dfrac{Crn}{100} = \dfrac{8000000 \cdot 7 \cdot 1,5}{100} = 840\,000$ сум.

2-мисал. Кредитор тарабынан пайыз ставкасы жыл сайын 8% деп белгиленген. Ишкер 4 жыл ичинде алынган карызын жана пайыз төлөмүнө кошумча 1600 АКШ доллары төлөдү жана карыздан кутулду. Ишкер канча суммада карыз алган эле?

Жөнөкөй пайыздар формуласына ылайык

$$I=\frac{Crn}{100}, \text{ бул жерде } I=1600;\ r=8;\ n=4.$$

Демек, $1600 = \dfrac{C \times 8 \times 4}{100}$.

Мындан, C=5000 (АКШ доллары).

3-мисал. Банк баштап 4000 АКШ доллары суммасында карыз берип 18 айда 900 АКШ доллары пайда алды пайда. Эгерде төлөө жылма-жыл ишке ашырылган болсо жылдык пайыз ставкасы канчага тең?

Жөнөкөй пайыздар формуласына көрө

$I=\dfrac{Crn}{100}$, бул жерде I=900; n=18 ай =1,5 жыл, C=4000.

Демек, $900 = \dfrac{4000 \times r \times 1,5}{100}$.

Мындан, r=15%.

4-мисал. Кредитор баштап 2000 АКШ доллары суммасында карыз берип, бир нече жылдар ичинде жылма-жыл төлөнгөндөн кийин бардыгы болуп 3000 АКШ доллары алды.Эгерде пайыз ставкасы жыл сайын 12,5% деп белгиленген болсо, төлөөлөр канча жылда амалга ашырылган?

Кредитор 3000–2000=1000 (АКШ доллары) суммасында пайда алган. Жөнөкөй пайыздар формуласына көрө

$I=\frac{Crn}{100}$, бул жерде I=1000; C=2000; r=12,5%.

Демек, $1000=\frac{2000\times 12,5\times n}{100}$ *Жообу:* 4 жыл.

Татаал пайыздар

Татаал пайыз усулунун маанисин түшүндүрүү үчүн төмөнкү маселеге көңүл бурабыз.

5-мисал. Эгерде 6000 АКШ доллары суммасында карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 8% менен 3 жылда төлөө шарты менен алынган болсо, кредитор тарабынан алына турган пайда канча болот?

Жылдык пайыз татаал пайыз ставкасын эсепке алып, жыл сайын пайыз төлөө суммасын эсептейбиз:

Жыл	**Карыз** (1)	**Пайыз төлөөсү**$=\frac{Crn}{100}$ (2)	(1) + (2)
1	\$6000,00	$\$6000,00\times\frac{8}{100}\times 1=\$480,00$	\$6480,00
2	\$6480,00	$\$6480,00\times\frac{8}{100}\times 1=\$518,40$	\$6998,00
3	\$6998,00	$\$6998,00\times\frac{8}{100}\times 1=\$559,87$	\$7558,27

Демек 6000 АКШ доллары суммасындагы карыздан кутулуу үчүн 3 жыл бою 7558,27 АКШ доллары суммасындагы төлөмүн амалга ашыруу керек.

Мында кредитор \$7558,27 − \$6000 = \$1558,27 суммада пайда алат Бул пайда жалпы *татаал пайыз төлөмү(үстөмө пайыз)* деп жүргүзүлөт Көрүнүп тургандай ,кредитор пайдасы акыркы жылда пайда болгон баланс жана баштапкы карыз суммасы айырмасына тең экен Татаал пайыздар усулун жылдын жарым жылдыктарына, кварталдарга, айларга, күндөргө бөлүп колдонуу мүмкүн.

6-мисал.

Эгер 10000 АКШ доллары суммасындагы карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 6% менен 1жылда кварталдарга бөлүп төлөө шарты менен алынган болсо, кредитор тарабынан алына турган пайда канча болот?

Квартал	Карыз (1)	Пайыз төлөөсү= $\frac{Crn}{100}$ (2)	Баланс (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000,00\times\frac{6}{100}\times\frac{1}{4}=\$150,00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000,00\times\frac{6}{100}\times\frac{1}{4}=\$152,25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302,25\times\frac{6}{100}\times\frac{1}{4}=\$154,53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456,78\times\frac{6}{100}\times\frac{1}{4}=\$156,85$	\$10613,63

Демек, 10000 АКШ доллары суммасындагы карыздан кутулуу үчүн 1 жыл бою 10613,63 АКШ доллары суммадагы төлөмүн амалга ашыруу керек.

Мында кредитор 613,63 АКШ доллары суммасында пайда алат.

Эгер карыз бир нече жылга берилген болсо, жыйынтыктоочу баланс төмөнкүчө эсептелет:

$$A = C(1+\frac{r}{100})^n,$$

бул жерде A – жыйынтыктоочу баланс C – баштап алынган карыз суммасы, r – жыл сайын белгиленген пайыз ставкасы, n – жылдар саны.

Эгер карыз n жылга берилген болсо, төлөмүн болсо ар жылды k бөлүккө (жарым жылдыктар, кварталдар, айлар жана б.у.с.) бөлүп ишке ашырылса, төлөнө турган жалпы сумма $A = C(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ формуласы боюнча эсептелет.

Эки усулда дагы жалпы татаал пайыз (үстөмө пайыз) $I= A - C$ формуласы боюнча эсептелет.

6-мисалды ушул формулаларга таянып чыгарабыз.

C=10000, r=6, n=1, k=4.

$A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=10000\times(1+\frac{6}{100})^4$; A=10613,64.

Демек, 10000 АКШ доллары суммасындагы карыздан кутулуу үчүн 1 жыл бою 10613,64 АКШ доллары суммасындагы төлөмүн амалга ашыруу керек.

Мында кредитор 613,64 АКШ доллары суммасында пайда алат.

Эгер банкда жөнөкөй пайыз боюнча коюлган баштапкы сумма C сум болсо, n жылдан кийин банк кардарга $a_n = C(1+\frac{nr}{100})$ сум суммада акча төлөйт, мында r- банктын жылдык пайыз ставкасын билдирет.

Көнүгүүлөр

1. a) 3 000 фунт стерлинг жылдык пайыз ставкасы 7% боюнча 3 жылга карыз алынса;

b) 6100 АКШ доллары жылдык пайыз ставкасы 5,9% боюнча 15 айга карыз алынса;

c) 800 000 Япония иенасы жылдык пайыз ставкасы 6,5% боюнча 4 жыл 7 айга карыз алынса;

d) 250 000 евро жылдык пайыз ставкасы 4,8% боюнча 134 күнгө карыз алынса;

кредиторго төлөнө турган пайыз төлөмүн тапкыла.

2. 130000 АКШ доллары карызга берилген болсо, кредитор кандай абалдарда көбүрөөк пайда алат:
жылдык пайыз ставкасы 7% боюнча5 жылда,
же жылдык пайыз ставкасы 7,7% боюнча 5,5 жылга берилгендеби?

3. Кредитор тарабынан пайыз ставкасы ар жылына 7% деп белгиленген. Ишкер 5 жыл ичинде алынган карызын жана пайыз төлөмүнө кошумча 910 АКШ долларыда төлөдү жана карызынан кутулду. Ишкер канча суммада карыз алган?

4. Жылдык пайыз ставкасы 8% деп белгиленген. 3 жыл ичинде пайыз төлөмүнө кошумча 3456 фунт стерлинг төлөнгөн болсо, канча суммада карыз алынган?

5. Инвестор 21 айда 2300 евро пайда алмакчы. Ар жылдык пайыз ставкасы 6,5% деп белгиленген болсо, инвестор канча суммада инвестиция киргизүүсү керек?

6. a) Кредитор 4500 АКШ доллары суммасында карыз, берип, 3 жылда 900 АКШ долларыга тең пайда алды. Жылдык пайыз ставкасы канчага тең?

b) Кредитор 170000 Яапония иенасы суммасында карыз берип, 2 жылда 170000 Япония иенасына тең пайда алды. Жылдык пайыз ставкасы канчага тең?

7. 8 ай бою 9000 АКШ доллары суммасында карыз алынып, карыздан тышкары кошумча 700 АКШ доллары төлөндү. Жылдык пайыз ставкасы канчага тең?

8. Жаран 26 миллион сум банкка коюп, эсептөөсү боюнча 18 айда 32 миллион сум болгону аныкталды. Жылдык пайыз ставкасы канчага тең?

9. a) Кредитор 20000 АКШ доллары карыз берип, 5000 АКШ долларына тең пайда алды. Жылдык пайыз ставкасы 7% болсо, карыз канча жылга алынган? b) Кредитор 1200 евро суммасында карыз берип 487 евро пайда алды. Жылдык пайыз ставкасы 6,75% болсо, карыз канча жылга алынган?

10. Кардар банкка 9400 фунт стерлингти жылдык пайыз ставкасы 6,75% менен койду. 1800 фунт стерлинг пайда алуу үчүн канча убакыт керек?

11. Эгер: a) 4500 евро карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 7% менен 3 жылда төлөө шарты менен;

b) 6000 АКШ доллары карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 5% менен 4 жылда төлөө шарты менен;

c) 7400 фунт стерлинг суммасында карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 6,5% менен 3 жылда төлөө шарты менен алынган болсо, жыйынтыктоочу балансын эсептегиле.

22-24 МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУ

1-маселе. Элестетебиз, ишкер 23000 АКШ доллары суммасында карыздан кутулуу үчүн төлөмүн жылма-жыл эмес, мисалы, айма-ай тең бөлүмтөрдө амалга ашырууну чечим кылды. Эгер төлөө доору 6 жыл, жылдык пайыз ставкасы 8% болсо, ал ай сайын кандай суммадагы төлөөлөрдү ишке ашыруу керек?

1-кадам. Пайыз төлөө суммасын эсептейбиз.

C=23 000, r=8%, n=6 болгондуктан

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\times8\times6}{100}=\$11040.$$

2-кадам. Ашып калган каражат сумманы, жана жалпы төлөнө турган сумманы эсептейбиз:

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3-кадам. Канча ай ичинде төлөнүшү керек экендигин эсептейбиз:

$$6\times12=72 \text{ ай}.$$

4-кадам. Демек, ай сайын төлөнө турган каражат

$$\frac{\$34040}{72}\approx\$472{,}78 \text{ ге тең.}$$

2-маселе. Эгер 8800 евро карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 4,5% менен ар жылы төлөө шарты менен алынган болсо, кредитор тарабынан 3,5 жылда алынган пайда канча болот?

C=8800, r=4,5%, n=3,5, $k=12\times3\frac{1}{2}=42$

Демек, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=8800\times(1+\frac{4.5}{1200})^{42}$,

A=10298,08 ошондой эле $I=A-C$=10298,08−8800=1498,08

3,5 жылда алынган пайда €1498,08 ге тең.

3-маселе.

Эгер банктан 50000 АКШ доллары суммасында алынган кредит жылдык татаал пайыз ставкасы 5,2% менен ар кварталда төлөө шарты менен алынган болсо, банкка 3 жылда канча АКШ доллары төлөнөт?

A=50000, r=5,2%, n=3, $k{\cdot}n=4\times3=12$

Демек, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ $50000=C\times(1+\frac{5,2}{400})^{12}$

C=42820,99 Банкка 3 жылда $42821 төлөнөт.

Курулуш үйлөрү, имараттар, техникалык-ыкмалар, инвентар жана жабдуулар, компьютерлер ж.б.у.с. лар пайдалуу кызмат мөөнөтү өткөн сайын эскирет. Эскирүү алардын сапатын ошол ыкмаларга таандык болгон касиеттерин акырын жоготот.

Амортизация колдонулган ыкмалар маанисин алардын эскиришине байланыштуу товар баасына, доор каражаттарына өткөрүү, колдонулган ыкмалардын ордун толтуруу максатында акча фондун жамгаруу жараяны ишке ашырылат.

Амортизация маанисин эсептөө үчүн төмөнкү формуладан пайдаланылат:

$$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n},$$

бул жерде A − n доор бөлүмүнөн кийин болгон амортизация мааниси, C − алгачкы баасы, r − ар жылына белгиленген амортизация нормасы, n − доор бөлүмдөрү саны (мисалы, жылдар).

4−маселе. Курулуш ыкмасы 2400 фунт стерлинг баасында сатып алынган. Эгер амортизация нормасы 15% деп белгиленген болсо, анын 6 жылдан кийинки маанисин тапкыла.

$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n}$, бул жерде C=2400, r=15, n=6.

Демек,

$A=2400\times(1-0,15)^{6}$, $A=2400\times(0,85)^{6}$.

Амортизация мааниси колдонулган 905,16 фунт стерлинг экендигин табалы.

Демек, ыкманын 6 жылдан кийинки мааниси £2400 − £905,16 = £1494,84 га тең.

Колдонууга (мисалы мебел, электрон-техника кызматы, компьютер, автомашина жана ж.б.) товарларды же үй-жай (ипотека) сатып алуу үчүн түрдүү кредиттер расмийлештирилет. Адатта, мындай кредиттер кыска мөөнөттөргө берилет жана өзгөрбөс же өзгөрүүчү үстөмө пайыз белгиленет.

Төмөндө биз формулалардан пайдаланбастан тез түрдө эсеп-китеп кылуу үчүн кредит төлөмү жадыбалын келтиребиз (1000 дик бирдигинде):

Айлар	Жылдык үстөмө пайыз						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-мисал. Жаран 9200 евро кредит алды. Ага 12% жылдык пайыз төлөмү жана 3,5 жылдык төлөө мөөнөтү белгиленген. Бир айга канча төлөнүшү керек? Бардыгы болуп канча төлөнүшү керек?

Төлөө мөөнөтү 42 ай болгондуктан жадыбалдан ар бир 1000 еврога €29,2756 евро төлөнүшү керектигин аныктайбыз.

Демек, 9200 евро үчүн ар айда €9200 = €29,2756×9,2

= €269,33552 ≈ €269,340 төлөнүшү керек.

Бардыгы болуп = €269,40×42 = €11314,80 төлөнүшү керек.

Көнүгүүлөр

12. 10000 АКШ доллары суммасында карыз 10 жылга жылдык пайыз ставкасы 5,75% боюнча алынды. Карыз төлөөлөрүн тең бөлүмтөрдө ар жарым жылда кандай суммада төлөнүшү керек?

13. 15000 евро суммасындагы карыз 36 айга жылдык пайыз ставкасы 4,5% боюнча алынды. Карыз төлөөлөрүн тең бөлүктөрдө ар кварталда кандай суммада төлөө керек?

14. Бир киши банктан 8000 фунт стерлинг 3,5 жылга ай сайын 230 фунт стерлинг төлөө шарты менен кредит алды. Ага кандай жылдык пайыз ставкасы белгиленген эле?

15. 6800 АКШ доллары суммасындагы карыз 2,5 жылга жылдык пайыз ставкасы 8% боюнча алынды. Карыз төлөөлөрүн тең бөлүктөрдө айма-ай төлөө үчүн ай сайын кандай суммада төлөө керек?

16. Эгер a) 950 евро суммасындагы карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 5,7% менен 2 - жылдын аягында;

b) 4180 фунт стерлинг суммасындагы карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 5,75% менен 3 - жылдын аягында;

c) 237000 Япония иенасы суммасындагы карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 7,3% менен 4 - жылдын аягында эсептелсе, жалпы татаал пайыз төлөмүн тапкыла.

17. Макс 8500 АКШ доллары суммасындагы банк депозитине акча койду. Жылдык татаал пайыз ставкасы 6% белгилеп, банктан Макстын эсебине ар кварталда акча өткөрүлдү. 1 жылдан кийин Макстын банктагы эсебинде канча акча болот?

18. Мария 24000 фунт стерлинг жылдык татаал пайыз ставкасы 5% боюнча банкка койду. Ай сайын банктан анын эсебине акча өткөрүлдү. 3 айдан кийин Мариянын эсебинде канча акча болот?

19. Кредитор 45000 АКШ доллары суммасында жылдык татаал пайыз ставкасы 8,5% боюнча карыз берди. Эгер төлөөлөр

a) жөнөкөй пайыздар; b) ар жарым жылга татаал пайыздар;

c) ар кварталда татаал пайыздар боюнча ишке ашырылса, 3 жылдан кийин алынган пайдаларды салыштыргыла.

20. Офис үчүн 2500 еврого мебель сатып алынды. Мындай ыкмалардын амортизация нормасы 15% ке барабар экендиги белгилүү. Төмөнкү жадыбалды дептериңерге көчүргүлө жана толтургула.

Жылдар	Амортизация	Баасы
0		€2500
1	15%·€2500 = €375	
2		
3		

21. Жаран мебель сатып алуу үчүн 1200 АКШ доллары суммасында кредит алды. Жылдык пайыз ставкасы 8%, төлөө мөөнөтү 5 жыл болсо, ал ай сайын канча төлөө керек? Бардыгы болуп канча каражат төлөнөт?
Кредит төлөө жадыбалынан пайдалангыла.

22. Жаран үй-жайын ондоо үчүн 14000 АКШ доллары суммасында кредит алды. Жылдык пайыз ставкасы 11%, төлөө мөөнөтү 4 жыл болсо, ал ай сайын канча төлөө керек? Бардыгы болуп канча каражат төлөнөт?
Кредит төлөө жадыбалынан пайдалангыла.

Текшерүү тапшырмалары

1. Банк тарабынан ар жылына пайыз ставкасы 14% деп белгиленген. Ишкер банктан алган карызын жана пайыз төлөмүнө кошумча 16 000 000 сумду 5 жыл ичинде төлөдү жана карызынан кутулду. Ишкер канча суммада карыз алган?
2. Жаран банкка 20000000 сумду аманатка коюп, 15 айда 900000 сум пайда алды. Эгер төлөө жылма-жыл ишке ашырылган болсо, жылдык пайыз ставкасы канчага барабар?
3. Эгер 20000000 сум карыз жылдык татаал пайыз ставкасы 6% менен 1 жылда кварталдарга бөлүп төлөө шарты менен алынган болсо, кредитор ала турган пайда канча болот?
4. Жон үй-жай сатып алуу үчүн 5 жылга 25000 АКШ доллары суммасында кредит алган. Жылдык татаал пайыз ставкасы 8% болсо жана төлөөлөр ай сайын ишке ашырыла турган болсо ал ай сайын канча акча төлөө керек? Кредитор канча пайда алат?
5. 45000 АКШ долларына түзмөк сатып алынды жана 2 жыл 3 айдан кийин эскирүү натыйжасында анын баасы 28500 АКШ долларына барабар болуп калды. Түзмөктүн жылдык амортизация нормасын тапкыла.

III БӨЛҮМ

ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР

25-28 ЖӨНӨКӨЙ РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

Эгер бир теңдеменин бардык чыгарылыштары экинчи теңдеменин дагы чыгарылыштары болсо, анда экинчи теңдеме биринчисинин *натыйжасы* деп аталат.

Эки теңдеменин чыгарылыштарынын көптүктөрү дал келсе, мындай теңдемелер *тең күчтүү* деп аталат.

1-мисал. Теңдемелер тең күчтүүбү?

1) $x + 2 = 3$ жана $x + 5 = 6$; 2) $\frac{x^2 + x}{x-1} = 0$ жана $\frac{x+1}{x-1} = 0$.

△1) Эки теңдеме бирдей тамырга ээ: x=1. Башка тамырлар жок болгону үчүн бул теңдемелер тең күчтүү.

2) Биринчи теңдеме 0 тамырга ээ, экинчиси болсо мындай тамырга ээ эмес. Демек, берилген теңдемелер тең күчтүү эмес. ▲

x өзгөрүүчү эки $P(x)$ жана$Q(x)$ көп мүчө берилген болсун.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ көрүнүшүндөгү туюнтма *рационалдыкдык туюнтма* деп аталат.

Эгер $A(x)$ жана$B(x)$ – рационалдык туюнтмалар болсо,

$$A(x)=B(x)$$

көрүнүшүндөгү теңдеме *рационалдык теңдеме* деп аталат.

Алгачкы эң жөнөкөй көрүнүшүндөгү

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \qquad (1)$$

рационалдык теңдемени көрөлү .

Маалым болгон, $\frac{m}{n}$ бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн анын алымы нөлгө барабар болушу, бөлүмү болсо нөлгө барабар болбостугу (0 гө бөлүү мүмкүн эмес!) зарыл жана жетиштүү.

Демек, (1) теңдемени чыгаруу үчүн $Q(x)\neq 0$ жана$P(x)=0$ шарттарын бир убакта канааттандыра турган x белгисиздин бардык маанилерин табуу зарыл жана жетиштүү.

Анда кыска көрүнүшү төмөнкүчө жазылат :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

2-мисал. Теңдемени чыгаргыла:

1) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\dfrac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

1) $x^2-2x+1=0$ теңдеме жалгыз $x=1$ тамырга ээ. $x=1$ болгондо бөлүмү нөлдөн айырмаланат. Демек, берилген теңдеме жалгыз $x=1$ чыгарылышка ээ .

2) $x^2-2x+3=0$ квадрат теңдеме чыгарылышка ээ эмес, себеби $Д=1-3=-2<0$. Демек, берилген теңдеме дагы тамырларга ээ эмес.

3) $2x^2-5x+3=0$ теңдеме квадрат теңдеме.

$Д=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$, демек,бул теңдеме эки тамырга ээ:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}; \quad x_1=\frac{5-1}{4}=1; \quad x_2=\frac{5+1}{4}=1,5.$$

Бирок 1,5 саны $\dfrac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ туюнтманын бөлүмүн нөлгө айландырат, 1 саны болсо – жок. Демек, берилген теңдеме жалгыз $x=1$ тамырга ээ.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ теңдеме 1 жана–2 экөө тамырга ээ. Бирок 1 саны $(x-1)$ бөлүмүн нөлгө айландырат, –2 саны болсо – жок. Демек, берилген теңдеме жалгыз $x=-2$ тамырга ээ.

Эгер $A(x)$ же $B(x)$ туюнтмаларынын бирөөсү бир нече рационалдык туюнтмалардын жыйындысы көрүнүшүндө болсо, $A(x)=B(x)$ рационалдык теңдемени чыгаруу эрежеси төмөнкүчө болушу мүмкүн :

1-кадам. Теңдемеге кирген бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү табылат;

2-кадам. Теңдеменин эки бөлүгүн жалпы бөлүмүнө көбөйтүрүлөт;

3-кадам. Пайда болгон теңдеменин тамырлары табылат;

4-кадам. Табылган тамырлардан жалпы бөлүмүндөгү нөлгө айлантырылгандары алып ташталат .

3-мисал. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$ теңдемени чыгаргыла.

△Теңдеменин эки бөлүгүн $2x(2–x)$ жалпы бөлүмүнө көбөйтүрөбүз .

Пайда болгон $4x+x(2–x) = 8$ теңдемени жөнөкөйлөтүп, квадрат теңдемеге ээ болобуз: $x^2–6x+8=0;$

$$Д=9–8=1>0,$$

Демек, бул теңдеме эки тамырга ээ: $x_1=2;$ $x_2=4.$

Текшерүү.

Эгер $x=2$ болсо, бөлүмү $x(2–x) = 2(2–2) = 0$. Демек $x=2$ берилген теңдеменин тамыры эмес.

Эгер $x=4$ болсо, бөлүмү $x(2–x) = 4(2–4) \neq 0$. Демек $x=4$ берилген теңдеменин тамыры. *Жообу:* 4▲

Эгер $A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ көрүнүшүндө болсо, $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$ көрүнүшүндөгү рационалдык теңдемени чыгаруу үчүн $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорциянын негизги касиетинен пайдаланабыз:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\,.$$

Мында төмөнкү алгоритм боюнча иш жүргүзүлөт:

1-кадам. $f(x)q(x)=p(x)g(x)$ теңдеме тамырлары табылат;

2-кадам. Табылган тамырлардан $q(x), g(x)$ бөлүмдөрүн нөлгө айландыра тургандары алып ташталат.

4-мисал. $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$ теңдемени чыгаргыла .

△$(x–2)(x–4) = (x+2)(x+3);$ $x^2–4x–2x+8 = x^2+3x+2x+6;$

$–6x+8–5x–6 = 0;$ $–11x = –2;$ $x=\frac{2}{11}.$

Эгер $x=\frac{2}{11}$ болсо, $x+2 = \frac{2}{11}+2 \neq 0;$ $x–4 = \frac{2}{11}–4 \neq 0.$

Жообу: $\frac{2}{11}$.▲

Кээ бир абалдарда берилген теңдемеде өзгөрүүчү чоңдуктарга алмаштырсак, жөнөкөй теңдемеге келүүсү мүмкүн.

5-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-36=0$; 2) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2-2x+2}=1.$

△1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=t$ белгилеп алабыз. Анда $t\geqslant 0$ жана теңдеме $t^2+5t-36=0$ көрүнүшүндө болот. Акыркы теңдеме $t=-9$ жана $t=4$ тамырларга ээ, булардан экинчиси оң сан.

Демек, $\frac{2x}{x+1}=2$ же $\frac{2x}{x+1}=-2$.

$\frac{2x}{x+1}=2$ теңдеме чыгарылышка ээ эмес, $\frac{2x}{x+1}=-2$ теңдеме болсо жалгыз $x=-0,5$ чыгарылышка ээ.

Жообу: $x=-0,5$. ▲

2) $x=0$ саны теңдемени канаатандырат. $x\neq 0$ болсун. Теңдеменин алымын жана бөлүмүн x ке бөлсөк:

$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$ теңдемеси пайда болот.

$z=x+\frac{2}{x}-2$ алмаштырууну аткарсак, берилген теңдеме

$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1$ көрүнүшүндө болот.

Акыркы теңдемени чыгарабыз:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}$$

Эми x ти табабыз.

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+10=0.$$

$5x^2-9x+10=0$ квадрат тендеменин дискриминанты терс болгондуктан, ал чыныгы чыгарылышына ээ эмес.

Жообу: $x=0$. ▲

Рационалдык теңдемелер системалары

Рационалдык теңдемелерден түзүлгөн системаларды чыгаруу бизге белгилүү болгон кошуу, ордуна коюу жана б.методторуна таянат. Анда катышкан рационалдык туюнтмалардын бөлүмү нөлгө тең болбостугун эскертебиз.

6-мисал. Системаны чыгаруу:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy - 3\dfrac{x}{y} = 15, \\ xy + \dfrac{x}{y} = 15. \end{cases}$

1) Биринчи теңдемеде $\dfrac{x}{y} = t$ алмаштырууну аткарсак, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{t}$ ($t \neq 0$) болот.

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2}, \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{ демек } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Мындан же $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ же $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$ системаларын пайда кылабыз.

Бул системаларды чыгарабыз: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ же $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

Биринчи система (3, 2), (–3, –2) чыгарылыштарга ээ, экинчи система болсо чыгарылышка ээ эмес. *Жообу*: (3; 2), (–3; –2).

2) $a = xy,\ b = \dfrac{x}{y}$ белгилөө киргизели.

$$\begin{cases} 2a - 3b = 15, \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 12, \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y \cdot 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Жообу: (6; 2), (–6; –2).

Суроо жана тапшырмалар

1. Рационалдык теңдемеге мүнөздөмө бергиле.
2. Тең күчтүү теңдемелерге мүнөздөмө бергиле.
3. Тең күчтүү теңдемелер системасына мисал келтиргиле.

Көнүгүүлөр

1. Теңдемелерди чыгаргыла (**1–2**):

a) $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$; c) $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$;

д) $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$; e) $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$;

g) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$; i) $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$.

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$; b) $\frac{8x-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$

c) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; д) $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$;

e) $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$; f) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Тең күчтүү теңдемелерди көрсөткүлө:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

д) $10x=8$; e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

4. Теңдемелер системасын чыгаргыла (4–7):

a) $\begin{cases}\frac{x}{2y+3}=3,\\ \frac{y}{2y+3}=-\frac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2,\\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{25}{y}=7,\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\frac{5x}{8y}=\frac{8y}{5x},\\ 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\frac{7}{y}=11,\\ 7x+\frac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 4x=\dfrac{25}{y}+15, \\ 4y=\dfrac{25}{x}+15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7}=-\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2-11y+7=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y}=\dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy=-16. \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8)=0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2}=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{y^2}, \\ xy=-8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5}=5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x-5y=15. \end{cases}$.

8. Клубдун залында 320 орун бар, катарлар боюнча бирдей бөлүнгөн. Ар бир катардагы орундар санын 4 кө ашырып, дагы бир катар кошулгандан кийин залда 420 орун болду. Залдагы катарлар саны канча болду?

9. 108 экзамен тапшыруучу диктант жазышты. Аларга 480 барак кагаз таркатылды, ар бир кыз ар бир уул балдарга караганда бир барак ашыкча кагаз алды. Бардык кыздар болсо уул балдар канча барак кагаз алган болушса, ошончо барак кагаз алышты. Канча кыз, канча уул балдар болгон?

29-32 ЖӨНӨКӨЙ ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

Өзгөрүүчүсү тамыр астында катышкан теңдеме *иррационалдык теңдеме* дейилет.

Иррационалдык теңдемелердин кээ бир түрлөрүн чыгаруу методдорун келтирели.

I $$\sqrt{f(x)}=g(x) \qquad (1)$$

көрүнүшүндөгү жөнөкөй иррационалдык теңдемени көрөлү.

$f(x)$, $g(x)$ туюнтмалар терс эмес болгондо бул теңдеменин эки бөлүгүн да квадратка көтөрсөк, тең күчтүү теңдемеге келебиз.

$f(x)=g^2(x)\geqslant 0$ болгону үчүн $f(x)$ туюнтма терс эмес болот.

Демек, (1) теңдемени чыгаруу

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

эреже боюнча ишке ашырылат. Так ошондой $\sqrt[2n]{f(x)}=h(x)$ көрүнүшүндөгү теңдеме $\begin{cases} f(x)=h^{2n}(x) \\ h(x)\geq 0 \end{cases}$ системага тең күчтүү.

1-мисал. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ теңдемени чыгаргыла.

△ Теңдеменин эки бөлүгүн тең квадратка көтөрөбүз жана натыйжада $2x-x^2=x^2-4x$ же $2x(x-3)=0$ теңдемеге ээ болобуз. Мындан $x_1=0$, $x_2=3$ тамырлары пайда болот. $x>2$ болгону үчүн $x=3$ берилген теңдеменин чыгарылышы.

II $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ *көрүнүшүндөгү теңдеме.*

Эки туюнтманын көбөйтүндүсү нөлгө барабар болушу үчүн, алардан жок дегенде бирөөсү нөлгө барабар болушу керек.

Демек, $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ болушу үчүн же $g(x)=0$ барабардык же $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$ система туура болушу керек.

Ал кыскача $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ жазылат.

2-мисал. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$ теңдемени чыгаргыла.

$$(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\geq 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\geq 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Жообу: –4 жана2.

3-мисал. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ теңдемени чыгаргыла.

Берилген теңдеме $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$ көрүнүшкө келтирилет. $\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\geq 0 \end{cases}$ система чыгарылышка ээ болбогону үчүн $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ теңдемени кароо жетиштүү. Бул теңдеменин эки бөлүгүн тең квадратка көтөрсөк, ага тең күчтүү болгон $x^2-5x+4=4$ теңдеме пайда болот.

Жообу: 0 жана 5.

III $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ *көрүнүшүндөгү теңдеме.*

Мындай теңдемелерди чыгарууда тамыр даражасы n санынын жуптактыгына каралат жана берилген теңдемени тең күчтүү теңдемеге алып келинет.

Эгер *n - так болсо:* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Маселен, $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ теңдеме $f(x)=g(x)$ теңдемеге тең күчтүү.

4-мисал. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$ теңдемени чыгаргыла.

$$\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Жообу: 1 жана –7.

Эгер *n жуп*, демек $n=2k$ болсо, берилген теңдеме ушул системалардын ар бирине тең күчтүү:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geq 0\end{cases}\quad \text{же}\quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$$

Мында жөнөкөй болгону алынат.

5-мисал. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$ теңдемени чыгаргыла.

$$\triangle\ \sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2=x,\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Жообу: $x=2$. ▲

IV *Өзгөрүүчүлөрдү алмаштыруу.*

6-мисал. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$ теңдемени чыгаргыла.

△ $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ алмаштыруу киргизебиз. Анда

$$\begin{cases}u+\dfrac{3}{u}=4,\\ u\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=1,\\ u=3,\end{array}\right.\\ u\geq 0.\end{cases}$$

Эми берилген теңдеменин тамырларын табалы.

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1,\\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=1,2.\end{array}\right.$$

Жообу: $x=2$ жана $x=1,2$. ▲

7-мисал. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$ теңдемени чыгаргыла.

△ $z=\sqrt{x^2+3x}$ алмаштыруу киргизебиз:

$$\begin{cases}z^2+z=6,\\ z\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}z=-3,\\ z=2,\end{array}\right.\\ z\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow z=2.$$

Эми берилген теңдеменин тамырларын табалы.

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Жообу: $x=-4$ жана $x=1$. ▲

Иррационалдык теңдемелер системасы

Иррационалдык теңдемелерден түзүлгөн системаларды чыгаруу бизге белгилүү болгон кошуу, ордуна коюу жана.б. методторго таянат. Албетте мында катышкан иррационалдык туюнтмалардын бар экенин эсепке алуу керектигин эскертебиз.

8-мисал. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

△ $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Бул системадан (4; 9) жана (9; 4) чыгарылыштарын табалы. ▲

9-мисал. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

△ $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ деп белгилейбиз жана кыска көбөйтүрүү формуласыдан пайдалансак:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

системага ээ болобуз. Бул системанын чыгарылышы $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ болот. Мындан (1; 8) жана(8; 1) чыгарылыштарын табабыз. ▲

10-маселе. Тегиздикте $A(3; 4)$ жана $B(-2; 5)$ чекиттерден тең аралыкта жаткан $C(x; 0)$ чекитин тапкыла.

△ $AC=BC$ эки чекит арасындагы аралык формуласынан $\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}$ $=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}$ иррационалдык теңдемени пайда кылабыз.

Бул теңдемени тең күчтүү теңдеме касиеттеринен жана кыска көбөйтүрүү формуласыдан пайдаланып чыгарсак, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ же $-10x=4$ теңдемеси келип чыгат. Акыркы теңдеменин тамыры $x=-0{,}4$ болот. Демек, изделген чекит $C(-0{,}4;\ 0)$ экен.

11-маселе. Тегиздикте $A(-1;\ 2)$ жана $B(3;\ -4)$ чекиттерден тең аралыкта жайлашкан жана $y=3x$ түз сызыкта жаткан чекитти тапкыла.

Шартка ылайык изделген чекиттин ординатасы $y=3x$ болот. Демек, издеп жаткан чекит $C(x;3x)$ координаталуу чекит экен. $AC=BC$ экендигин эки чекит арасындагы аралык формуласына ылайык, $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$ иррационалдык теңдеме келип чыгат . Бул теңдемени чыгарсак, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, же $-28x=20$ теңдемеге келебиз. Акыркы теңдеменин тамыры $x=-\frac{5}{7}$ болот. Демек, изделген чекит $C(-5/7;\ -15/7)$ экен. *Жообу*: $C(-5/7;\ -15/7)$.

Суроо жана тапшырмалар

1. Иррационалдык теңдемеге мүнөздөмө бергиле жана мисал келтиргиле.
2. Тең күчтүү иррационалдык теңдемеге мүнөздөмө бергиле.
3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\\ \sqrt{xy}=b\end{cases}$ жана $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a,\\ x+y=b\end{cases}$ көрүнүшүндөгү теңдемелер системасы кандай чыгарылат?

Көнүгүүлөр

Теңдемени чыгаргыла (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Теңдемелер системасын чыгаргыла (**20–23**):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15. \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

24. Тегиздикте $A(5;\,7)$ жана $B(-3;\,4)$ чекиттерден бирдей аралыкта жаткан $C(x;\,0)$ чекитти тапкыла.

25. Тегиздикте $A(5;\,9)$ жана $B(-6;\,7)$ чекиттерден бирдей аралыкта жаткан $C(x;\,0)$ чекитти тапкыла.

33–36 ЖӨНӨКӨЙ КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

Көрсөткүчтүү теңдемелер

Өзгөрүүчүсү даражада катышкан теңдемеге *көрсөткүчтүү теңдеме* дейилет.

Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгарууда төмөнкү теңдештиктерден пайдаланылат:

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $(a^x)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Көрсөткүчтүү теңдемелердин кээ бир түрлөрүн чыгаруу методдорун келтирели.

I *Бирдей негизге келтирүү*

Бул методдо теңдеме $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ көрүнүшүндөгү теңдемеге алып келинет. Мындан $f(x)=g(x)$ болот.

1-мисал. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ теңдемени чыгаргыла.

△ $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ экенин эсепке алып, берилген теңдемени $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ көрүнүшүндө жазабыз.

1-теңдештикке көрө $3x-7=-7x+3,\quad x=1.$

Жообу: 1.▲

2-мисал. $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ теңдемени чыгаргыла.

△ Теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазабыз:

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}\qquad 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-теңдештикке көрө $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ же $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Акыркы теңдеме $4x-19=2,5x$

теңдемеге тең күчтүү. Мындан $x=\frac{38}{3}$.

Жообу: $x=\frac{38}{3}$.▲

II *Жаңы өзгөрүүчүнү киритүү.*

3-мисал. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ теңдемени чыгаргыла.

△ 2-теңдештикти колдоп, теңдемени $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0$ сыяктуу жазып алабыз.

$5^x=t>0$ деп, жаңы өзгөрүүчү киргизебиз. Анда $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ теңдемеси келип чыгат U $t_1=-50$, $t_2=25$ тамырларга ээ. Бирок $t_1=-50$ тамыр $t>0$ шартты канааттандырбайт. Демек, $5^x=25$ жана $x=2$.

Жообу: $x=2$.▲

4-мисал. $9^x+6^x=2\cdot 4^x$ теңдемени чыгаргыла.

△ Теңдеменин эки бөлүгүн да $4^x\neq 0$ гө бөлөбүз:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2 \text{ же } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ деп, акыркы теңдемени $t^2 + t - 2 = 0$ көрүнүшүнө келтиребиз.
Бул теңдеменин чыгарылыштарын табалы: $t_1=-2$, $t_2=1$.

t_1 дин мааниси үчүн $t>0$ шарт аткарбайт. Демек,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Жообу: $x=0$.

5-мисал. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ теңдемени чыгаргыла.

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ болгондуктан $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Теңдемени $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ көрүнүшүндө жазабыз.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ айталы. Мындан $\frac{1}{t} + t = 4$, демек $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Акыркы теңдеме $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ тамырларга ээ.

1-абал. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$, $\quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}$, $\quad \frac{x}{2} = 1$, $\quad x = 2$.

2-абал. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}$, $\quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}$,

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}$, $\quad -\frac{x}{2} = 1$, $\quad x = -2$. *Жообу:* $x=-2$ жана $x=2$.

III *Жалпы көбөйтүрүүчүнү кашаалардан сыртка чыгаруу.*

6-мисал. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ теңдемени чыгаргыла.

Сол жактан 6^x ны, оң жактан болсо 2^x ни кашаадан сыртка чыгарабыз. Натыйжада $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ же $6^x=2^x$ теңдемеге келебиз. Бул теңдеменин эки тарабын $2^x \neq 0$ гө бөлсөк, $3^x=1$, демек $x=0$ дү пайда кылабыз.

Жообу: $x=0$.

Эң жөнөкөй көрсөткүчтүү теңдемелер системасы

7-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 2^{5x-y} = 8. \end{cases}$

Даражанын касиеттерине көрө теңдемелер системасы төмөнкү теңдемелер системасына тең күчтүү: $\begin{cases} 3^{x+y}=3^3, \\ 2^{5x-y}=2^3. \end{cases}$ Мындан $\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$ системага келебиз. Анын чечимдери x=1, y=2 экени анык. *Жообу:* x=1, y=2.

8-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=9, \\ 2^{7x+3y}=8. \end{cases}$

Даражанын касиеттерине көрө теңдемелер системасы төмөнкү көрүнүшүндө болот: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=3^2, \\ 2^{7x+3y}=2^3. \end{cases}$

Акыркы теңдемелер системасы болсо $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3 \end{cases}$ сызыктуу системага тең күчтүү.

Сызыктуу теңдемелер системасынын 2-теңдемесин (–2) га көбөйтүрүп 1-теңдемеге кошсок, $-9x=-4$ теңдемени пайда кылабыз. Мындан $x=\frac{4}{9}$ экени табылат. Аны 2-теңдемеге кошсок, $\frac{28}{9}+3y=3$ же $3y=3-\frac{28}{9}$, же $3y=-\frac{1}{9}$, же $y=-\frac{1}{27}$ ни табалы. *Жообу:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$.

9-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 4^x+5^y=9, \\ 4^x-5^y=-1. \end{cases}$

$4^x=u$, $5^x=v$ белгилөө киргизсек, берилген теңдемелер системасы мындайча көрүнүшүндө болот: $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$ Анык, бул теңдемелер системасынын чыгарылышы u=4, v=5. Анда 4^x=4 жана 5^y=5 теңдемелерин келип чыгат. Бул жерден x=1, y=1 чыгарылыштарын табалы. *Жообу:* x=1, y=1.

Көнүгүүлөр

Теңдемени чыгаргыла (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$; d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^x=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^x=-6$; b) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$; c) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^x=31$; d) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^x=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$; c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^x+3^x-6=84$; b) $25^x+5^x-30=0$;
c) $5\cdot4^x+2^x-6=0$; d) $9^x+3^x-12=0$.

30. a) $9\cdot25^x-7\cdot15^x-16\cdot9^x=0$; b) $7\cdot16^x+9\cdot12^x-16\cdot9^x=0$.

31. a) $4^x+7\cdot6^x-8\cdot9^x=0$; b) $9\cdot16^x+7\cdot12^x-16\cdot9^x=0$.

32. a) $(0{,}125)^{x-1}=\sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5}\cdot(0{,}8)^{x-1}=(1{,}25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\frac{4}{16^x}$; b) $4^x-10\cdot2^{x-1}=24$ p.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot2^{3(x-1)}-3\cdot2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^x+18^x=2\cdot27^x$.

36. Кардар 100 000 000 сумду банкка жылдык 22% пайыз ставкасы менен белгилүү мөөнөткө койду. Мөөнөт акырында ал 221 533 456 сум алды. Акча канча жылга коюлган экенин тапкыла.

37. Ишкер 10 000 000 сумду банкка жылдык 21% пайыз ставкасы менен белгилүү мөөнөткө койду. Мөөнөт акырында ал 17 715 610 сум алды. Акча канча жылга коюлган экенин тапкыла.

38. Тургундар саны жылына 4% ке ашса, канча жылдан кийин алардын саны 3 эсеге ашат?

39. Тургундар саны жылына 2% азайса, канча жылдан кийин ал 10% ке азаят?

40. Теңдемелер системасын чыгаргыла (**40–43**):

a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\9^{3x}\cdot3^{y}=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^x+2^y=6,\\2^x-2^y=2.\end{cases}$

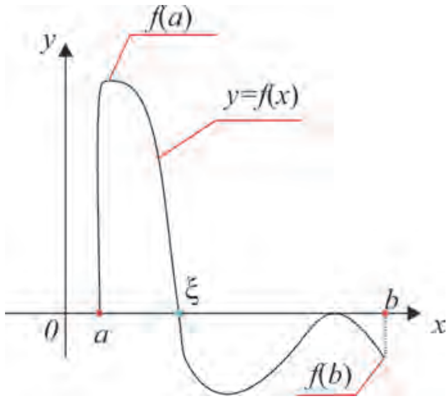
42. a) $\begin{cases}5^{3x-y}=25\\2^{x^2+xy+y^2}=8\end{cases}$; b) $\begin{cases}5^{x+2y}=125\\2^{x^2+3xy-y^2}=8\end{cases}$; c) $\begin{cases}11^x+7^y=18\\11^x-7^y=4\end{cases}$.

43. a) $\begin{cases}5^{x+y}=25\\2^{x^2-3xy+2y^2}=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}5^{3x-y}=25\\2^{x^2+xy+y^2}=8\end{cases}$; c) $\begin{cases}6^x+3^y=39\\6^x-3^y=108\end{cases}$.

37-38 ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧАМАЛАП ЧЫГАРУУ

Эгер $f(x)$ көп мүчөлүү $[a, b]$ кесинди учтарында түрдүү белгилүү маанилерин кабыл кылса, демек $f(a)\cdot f(b)<0$ болсо, бул кесинди ичинде $f(x)=0$ теңдеменин эң keминде бир чыгарылышы бар. Демек, мындай $\xi\in[a, b]$ ("кси" деп окулат) $f(\xi)=0$.

Бул аныктама төмөнкү чиймеде көрсөтүлгөн.



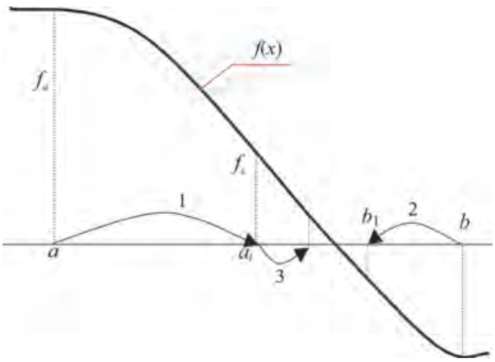
Теңдеменин бир тамырын өз ичине алган $[a, b]$ кесиндини көрөлү.

Кесиндини тең экиге бөлүү методу $[a, b]$ кесиндини жасай турган кесиндинин узундугу берилген ε тактыктын кичүү болгонуна чейин тең экиге бөлүүдөн турат.

Аны үчүн:

1) $x=a$ да $f(x)$ туюнтманын $f_a=f(a)$ мааниси эсептелет.
2) кесинди тең экиге бөлүнөт, демек $x=(b–a)/2$ эсептелет;
3) $f(x)$ туюнтманын $x=(b–a)/2$ деги f_x мааниси эсептелет.
4) $f_a\cdot f_x>0$ шарты текшерилет;
5) эгер бул шарт аткарылса, жаңы кесиндинин сол чеги катарында алдыңкы кесиндинин ортосу алынат, демек $a=x$, $f_a=f_x$ деп алынат (кесиндинин сол чеги ортого өтөт);
6) эгер бул шарт аткарылбаса, жаңы кесиндинин оң чеги ортосуна өтөт, демек $b=x$ деп алынат;
7) кесиндини кезектеги бөлүүдөн кийин $b–a<\varepsilon$ шарт аткарылышы текшерилет.
8) эгер бул шарт аткарылса, эсептөөлөр аякталат. Мында колдонмо чыгаруулар сыпатында x тин акыркы эсептелген мааниси алынат. Эгер бул шарт аткарылбаса, алгоритмдин 2 - кадамына кайтып, эсептөөлөр улантырылат.

Кесиндини тең экиге бөлүү методунун чиймеси төмөндө көрсөтүлгөн:



Чыныгы тамыр жаткан аралыкты табуу

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ теңдеме тамыры жаткан аралыкты табуу үчүн $A=max\{a,b,c\}$ жана $B=max\{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}$ эсептелет.

Берилген теңдеменин тамыры үчүн $\frac{1}{1+B}<|x|<1+A$ барабарсыздык орундуу болот. Демек, берилген теңдеменин кемиде 1 тамыры $(-1-A;\ 1+A)$ аралыкта жайгашкан экен. Бул тамырды жакындаштырып табуу үчүн $-1-A<\partial_1<\partial_2<1+A$ жана $f(\partial_1)\cdot f(\partial_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ барабарсыздыктарын канааттандыруучу ∂_1 жана ∂_2 бүтүн сандар табылат.

1-мисал. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ теңдеме тамыры жаткан аралыкты тапкыла.

△ Теңдеменин ар эки бөлүгүн 2 ге бөлсөк, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$ теңдеме пайда болот. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ болгону үчүн, $A=max\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\}=2,5$.

Демек, $x\in(-2,5;2,5)$ аралыгында теңдеменин кемиде 1 тамыры бар. Теңдеме (0;2,5) аралыкта тамырга ээ эмес, себеби $x_0\in(0;\ 2,5)$ болсо, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ болот. Демек, теңдеме (–2,5; 0) аралыкта тамырга ээ экен. Бул аралыкты кичирейтүү үчүн бүтүн сандарды алабыз, демек $\partial_1=-2$; $\partial_2=-1$; $\partial_3=0$. Эми $\partial_1=-2$; $\partial_2=-1$; $\partial_3=0$ сандарды теңдемеге коюп жана төмөнкү шарттарды текшерип

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0,5=-6,5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1,5-2,5+0,5=-1,5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0,5>0$ теңдеменин тамыры (–1;0) аралыкта экенин табалы. ▲

Теңдеменин тамырын берилген ε тактыктан аралыкты тең 2 ге бөлүп табуу методу

Жогорудан белгилүү, эгер $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ болсо, теңдеменин тамыры $(\alpha;\ \beta)$ аралыкта болот. Эми $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ болсун. Эгер $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$ болсо, $x=\gamma$ сан – теңдеменин ε аныктыктагы тамыры. Эгер $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ болсо, тамырды $(\gamma;\ \beta)$ аралыгынан изделет; эгер $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$ болсо, тамырды $(\alpha;\ \gamma)$ аралыгынан изделет. Бул процесс тамырды керектүү аныктыкта табууга чейин улантылат.

2-мисал. $x^3+1{,}5x^2+2{,}5x+0{,}5=0$ теңдеменин тамырын $\varepsilon=0{,}1$ аныктыкта тапкыла.

△ Берилген мисалдан белгилүү, тамыр $(-1;\ 0)$ аралыкта жатат, $\gamma=\dfrac{-1+0}{2}=-0{,}5$ жана $(-0{,}5)^3+1{,}5(-0{,}5)^2+2{,}5(-0{,}5)+0{,}5=-0{,}5<0$ экенинен теңдеменин тамыры $(-0{,}5;\ 0)$ аралыкта экен.

$\gamma=\dfrac{-0{,}5+0}{2}=-0{,}25$ жана $|(-0{,}25)^3+1{,}5(-0{,}25)^2+2{,}5(-0{,}25)+0{,}5|=|-0{,}046|<0{,}1$ болгону үчүн теңдеменин 0,1 чейинки тактыктын чечими $x=-0{,}25$ болот.

▲

Суроо жана тапшырмалар

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$ теңдеменин тамыры жаткан аралык кандай табылат?
2. Теңдеменин тамырын берилген ε тактыктагы аралыкты тең 2 ге бөлүп табуу методун түшүндүргүлө .

Көнүгүүлөр

Теңдеменин тамыры жаткан аралыкты тапкыла (**44−47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Теңдеменин тамырын $\varepsilon=0{,}1$ тактыкта тапкыла (**48−51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

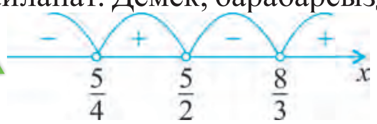
39–41 ЖӨНӨКӨЙ РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР ЖАНА АЛАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

Бир өзгөрмөлүү рационалдык барабарсыздыктар жана аларды чыгаруу методдору

$A(x)$ жана $B(x)$ рационалдык туюнтмалар үчүн $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ байланыштарына x өзгөрмөлүү барабарсыздыктар дейилет. x тин барабарсыздыгын туура сандуу барабарсыздыкка айландыруучу ар кандай мааниси барабарсыздыктын чыгарылышы дейилет.

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

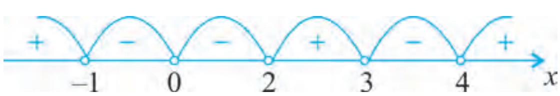
△ Барабарсыздыкты аралыктар методу жардамында чыгарабыз. Бул метод менен 9-класста таанышкансыңар. Кашаалар ичиндеги туюнтмаларды нөлгө барабар $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ сандарды табалы. Ал сандар огун $(-\infty;\frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};+\infty)$ аралыктарга ажыратат. Барабарсыздыкка $(\frac{8}{3};+\infty)$ аралыгына тийиштүү, мисалы, $x=10$ санын койсок, барабарсыздык туура барабарсыздыкка айланат. Демек, барабарсыздык $(\frac{5}{4};\frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};+\infty)$ аралыктарында туура. ▲



2-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\frac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ сандары барабарсыздыктын чыгарылышы эмес. $x\neq 2$, $x\neq 4$ болгондо $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ болот. Ошондуктан барбарсыздыктын ар эки бөлүгүн $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ на көбөйтүрүү натыйжасында берилген барабарсыздыкка тең күчтүү төмөнкү барабарсыздык пайда болот: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

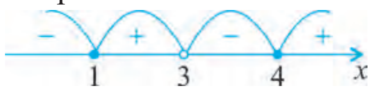
Кашааларды нөлгө теңдеп, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ сандарды табалы. Натыйжада сандар огу төмөнкү аралыктарга ажырайт: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(4;+\infty)$. Бул жерде нөл саны 2 жолу учурайт. Ошондуктан барабарсыздык нөл санынын 2 жанындагы аралыкта бирдей белгилүү. Акыркы аралыктан чегарада жатпаган $x=10$ санын алып барабарсыздыкка койсок, туура сандуу барабарсыздык пайда болот. Демек, барабарсыздыктын чыгарылышы төмөнкү аралыктарда: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$. ▲



3-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3} \geq 0$.

△Анык, $x \neq 3$ *алымын* нөлгө теңдеп, $x^2-5x+4=0$, $x_1=1$, $x_2=4$ сандарды пайда кылабыз. $x_1=1$ жана $x_2=4$ сандар барабарсыздыкты канааттандырат . Демек, сандар огу төмөнкү аралыктарга ажыралат: $(-\infty; 1]$, $[1; 3)$, $(3; 4]$, $[4; +\infty)$.

Акыркы аралыктан чегарада болбогон $x=5$ санын алсак, туура сандуу барабарсыздык пайда болот. Ошону үчүн $[1;3)\cup[4;+\infty)$ аралыктар барабарсыздыктын чыгарылышы.



Жөнөкөй рационалдык барабарсыздыктар системасы

4-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x-8 \leq 1, \\ 4x+3>5. \end{cases}$

△Системанын ар бир барабарсыздыгын жөнөкөйлөтсөк, $\begin{cases} 3x \leq 1+8, \\ 4x>5-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x \leq 9, \\ 4x>2 \end{cases}$ демек, $\begin{cases} x \leq 3, \\ x>0.5 \end{cases}$ барабарсыздыктарын пайда кылабыз. Демек, системанын чыгарылышы $(-\infty;3]$ жана$(0,5; +\infty)$ аралыктардын жалпы бөлүгү, демек $(0,5; 3]$ аралыгынан түзүлгөн экен.▲

5-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла: $\begin{cases} (3-x)(4+x) \geq 0, \\ (2+x)(5-x)<0. \end{cases}$

△Системадагы ар бир барабарсыздыкты чыгарып, 1-барбарсыздыктын чыгарылышын$[-4; 3]$ аралык, 2-барбарсыздыктын чыгарылышы болсо $(-\infty; 2)\cup(5; +\infty)$ аралыктар экенин табалы. Демек, барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы бул чыгарылыштардын жалпы бөлүгү, демек $[-4; 2)$ аралыктан түзүлгөн болот.▲

Суроо жана тапшырмалар

1. Барабарсыздыктын чыгарылышы эмне, мисалдарда түшүндүргүлө.
2. Тең күчтүү барабарсыздыктарга мисалдар келтиргиле.
3. Эң жөнөкөй рационалдык барабарсыздыктар системасын чыгарылышын бир мисалда түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

52. Барбарсыздыкты чыгаргыла (**52−53**):

1) $(x-6)(3-17x)(2x+8) \leq 0$;
2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;
3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$;
4) $\dfrac{2x-5}{2x+1} \geq 0$;

5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\geq 0$; 6) $\dfrac{3x+11}{2-x}<0$;

7) $\dfrac{x-1}{4x-1}<1$; 8) $\dfrac{2x-7}{3-7x}\geq 1$; 9) $\dfrac{x^2-5x+11}{x^2-7}\leq 0$; 10) $\dfrac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8)\leq 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11)>0$;

3) $(3-5x)(2x^2-4x+4)<0$; 4) $\dfrac{x-5}{2x+1}\geq 0$;

5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)\geq 0$; 6) $\dfrac{3x+1}{2-x}<0$;

7) $\dfrac{x+1}{4x-1}<1$; 8) $\dfrac{2x-7}{3-7x}\geq 3$; 9) $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-7}\leq 0$; 10) $\dfrac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

54. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла (**54–55**):

1) $\begin{cases}3x-5\leq 7x,\\ 2x+1>-2x+3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-1}{5}<1,\\ -\dfrac{5x+1}{2}-\dfrac{7}{3}>\dfrac{x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+5\leq 7x,\\ 2x-1>-3x+3;\end{cases}$

55. 1) $\begin{cases}2(x-5)\leq 4(x+3),\\ 2x-1>-5x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{5x}{3}-\dfrac{2x}{4}\geq 3\dfrac{1}{3},\\ 2-\dfrac{5-4x}{2}<\dfrac{6x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}6x+5\leq 7x,\\ 6x-4>3x+3;\end{cases}$

42-43 ЖӨНӨКӨЙ ИРРАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКЛАР

Иррационалдык барабарсыздык дегенде белгисиз тамыр белгиси астында болгон барабарсыздык түшүнүлөт.

Барабарсыздыктардын чыгаруу көптүгү, сандардын чексиз көптүктөрүнөн түзүлгөн болот, ошондуктан бул сандарды алгачкы барабарсыздыкка коюу жолу менен чыгаруу көптүгүн текшерүү, жалпы айтканда мүмкүн эмес. Жообутун тууралыгын камсыздоочу бир гана жол – алгачкы барабарсыздыкты ар кандай алмаштырууда бул барабарсыздыкка тең күчтүү барабарсыздык пайда болушун күзөтүп баруу керек.

Иррационалдык барабарсыздыктарды чыгарууда барбарсыздыктын эки бөлүгүн так даражага көтөрүүдө ар дайым алгачкы барабарсыздыкка тең күчтүү барабарсыздык пайда болушун эсте тутуу керек. Эгер барабарсыздыктын эки бөлүгү жуп даражага көтөрүлүп жаткан болсо, анда алгачкы барабарсыздыкка тең күчтүү жана барабарсыздык белгисине ээ болгон барабарсыздык жалаң алгачкы барабарсыздыктын эки бөлүгү терс эмес болгон абалда гана пайда болот.

Иррационалдык барабарсыздыктын чыгаруулар көптүгүн табуу үчүн, барабарсыздыктын эки бөлүгүн натуралдык даражага көтөрүүгө туура келет. Иррационалдык барбарсыздыкты чыгаруунун негизги методдорунан бири бул тең күчтүү рационалдык барабарсыздыктарга келтирүү методу.

Эң жөнөкөй иррационалдык барабарсыздыктар төмөнкүчө:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ жана $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ жана $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ жана $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ же $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ иррационалдык барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасына тең күчтүү

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) системадагы биринчи барабарсыздык берилген барабарсыздыкты квадратка көтөрүү натыйжасында пайда болгон барабарсыздык, экинчи барабарсыздык тамырдын бар экендиги шартын билдирет, үчүнчү барабарсыздык болсо квадратга көтөрүү мүмкүндүгүн билдирет.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ иррационалдык барабарсыздык чыгаруу үчүн төмөнкү системаны чыгаруу керек:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ иррационалдык барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасына тең күчтүү:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Берилген барабарсыздыктын эки бөлүгү бардык x тер үчүн терс эмес сан болгондугу себептүү аны квадратга көтөрүү мүмкүн. (3) системадагы биринчи барабарсыздык берилген барабарсыздыкты квадратга көтөрүү натыйжасында пайда болгон барабарсыздык. Экинчи барабарсыздык тамырдын бар экендиги шартын билдирет. $A(x) \geqslant 0$ шарты албетте аткарылат.

(1)–(3) эрежелер иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруунун негизги методу эсептелет. Анын маанисин бир нече мисалдарда көрсөтөбүз.

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{10x+5} < -3$.

Бул барабарсыздыктын оң бөлүгү терс, аны менен бирге сол бөлүгү x тер үчүн терс эмес. Ошону үчүн барабарсыздык чыгарууга ээ эмес.

Жообу: Чыгарууга ээ эмес.

2-мисал. Барбарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{3x-9} > -5$.

Барабарсыздыктын оң бөлүгү терс, аны менен бирге сол бөлүгү x тер үчүн терс эмес. Демек, барабарсыздык $x \geqslant 3$ шартты канааттандыра турган бардык x тер үчүн аткарылат. *Жообу:* $x \in [3;+\infty)$.

3-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{2x-3} < 1$.

(1) эрежеге ылайык $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$

$B(x) = 1 \geq 0$ шарт бардык x тер үчүн аткарылгандыктан, бөлөк жазуу шарт эмес. *Жообу:* $\left[\dfrac{3}{2};2\right)$.

4-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{4x-3} > 1$.

Бубарабарсыздык (2) эреже боюнча чыгарылат. Анда $B(x) = 1 \geq 0$ шарт бардык x тер үчүн аткарылгандыктан барабарсыздыкка теӊ күчтүү барбарсыздыкты жазуу мүмкүн: $4x-3 > 1^2$. *Жообу*: $x>1$.

5-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x+18} < 2-x$.

Бул барабарсыздык (1) эреже боюнча чыгарылат:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2-5x-14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Жообу: $x \in [-18;-2)$.

6-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

Бул барабарсыздык (2) эреже боюнча чыгарылат:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x^2+x-2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2+x-2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Жообу: $x \in (-\infty;-2] \cup (2;+\infty)$.

7-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

△Бул барабарсыздык (3) эреже боюнча чыгарылат:

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ x \leq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

Жообу: $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$. ▲

8-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

△Белгисиз x тин барабарсыздык мааниге ээ боло турган көптүгүн табалы:

$$\begin{cases} x^2-25 \geq 0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -6, \\ -6 < x \leq -5. \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

Эгер $x+6>0$ болсо, барабарсыздыкты квадратга көтөрүү мүмкүн:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-25} < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x^2-25 < x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

$x<-6$ болсо, берилген барабарсыздык сөзсүз аткарылат.

Жообу: $x \in (-\infty;-6) \cup \left(-\frac{61}{12};-5\right] \cup [5;+\infty)$. ▲

Жаңы өзгөрүүчүнү киргизүү

Иррационалдык теңдемелерди чыгарууда колдонулган жаңы өзгөрүүчүнү киргизүү методун, иррационалдык барабарсыздыктарга дагы колдонуу мүмкүн.

9-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

△Барабарсыздыкты төмөндөгүчө жазып алабыз: $-9\sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + 18 \geq 0$.

Жаңы өзгөрүүчүнү киргизебиз: $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$. Анда

$$\begin{cases} -9t+t^2+18 \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 6, \\ t \leq 3, \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Ошентип:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}\geq 6,\\ 0\leq\sqrt[4]{x}\leq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 6^4,\\ 0\leq x\leq 3^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1296,\\ 0\leq x\leq 81.\end{array}\right.$$

Жообу: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$. ▲

10-мисал. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

△ Жаңы өзгөрүүчүнү киргизебиз: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Анда $x=15-t^2$ жана t өзгөрүүчүгө салыштырмалуу рационалдык барабарсыздыкты пайда кылабыз:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t},<0\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<4.$$

Мындан x ти табалы:

$$0<\sqrt{15-x}<4\Leftrightarrow 0<15-x<16\Leftrightarrow -1<x<15.$$

Жообу: $x\in(-1;15)$. ▲

Суроо жана тапшырмалар

1. Иррационалдык барабарсыздык деп эмнеге айтылат?
2. Иррационалдык барабарсыздыкты чыгаруу процессинде тең күчтүү алмаштырууга өтүүгө мисал келтиргиле.
3. Чыгарылышы болбогон иррационалдык барабарсыздыкка мисал келтиргиле.

Көнүгүүлөр

56. Белгисиздердин кайсы маанилеринде барабарсыздыктар мааниге ээ? **(56–59)**

1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2-x}>-x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2+3x+1}<x+1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}\geq 2$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (**60-66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1} < x+2;$ 2) $\sqrt{x^2-1} > x-2.$

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1} \le x;$ 2) $\sqrt{x^2-x-2} \ge 2x+3.$

62. 1) $x-3 < \sqrt{x^2+4x-5};$ 2) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14.$

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x} > x;$ 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \ge 2.$

64. 1) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x};$ 2) $x > \sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}.$

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} \ge 4 + \dfrac{\sqrt{x}-1}{2};$ 2) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \ge 1.$

66. 1) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8;$ 2) $\sqrt[3]{x+1} \le \sqrt[3]{5x}.$

67. Тегиздикте $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартын канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

68. Тегиздикте $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартты канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

69. Тегиздикте $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартты канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

70. Тегиздикте $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартты канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

71. Тегиздикте $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартты канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

72. Тегиздикте $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ чекиттер берилген. $AC>BC$ шартты канааттандыруучу бөлүмүн тапкыла.

Текшерүү тест тапшырмалары

Сыноо көнүгүүлөрүнүн ар бирине 4 төн "жооп" берилген. 4 "жооп" тун жалаң бирөөсү туура, калгандары болсо туура эмес. Окуучулардан сыноо көнүгүүлөрүн аткарып же башка ой жүгүртүүлөр жардамында туура жоопту табуу (аны белгилөө) талап кылынат.

1. Тең күчтүү теңдемелерди көрсөткүлө:
1) $10x=8;$ 2) $6x-4=x;$ 3) $x^2+2x+18=0.$
A)1 жана 3; B) 2 жана 3; C) 1 жана 2; D) бардыгы.

2. Теңдеменин чоң тамырын тапкыла: $(x-5)(x+4)(x-11)=0.$
A)-4; B) 5; C) 16; D)11.

3. Биквадрат теңдеменин тамырларын суммасын тапкыла: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) −1; C) 0; D) 11/3.

4. Теңдемелер системасынын канча чыгарылышы бар?
$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Теңдемелер системасынын канча чыгарылышы бар?
$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Тегиздикте $A(3;\ 1)$ жана $B(7;\ 3)$ чекиттерден бирдей аралыкта жаткан $C(5;\ x)$ чекитти тапкыла.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).

8. Теңдемени чыгаргыла: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) −1; D) 0.

9. Теңдеменин бүтүн тамырларын тапкыла: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) −1; C) 2; D) 1 жана −1.

10. Кайсыдыр мамлекет калкынын саны жыл сайын 3%ке азайса, нече жылдан кийин калкынын саны 20% ке азаят?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11 Барабарсыздыкты чыгаргыла: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant0$.
A) [−7; 1]; B) [−7; −1]; C) [7; −1]; D) [7; 1].

12. $|x-2|\leqslant5$ барабарсыздыктын нече бүтүн чыгарылышы бар?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Барабарсыздыкты чыгаргыла: $|4x-1|\leqslant-2$.
A) [−7;1]; B) [−7;−1]; C) [7;−1]; D) чыгарылышы жок .

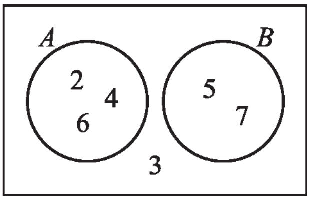
14. $\sqrt{x^2-13x+12}\le5-x$ барабарсыздыктын канча бүтүн чыгарылышы бар?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

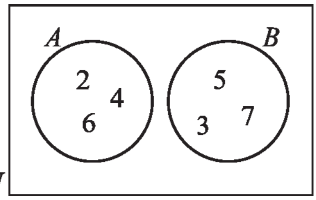
Жооптор

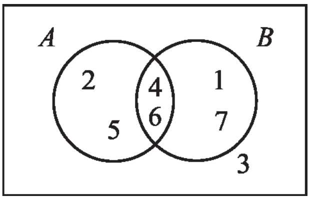
I БӨЛҮМ.

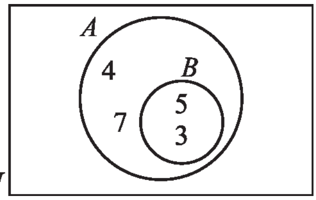
1. a) $5 \in Д$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) **I)** $\{9\}$ **II)** $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. b) **I)** $\emptyset$ **II)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. c) **I)** $\{1, 3, 5, 7\}$ **II)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; д) 9. **4.** a) чектүү; b) чексиз. **5.** a) кесишпейт; b) кесишет. **6.** a) чектүү; b) чексиз; c) чексиз; d) чексиз. **7.** a) **I)** *A* көптүк -1 ден чоң же тең жана 7 ден кичик же тең болгон бүтүн сандар көптүгү; **II)** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **III)** 9. b) **I)** *A* көптүк –2 ден чоң жана 8 ден кичик болгон натуралдык сандар сандар көптүгү; **II)** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **III)** 8. c) **I)** *A* көптүк 0 дөн чоң же тең жана1ден кичик же тең болгон чыныгы сандар көптүгү; **II)** мүмкүн эмес; **III)** чексиз. д) **I)** *A* көптүк 5 тен чоң же тең жана 6 дан кичик же тең болгон чыныгы сандар көптүгү; **II)** мүмкүн эмес; **III)** чексиз. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000, x \in \mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{Q}\}$. **9.** a) **I)** 8 : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; **II)** 16 ta: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{д\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, д\}$, $\{b, c\}$, $\{b, д\}$, $\{c, д\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, д\}$, $\{a, c, д\}$, $\{b, c, д\}$, $\{a, b, c, д\}$; b) 2^n. **10.** a) Ооба; b) Жок; c) Ооба; d) Ооба; e) Жок; f) Жок. **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8, x \in \mathbb{Q}\}$. **12.** a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{0, 1, 8\}$; c) $\{5, 6, 7, 8\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; e) $\{5, 6, 7\}$; f) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; g) $\{2, 3, 4\}$. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) $\{1, 2, 10, 11, 12\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 12\}$; c) $\{1, 8, 9, 10, 11, 12\}$; d) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; e) $\{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$; f) $\{8, 9, 10, 11\}$; g) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; h) $\{2, 10, 11\}$; **15.** a) $P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$; b) $\{2, 5, 11\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23\}$; d) $12=9+6-3$ ✓. **16.** a) $P=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $Q=\{1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30\}$; b) $\{2, 5, 10\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40\}$; d) $12=8+8-4$ ✓. **17.** a) $P=\{32, 36, 40, 44, 48, 52, 56\}$, $Q=\{36, 42, 48, 54\}$; b) $\{36, 48\}$; c) $\{32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56\}$; д) $9=7+4-2$ ✓. **18.** a) $R=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; д) $9=7+7-5$ ✓. **19.** a) $C=\{-4, -3, -2, -1\}$, $Д=\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $\{-4, -3, -2, -1\}$; c) $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; d) $7=4+7-4$ ✓. **20.** a) $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 5, 9, 18\}$, $R=\{1, 3, 9, 27\}$. b) **I)** $\{1, 2, 3, 6\}$; **II)** $\{1, 3\}$; **III)** $\{1, 3, 9\}$; **IV)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$; **V)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27\}$; **VI)** $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$. c) **I)** $\{1, 3\}$; **II)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27\}$. **21.** a) $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, $C=\{12, 24, 36\}$. b) **I)** $\{12, 24, 36\}$; **II)** $\{12, 24, 36\}$; **III)** $\{12, 24, 36\}$; **IV)** $\{12, 24, 36\}$. c) $\{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36\}$. d) $12=9+6+3-3-3-3+3$ ✓. **22.** a) $A=\{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. b) **I)** $\{6, 30\}$; **II)** $\{2, 3, 5\}$; **III)** $\emptyset$; **IV)** $\emptyset$. c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30\}$. d) $18=5+8+10-2-3-0+0$ ✓.

23.

a) U 

b) U 

c) U 

d) U 

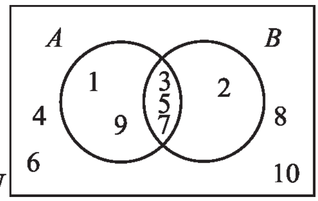
24.

a) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B=\{2, 3, 5, 7\}$;

b) $A \cap B=\{3, 5, 7\}$

$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

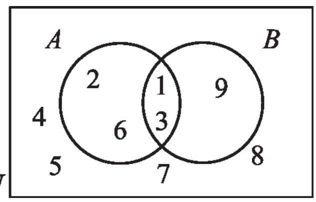
U 

25. a) $A=\{1, 2, 3, 6\}$

$B=\{1, 3, 9\}$;

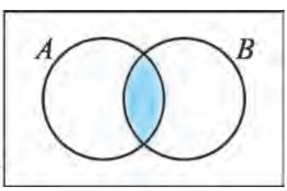
b) $A \cap B=\{1, 3\}$

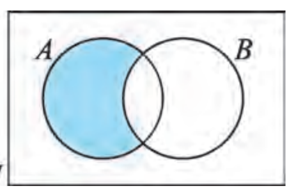
$A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$;

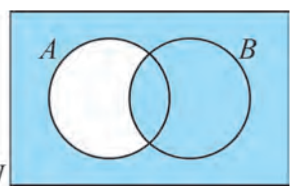
U 

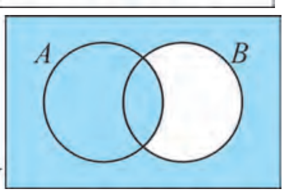
26. a) $\{b, д, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; д) $\{a, b, c, д, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, д, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, д, f, g, i, j, k\}$. **27.** a) **I)** $\{a, b, c, д, h, j\}$; **II)** $\{a, c, д, e, f, g, k\}$; **III)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **IV)** $\{a, c, d\}$; **V)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **VI)** $\{a, e, f\}$; **VII)** $\{a\}$; **VIII)** $\{a, b, c, д, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

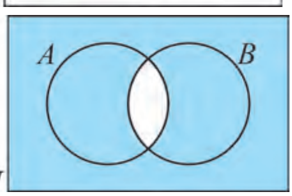
28.

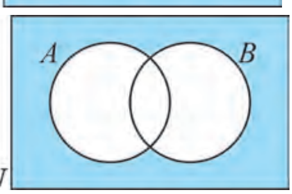
a) U 

b) U 

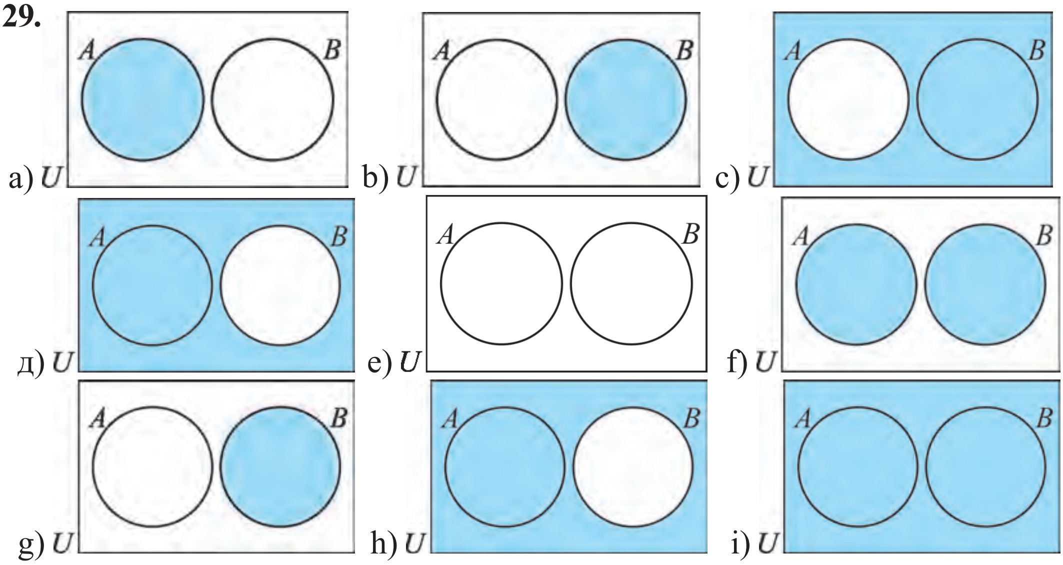
c) U 

d) U 

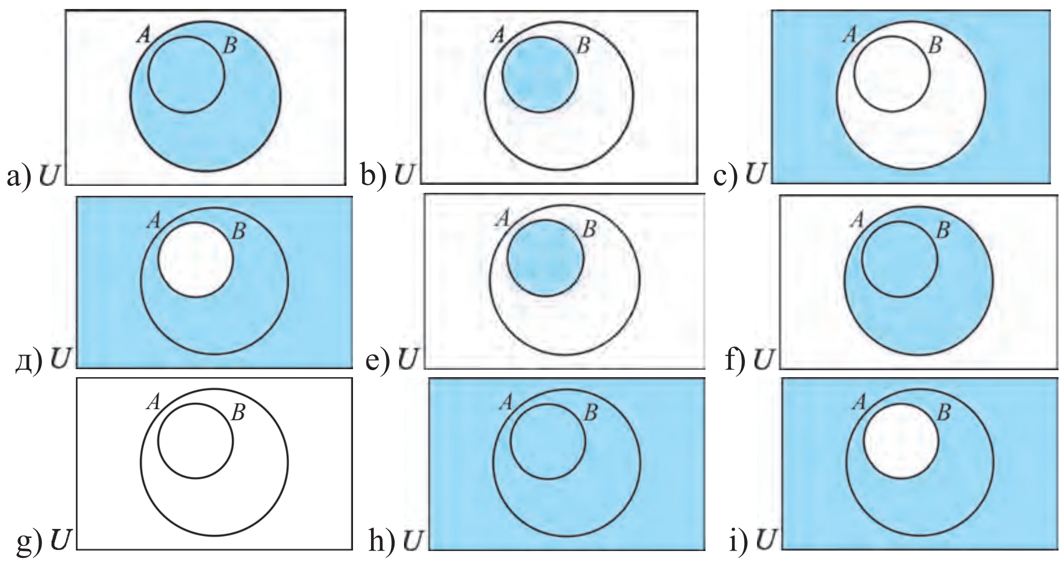
e) U 

f) U 

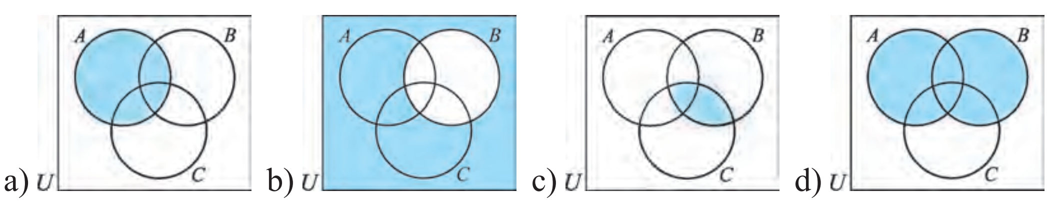
29.

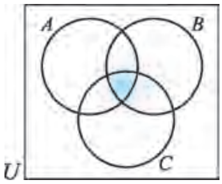


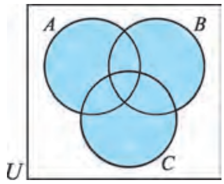
30.

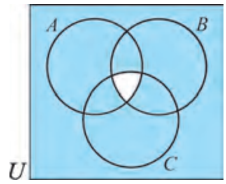


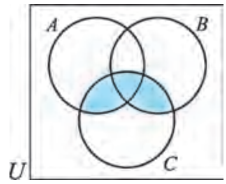
31.



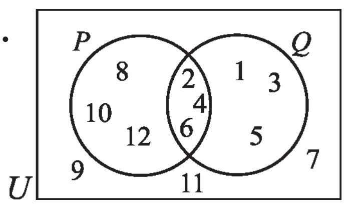
e) 

f) 

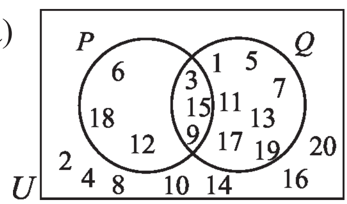
g) 

h) 

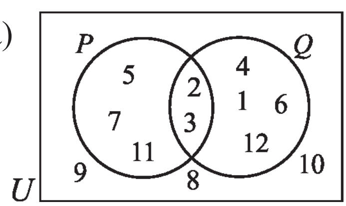
32. a) Ооба, жалган; b) ооба, чын; c) Ооба, чын; д) Ооба, чын; e) Ооба, чын; f) Ооба, чын; g) Жок; h) Ооба, чын; i) Жок; j) Ооба, анык эмес; k) Ооба, анык эмес; l) Жок; m) Ооба, анык эмес; n) Ооба, анык эмес; o) Ооба, анык эмес; p) Ооба, жалган. **33.** k) $\neg p$: Айрым төрт бурчтуктар параллелограмм эмес; m) $\neg r$: 7 – рационалдык сан эмес; n) $\neg s$: $23-14\neq12$; o) $\neg t$: $52:4\neq13$; p) $\neg u$: Айрым экөө жуп сандар айырмасы жуп болот; q) $\neg p$: Удаалаш натуралдык сандар көбөйтүндүсү дайыма жуп болбойт; r) $\neg q$: Айрым кең бурчтар өз ара тең эмес; s) $\neg r$: Айрым трапециялар параллелограмм эмес;
t) $\neg s$: Үч бурчтукта эки бурчу өз ара тең, бирок ал тең жактуу эмес.
34. a) $x\geqslant5$; b) $x<3$; c) $y\geqslant8$; д) $y>10$; **35.** e) Жок, Мадинанын узундугу 140 см да болушу мүмкүн; f) Жок; g) Ооба. **36.** f) $x\geqslant5$, $x\in\mathbb{N}$; g) x – үй , $x\in$ {жылкылар, *койлор, уйлар*}; h) $x<0$, $x\in\mathbb{Z}$; i) x – окуучу кыз бала, $x\in$ {*окуучулар*}; j) x – окуучу болбогон кыз бала, $x\in$ {*кыз балдар*}. **41.** e) $p\wedge q$: Мадина – терапевт , Муниса болсо стоматолог; f) $p\wedge q$: 15 тен чоң жана 30 дан кичине; g) $p\wedge q$: аба булуттуу жана жамгыр жаап жатат; h) $p\wedge q$: Алымдын чачтары кара жана көздөрү көгүш **42.** a) чын; b) жалган; c) жалган; d) чын; e) жалган.

43. 

44. a) чын; b) жалган.
45. a) чын; b) чын.

46. a) 

b) I) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
II) {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19};
III) {3, 9, 15};
IV) {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19}.

47. a) 

b) I) {2, 3};
II) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12};
III) {1, 4, 5, 6, 7, 11, 12}.

48. а) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; д) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** а) Сардар эрте турду; b) Сардар кечки тамакка палоо жеди; c) Сардар эрте мененки тамакка каймак жеди жана спорт менен машыкты; d) Сардар түшкү тамакка шорпо ичти жана кечки тамакка палоо жеди; e) Сардар же түшкү тамакка же кечки тамаккка шорпо ичти.

51. а)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. а) тавтология эмес; b) тавталогия; c) тавтология эмес.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. д) күн чарактаса, мен чөмүлүшкө барамын; e) x сан 6 га бөлүнсө, ал жуп болот; f) муздаткычта жумуртка болсо Мадина торт жасайт.

59. а) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; д) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** а) Конверсия: Эгер Дияра ысынса, ал жемпер киет; Инверсия: Эгер Дияра жемпер кийбесе, ал ысына албайт. b) Конверсия: Эгер эки үч бурчтуктун ылайык бурчтары тең болсо, алар окшош болот; Инверсия: Эгер эки үч бурчтук окшош болбосо , алардын тиешелүү бурчтуктары барабар болбойт. c) Эгер $2x^2=12$ болсо, анда $x=\pm\sqrt{6}$ болот; Конверсия: Эгер $x=\pm\sqrt{6}$ болсо, анда $2x^2=12$ болот. Инверсия: Эгер $2x^2\neq12$ болсо, анда $x\neq\pm\sqrt{6}$ болот. d) Конверсия: Эгер Алым кубанса, ал оюн ойнойт; Инверсия: Алым оюн ойнобосо, ал кубанбайт.e) Эгер үч бурчтук туура болсо, анда анын жактары барабар болот; Конверсия: Эгер үч бурчтуктун жактары барабар болсо, ал туура болот; Инверсия: Эгер үч бурчтук туура болбосо, анда анын жактары барабар болбойт. **64.** а) Эгер гүл тикендүү болбосо ал роза болбойт; b) Туура чечим чыгара албаган адам судья эмес;c) топту анык мишенге тебе албаган адам жакшы футболчу боло албайт; d) Эгер суюктук куюлган идиш формасын кабыл кылбаса ал суюктук эмес;e) Эгер адам ийгиликке жетишпесе, анда ал адал жана окумуштуу эмес; **65.** а) математиканы үйрөнбөгөн адам 10 класс окуучусу эмес; b) Шавкат математиканы үйрөнөт; Мирислам 10-класс окуучусу эмес; Анык жыйынтык чыгара албайбыз. **66.** а) x^2 саны 9 га бөлүнбөсө, x саны 3 кө бөлүнбөйт; b) x –жуп болбосо, анын акыркы саны 2 эмес; c) $AB||СД$ жана $АД||BC$ болбосо, $АВСД$ – туура төрт бурчтук эмес; d) $\angle ACB \neq 60°$ болсо, $АСВ$ – туура үч бурчтук эмес. **67.** **I)** Эгер үй сыртка түтүн чыгаргыч трубага ээ болсо, эң көбү менен 3 терезелүү болот; **II)** Эгер үй 3 өөдөн ашык терезелүү болсо, ал сыртка түтүн чыгаргыч трубага ээ болбойт; **III)** Эгер үй сыртка түтүн чыгаргыч трубага ээ болбосо, эң көбү менен 3 терезелүү болбойт; **69.** a) $\exists x\ P(x)$; b) $\exists x\ P(x)$; c) $\forall x\ P(x)$; д) $\forall x\ P(x)$; e) $\forall x\ P(x)$; f) $\forall x\ P(x)$; g) $\forall x\ P(x)$; h) $\forall x\ P(x)$; i) $\exists x\ P(x)$; j) $\exists x\ P(x)$; k) $\forall x\ P(x)$; **70.** a) Сазан сүт эмизүүчү эмес; b) Бардык падышалар да кемчилдиктер бар; f) Алтын токту жакшы өткөрөт; g) Айрым омурткалуулар бала ачат; h) Бул адам оорулуу . **71.** a) y x тин небереси; b) Ар кандай адамда бала бар; c) Ар кандай адам кимдиндир баласы . **72.** a) Бардык адамдар үчүн эгер бири башкасын дос деп эсептесе, ал дагы аны дос деп эсептейт; b) Ыктыярдуу адам үчүн ал деп эсептей турган адам бар; c) Адамдар бар, аны бардыгы дос деп эсептейт; d) Ар кандай адам үчүн аны дос деп эсептей турган адамдар бар; e) Адамдар бар, ал бардыгыны дос деп эсептейт; f) Адамдар бар, аны бардыгы дос деп эсептейт. **73.** a) Ыктыярдуу бүтүн сан үчүн ага бөлүнө турган бүтүн сан бар; b) Бүтүн сандар бар ал бардык бүтүн сандарга бөлүнөт; c) Ыктыярдуу бүтүн сан үчүн анын бөлүүчүсү бар; d) Бүтүн сандар бар, ага бардык бүтүн сандар бөлүнөт; e) Ыктыярдуу бүтүн сан үчүн анын бөлүүчүсү бар; f) Бүтүн сандар бар, ал бардык бүтүн сандарга бөлүнөт. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+д$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+д$; f) $д$. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II БӨЛҮМ.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; д) €4402,46. **3.** $2600. **4.** £14 400. **5.** €20219,78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9,41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15,4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512,69; b) $7293,04; c) £18938,83. **12.** 787,50. **13.** €1418,75. **14.** £1660. **15.** $274,83. **16.** a) €111,39; b) £763,31; c) ¥77157. **17.** $9021,58. **18.** €301,26. **19.** a) $7650; b) $8151,65; c) $8243,81.

20.

Жылдар	Амортизация	Баасы
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318,75	€1806,25
3	15% €1806,25 = €270,94	€1535,31

III БӨЛҮМ.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) ∅; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) тамырлары жок; e) –1;5; f) –1.
3. a) жана b); a) жана d); a) жана f); b) жана d); b) жана f); d) жана f); c) жана e); g) жана h).
4. a) (81/11;–3/11); b) (4;4); c)(9;8). **6.** b) (1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 кыз жана 60 уул балдар. **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) ∅; c) 32; d) ∅; **13.** a) ∅; b) $-\frac{23}{16}$.

15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) ∅; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). **25.** $\frac{21}{22}$.

26. a) −0,25; b) −4/9; c) –2,5. **28.** c) ∅. д) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.

37. 3 жыл. **39.** 8 жыл. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **43.** a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;

10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) ∅. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) ∅. 2) ∅.

61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).

68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

МАЗМУНУ

I Бөлүм. **КӨПТҮКТӨР. ЛОГИКА 3**

1-4 сабактар. Көптүк түшүнүгү, көптүктөр үстүндө амалдар. Толтуруучу көптүк 3
5-7 сабактар. Ой жүгүртүүлөр. Тануу, конъюнкция жана дизъюнкция .14
8-9 сабактар. Логикалык тең күчтүүлүк. Логикалык закондор 21
10-11сабактар.Импликация,конверсия,инверсия жана контрапозиция . 23
12-13 сабактар. Предикаттар жана кванторлор 29
14-15 сабактар. Туура ой жүгүртүү жүргүзүү (аргументация) закондору. Софизмдер жана парадокстор 33
16-18 сабактар. Маселелер чыгаруу 38

II Бөлүм. **КАРЖЫЛЫК МАТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРИ................48**

19-21 сабактар. Жөнөкөй пайыздар, татаал пайыздар 48
22-24 сабактар. Маселелер чыгаруу 53

III Бөлүм. **ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР .. 58**

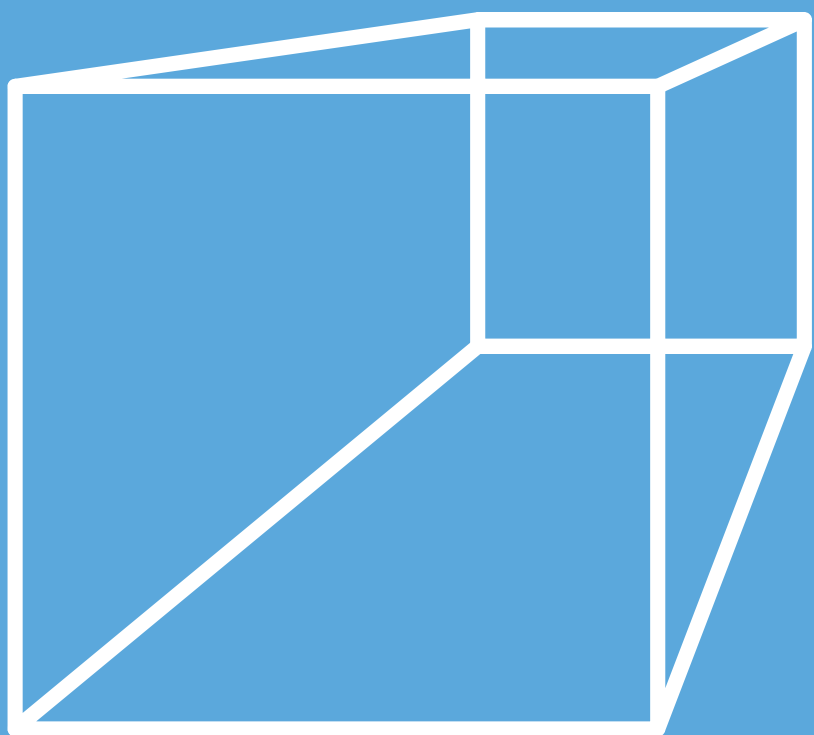
25-28 сабактар. Жөнөкөй рационалдык теңдемелер жана алардын системалары 58
29-32 сабактар. Жөнөкөй иррационалдык теңдемелер жана алардын системалары 64
33-36 сабактар. Жөнөкөй көрсөткүчтүү теңдемелер жана алардын системалары 69
37-38 сабактар. Теңдемелерди чамалап чыгаруу 74
39-41 сабактар. Жөнөкөй рационалдык барабарсыздыктар жана алардын системалары 77
42-43 сабактар. Жөнөкөй иррационалдык барабарсыздыктар 79
Жооптор 86

Колдонулган жана сунуш кылынган адабияттар

1. Ш.А. Алимов, О.Р. Халмухамедов, М.А. Мырзахмедов Алгебра жана анализдин негиздери. 10-класс үчүн предмет. Ташкент: “O‘qituvchi”, 2004.
2. Mal Соад anд others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Apris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа.
часть 1, Ташкент: “O‘qituvchi”, 2016.
4. А.У. Абдухамидов жана б. Алгебра жана математик анализ негиздери, 1-бөлүм, Ташкент: “O‘qituvchi”, 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
6. М.И. Исраилов. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: “Ўқитувчи” 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Интернетте математика (англис тилинде).
10. “Математика в школе” журналы.
11. Физика, математика жана информатика. Илмий-методик журнал (2001 - жылдан баштап чыга баштаган).
12. М.А.Мырзахмедов, Ш.Н Исмаилов Математикадан кызыктуу жана олимпиада маселелери. I бөлүм, Ташкент, “Turon-Iqbol”, 2016.
13. Математикадан колдонмо, I жана II бөлүмдөр. O‘qituvchilar үчүн qo‘llanma. Проф. Т.А. Азларов редакциясы астында. Ташкент, “O‘qituvchi”, 1979.
14. М.А.Мырзахмедов, Д.А. Сатыбалдиев Окуучуларды математик олимпиадаларына даярдоо. Ташкент, “O‘qituvchi”, 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Элге билим берүү министрлигинин кабар билим берүү порталы.
16. http://www.eduportal.uz – Мультимедиа борбору кабар билим берүү порталы.
17. http://www.problems.ru – Математикадан маселелер издөө тизими (орус тилинде).
18. http://matabaolymp.zn.uz – Өзбекстанда жана дүйнөлүк математика олимпиадалары.

Математика

ГЕОМЕТРИЯ



10-класс

10-класста геометриянын стереометрия бөлүгүн – мейкиндиктеги геометриялык фигуралардын касиеттерин тутумдуу үйрөнүшүнө киришилет. Китептен негизги мейкиндиктеги фигуралар, көп градустар жана айланма телолор жана алардын негизги касиеттери, мейкиндикте параллель жана перпендикуляр түз сызыктар жана тегиздиктер менен алардын касиеттери жөнүндөгү маселелер орун алган.

"Геометрия-10" окуу китебинде практикалык материалдар жөнөкөй жана ачык тилде түшүндүрүүгө аракет кылынган. Бардык тема жана түшүнчөлөр түрдүү турмуштагы мисалдар аркылуу ачып берилген. Ар бир темадан кийин келтирилген суроолор, далилдөөгө, эсептөөгө жана жасоо жөнүндө көптөгөн маселе жана мисалдар окуучуну ой жүгүртүүгө үндөйт, өздөштүрүүгө билимдерди терендетүүгө жана бекемдеп барууга жардам берет.

"Геометрия-10" окуу китеби орто билим берүүчү мекемелеринин 10-класс окуучуларына арналган, андан геометрияны өз алдынча жана кайталамакчы болгондор дагы пайдалануулары мүмкүн.

МАЗМУНУ

I бөлүм. **Планиметрияны системалуу кайталоо**
1. Планиметриянын логикалык түзүлүшү 97
2. Геометриялык маселелер жана аларды чыгаруу методдору 102
3. Практикалык көнүгүү жана колдонмолор 108

II бөлүм. **Стереометрияга кирүү**
4. Мейкиндиктеги геометриялык фигуралар. Көп градустар 112
5. Айлануу телолору: цилиндр, конус жана шар 116
6. Практикалык көнүгүү жана колдонмолор 119

III бөлүм. **Мейкиндиктеги түз сызыктар жана тегиздиктер**
7. Мейкиндиктеги түз сызыктар жана тегиздиктер 126
8. Көп градустар жана алардан түрдүү кесиндилерин жасоо.............131
9. Практикалык көнүгүү жана колдонмолор.....................................135

Китептин "Геометрия" бөлүмүндө колдонулган белгилер жана алардын мааниси:

 – теорема классификациясы

 – аксиома классификациясы

 – тема боюнча суроолор

 – активдештирүүчү көнүгүүлөр

 – теорема далилденди

 – практикалык колдонмо

 – тарыхый окуялар

 – геометриялык баш катырмалар

I БӨЛҮМ

ПЛАНИМЕТРИЯНЫ СИСТЕМАЛУУ КАЙТАЛОО

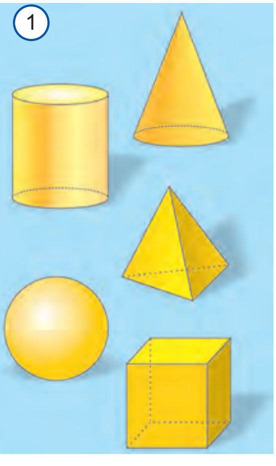
1 ПЛАНИМЕТРИЯНЫН ЛОГИКАЛЫК ТҮЗҮЛҮШҮ

Геометрия реал турмуштагы предметтеринин сан көрсөткүчтөрү жана мейкиндиктеги фигураларын үйрөтөт. Заттардын башка касиеттерин башка предметтер үйрөнөт. Эгер бир затты үйрөнүп жатканда, анын жалаң мейкиндиктеги фигурасы жана өлчөмдөрү эсепке алынса, анда *геометриялык фигура* деп аталуучу абстракт объектке ээ болобуз.

Геометрия – грекче сөз болуп, "жер ченөө" ченеймин дегенди билдирет. Мектепте үйрөнүлө турган геометрия байыркы грек окумуштуусу Эвклид аты менен *Эвклид геометриясы* деп аталат. Геометрия эки бөлүктөн: планиметрия жана стереометриядан түзүлгөн. *Планиметрия* – тегиздиктеги, *стереометрия* болсо мейкиндиктеги геометриялык фигураларын касиеттерин үйрөнөт (1-сүрөт).

Геометриялык фигураларды бири-биринен айырмалоо үчүн алардын касиеттери классификацияланат жана аларга *аныктама* берилет. Бирок бардык фигураларына да аныктама берүүгө болбойт. Алардын алгачкы бир канчасын аныктамасыз кабыл кылууга мажбурбуз. Аларды аныктамасыз кабыл алынгач, *башталгыч* (*негизги*) *геометриялык фигуралар* деп алабыз.

1



Геометриянын логикалык курулушу төмөндөгү тартипте ишке ашырылат:

1. Алгач негизги (башталгыч)геометриялык фигуралар аныктамасыз кабыл алынат;

2. Негизги геометриялык фигуралардын негизги касиеттери далилдөөсүз кабыл алынат;

3. Башка геометриялык фигуралар негизги фигура-

лар жана алардын касиеттерине таянып мүнөздөлөт жана алардын касиеттери ага чейин белгилүү бир касиеттерге таянып далилденет.

Предметтин мындай түзүлүшү *аксиоматикалык түзүлүшү* деп аталат. *Аксиома* деп тууралыгы далилдөөсүз кабыл алынган касиетке айтылат.

Ушул убакка чейин биз үйрөнгөн планиметриянын негизги фигуралары бул чекит жана түз сызык эле. Аларды аныктамасыз кабыл алдык. Кесинди, шоола, үч бурчтук жана башка геометриялык фигураларына болсо аныктама бердик. Ошондой эле, төмөндөгү касиеттерди (аныктамаларды) далилдөөсүз аксиома катарында кабыл алдык:

I. Тийиштүүлүк аксиомалары группасы

1.1. *Тегиздикте кандай түз сызык болбосун, ал түз сызыкка тиешелүү да, тиешелүү эмес да чекиттер болот.*

1.2. *Каалаган эки чекит аркылуу жалаң бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот.*

II. Тартип аксиомалары группасы

2.1. *Бир түз сызыктан алынган каалаган үч чекиттин бирөөсү калган эки чекиттин арасында жатат.*

2.2. *Ар бир түз сызык тегиздикти эки бөлүккө: эки жарым тегиздикке бөлөт.*

III. Ченөө аксиомалары группасы

3.1. *Ар кандай кесинди нөлдөн айырмалуу белгилүү узундукка ээ болуп, ал оң сан менен туюнтулат. Кесиндинин узундугу анын каалаган чекити ажыраткан бөлүктөрүнүн узундуктарынын суммасына барабар.*

3.2. *Ар кандай бурч белгилүү градуска ээ болуп, анын мааниси оң сан менен туюнтулат. Жайылган бурчтуктун чоңдугу* $180°$ *ка барабар. Бурчтуктун чоңдугу бурчтук жактары арасынан өтүүчү каалаган шоола ажыраткан бурчтуктардын градустук чендеринин суммасына барабар.*

IV. Тең фигураны коюу аксиомалары группасы

4.1. *Каалаган шоолага анын чокусунан баштап, берилген кесиндиге барабар жалгыз кесиндини ченеп коюууга болот.*

4.2. *Каалаган шоoладан анык жарым тегиздикке берилген, жайылган болбогон бурчка барабар жалгыз бурчтукту коюу мүмкүн.*

4.3. *Ар кандай үч бурчтук үчүн ага барабар үч бурчтук бар жана аны шоoладан белгилүү жарым тегиздикке жалгыз түрдө коюуга болот.*

V. Параллелдик аксиомасы

5.1. *Тегиздикте түз сызыктан сыртта алынган чекиттен бул түз сызыкка жалаң бир параллель түз сызык жүгүртүүгө болот.*

Бир тастыктын тууралыгын логикалык ой жүгүртүүлөр жардамында келтирип чыгаруу *далил* деп аталат. Тууралыгын далилдөө жолу менен негизделген тастык болсо *теорема* деп аталат. Теорема, адатта, шарт жана жыйынтык бөлүктөрдөн түзүлгөн болот. Теореманын биринчи – шарт бөлүгүндө эмнелер берилгени баяндалат. Экинчи – жыйынтык бөлүгүндө болсо эмнени далилдөө керектиги түшүндүрүлөт.

Теореманы далилдөө – анын шартынан пайдаланып, буга чейин далилденген жана кабыл алынган касиеттерге таянып, ой жүргүзүп, жыйынтык бөлүгүндө берилген фразанын тууралыгын келтирип чыгаруу болот. Теореманын шарт жана жыйынтык бөлүктөрүн аныктап алуу – теореманы аныкташтырып, аны түшүнүү жана далилдөө процессин жеңилдештирет.

Эвклид (б.э.ч. 356–300-*жылдар*)

Грек окумуштуусу Платон геометрияда өзгөчө бир законду байкаган: мурда үйрөнүлгөн, тууралыгы далилденген касиеттерден логикалык ой жүгүртүүлөр аркылуу жаңы касиеттерди келтирип чыгарса болот экен. Мындай өзгөчө мүмкүнчүлүктөрдөн пайдаланып, калган касиеттер теоремалар көрүнүшүндө түшүндүрүлөт жана аксиомалар менен бул убакка чейин тууралыгы далилденген касиеттерге негизделип, логикалык ой жүгүртүүлөр жүргүзүү аркылуу далилденет.

Ой жүргүзүү процессинде далилденбеген касиеттерден (алардын тууралыгы ачык көрүнүп турган болсо дагы) пайдаланууга тыюу салынат.

Ошентип, геометрияны бир имарат деп карай турган болсок, башталгыч түшүнчөлөр жана аксиомалар анын фундаментин түзөт. Бул фундамент үстүнө терилген кирпичтер – мүнөздөлгөн жаңы жана теоремалар көрүнүшүндө далилденген касиеттерден түзүлгөн болот.

Геометрияны өз алдынча илим катарында негиздөөдө байыркы грек окумуштуулары чоң салым кошушкан. Мисалы, Гиппократ Хиосский геометрия негиздери жөнүндөгү алгачкы түшүнчөлөрдү баяндаган. Бул бөлүм боюнча негизги иштерди улуу грек окумуштуусу Эвклид (б.э.ч. 356 – 300-жылдар) ишке ашырган. Анын негизги чыгармасы "Негиздер" планиметрия, стереометрия жана сандар теориясынын кээ бир маселелерин, ошондой эле, алгебра, салыштырма жалпы теориясы, бет жана көлөмдөр эсептөө методу менен лимиттер теориясы элементтерин өз ичине алат. "Негиздер" де Эвклид байыркы грек математикасынын бардык ийгиликтерин жыйнады жана анын өнүгүүсү үчүн негиз жаратты.

"Негиздер" 13 китептен түзүлгөн болуп, бул чыгарма биздин заманга чейинки V – IV кылымдар грек математиктеринин чыгармалары кайра иштелип түзүлгөн. Чыгармада 23 аныктама, 5 постулат жана 9 аксиома берилген. Чы-

Омар Хаям
(1048-1131)

гармада туура төрт бурчтукка, квадратка, айланага туура мүнөздөр берилген. Чекит жана сызыкка төмөндөгү мүнөздөр берилген: "Чекит деп , ал бөлүктөргө ээ эмес", "Сызык деп эни жок узундукка айтылат".

"Негиздер"да 9 аксиома – далилдөөсүз кабыл кылынган ой жүгүртүүлөр баян кылынат. Геометриялык жасоолорду ишке ашыруу мүмкүндүгүн баян кылуучу математикалыкалык ой жүгүртүүлөр (постулат)дөн төмөндөгү беш ой жүгүртүү баяндалган:

I. Ар кандай эки чекиттен жалаң бир түз сызык жүгүртүүгө болот.

II. Түз сызык кесиндисин чексиз улантуу мүмкүн.

III. Ар кандай борбордон каалаган аралыкта айлана жасоо мүмкүн.

IV. Бардык туура бурчтуктар өз ара тең.

V. Бир тегиздикте жаткан эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык кесип, бир жактуу ички бурчтар пайда кылса жана бурчтардын суммасы эки тик бурчтуктан кичик болсо, андай түз сызыктар улантылганда алардын суммасы эки тик бурчтан кичине бурчтар жагында кесишет.

Ушул чыгарма чоң жана узак жеңишке ээ болду. Өзгөчө, V постулат чоң илимий ой жүгүртүүлөргө себеп болду. Эгер V постулаттагы ички кайчылаш бурчтарды α жана β десек (1-сүрөт), түз сызыктар a жана b болсо, анда постулаттын мазмунуна көрө $\alpha+\beta<180°$ болсо, a жана b түз сызыктар кесишет.

Постулатты далилдөөдө ага тең күчтүү бир катар ой жүгүртүүлөр пайда болду. Маселен, англис математиги Ян Плейфер (1748–1819) дин *параллелдик аксиомасы* ушулар катарында эсептелет: тегиздикте түз сызыктан сыртта алынган чекиттен бул түз сызыкка жалаң бир параллель түз сызык жүгүртүүгө болот.

Математикалык, астроном жана философ Омар Гиясиддин Абул Фахт ибн Ибрахим Хаям дагы бул маселе менен иштеген. Хаям "Эвклид китебинин кирүү бөлүгүндөгү кыйынчылыктарга баяндар" чыгармасында V постулатка токтолгон. Ал Эвклиддин постулаты теорема экендигин далилдөө үчүн төмөнкү негизидеги эки бурчу туура болгон туура төрт бурчтукту караган (2-сүрөт) жана эгер анын төмөнкү эки бурчу туура болсо, жогорудагы эки бурчу дагы туура болушу керек деген жыйынтыкка келген. Омар Хаям "Бир түз сызыкка перпендикуляр болгон эки түз сызык түз сызыктын эки жагына дагы кесише албайт-го", – деген. Омар Хаямдын бул иштеринен бекабар италиялык математик Ж. Саккери (1667–1733) дагы V постулат менен иштеп, туура төрт бурчтукка кайрылган. Геометрия негиздерине бул туура төрт бурчтук " Хаям – Саккери төрт бурчтугу" аты менен кирген.

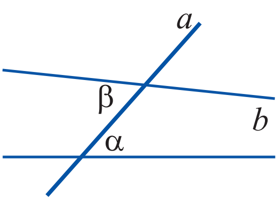
Бул көйгөйдү улуу орус математиги Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) чечти жана жаңы геометрияны жаратты. Лобачевский биринчи жолу Эвклиддин бешинчи постулаты геометриянын башка аксиомаларына байланыштуу эместигин далилдеди. Бул геометрия Эвклид геометриясынан бүтүндөй ажралып турат эле. Бирок, ал логикалык карама-каршылыкка туура келиши керек эле, анткени – эки геометриянын бир убакытта бар болушу мүмкүн эмес эле. Ушуга карабай, Лобачевский жаңы натыйжалар келтирип чыгара берди, алар логикалык карама-каршылыктарга кездешпейт. Жаңы геометрия жана Эвклид геометриясында биринчи төрт топ аксиомалар дал келет. Бул аксиомалар топтору жана алардын натыйжалары абсолют геометрия деп атала башталды.

Н.И.Лобачевский
(1792-1856)

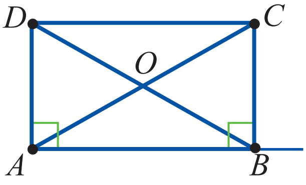
Бирок, Лобачевский геометриясы Эвклид геометриясынан абдан айырмаланат. Мисалы, Лобачевский геометриясында үч бурчтук ички бурчтарынын жыйындысында π ден кичине, анда окшош же тең болбогон үч бурчтуктар жок, берилген түз сызыктан бир түрдүү узакташкан чекиттер жыйнагы түз сызык эмес, ийри сызык эсептелет жана. б лар.

Лобачевский геометриясын жаратууга венгер математиги Янош Боляи (1802– 1860) жана немис математиги Карл Фридрикс Гаусс (1777–1855) тар чоң салым кошушкан. Ошондой эле, италян математиги Эужени Белтрами (1835–1900) жана немис математиги Бернхард Риман (1826–1866) жаңы геометрия классификациясы боюнча чоң иштер кылышты.

1



2



Эвклид баштап берген аксиоматиканы немис математиги Давид Гилберт (1862–1943) жана орус математиги Вениамин Феодорович Каган (1859–1953) иштеринде аягына жеткирди.

? *Тема боюнча суроолор*

1. *Геометрия аксиомалары системасын баян кылган Эвклид жөнүндө эмнелерди билесиңер?*
2. *Эвклиддин "Негиздер" чыгармасы жөнүндө сүйлөп бергиле.*
3. *Аныктама эмне? Тегиздикте кайсы фигуралар негизги (башталгыч) фигуралар катары аныктамасыз кабыл кылынган?*

4. *Теорема жана аксиома бири-биринен эмне менен айырмаланат?*
5. *Планиметрия аксиомаларын санагыла жана баяндагыла.*
6. *Геометрия илими кандай түзүлгөн?*
7. *Эвклидтин 5-постулаты эмне тууралуу жана аны эмне үчүн далилдөөгө аракет кылышкан?*
8. *Бул постулатты далилдөөгө тырышкан окумуштуулар жана алардын иштери жөнүндө айтып бергиле.*
9. *Лобачевский жаңы геометриянын жаратылышында кандай салым кошкон?*
10. *Лобачевский геометриясын жараткан окумуштуулар жана алардын иштери жөнүндө айтып бергиле.*

2 ГЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫ ЧЫГАРУУ МЕТОДДОРУ

Жогоруда айтканыбыздай, геометриянын эң негизги касиети бул мурда үйрөнүлгөн, тууралыгы далилденген касиеттерден логикалык ой жүгүртүү, маек жүрүзүү аркылуу жаңы касиеттерди келтирип чыгаруу мүмкүн. Мындай мүмкүнчүлүктөн пайдаланып, калган касиеттер теоремалар же маселелер көрүнүшүндө түшүндүрүлгөн жана аксиомалар менен бул учурга чейин тууралыгы далилденген касиеттерге негизделип, логикалык ой жүрүзүү аркылуу далилденген. Ушундай жол менен математикалык же геометриялык маселелер пайда болгон.

Математикалык маселеде эмнелердир (шарттар) берилген болот. Алардан пайдаланып, эмненидир табуу (эсептөө) же далилдөө, же жасоо талап кылынат. Коюлган талапты аткаруу маселени чыгарууну билдирет.

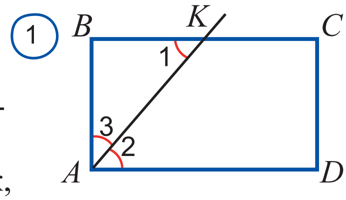
Геометриялык маселелер коюлган талапка көрө эсептөөгө, далилдөөгө, изилдөөгө жана жасоого тиешелүү маселелерге бөлүнөт.

Математикалык маселени чыгаруу үчүн назарияны гана билүү жетерлүү эмес. Маселе чыгаруу көнүкмөсүнө жана тажрыйбасына дагы ээ болуу талап кылынат. Мындай көнүкмөгө өз кезегинде жөнөкөй маселелерден баштап, барган сайын кыйынраак маселелерди чыгаруу аркылуу эришилет. Ошондой эле, маселелерди чыгаруунун ар түрдүү методтору дагы бар болуп, аларды жалаң көп маселелер чыгаруу аркылуу өздөштүрүү мүмкүн. Ар бир метод маалым түркүмгө тийиштүү маселелерди чыгаруу үчүн колдонулат. Канча көп усулдар өздөштүрүлсө, ушунча маселе чыгаруу көнүкмөлөрү калыптанат.

Төмөндө геометриялык маселелерди чыгаруунун кээ бир маанилүү методдору үстүндө токтолобуз.

Маселе чыгаруу методдору түзүлүшүнө көрө, синтетикалык, аналитикалык, тескерисинен элестөө жана д.б. түрлөргө бөлүнөт. Математикалык аппараттын колдонулушуна көрө болсо, алгебралык, вектордуу, координаталуу, беттер методу, окшоштук методу, геометриялык өзгөртүүлөр сыяктуу түрлөргө бөлүнөт.

Синтетикалык метод мааниси маселе шартында берилгенлерден пайдаланып, ой жүгүртүү аркылуу логикалык пикирлер чынжыры пайда кылынат. Ой жүгүртүүлөр чынжыры эң акыркы бөлүгү маселе талабы менен дал келүүгө түшүүгө чейин улантырылат.



1-мисал. Туура төрт бурчтуктун бурчунун биссектрисасы анын жагын 7 жана 9 узундуктагы кесиндилерге бөлөт (1-сүрөт). Туура төрт бурчтуктун перитметрин тапкыла.

Чыгаруу. Айталы $ABCD$ – туура төрт бурчтук, AK биссектриса, $K \in BC$, $BK = 7$ см, $KC = 9$ см болсун.

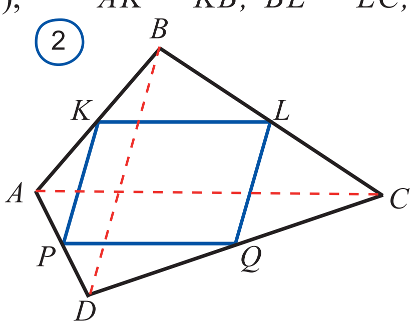
1. $BC \parallel AD$ жана AK кесүүчү болгону үчүн: $\angle 1 = \angle 2$. (1) болот, анткени бул бурчтуктар ички кайчылаш бурчтуктар эсептелет.
2. AK – биссектриса: $\angle 2 = \angle 3$. (2)
3. Анда (1) жана (2) ге көрө $\angle 1 = \angle 3$.
4. ABK тең капталы үч бурчтуктан жана $AB = BK$. (3)
5. Бул натыйжадан пайдаланып, эсептөөлөрдү ишке ашырабыз: $AB = BK = 7$ см.
   $P = 2(AB + BC) = 2\ (7+16) = 46\ (см)$. ❑

Бул маселе таянч маселелер катарына кирет, себеби көп гана маселелер дал ушул идеяга карай курулат.Параллелограмм жана трапеция бурчтун биссектрисасы бул фигуралар тегиздигинен тең капталы үч бурчтук кесип алат.Мындай таянч фактыларын дайым эсте тутуу керек. Алар башка маселелерди чыгарууда колдонулат.

Аналитикалык метод мааниси теорема (маселе)нын жыйынтык бөлүгүндө келип чыгып, белгилүү натыйжалардан пайдаланып, ой жүгүртүү аркылуу логикалык ой жүгүртүүлөр чынжырын пайда кылат. Ой жүгүртүүлөр чынжырынын эң акыркы бөлөгү маселе шартынын натыйжасы экендигин аныктагыча улантылат .

2-мисал. Каалаган төрт бурчтуктун жактарынын ортолору параллелограммдын учтары болушун далилдегиле.

Далил. Айталы $ABCD$ – төрт бурчтук (2-сүрөт), $AK = KB,\ BL = LC,\ CQ = QD,\ AP = PD$ болсун.



Төрт бурчтуктун AC жана BD диагоналдарын өткөрөбүз.

1. ΔABC да KL орто сызык: $KL \parallel AC$ (1);
2. ΔADC да PQ орто сызык: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) жана (2) ден: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Жогорудагыга окшош: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) жана (4) төн: $KLQP$ – параллелограмм. ❑

Жогоруда көрүлгөн синтетикалык жана аналитиктикалык методдор ***туура методдор*** деп дагы аталат. Маселени туура методдор менен чыгарууда, адегенде маселе мазмуну талкууланат. Анализ натыйжасына көрө методу тандалат. Андан кийин сүрөт көрүнүшүндө маселени чыгаруу модели(чиймеси) түзүлөт жана чийме үстүндө ой жүргүзүлөт. Ушул түрдө ойлор жүргүзүп, маселенин шартынан анын жыйынтык бөлүгүнө карап барат.

Маселе чыгаруунун тескери методу да бар. Аны менен көп жолу кез келгенбиз. Ал "***тескерисин көз алдына келтирип далилдөө методу***" деп аталат. Бул методдун колдонуу алгоритмин келтиребиз.

Тескерисин көз алдына келтирип методун колдоо алгоритми

Теорема (түз тастык)	***Эгер A орундуу болсо, B орундуу болот. (A жана B – кандайдыр ой жүгүртүүлөр)***
Далилдөө:	
Тескерисин көз алдыбызга келтиребиз:	Теоремада келтирилген тастыктын тескерисин элестетебиз, жана теореманын шарты аткарылсын, бирок жыйынтыгы орундуу болбосун: ***Эгер A орундуу болсо, B орундуу болбойт.***
Ой жүргүзөбүз :	Тууралыгы алдын далилденген теорема же кабыл кылынган аксиомаларга таянып логикалык ойлор жүргүзөбүз.
Тескерисине келебиз:	Тууралыгы алдын далилденген теорема же кабыл кылынган аксиомалардын бирине тескери болгон тастыкка туура келебиз.
Жыйынтык чыгарабыз:	Демек, оюбуз туура эмес жана берилген теорема туура экен.
Теорема далилденди	

3-мисал. Эгер эки түз сызыктын ар бири үчүнчү түз сызыкка параллель болсо, алар өз ара параллель болот.

Айталы, a жана b түз сызыктар берилген болуп, алардын ар бири үчүнчү c түз сызыкка параллель болсун. Теореманы тескерисин элестетүү методу менен далилдейбиз.

Далилдөө. Тескерисин элестетебиз: a жана b түз сызыктарынын ар бири үчүнчү c түз сызыкка параллель болсун, алар өз ара параллель болбосун, жана A чекитте кесишсин (3-сүрөткө кара). Анда A чекиттен c түз сызыкка эки a жана b параллель түз сызыктар өтөт.

3

Бул параллелдик аксиомасына тескери. Тескери оюбуз туура эмес экендигин көрсөтөт. Дагы a жана b түз сызыктарынын ар бири үчүнчү c түз сызыкка параллель болсо, алар өз ара парллель болот. ❑

Ушул метод төмөндөгү логикалык законго негизделген: бир-бирине тескери эки тастыктын жалаң бири чын, экинчиси болсо жалган болот, үчүнчү абалда болушу мүмкүн эмес.

Эми геометриялык маселелерди чыгаруунун башка методдоруна токтолобуз.

Алгебралык метод. Геометриялык маселени алгебралык метод менен чыгарууда төмөндөгү алгоритм негизинде иш көрүү максатка ылайык болот:

1) маселе мазмунун анализ кылуу жана анын чийме моделин куруу;
2) белгисизди тамгалар менен белгилөө;
3) маселе шартын туюндуруучу теңдеме же теңдемелер системасын түзүү;
4) түзүлгөн теңдеме же теңдемелер системасын чыгаруу;
5) табылган чыгарууну анализ кылуу;
6) жообун жазуу.

4-мисал. Тик бурчтуу үч бурчтуктун периметри 36 см ге тең. Гипотенузанын катетке салыштырмалуу 5:3. катышкан үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

Айталы, $\triangle ABC$ берилген болуп, анда $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ болсун.

Чыгаруу. Пропорционалдуулук коэффициентин k менен белгилейбиз.

Анда $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Пифагор теорема боюнча: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ же $25k^2 = 9k^2+BC^2$.

Андан, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Шартка көрө: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ см, $AC = 3k = 9$ см, $BC = 4k = 12$ см.

Жообу: 15 см, 9 см, 12 см. ❑

Аянттар методу. Кээ бир геометриялык маселелерди чыгарууда аянттарын эсептөө формулаларынан пайдалануу күтүлгөн натыйжаны берет. Бул абалда табуу талап кылынган белгисиз маселедеги жардамчы фигуралардын аянттарын теңдештирүү натыйжасында пайда болгон теңдемеден табылат. Муну төмөнкү мисалда көрөбүз.

5-мисал. Үч бурчтуктун жактары 13 см, 14 см жана 15 см. Узундугу 14 кө тең жагына түшүрүлгөн бийиктигин тапкыла.

Айталы, $\triangle ABC$ берилген болуп, анда $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см болсун.

Чыгаруу. $a < b$ жана $b < c$, h_c – бийиктик болсун.

Герон формуласы боюнча: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (см²).
Башка формула боюнча: $S_\triangle = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $\frac{1}{2} b \cdot h_b = 84$, $h_b = 12$ (см).

Жообу: 12 см. ❑

Векторлор методу. Геометриялык маселени векторлор методу менен чыгаруу үчүн төмөндөгү алгоритм негизинде иш алып баруу максатка ылайык болот:

1) маселени векторлор тилине өткөрүү, дагы маселедеги кээ бир каталыктарды вектор катарында карап, векторлуу теңдемелер түзүү;

2) векторлордун белгилүү касиеттеринен пайдаланып, векторлуу теңдемелердин формасын алмаштыруу жана белгисизди табуу;

3) векторлор тилинен геометрия тилине кайтуу;

4) жообун жазуу.

Вектор методу менен төмөндөгү геометриялык маселелерди чыгаруу максатка ылайык болот:

a) түз сызыктар (кесиндилер)дын параллелдигин аныктоо;

b) кесиндилерди берилген катышта бөлүү;

c) үч чекиттин бир түз сызыкта жатышын көрсөтүү;

d) төрт бурчтуктун параллелограмм (ромб, трапеция, квадрат, туура төрт бурчтук) экендигин көрсөтүү.

6-мисал. Томпок төрт бурчтуктун жактары ортолору параллелограмм учтары болушун далилдегиле.

Айталы, $ABCD$ төрт бурчтук берилген болуп, анда $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ болсун (4-сүрөт).

Далил. 1. Берилген кесиндилерди ылайык $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{KL}, \overline{PQ}, \overline{BL}, \overline{KB}$ векторлор менен алмаштырып, маселени вектор тилине өткөрөбүз;

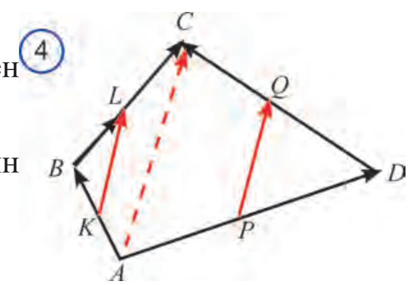
2. Векторлорду кошуунун үч бурчтук эрежесинен пайдаланабыз:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$

$\overline{KB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$ *жана* $\overline{BL} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$ экендигинен пайдаланып, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} =$

$= \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$ экенин табабыз.

4



Ушуга окшош, $\overline{PQ} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$ болот.

3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, жана бул векторлор бирдей багытталган жана узундуктары тең. Бул $KLQP$ төрт бурчтук параллелограмм экендигин билдирет. ❑

Координаталар методу. Геометриялык маселени координаталар методу менен чыгарууда төмөндөгү алгоритм негизинде иштөө максатка ылайык болот:

1) маселе мазмунун анализ кылуу жана аны координаталар тилине өткөрүү;

2) теңдемелердин формасын алмаштыруу жана маанисин эсептөө;

3) натыйжаны геометрия тилине өткөрүү;

4) жообун жазуу.

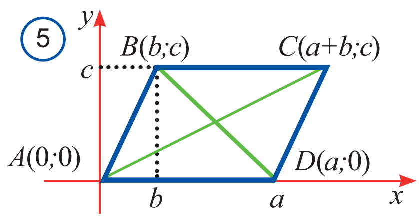
Координаталар методу менен төмөндөгү геометриялык маселелерди чыгаруу максатка ылайык болот: а) чекиттердин геометриялык ордун табуу; b) геометриялык фигуралардын сызыктуу элементтери арасындагы байланыштарды далилдөө.

Маселени координаталар методу менен чыгарууда, координаталар башталышын туура тандоо зарыл. Берилген фигураны координаталар тегиздигине ушундай жайгаштыруу керек, мүмкүнчүлүк болушунча чекиттердин координаталары нөлгө тең болсун.

7-мисал. Диагоналдары тең параллелеграммдын туура төрт бурчтук болушун далилдегиле.

Далил. Координаталар системасын шундай тандайбыз, параллелограммдын учтары төмөндөгү координаталарга ээ болсун (5-сүрөткө кара):

5



$A(0;\ 0)$, $B(b;\ c)$, $C(a+b;\ c)$, $D(a;\ 0)$, бул жерде $a > 0,\ b \geq 0,\ c > 0$.

A, B, C, D чекиттер арасындагы аралыктарды алардын координаталары аркылуу туюнтурабыз:

$AC = \sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2}$, $BD = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$.

Анда $\sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$

же $(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2 = (a - b)^2 + (0 - c)^2$. Андан, $4ab = 0$.

Бирок $a > 0$, анда $b = 0$. Бул болсо, өз кезегинде, $B\ (b;\ c)$ чекит Oy огунда жатышын билдирет. Ошону үчүн BAD туура бурчтук болот.

Андан $ABCD$ параллелограмм туура төрт бурчтук экендиги келип чыгат. ❑

Геометриялык алмаштыруулар методу. Геометриялык алмаштыруулар методуна буруу, симметриялык көрүнүштөр, параллель көчүрүү жана гомотетия сыяктуу алмаштырууларга негиздегилген методдор кирет.Геометриялык алмаштыруулар жардамында маселелерди чыгаруу процессинде берилген геометриялык фигуралар менен бир катарда жаңы, колдонулган геометриялык алмаштыруу жардамында пайда кылынган фигуралар да каралат. Жаңы фигуралардын касиеттери аныкталат жана берилген формага өткөрүлөт. Андан кийин маселени чыгаруу жолу табылат. Жогоруда келтирилген бардык методдор жалпы атаганда геометриялык методдор деп айтылат.

Зарыл эскертме!

Бул бөлүмдөн орун алган материалдар планиметрияны кайталоо үчүн келтирилген. Кайталоо үчүн маселелер канча керек болсо келтирилген. Алардын бардыгын класста көрүүгө убакыт жетпөө мүмкүн. Бирок , аларды эркин түрдө чыгарууну кеңеш беребиз. Бул силерге 10-класста геометрияны үйрөнүүдө ийгиликтүү улантырууңарга фундамент жаратат.

? *Тема боюнча суроолор*

1. *Математикалык маселе дегенде эмнени түшүнөсүңөр?*
2 .*Геометриялык маселенин кандай түрлөрүн билесиңер?*
3. *Маселе чыгаруунун кандай методдорун билесиңер?*
4. *Геометриялык маселени чыгаруунун синтетикалык, аналитикалык методдору жөнүндө айтып бергиле.*
5. *Маселе чыгаруунун туура жана тескери методдору жөнүндө эмне билесиңер?*
6. *Тескерисин элестетип далилдөө методунун мааниси эмнеде?*
7. *Геометриялык маселени алгебралык методдо чыгаруу алгоритмин түшүндүрүп бергиле.*
8. *Геометриялык маселени вектор методунда чыгаруу алгоритмин түшүндүрүп бергиле.*
9. *Вектор методу менен адатта кандай маселелер чыгарылат?*
10. *Геометриялык маселени координаталар методу менен чыгаруу алгоритмин түшүндүрүп бергиле.*
11. *Координаталар методу менен адатта кандай маселелер чыгарылат?*
12. *Геометриялык алмаштыруулар методун түшүндүрүп бергиле.*

3 ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНМОЛОР

1.1. Эки түз сызыктын кесишүүсүнөн төрт бурч пайда болду (1-сүрөт). Төмөндө келтирилген жадыбалда ар бир шарт ($A-E$)ге андан келип чыгуучу жыйынтык (1 – 5) ты ылайыктап койгула:

A) $\angle 1 = \angle 3$;	1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;	2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 + 90°$;	3) $\angle 1$ жана $\angle 4$ – кошну;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;	4) $\angle 1$ жана $\angle 3$ – өткүр;
E) $\angle 3 = 90°$.	5) $\angle 2$ жана $\angle 4$ – вертикал.

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Төмөндө кээ бир бурчтардын градустук чендери (1–7) берилген. Алардын кайсы түгөйлөрү коңушу болушу мүмкүндүгүн аныктагыла.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28° ; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 жана 2; B) 2 жана 6; C) 3 жана 4; D) 1 жана 7; E) 2 жана 5.

1.3. Эгер 2-сүрөттө $\angle 1 = \angle 7$ болсо, туура тастыгын тапкыла.

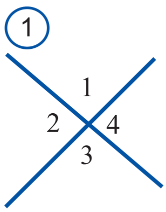
A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) a жана b кесишпейт;

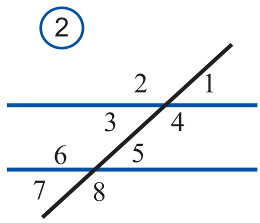
1.4. Эгер 3-сүрөттө $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ жана $\angle 2 = 72^{\circ}$ болсо, $\angle 3 = ?$

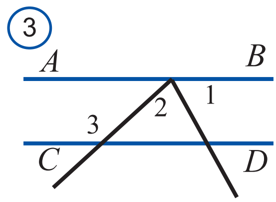
A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

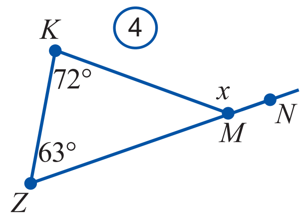
1.5. Эгер тең капталдуу үч бурчтуктун бурчтары 3 : 4 : 3 болсо, анын чокусунун биссектрисасын жана каптал жагынын арасындагы бурчту тапкыла.

A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.









1.6. 4-сүрөттө сүрөттөлгөн *KMZ* үч бурчтуктун тышкы бурчу болгон *KMN* бурчун чоңдугун тапкыла.

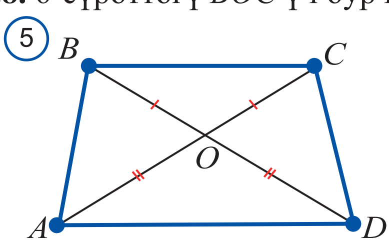
A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

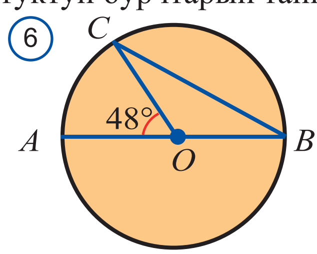
1.7. Туура барабардыктарды аныктагыла (5-сүрөт).

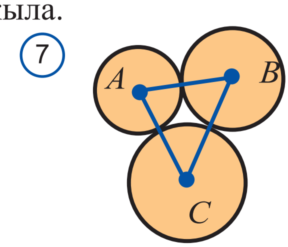
A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-сүрөттөгү *BOC* үч бурчтуктун бурчтарын тапкыла.







A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°; *E*)42°,90°,48°; *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Үч бурчтуктун учтарынын радиустары 6 см, 7 см жана 8 см болгон жана түгөйлөрү менен жандаш турган үч айлана борборлорунда жатат (7-сүрөт).

Бул үч бурчтуктун периметрин тапкыла.

A) 28 см; *B*) 29 см; *C*) 27 см; *D*) 42 см; *E*) 21 см.

1.10. Квадраттын жагы $20\sqrt{2}$ ге тең. Бул квадратка ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Трапециянын бир негизи экинчисинен 8 см ге узун, орто сызыгы болсо 10 см ге тең. Трапециянын кичик негизин тапкыла.

A) 2 см; *B*) 4 см; *C*) 6 см; *D*) 8 см; *E*) 10 см.

1.12. Диагоналдары 10 м жана 36 м болгон ромбдун бетин тапкыла.

A) 90 м²; *B*) 92 м²; *C*) 180 м²; *D*) 184 м²; *E*) 36 м².

1.13. 8-сүрөттөгү *м* жана *n* түз сызыктар өз ара параллель болсо, *a* жана *b* түз сызыктар арасындагы бурчту тапкыла.

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

1.14. 9-сүрөттөгү үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

1.15. 10-сүрөттөгү *R* радиустуу айланага ичтен сызылган *ABC* үч бурчтуктун *BC* жагын тапкыла.

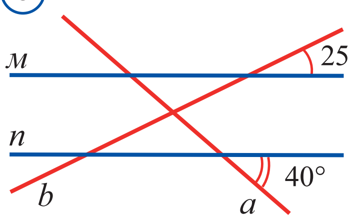
A) R; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

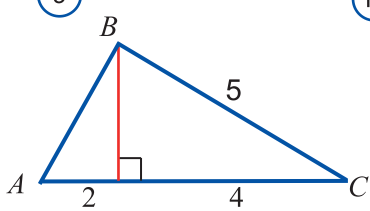
1.16. Бети 9π см² болгон тегеректи ороп турган айлананын узундугун тапкыла.

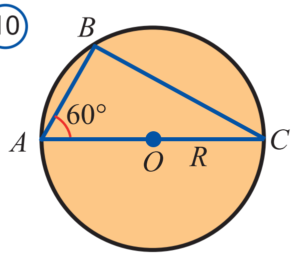
A) 3π см; *B*) 9π см; *C*) 12π см; *D*) 18π см; *E*) 6π см.

1.17. Жагы 6 см ге тең болгон квадратка ичтен сызылган тегеректин бетин тапкыла.

A) 9π см²; *B*) 144π см²; *C*) 36π см²; *D*) 72π см²; *E*) 18π см².

8


9


10


1.18. Квадратка ичтен сызылган айлананын радиусу 5 см. Квадраттык диагоналын тапкыла.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Ички бурчтарынын суммасы 1600° болгон туура көп бурчтуктун жактары санын тапкыла.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Диагоналдары 24 см жана 18 см болгон ромбдун периметрин тапкыла.

A) 120 см; *B*) 60 см; *C*) 84 см; *D*) 108 см; *E*) 144 см.

1.21. Параллелограммдын периметри 48 дм болуп, бир жагы экинчисинен 8 дм ге узун. Параллелограммдын кичик жагын тапкыла.

A) 8 дм; *B*) 16 дм; *C*) 6 дм; *D*) 12 дм; *E*) 10 дм.

1.22. 11-сүрөттөгү *ABC* тең капталдуу үч бурчтук сыртында эки тең *ABM* жана *CBK* бурчтуктар жасалды. Бул бурчтуктар жактары*AC* жагын, теңдеш түрдө, *M* жана *K* чекиттеринде кесип өттү. *MBC* жана *KBA* үч бурчтуктар теңдигин далилдегиле.

1.23. 12-сүрөттө сүрөттөлгөн AB жана CD түз сызыктарынын өз ара жайгашуусун аныктагыла. Жоопторуңарды негиздегиле.

1.24. 13-сүрөттөгү ABC үч бурчтукка ичтен айлана сызылган. Айлананын N жана Z жануу чекиттери үч бурчтуктун AB жана AC жактарынын айырмасына тең түрдө 3 см жана 4 см болгон кесиндилерге ажыратат ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Эгер үч бурчтуктун периметри 28 см болсо, анын жактарын тапкыла.

1.25. Тең жактуу үч бурчтукка радиусу $3\sqrt{3}$ болгон айлана сырттан сызылган. Ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

1.26. Негизидеги бурчу 30° болгон, тең капталдуу трапецияга сырттан айлана сызылган.Трапециянын бийиктиги 7 см ге тең болсо, анын орто сызыгын тапкыла.

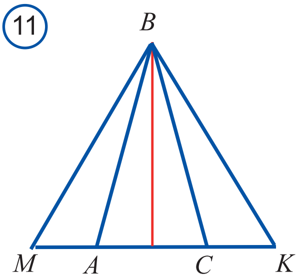
1.27. Негизиндеги бурчу 150° болгон тең капталдуу трапецияга сырттан айлана сызылган.Трапециянын орто сызыгы $16\sqrt{3}$ кө тең болсо, анын бийиктигин тапкыла.

1.28. Негизи 16 см жана бул негизине түшүрүлгөн бийиктиги 15 см болгон тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагын тапкыла.

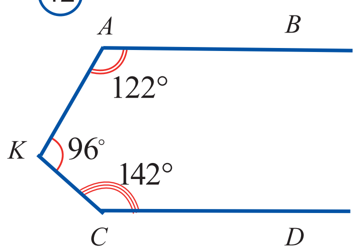
1.29. ABC үч бурчтуктун AO бийиктиги анын BC жагын BO жана OC кесиндилерге ажыратат. Эгер $AB = 10\sqrt{2}$ см, AC= 26 см жана $B = 45°$ болсо, OC кесинди узундугун тапкыла.

1.30. Ромбдун жагы 10 см, диагоналдарынан бири 12 см. Ромбга ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

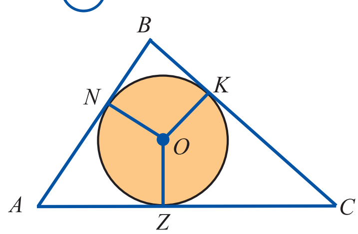
11



12



13



1.31. Радиусу 15 см болгон айланада анын борборунан 12 см узактыкта болгон хорда өткөрүлгөн. Хорданын узундугун тапкыла.

II БӨЛҮМ

СТЕРЕОМЕТРИЯГА КИРҮҮ

4 МЕЙКИНДИКТЕГИ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФИГУРАЛАР. КӨП ГРАНДЫКТАР

Берилген, геометриялык формалар тегиздикте толук жаткан же жатпаганына карап, жалпак жана мейкиндиктеги формаларга ажыратылат. Мурдагы класстарда геометрия сабактарында негизинен жалпак геометриялык фигуралардын касиеттерин үйрөндүк. 9-класс акырында болсо кээ бир мейкиндиктеги формалар: призма, пирамида, цилиндр, конус жана шардын (1-сүрөт) касиеттерин карап чыккан элек. Геометриянын планиметрия бөлүмү жалпак геометриялык формаларды, *стереометрия* бөлүмү болсо мейкиндиктеги геометриялык формалардын (же телолордун) касиеттерин үйрөнөт. Стеометрия грек сөзүнөн алынган болуп, "stereos"- мейкиндиктеги, "metreo" - өлчөймүн деген маанини билдирет.

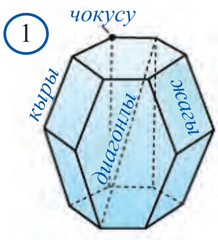
1

2

2- сүрөттө айлана чөйрөдөгү кээ бир заттар мейкиндиктеги телолордун түспөлү катары алар жөнүндө элес берет. Айланабыздагы бардык предметтер үч өлчөмдүү болуп, алардын формасы кандайдыр бир мейкиндиктеги геометриялык телого окшоп кетет. 9-класста мейкиндиктеги мындай телолор менен таанышкансыңар. Стереометрия курсун тутумдуу түрдө үйрөнүүнү баштайбыз. Алдын кээ бир бир мейкиндиктеги телолор элементтери жөнүндөгү маалыматтарды кыскача эскертип өтөбүз.

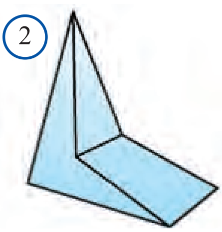
Көп грандык деп чектүү сандагы тегиздиктер менен чектелген телого айтылат. Томпок көп бурчтуктар бул *көп грандыктын грандары,* көп бурчтуктардын чокулары *көп грандык чокулары*, жактарынын кырлары болсо *көп грандык кырлары* деп аталат. Бир жакка тийиштүү болбогон учтарды бириктирүүчү кесинди *көп грандыктын диагоналы* деп аталат (1-сүрөт).

1



Көп грандыкта чегарасы анын *бети* деп аталат. Көп грандыктын бети мейкиндикти эки бөлүккө ажыратат. Алардын чексиз бөлүгү *көп грандыктын тышкы бөлүмү,* чектүү бөлүк болсо *көп грандыктын ички бөлүмү* деп аталат.

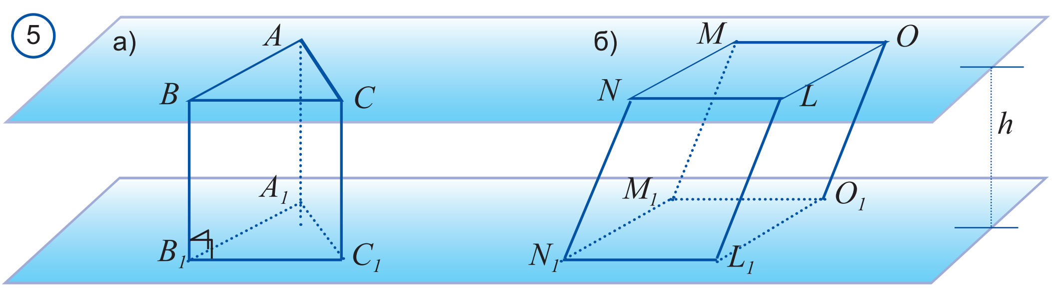
2



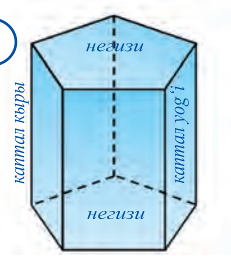
Көп гранды каалаган граны жаткан тегиздиктин бир тарабында жатса, мындай көп бурчтукка *томпок көп грандык* дейилет. Маселен, куб - томпок көп грандык эсептелет. 2-сүрөттө болсо томпок болбогон көп грандык сүрөттөлгөн. Мындан ары томпок эң жөнөкөй көп жактар призма жана пирамидаларды үйрөнөбүз.

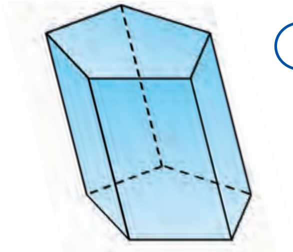
Призма деп эки граны тең көп бурчтуктан, калган грандары болсо параллелограммдан турат көп грандыкка айтылат (3-сүрөт). Тең грандар призманын *негиздери* параллелограмдар болсо анын каптал *грандары* деп аталат (4-сүрөт). Негизинин жактарынын санына карап призмалар *үч бурчтуу, төрт бурчтуу ж.б. n-бурчтуу призмалар* деп жүрүтүлөт. 3- а сүрөттө үч бурчтуу $ABCA_1B_1C_1$ призма, 3.*b*-сүрөттө болсо төрт бурчтуу $MNLOM_1N_1L_1O_1$ призма берилген.

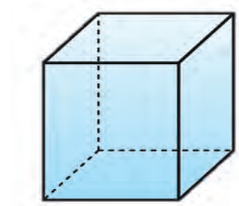
5



Призма грандарыны негизине перпендикуляр же перпендикуляр эместигине карап *туура призма* (6- сүр.) же *жантык призма* (7- сүр.) деп аталат.

6


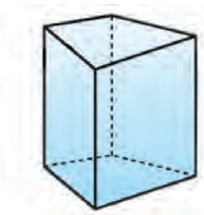
7


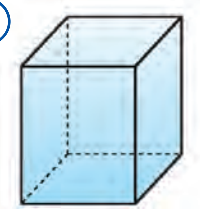
8


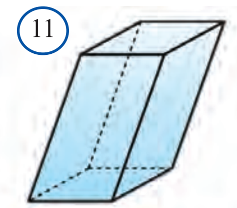
Негизи туура көп бурчтуктан түзүлгөн призма *туура призма* деп аталат (8-сүр). Негизи параллелограммдан түзүлгөн призма *параллелепипед* деп аталат (9-сүр.) Алар призма сыяктуу тик жана жантык да болот. Негизи туура төрт бурчтуктан түзүлгөн туура параллелепипед *тик бурчтуу параллелепипед* деп аталат (10-сүр.). Тик бурчтуу параллелепипеддин бардык жактары туура төрт бурчтуктардан түзүлгөн.

Тик бурчтуу параллелепипеддин чокусунан чыгуучу үч кыры анын өлчөмдөрү деп айтылат.

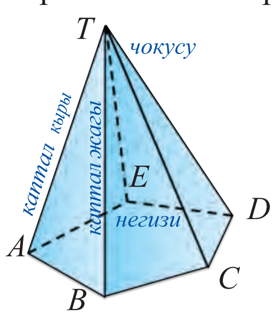
Өлчөмдөрү тең болгон тик бурчтуу параллелепипед *куб* деп аталат. Кубдун бардык грандары тең квадраттардан түзүлгөн.

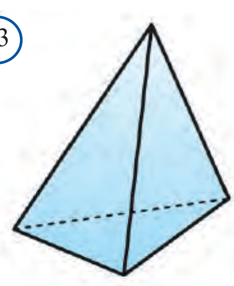
9


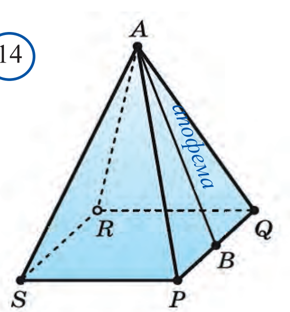
10


11


Пирамида деп бир граны көп бурчтуктан, калган грандары болсо бир гана чекитке ээ үч бурчтуктардан түзүлгөн көп грандыкка айтылат. Көп бурчтук пирамиданын *негизи*, үч бурчтуктар болсо анын *каптал грандары* деп аталат. 10- сүрөттө *TABCDE* беш бурчтуу пирамида сүрөттөлгөн. *ABCDE* беш бурчтуу пирамиданын негизи, *ATB, BTC, CTD, DTE* жана *ETA* үч бурчтуктар анын каптал грандары, T болсо анын чокусу.

12


13


14


Негизинин жактары санына карап пирамидалар *үч бурчтуктуу, төрт бурчтуу ж.б. n-бурчтуу пирамидалар* деп жүргүзүлөт.

13-сүрөттө үч бурчтуктуу, 14- сүрөттө болсо төрт бурчтуу пирамида сүрөттөлгөн.

Пирамида каптал грандарынын негизине перпендикуляр же перпендикуляр эместигине карап *туура пирамида* же *жантык пирамида* деп аталат.

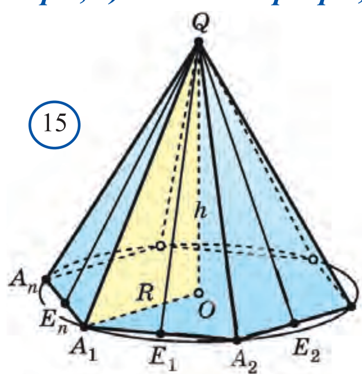
Туура пирамида деп негизи туура көп бурчтуу жана чокусунан негиз борборуна түшүрүлгөн кесинди ушул борбордон өтүүчү жана негиз тегиздигинде жатуучу түз сызыкка перпендикуляр болгон пирамидага айтылат.

Туура пирамида каптал бетинин пирамида чокусунан түшүрүлгөн бийиктиги анын *апофемасы* деп жүргүзүлөт.

15-сүрөттө *APQRS* төрт бурчтуу туура пирамида сүрөттөлгөн. Андагы АВ кесинди пирамида апофемаларынан бири эсептелет.

Теорема 1.1. Туура пирамиданын а) каптал грандары; b) каптал кырлары; с) апофемалары өз ара тең.

Далил. Айталы, $QA_1A_2... A_n$ туура пирамида, О болсо пирамида негизинин борбору болсун (13-сүрөт).



а) OA_1, OA_2, ... OA_n кесиндилер туура көп бурчтукка сырттан сызылган айлана радиустан түзүлгөн болгону үчүн өз ара тең болот. Тик бурчтуу QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n үч бурчтуктарда эки катеттер өз ара тең болгону үчүн алар тең болот. Анда алардын гипотенузалары дагы тең болот: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

b) $QA_1A_2... A_n$ туура пирамиданын каптал кырлары өз ара тең болгону үчүн анын каптал грандары тең капталдуу үч бурчтуктардан түзүлгөн болот. Бул үч бурчтуктардын негиздери туура көп бурчтуктун капталы болгону үчүн өз ара тең болот.

Демек, туура пирамиданын каптал грандары уч жактары боюнча өз ара тең.

с) туура пирамиданын каптал грандары тең болгону үчүн, алардын Q чокусунан түшүрүлгөн бийиктиктери дагы өз ара тең болот.

Демек, туура пирамиданын апофемалары дагы өз ара тең.❑

Теорема 1.2. Туура пирамиданын каптал сырты анын негизинин жарым периметри жана апофемасынын көбөйтүндүсүнө тең.

Далилдөө. Айталы, $QA_1A_2... A_n$ туура пирамида болсун (15- сүрөт). Пирамиданын каптал бети анын каптал грандарынын бетинин суммасына тең. Анын каптал грандары болсо өз ара тең болгон тең капталдуу үч бурчтуктардан түзүлгөн. Өз кезегинде бул үч бурчтуктардын бийиктиктери дагы өз ара тең апофемалардан түзүлгөн: $QE_1 = QE_2 = ... = QE_n$. жана алардын

$S = S_{A_1QA_2}+S_{A_2QA_3} + ...+ S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + ... + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2} QE_1 (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) = p \cdot a$, бул жерде p - пирамида негизинин жарым периметри, a - пирамида апофемасы. ❑

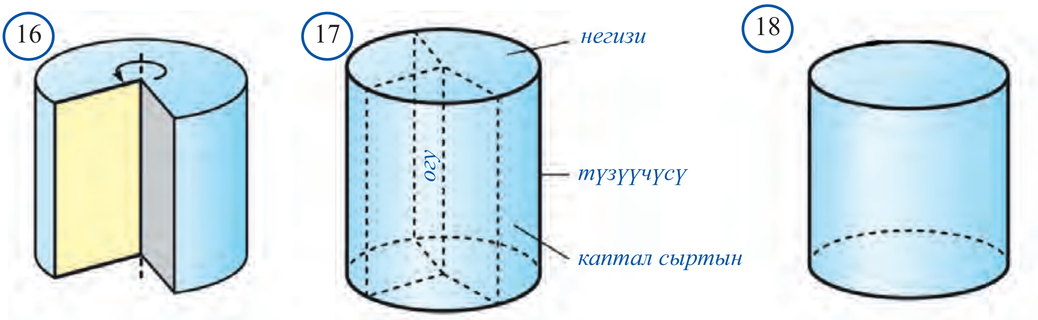
Тема боюнча суроолор

1. *Кандай геометриялык формалар а) жалпак; b) мейкиндиктеги деп аталат?*
2. *Кандай тело көп грандык деп аталат? Анын элементтерин айтып бергиле.*
3. *Кандай тело призма деп аталат? Анын элементтерин айтып бергиле.*
4. *Кандай призма түрлөрүн билесиңер?*
5. *Тик бурчтуу параллелепипедди айтып бергиле.*
6. *Кандай тело пирамида деп аталат? Анын элементтерин айтып бергиле.*
7. *Кандай пирамида түрлөрүн билесиңер?*
8. *Туура пирамида касиеттерин айткыла.*

5 АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ: ЦИЛИНДР, КОНУС ЖАНА ШАР

Мейкиндиктеги фигуралардын дагы бир маанилүү класстарынан бири – бул айлануу телолору болушат. Аларга цилиндр, конус жана шар кирет.

Тик төрт бурчтукту бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон телого *цилиндр* деп аталат (16–18 сүрөттөр).



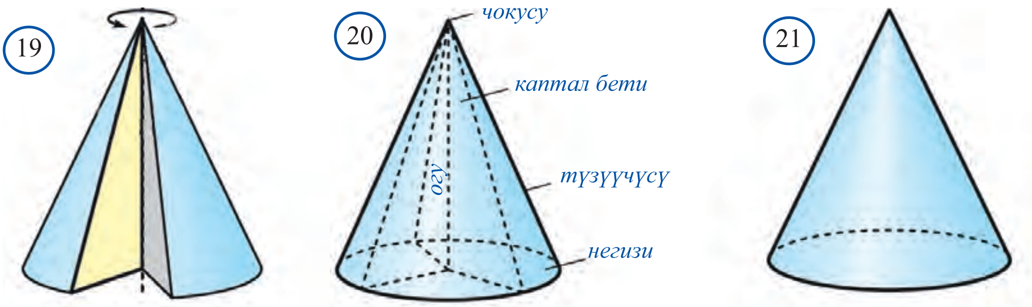
Мындай айландырууда туура төрт бурчтуктун бир капталы козголбостон калат. Аны *цилиндрдин огу* деп атайбыз (17-сүрөт).

Огуна карама-каршы жаткан каптал тегеректи айландыруусунан пайда болгон бети *цилиндрдин каптал бети* деп, капталдын өзү болсо *цилиндрдин түзүүчүсү* деп аталат.

Тик төртбурчтуктун калган капталдарынын ар бири бул айланууда айлана көрүнүшүндөгү негизди пайда кылат. Бул тегеректер *цилиндрдин негиздери* деп аталат.

Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир катетинин тегерегинде айлантыруудан пайда болгон телого *конус* деп айтылат (19–21 сүрөттөр). Бул катетти болсо *конустун огу* деп атайбыз.

19 20 21

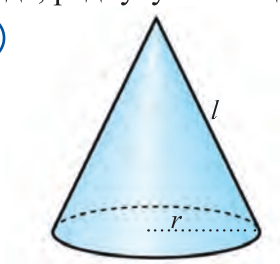


Бул айландырууда башка катет пайда кылган тегерек конустун *негизи, гипотенуза пайда кылган бетин* болсо *конустун каптал бети* деп, гипотенузанын огу болсо *конустун түзүүчүсү* деп аталат. Ошондой эле, бул айланууда козголбой калган үч бурчтук чокусу *конустун чокусу* деп аталат (20-сүрөт).

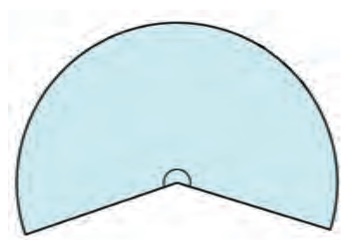
Теорема 1.3. Конустун каптал бети анын негизи аянтынын жарымы менен түзүүчүсүнүн көбөйтүндүсүнө барабар.

Далилдөө. Айталы, негиздин радиусу r жана түзүүчүсү l болгон конус берилген болсун (22-сүрөт). Конус каптал бетин тегиздикке жайсак, натыйжада, радиусу l ге тең болгон тегерек секторго ээ болобуз (23-сүрөт).

22



23



Бул сектордун борбору бурчу φ ны табабыз (21- сүрөт). Бул борбордук бурч, конустук негизинен айланасынын узундугу - $2\pi r$ ге тең болгон сектордун жаасына тирелген. Берилген, радиусу l болгон айлананын узундугу $2\pi l$ ге тең болуп, ал 360^{o} та борбордук бурчка тирелген. Натыйжада пропорцияга ээ болобуз:

φ^{o} туу борбордук бурч – $2\pi r$ ге барабар жаа;

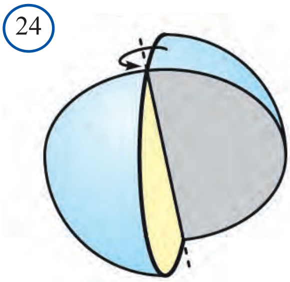
360^{o} туу борбордук бурч – $2\pi l$ ге барабар жаа.

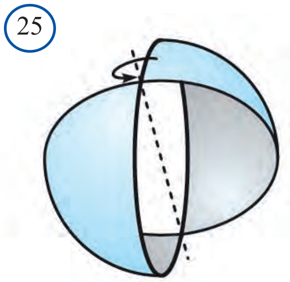
Анда $$\varphi = \frac{360^0}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^0 \cdot r}{l}$$

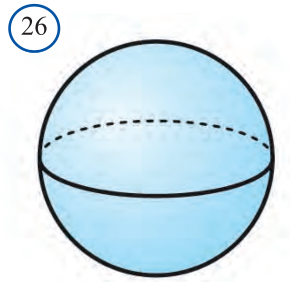
радиусу l ге тең болгон, φ бурчтуу S сектордук аянтын табабыз:

$$S = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \varphi^{o} = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \frac{360^0 \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \ \square$$

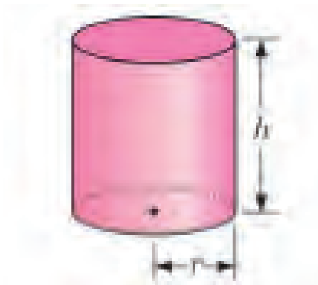
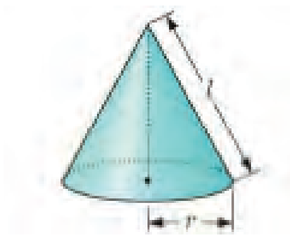
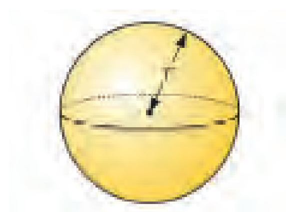
Тегеректин өзүнүн диаметринин айланасында айландыруудан пайда болгон телого *шар* деп айтылат (24-сүрөт). Бул айландыруудан айлана пайда кылган бети *сфера* деп аталат 25-сүрөттө шар сүрөттөлгөн.



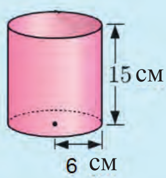
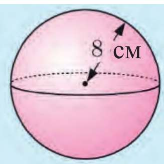
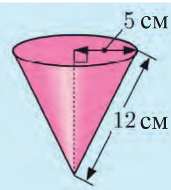




Айланма телолордун каптал жана толук бетинин формулалары:

		
Цилиндр $S_{каптал} = 2\pi rh$ $S_{толук} = 2S_{негиз} + S_{каптал}$ $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$	**Конус** $S_{каптал} = 2\pi rl$ $S_{толук} = S_{негиз} + S_{каптал}$ $= \pi r^2 + 2\pi rl$	**Шар** $S = 4\pi r^2$

Мисал. Төмөнкү телолордун каптал бетин тапкыла.

		
$S_{каптал} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 =$ $= 565,5$ см^2	$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 =$ $= 804,2$ см^2	$S_{толук} = 2\pi rl + \pi r^2 =$ $= 2 \cdot 3,14 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 =$ $= 267$ см^2.

Тема боюнча суроолор

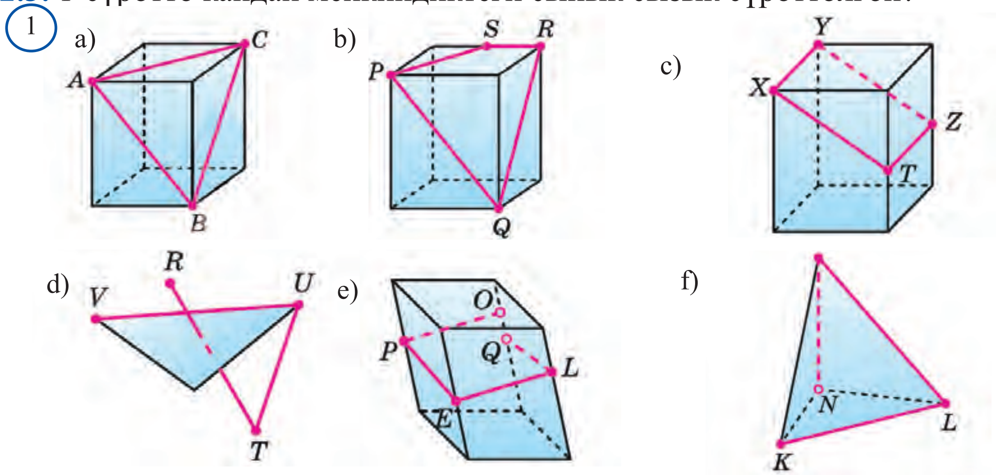
1. Айланма телолорго мисал келтиргиле.
2. Кандай тело цилиндр деп аталат? Анын элементтерин айтып бергиле.
3. Кандай тело конус деп аталат? Анын элементтерин айтып бергиле.
4. Кандай тело шар деп аталат? Анын элементтерине айтып бергиле.

6 ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНМОЛОР

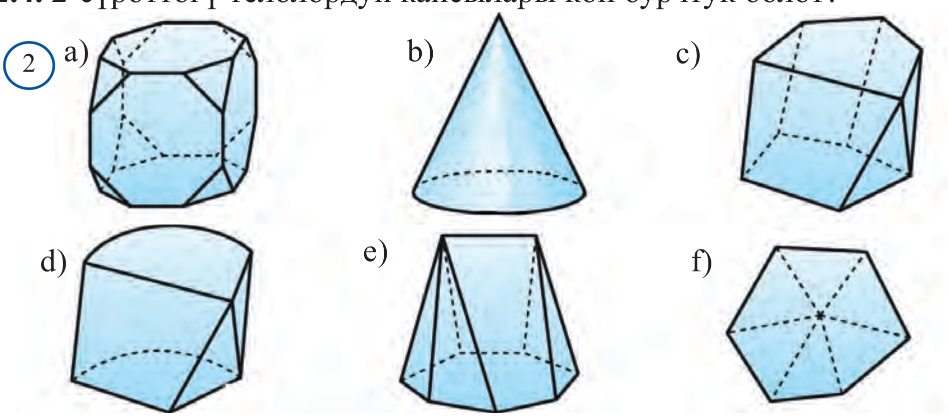
2.1. Туура призманын каптал грандары туура тик төрт бурчту экендигин далилдегиле.

2.2. Туура призманын каптал бети негизинин периметри менен каптал кырынын көбөйтүндүсүнө барабар экендигин далилдегиле.

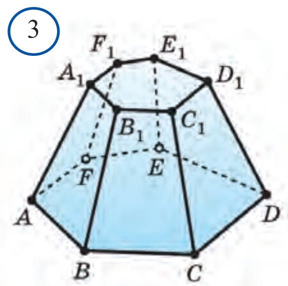
2.3. 1-сүрөттө кандай мейкиндиктеги сынык сызык сүрөттөлгөн?



2.4. 2-сүрөттөгү телолордун кайсылары көп бурчтук болот?



2.5. 3-сүрөттө $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ көп бурчтук сүрөттөлгөн. Андагы а) CD кыры жалпы болгон ; b) DD_1 кырлары жалпы болгон капталдарын; с) E үч жалпы болгон капталдарын; d) C_1 үч жалпы болгон капталдарын; е) A үч жалпы болгон кырларын; е) с) F_1 үч жалпы болгон кырларын айткыла.



2.6. Тик параллелепипеддин негизи ромбдон түзүлгөн. ромбдун жагы 8 м, диагоналдары болсо 10 м жана 24 м ге тең. Параллелепипеддин толук бетин тапкыла.

2.7. *AB* жана *AK* түз сызыктар канча жалпы чекитке ээ болушу мүмкүн?

2.8. Туура үч бурчтуктуу призманын негизинин жагы 6 см, каптал кыры 11 см ге тең. Призманын толук бетин тапкыла.

2.9. Туура n-бурчтуу призма негизинин жагы a, каптал кыры h ка тең. Эгер a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ болсо, призманын каптал жана толук бетин тапкыла.

2.10. Туура үч бурчтуктуу пирамиданын апофемасы 15 ге, пирамиданын чокусун негиз борбору менен туташтыруучу кесиндинин узундугу 12 ге барабар. a) пирамиданын каптал кырын жана негизинин жагын b) пирамида каптал бетин; c) пирамиданын толук бетин тапкыла.

2.11. Туура төртбурчтуу пирамиднын негизи 12 см ге, пирамиданын чокусун негизинин борбору менен туташтыруучу кесиндинин узундугу 16 см ге барабар. a) пирамиданын каптал кырын жана апофемасын b) пирамида каптал бетин; c) пирамиданын толук бетин тапкыла.

2.12*. *REFGH* пирамиданын негизинин жактары 10 см жана 18 см жана бети 90 см^2 ге барабар болгон *EFGH* параллелограммдан түзүлгөн. Пирамиданын чокусу *R* ди негизнин диагоналдары кесишкен чекити *O* менен туташтыруучу кесинди узундугу 6 см ге тең. a) пирамиданын каптал кырларын; b) пирамиданын каптал бетин; c) пирамида толук бетин тапкыла.

2.13*. Пирамиданын негизинин жактары 8 жана 10 болгон жана кичик диагоналы 6 га тең болгон параллелограммдан түзүлгөн. Чокусун негиз диагоналдары кесишүү чекити менен туташтыруучу кесинди узундугу 4 кө тең. a) пирамида каптал кырларын; b) каптал бетин; c) толук бетин тапкыла.

2.14*. Туура алты бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 10 см ге тең. Пирамиданын чокусун негиз борбору менен туташтыруучу кесинди узундугу $\sqrt{69}$ га тең. a) пирамида каптал кырын жана апофемасын; b) пирамиданын каптал бетин; c) пирамиданын толук бетин тапкыла.

2.15. Туура алты бурчтуу пирамиданын каптал бети 150 м^2 ге, каптал кыры болсо 10 м ге тең. Пирамиданын негизинин аянтын тапкыла.

2.16. Цилиндрдин каптал бети негизинин айланасы узундугунун цилиндрдин түзүүчүсүнө көбөйтүндүсүнө тең экендигин далилдегиле.

4

2.17. Цилиндрдин негизинин радиусу жана түзүүчүсү боюнча анын каптал бетин тапкыла. a) 7 см жана 12 см; b) 12 см жана 7 см; c) 1 м жана 12 м; d) 0,7 м жана 1,2 м.

2.18. Цилиндрдин негизинин бети 300π см^2 ге, түзүүчүсү 6 см болсо, цилиндр негизинин бетин тапкыла.

2.19. Цилиндр каптал бети 90π см^2 ге, түзүүчүсү 5 см болсо, цилиндрдин толук бетин тапкыла.

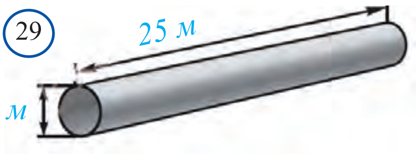
2.20. Цилиндрдин негизин диаметри 1м, түзүүчүсү болсо негизнин айланасынын узундугуна тең. Цилиндрдин каптал бетин тапкыла.

2.21. Цилиндрдин түзүүчүсү анын негизинин радиусунан 12 см ге узун Цилиндрдин толук бети болсо 128π см²·. Цилиндрдин негизин радиусу жана түзүүчүсүн тапкыла.

2.22. 28- сүрөттө сүрөттөлгөн цилиндр формасындагы бактын эки жагын бойоо керек Эгер бактын бийиктиги 2,5 м, негизинин диаметри 1,2 м жана боек калыңдыгы 0,1 мм болсо, бакты бойоо үчүн канча боек керек болот?

2.23. 29- сүрөттө сүрөттөлгөн узундугу 25 м жана диаметри 6 m болгон трубаны даярдоо үчүн нече бөлөк тунике керек болот? Тунике бөлөктөрүн бир-бирине улоодо труба каптал сыртын 2,5 % ге тең тунике иштетилишин эсепке алгыла.

29



2.24. Конустун негизинин радиусу 12 мм, конустун чокусун негизнин борбору менен туташтыруучу кесиндинин узундугу 35 мм ге тең. Конустун каптал сыртын тапкыла.

2.25. Конустун негизинин диаметри 32 см, конустун чокусун негизнин борбору менен туташтыруучу кесинди узундугу 63 см ге тең. Конустун каптал бетин тапкыла.

2.26*. Конустун түзүүчүсү l ге тең болуп, ал негизнин тегиздиги менен α бурчун түзөт. Эгер a) $l = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24$ дм, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 5$ м, $\alpha = 60^\circ$ болсо, конустун негизин аянтын тапкыла.

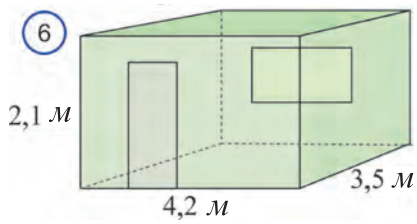
2.27*. Конустун түзүүчүсү l ге тең болуп, ал негизнин радиусу менен α бурчту түзөт. Эгер a) $l = 18$ см, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20$ дм, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 2{,}4$ м, $\alpha = 60^\circ$ болсо, конустун толук бетин тапкыла.

2.28*. Конустун негизинин радиусу жана түзүүчүсү тиешелүү түрдө a) 11 см жана 8 см; b) 8 мм жана 11 мм; c) 3 м жана 18 м; d) 2,7 м жана 1,2 м ге тең болсо, конустун каптал бетин тапкыла.

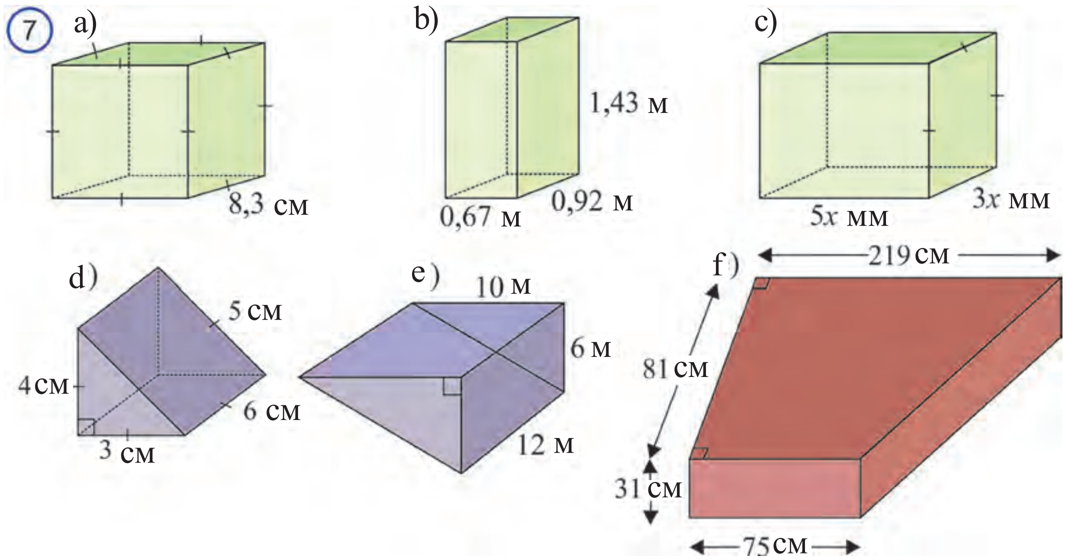
2.29. 6- сүрөттө сүрөттөлгөн комнатаны ондоо керек. Комната өлчөмдөрү 0,8 м жана 2,2 м болгон эшик жана өлчөмдөрү 183 см жана 91 см болгон терезе бар. Эшиктин эки жагын да боёо керек Жадыбалда эки түрдүү боёктун баасы берилген. Бул маалыматтардан пайдаланып, үнөмдөп ондоо үчүн канча каражат керектигин эсептегиле'

Боёк түрү	көлөмү	Боёк бети	Баасы
Дубал үчүн	*4 l*	*16 м²*	*3245 с.*
	2 l	*8 м²*	*2080 с.*
Эшик үчүн	*2 l*	*10 м²*	*2360 с.*
	1 l	*5 м²*	*1540 с.*

6

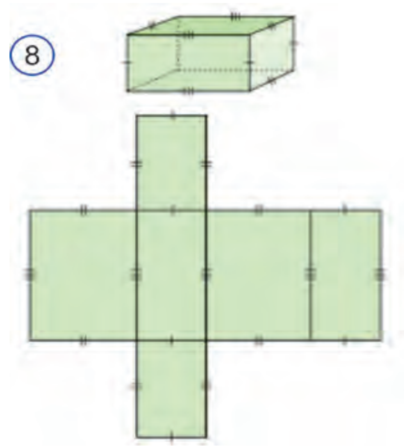


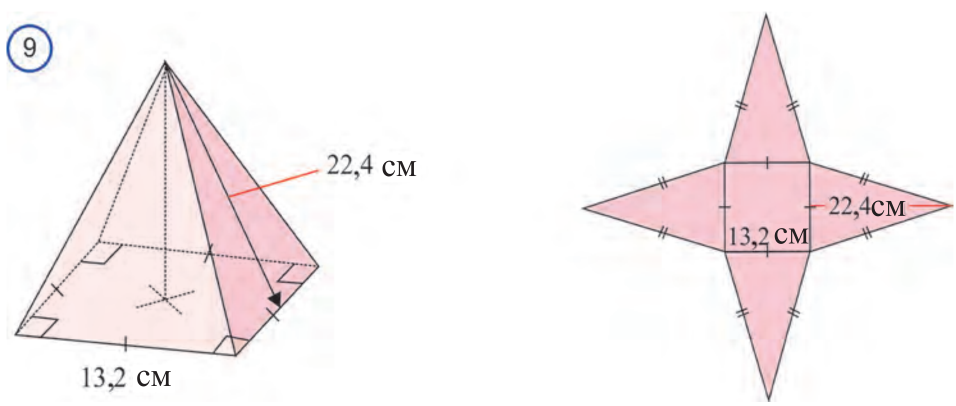
2.30. 7-сүрөттөгү маалыматтардан пайдаланып, көп бурчтуктун толук бетин тапкыла.



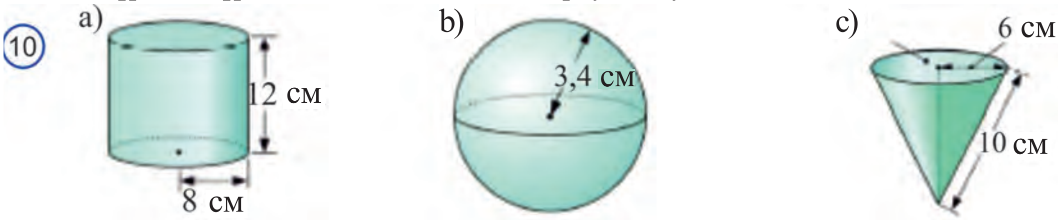
2.31. 8- сүрөттө сүрөттөлгөн тик бурчтуу параллелепипед жайылмасы боюнча анын толук бетин формуласын тапкыла.

2.32. 9- сүрөттө сүрөттөлгөн төрт бурчтуу туура пирамида жайылмасы боюнча анын толук бетин формуласын тапкыла.



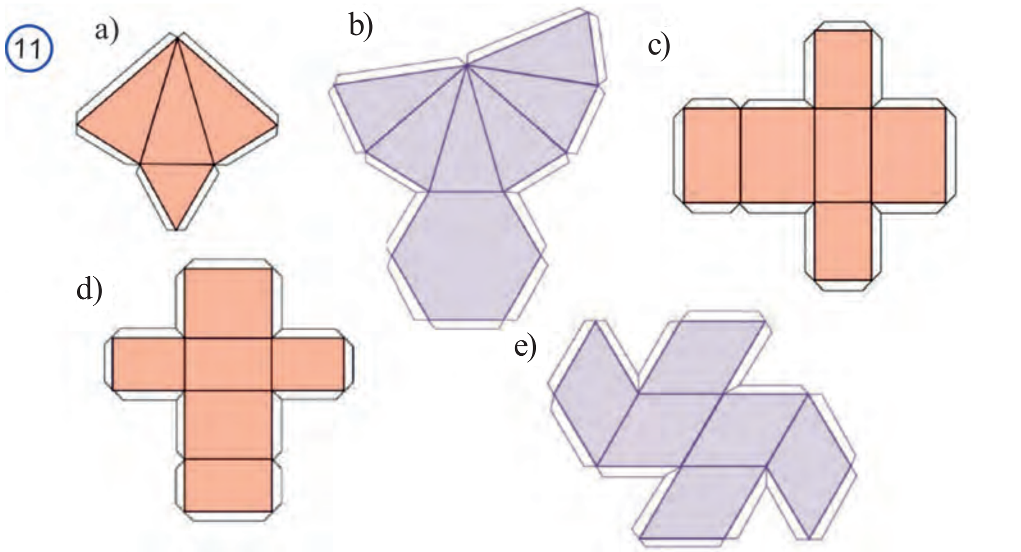


2.33.10-сүрөттө сүрөттөлгөн айланма телолордун толук бетин тапкыла.

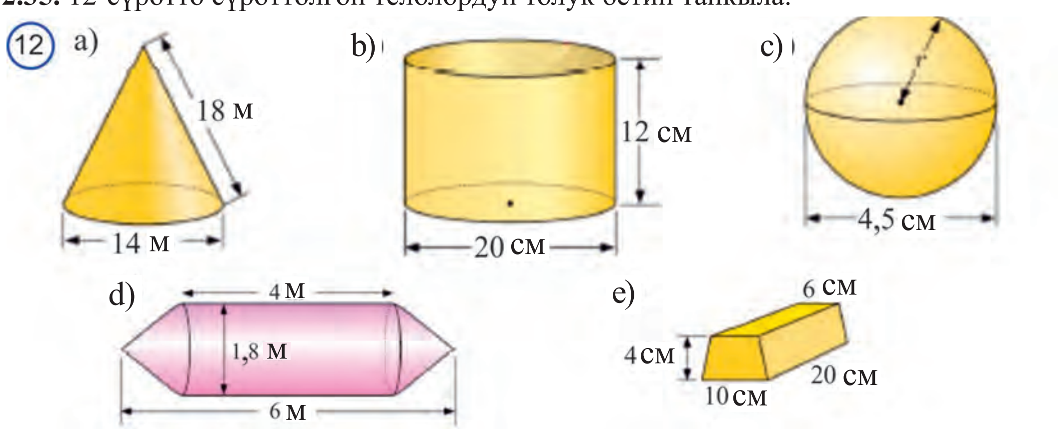


2.34. Мейкиндиктеги телолорду элестетүү үчүн алардын моделинен пайдаланган макул. Мейкиндиктеги телолордун моделин алардын жайылмасынан пайдаланып жасоо мүмкүн. (11-сүрөт) Мейкиндиктеги телолордун жайылмасы жалпак геометриялык фигуралардан түзүлгөн. Төмөндөгү жайылмалардан пайдаланып, тик бурчтуу параллелепипед, куб жана пирамидалар моделин жасагыла.

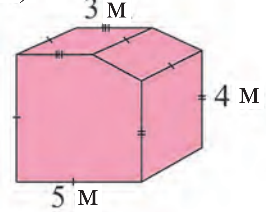
e)



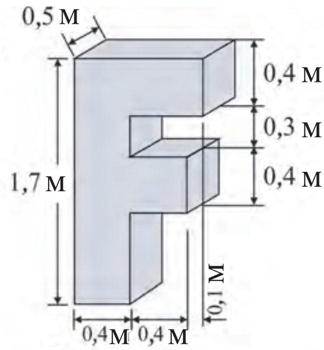
2.35. 12-сүрөттө сүрөттөлгөн телолордун толук бетин тапкыла.



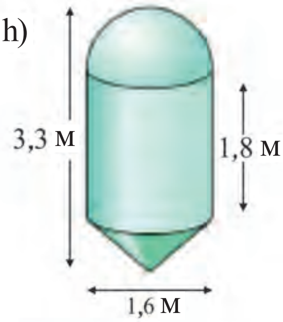
f)



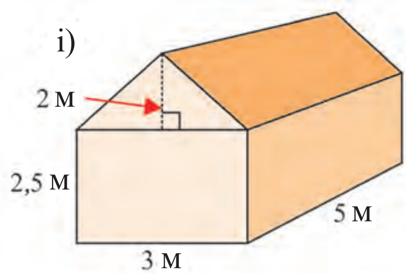
g)



h)



i)



j)

k)

Геометриялык көркөмдүүлүк

Өткөн заманда жасалган байыркы архитектуралык эстеликтерди курууда ата-бабаларыбыз чоң геометриялык билим жана кудуретине ээ болушкан. Муну бир гана Самарканд шаарындагы Регистан аянтында курулган тарыхый эстеликтерден да билип алуу мүмкүн (1-сүрөт).

Хива шаарындагы Иченкалаа сүрөтүндө (2-сүрөт) кандай геометриялык фигураларды көрүп жатасын?

Таж-Махал – дүйнөнүн жети укмуштарынан бири (3-сүрөт). Индиянын Агра шаарында Бабурый Шах-Жахан тарабынан курулган байыркы эстелик. Аны курган усталар геометриядан чоң билимге ээ болгондуктары шексиз көрүнүп турат.

Сидней шаары опера театры (4-сүрөт) – Австралияда курулган заманбап архитектура анын мисалы. Өзүнүн өзгөчө геометриялык көрүнүшү менен ажыралып турат.

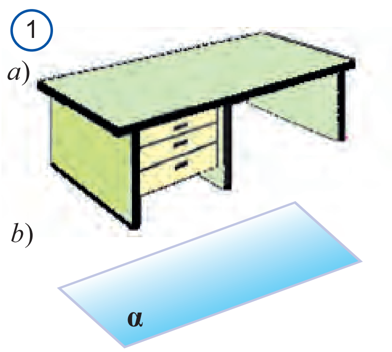
Кооз геометриялык элестерге ээ, ирактык таанымал архитектор аял Заха Хадидтин проекти негизинде Кытай борбору Пекин шаарында жайгашкан “Galaxy Soho” эс алуу комплексин ажайып көрүнүшүнөн ыракаттанбастан айла жок (5-сүрөт).

Мамлекетибиз борборунда бой көтөрүп турган "Tashkent city" комплексинин проектин көрүп, таң калбастыктан айлабыз жок. Мындай ажайып сулуулуктарды жаратууда инженер курууларга канчалык геометриялык билимдер керек болгонун элестетүү мүмкүн (6-сүрөт).

III БӨЛҮМ

МЕЙКИНДИКТЕГИ ТҮЗ СЫЗЫКТАР ЖАНА ТЕГИЗДИКТЕР

7 МЕЙКИНДИКТЕГИ ТҮЗ СЫЗЫКТАР ЖАНА ТЕГИЗДИКТЕР

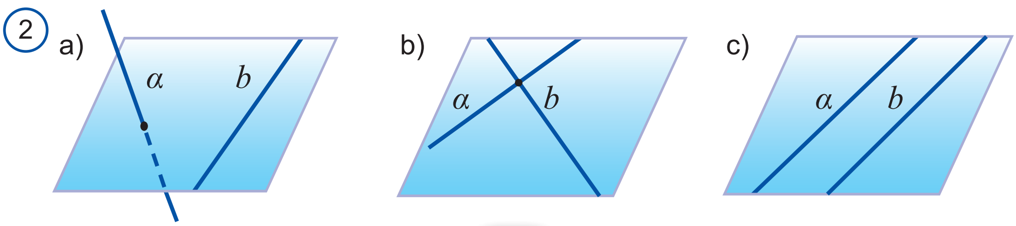


Мейкиндиктеги негизги геометриялык фигуралар: чекит, түз сызык жана тегиздик эсептелет. Тегиздикти столдун үстү сыяктуу тегиз сырт деп элестетебиз (1.а-сүрөт). Тегиздик дагы түз сызык сыяктуу чексиз. Сүрөттө тегиздиктин жалаң бир бөлүгүн гана (адатта параллелограмм фигурасында) сүрөттөйбүз (1.а-сүрөт). Бирок аны бардык капталы чексиз уланып жатат деп элестетебиз жана чиймеде параллелограмм көрүнүшүндө сүрөттөйбүз (1.b-сүрөт). Тегиздиктерди α, β, γ,... грек тамгасы менен белгилейбиз.

Мейкиндикте эки түз сызык бир тегиздикте жатышы же жатпастыгы мүмкүн (2-сүрөт). Мейкиндикте бир тегиздикте жатпай турган эки түз сызыкка *кайчылаш түз сызыктар* дейилет (2.а-сүрөт).

Бир тегиздикте жаткан жана жалаң бир гана жалпы чекитке ээ болгон түз сызыктар *кесишүүчү түз сызыктар* деп аталат (2.b -сүрөт).

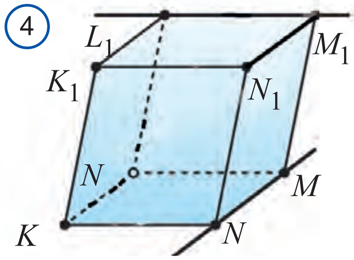
Бир тегиздикте жаткан жана өз ара кесишпей турган түз сызыктар болсо *парллель түз сызыктар* деп аталат (2.c -сүрөт).



Кайчылаш түз сызыктарга бири көпүрөдөн, экинчиси көпүрө астынан өтүүчү жолдорду символ катары келтирүү мүмкүн (3-сүрөт). Ошондой эле, 4-сүрөттөгү параллелепипеддин MN жана L_1M_1 кырлары жаткан түз сызыктар кайчылаш болот

3

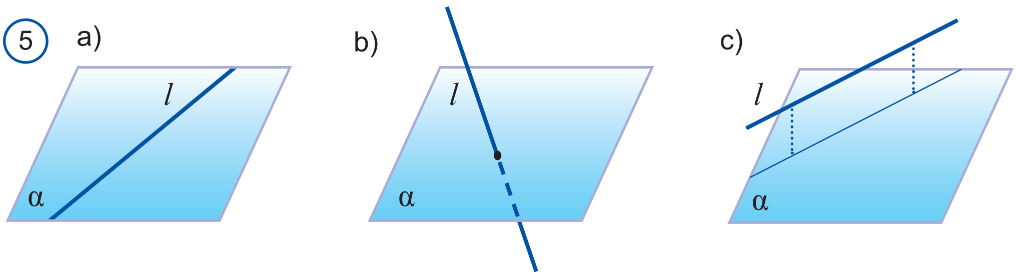
4



Мейкиндикте түз сызык жана тегиздик өз ара кандай жайгашуусу мүмкүн?

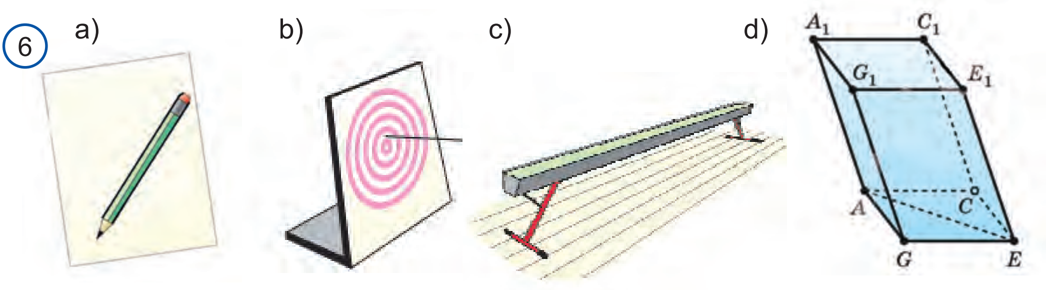
Түз сызык тегиздикте жатышы (5.a-сүрөт), аны кесип өтүшү (5.b-сүрөт) же кесип өтпөстүгү, жалпы чекитке ээ болбостугу (5.c-сүрөт) мүмкүн. Акыркы абалда *түз сызык тегиздикке парллель* деп аталат.

5

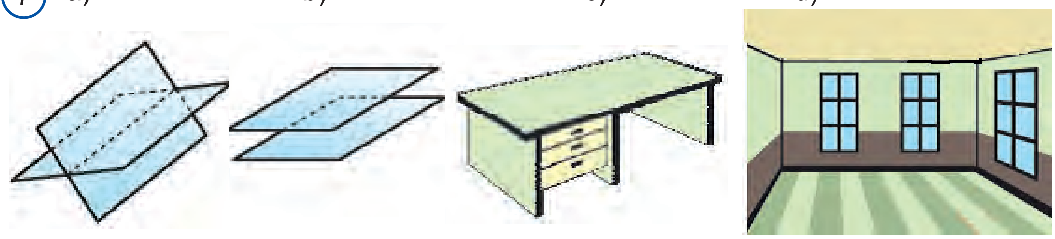


Стол үстүндө жаткан калем – тегиздикте жаткан түз сызык жөнүндө (6.a -сүрөт), мишенге кадалган ок (6.b -сүрөт) – тегиздикти кесип өтүүчү түз сызык жөнүндө жана полдо турган гимнастикалык жыгач – тегиздикке параллель түз сызык жөнүндө (6.c -сүрөт) сүрөттөп берет.

6



7 a) b) c) d)



6.d-сүрөттө сүрөттөлгөн параллелепипеддин $AGEC$ негизинин диагоналыAE жаткан түз сызык негиз тегиздигинде жатат, AGA_1G_1 жак жаткан тегиздикти кесип өтөт жана $A_1G_1E_1C_1$ жогору негиз тегиздигине параллель болот.

Эми мейкиндикте тегиздиктеринин өз ара жайгашуусуна аныктык киргизели.

Мейкиндикте тегиздиктер бир түз сызык бойлоп кесишиши (7.а-сүрөт) же жалпы чекитке ээ болбостугу мүмкүн (7.b-сүрөт). Келип чыккан, бул тегиздиктер, теңдеш түрдө, *кесишүүчү* же *параллель* тегиздиктер деп аталат.

7.с-сүрөттө сүрөттөлгөн столдун үстү сырты жана жан капталы кесишүүчү тегиздиктер жөнүндө, комнатанын полу жана потологу болсо (7.d-сүрөт) параллель тегиздиктер жөнүндө сүрөттөйт. 4-сүрөттө сүрөттөлгөн параллелепипеддин карама-каршы болбогон жан жактары – кесишүүчү тегиздиклер жөнүндө, төмөнкү жана үсткү негиздери менен карама-каршы жактары болсо параллель тегиздиктер жөнүндө сүрөттөп берет .

Параллелдик белгиси – "// " параллель түз сызыктарды гана эмес, тегиздикке параллель түз сызыкты жана параллель тегиздиктерди белгилөөдө да иштетилет:

$a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ жана $\alpha \parallel \beta$.

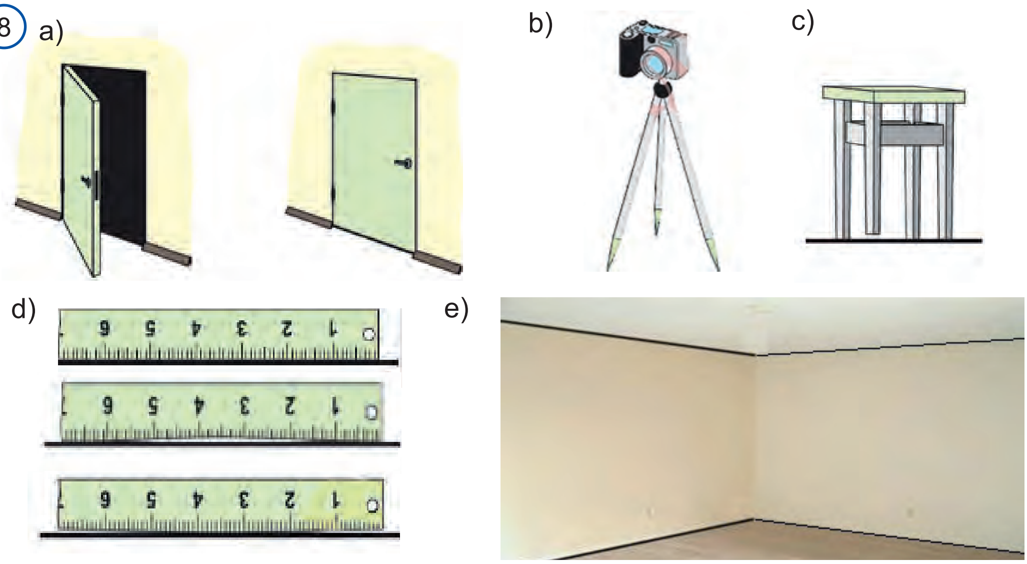
Планиметриядагы сыяктуу, стереометрияда дагы кээ бир геометриялык фигуралардын касиеттери далилсиз кабыл кылынат. Мейкиндикте тегиздиктердин төмөндөгү касиеттерин далилсиз, S группа аксиомалары эсебинде кабыл кылабыз:

S_1 *Эгер үч чекит бир түз сызыкта жатпаса, анда алар аркылуу бир гана тегиздик өткөрүшү мүмкүн.*

S_2 *Эгер түз сызыктын эки чекити бир тегиздикте жатса, анда анын бардык чекиттери ушул тегиздикте жатат.*

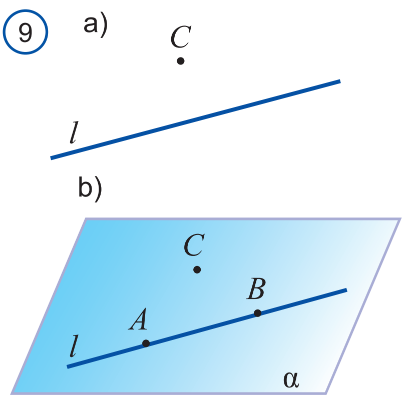
S_3 *Эгер эки тегиздик жалпы чекитине ээ болсо, анда бул тегиздиктер ушул чекиттен өтүүчү жалпы түз сызыкка дагы ээ болот.*

Активдештирүүчү көнүгүү. Төмөнкү 8-сүрөттөгүлөрдү абалдарын түшүндүрүүдө кайсы аксиомаларга таяныш мүмкүн?

8


Планиметрияга киргизилген аксиомалар менен бирге бул үч аксиомалар стереометриянын негизин түзөт. Эске алуу керек, планиметрияда биз караган бардык фигуралар жайгаша турган бир гана тегиздикке ээ элек. Стереометрияда болсо мындай тегиздиктер чексиз көп болуп, алардын бардыгында планиметрия аксиомалары жана планиметрияда далилденген бардык касиеттер орундуу болот, деп каралат. Ошондой стереометрия курсунда планиметрия аксиомаларына стереометрия чекитин кароого туура келет.

2.1-теорема** **Түз сызык жана анда жатпай турган чекит аркылуу жалаң бир гана тегиздик өткөрүү мүмкүн.

9


Далилдөө. l – берилген түз сызык, C болсо анда жатпаган чекит болсун (9.a -сүрөт).

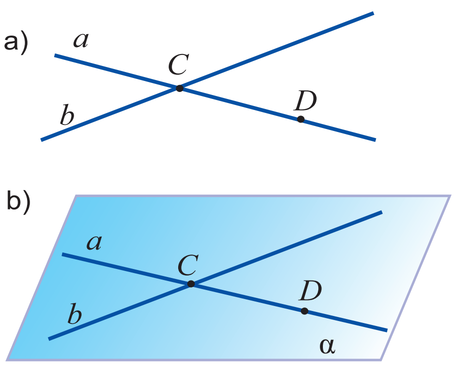
Алгач теорема жыйынтыктоо бөлүгүндө айтылган тегиздиктин бар экенин көрсөтөбүз. l түз сызыкта A жана B чекиттерин алабыз. Шартка көрө, A, B жана C чекиттер бир түз сызыкта жатпайт. Анда S_1 аксиомага көрө, A, B жана C чекиттер аркылуу α тегиздикти өткөрүү мүмкүн (9.b-сүрөт). S_2 аксиомага көрө болсо, α тегиздик l түз сызыктан өтөт.

Демек, α – издеген тегиздик экен.

Эми бул тегиздиктин жалгыздыгын көрсөтөбүз.

Тескерисин көрсөк: l – берилген түз сызык жана анда жатпаган C чекитинен дагы бирди, β тегиздик өткөрүү мүмкүн болсун. Анда β тегиздик дагы A, B жана C чекиттеринен өтөт. Бирок, S_2 аксиомага көрө үч чекитинен жалаң бир тегиздик өткөрүү мүмкүн. Карама-каршылык. Демек, оюбуз туура эмес. Түз сызык жана анда жатпай турган чекит аркылуу бир жана жалаң бир тегиздик өткөрүү мүмкүн. ❑

10



2.2-теорема: ***Берилген кесишүүчү эки түз сызык аркылуу бир гана тегиздик өткөрүү мүмкүн.***

Далил. Берилген a жана b түз сызыктар C чекитте кесишсин (10.a-сүрөт).

a түз сызыкта C чекиттен айырмалуу дагы бир D чекитин алабыз. Анда, далилденген 1-теоремага көрө, b түз сызык жана анда жатпаган D чекит аркылуу бир гана α тегиздик өтөт (10.b-сүрөт). Бул тегиздик a түз сызыктын C жана D чекиттеринен өтөт. Анда S_2 аксиомага көрө, α тегиздик a түз сызыктан дагы өтөт.

Демек, α тегиздик берилген кесишүүчү эки түз сызык аркылуу өтөт.

Бул тегиздиктин жалгыздыгын эркин негиздегиле. ❑

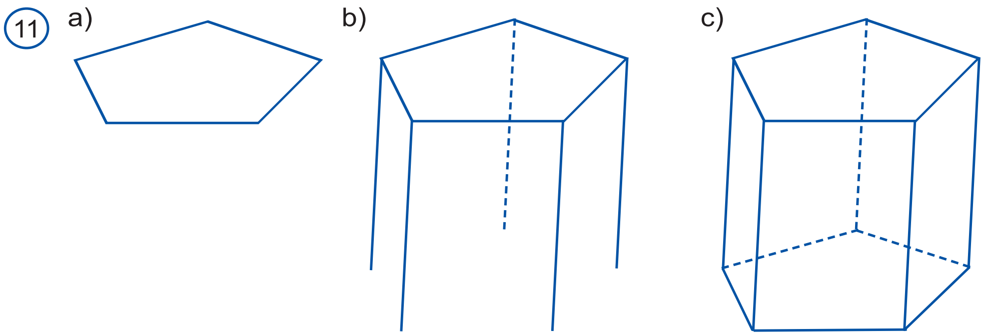
? *Темага байланыштуу суроолор*

1. *Мейкиндиктеги негизги геометриялык фигураларды айткыла.*
2. *S группа аксиомаларын айткыла .*
3. *Тегиздикте жатуучу кандай түз сызыктар: a) кесишүүчү; b) параллель деп аталат?*
4. *Кандай түз сызыктар кайчылаш деп аталат? Мисалдар келтиргиле.*
5. *Мейкиндикте эки түз сызык кандай жайгашышы мүмкүн?*
6. *Кандай түз сызыктар: a)тегиздикте жатуучу; b)тегиздикке параллель деп аталат?*
7. *Мейкиндикте түз сызык жана тегиздик кандай жайгашышы мүмкүн?*
8. *Мейкиндикте кандай тегиздиктер: a) кесишүүчү; b) параллель деп аталат?*
9. *Мейкиндикте эки тегиздик кандай жайгашышы мүмкүн?*
10. *Мейкиндикте түз сызык жана тегиздиктердин касиеттерин түшүндүрүүчү аксиомаларын айткыла.*
11. *Үч чекиттен өтүүчү тегиздик касиетин айткыла.*

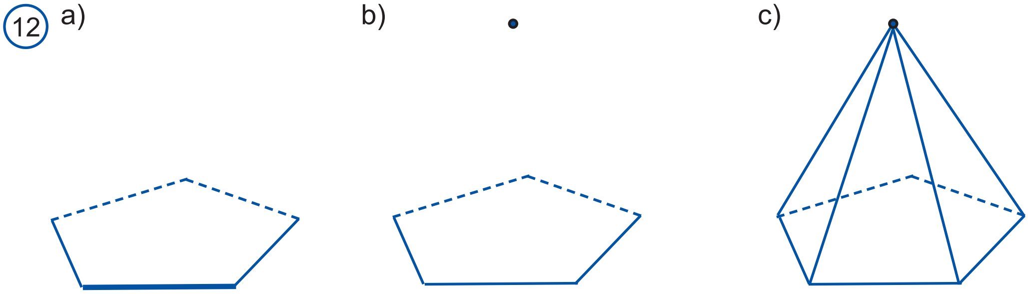
8 КӨП ГРАДУСТАР ЖАНА АЛАРДЫН ЖӨНӨКӨЙ КЕСИНДИЛЕРИН ЖАСОО

Геометриялык маселелерди чыгарууда маселе шартына ылайык чиймени чийүү зарыл эсептелет. Кээ бирде туура чийилген чийме – маселенин "жарым чечими" менен теңдештирилет. Стереометрияда маселенин чиймесин туура чийүү өтө зарыл жана кээ бирде болсо татаал иш эсептелет. Себеби стереометриялык фигуралар үч өлчөмдүү болуп, аларды тегиздикте, дептерде сүрөттөө керек болот.Туура эмес чийилген чийме туура эмес чечимине же башы туюк көчөгө баштайт.

Призманы сүрөттөө төмөнкү тартипке алып келет (11-сүрөт). Алдын көп бурчтуу фигурасындагы негиздеринен бири сызылат. Кийин анын ар бир учунан өз ара параллель жана тең кесиндилер, призманын түзүүчүлөрү чийилет. кесиндинин акырлары ылайык түрдө туташтырып чыгылат. Анда экинчи негиз пайда болот. Чиймеде призманын көрүнбөй турган кырлары штрих-пунктир сызыктар менен чийилет.

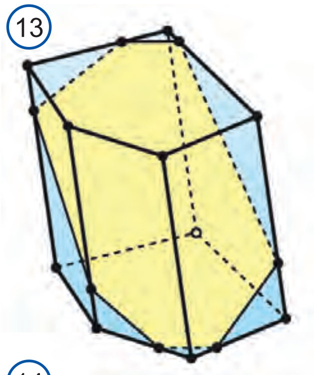


Пирамиданы сүрөттөө дагы ушуга окшогон тартипте алып барылат (12 -сүрөт). Алдын көп бурчтуу фигурасындагы негизи чийилет. Кийин пирамида чокусу белгиленип, бул чекит негизинин ар бир учу менен туташтырып чыгылат. чиймеде пирамиданын көрүнбөй турган кырлары пунктир сызыктар менен чийилет.



Мейкиндиктеги геометриялык фигуралардын өз ара жайгашуусун туура элестеткенде, анын чиймесин туура чийүүгө мүмкүн болот. Мейкиндиктеги фигуралардын бири көп бурчтук, экинчиси болсо тегиздик болгондо, түрдүү кесиндилерин сүрөттөөгө туура келет. Төмөнкү көп бурчтуктардын кесиндилерин жасоо менен иштейбиз.

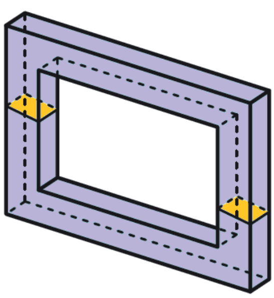
13



Айталы, көп бурчтукту бир тегиздик кесип өткөн болсун. *Көп бурчтуктун кесиндиси* деп көп бурчтуктун кесүүчү тегиздикке тийиштүү чекиттеринен түзүлгөн геометриялык формага айтылат.

Кесүүчү тегиздик көп бурчтук сыртын кесиндилер боюнча кесип өтөт, көп бурчтуктун кесиндиси болсо бир же бир нече көп бурчтуктардан түзүлгөн болот. 13-сүрөттө беш бурчтуу призманын жети бурчтуунан түзүлгөн кесиндисинен сүрөттөлгөн. 14-сүрөттөгү рамды тегиздик менен кескенде пайда болгон кесинди – эки төрт бурчтуктан түзүлгөн.

14

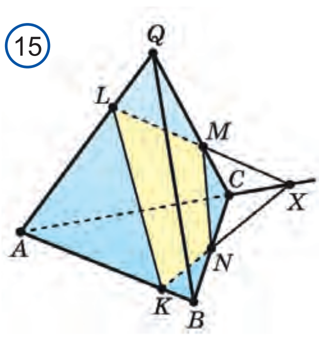


Көп бурчтуктун кесиндисин сүрөттөө үчүн анын жактары кесүүчү тегиздик менен жалпы чекиттерин аныктоо жетерлүү.

1-маселе. *QABC* үч бурчтуу пирамиданын *AB, AQ* жана *CQ* кырларын, тиешелүү түрдө, *K, L* жана *M* чекиттерде кесип өтүүчү α тегиздик менен кескенде пайда болгон кесиндисин жасайбыз (15 -сүрөт).

Жасоо. Кесүүчү α тегиздик пирамиданын *AQB* граны менен эки: *K* жана *L* жалпы чекиттерине ээ. Анда кесүүчү тегиздик бул граны *KL* кесинди боюнча кесип өтөт.

15



Дал ушуга окшош, α тегиздик пирамиданын *AQC* граны менен эки: *M* жана *L* жалпы чекиттерге ээ болгону үчүн, бул граны *ML* кесинди бойлоп кисип өтөт. Кесүүчү α тегиздик пирамиданын *ABC* граны менен бир *K* жалпы чекитке ээ. Бул тегиздиктин *BC* кырын кесип өтө турган чекитин табабыз.

Бул тегиздикке тийиштүү *LM* жана *AC* түз сызыктарды улантып, алардын кесишүү чекити *X* ти табабыз. *X* чекит *AQC* жана *ABC* тегиздиктерде дагы жатат.

Кесүүчү α тегиздик пирамиданын *ABC* граны менен эки: *K* жана *X* жалпы чекиттерине ээ. Анда кесүүчү тегиздик бул граны *KX* кесинди боюнча кесип өтөт.

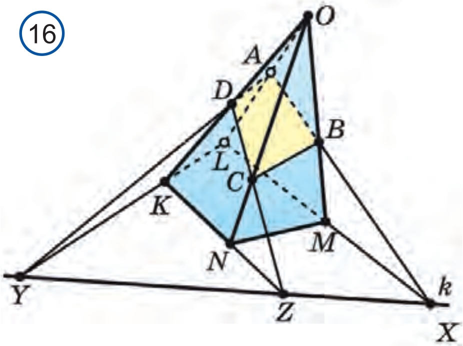
KX түз сызык жана BC жактын кесишүү чекити N деги α тегиздикте жатат.

Демек, α тегиздик ABC жакты KN кесинди боюнча, BQC граны болсо MN кесинди боюнча кесип өтөт.

$KLMN$ төрт бурчтук α тегиздиктин пирамида менен кесиндисинен түзүлгөн болот. KL жана KN кесиндилер α тегиздиктин ABQ жана ABC грандардагы *издери* деп аталат.

2-маселе. $OKLMN$ пирамиданын OL кырынын A чекити жана пирамиданын $KLMN$ негизи тегиздигинде жатуучу k түз сызыктан өтүүчү b тегиздик менен кескенде пайда боло турган кесиндини жасайбыз (16-сүрөт).

16

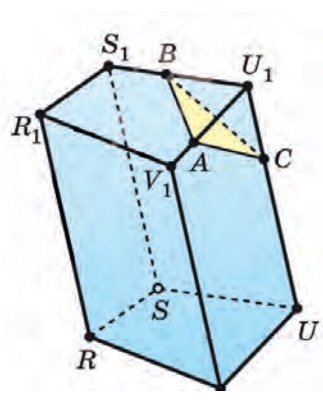


Жасоо. LM жана k түз сызыктар кесише турган чекитти табабыз. Бул чекит k түз сызыкта жаткандыгы үчүн b тегиздикке тийиштүү. Ошондой эле, бул чекит LM түз сызыкта жатканы үчүн LOM гранга дагы тийиштүү. A чекит бул эки тегиздиктин экөөсүнө да тийиштүү. Ошону үчүн, b тегиздик LOM тегиздикти AX түз сызык боюнча, LOM гранда болсо AB кесинди боюнча кесип өтөт. Бул жерде B чекит AX жана OM түз сызыктардын кесишүү чекити.

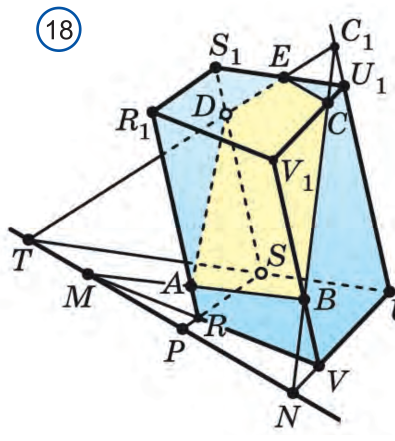
Дал ушул сыяктуу, β тегиздиктин OLK гранды кесип өтө турган Y жана D чекиттерин жана AD кесиндини аныктайбыз. Кийин Z жана C чекиттер жана DC жана BC кесиндилерин аныктайбыз. Натыйжада, пайда болгон $ABCD$ төрт бурчтук изделип жаткан кесиндиден түзүлгөн болот.

3-маселе. A, B жана C төрт бурчтуу призманын түрдүү грандардагы чекиттери.

17



18

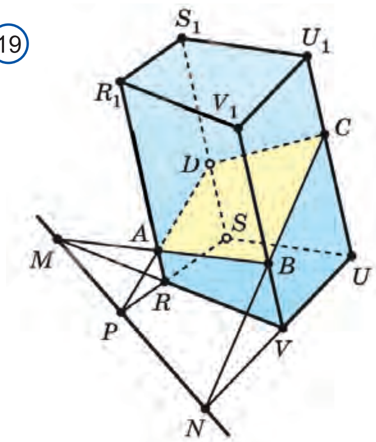


Призманын ABC тегиздик менен кесиндисин табабыз (17-сүрөт).

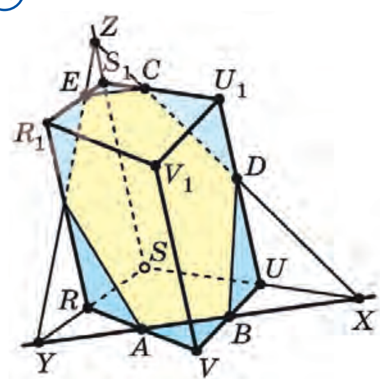
Изделе жаткан кесинди A, B жана C чекиттердин төрт бурчтуу призманын кайсы грандарында жана кандай жаткандыгына байланыштуу болот. 17-сүрөттө A, B жана C чекиттердин бир чокусунан чыгуучу жактарда жаткан эң жөнөкөй абал сүрөттөлгөн.

18-сүрөтдтө сүрөттөлгөн абалда кесиндини жасоо кыйынраак иш саналат. Калган абалдардагы кесиндилер төмөндөгү 19–20-сүрөттөрдө келтирилген. Көрүп турганыңардай, кесинди үч бурчтук, төрт бурчтук, беш бурчтук жана алты бурчтуктан түзүлгөн болот. Бул кесиндилерди жасалышын өз алдынча талкууланган.

19



20

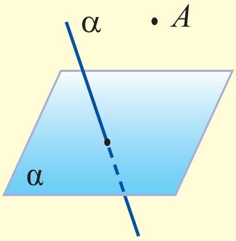
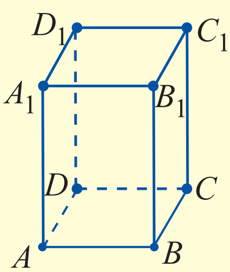
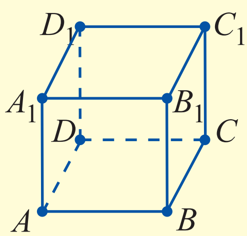
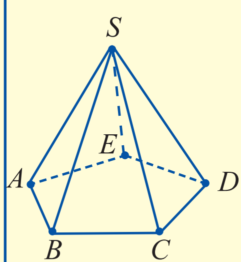


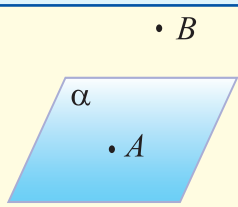
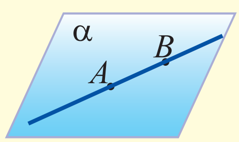
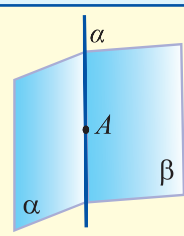
? *Тема боюнча суроолор*

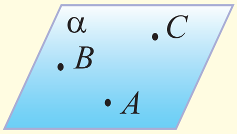
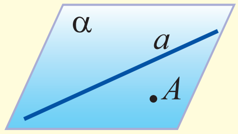
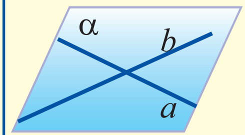
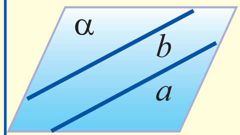
1. *Көп бурчтуктун кесиндиси деп эмнеге айтылат?*
2. *Көп бурчтуктун кесиндиси кандай формада болушу мүмкүн?*
3. *Бир тегиздиктин экинчи тегиздиктеги изи деп эмнеге айтылат?*
4. *Төрт бурчтуу көп бурчтуктун кесиндиси эмнелер болушу мүмкүн?*

9 ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНМОЛОР

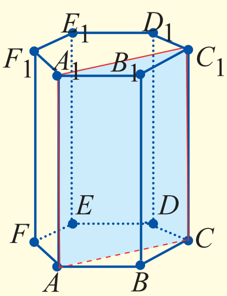
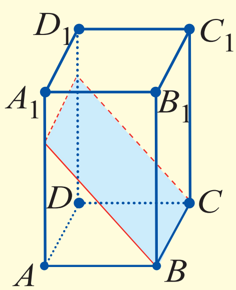
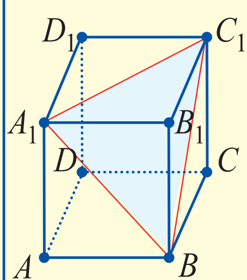
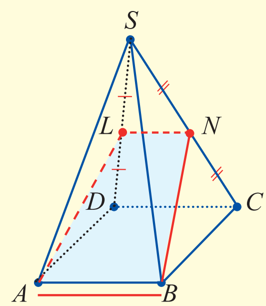
3.0. Төмөндөгү 3-бөлүм боюнча алгачкы теориялык маалыматтарды кайталагыла. Алар силерге өтүлгөндөрдү жалпылоо жана практикалык көнүгүүлөрдү аткарууга жардам берет.

Негизги фигуралар	Көп бурчтуктар		
	Тик бурчтуу параллелепипед	**Куб**	**Пирамида**
			
A чекит, α түз сызык, *a* тегиздик	Негиздери – туура төрт бурчтуктар, грандары – туура төрт бурчтуктар	Негиздери – квадраттар, грандары – квадраттар	Негизи – көп бурчтуу, грандары – үч бурчтук

Стереометрия аксиомалары жана алардан келип чыга турган натыйжалар		
		
Тегиздикте ага тийиштүү болгон жана тийиштүү болбогон чекиттер бар.	Эгер түз сызыктын эки чекити бир тегиздикте жатса, ал абалда анын бардык чекиттери ушул тегиздикте жатат.	Эгер эки тегиздик жалпы чекитке ээ болсо, ал абалда алар ушул чекиттен өтүүчү жалпы түз сызыкка дагы ээ болот.

			
Бир түз сызыкта жатпаган үч чекит аркылуу	Түз сызык жана анда жатпаган чекит аркылуу	Кесишүүчү эки түз сызык аркылуу	Параллель эки түз сызык аркылуу
... жалаң бир гана тегиздикке өткөрүүгө болот			

a) жадыбалда кээ бир көп бурчтуктардын жөнөкөй кесиндилери берилген. Аларга карап, бул кесиндилер кандай пайда болгондугун түшүндүргүлө.

Көп бурчтуктардын жөнөкөй кесиндилери			
Көп бурчтуу призма	**Тик бурчтуу параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – A, C, C_1 чекиттерден өтүүчү, кесүүчү тегиздик. ACC_1CA_1 – кесинди.	CBK – K чекит жана CB түз сызыктан өтүүчү, кесүүчү тегиздик, $CBKM$ – кесинди.	A_1BC_1 – BC_1 жана BA_1 түз сызыктардан өтүүчү, кесүүчү тегиздик, ACC_1CA_1 – кесинди.	ABN – AB жана LN параллель түз сызыктардан өтүүчү, кесүүчү тегиздик, $ABNL$ – кесинди.

b) жадыбалдын сол устунунда тегиздиктеги, оң устунунда болсо мейкиндиктеги геометриялык фигуралардын бир-бирине окшош кээ бир касиеттери келтирилген. Аларды көз алдыңарга келтиргиле жана кандай окшоштукка ээ экендигин аныктагыла. Дагы тегиздик жана мейкиндиктеги кандай окшоктуктарды келтирүү мүмкүн?

Тегиздикте	**Мейкиндикте**
Эгер түз сызыктар жалпы чекитке ээ болсо, алар ушул чекитте кесишет.	Эгер тегиздиктер жалпы түз сызыкка ээ болсо, алар ушул түз сызык боюнча кесишет.
Тегиздиктин бир чекитинен чексиз көп түз сызык өткөрүү мүмкүн.	Мейкиндиктин бир түз сызыгынан чексиз көп тегиздик өткөрүү мүмкүн.
Түз сызыкта жатпай турган чекит аркылуу берилген түз сызыкка параллель бир жана жалаң бир түз сызык өткөрүү мүмкүн.	Тегиздикте жатпаган түз сызык аркылуу берилген тегиздикке параллель бир жана жалаң бир тегиздик өткөрүү мүмкүн.
Бир түз сызыкка параллель түз сызыктар өз ара параллель	Бир тегиздикке параллель тегиздиктер өз ара параллель.

3.1. Мейкиндикте a) эки түз сызык; b) түз сызык жана тегиздик; c) эки тегиздик канча жалпы чекитке ээ болушу мүмкүн?

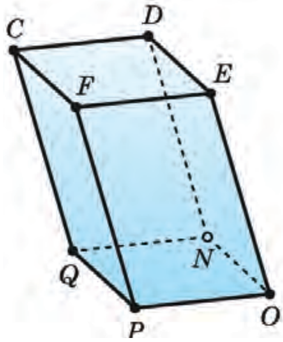
3.2. Мейкиндикте a) эки түз сызык; b) түз сызык жана тегиздик; c) эки тегиздик; d) үч тегиздик жалаң жалпы чекитке ээ болушу мүмкүнбү?

3.3. 1-сүрөттө $NOPQDEFC$ параллелепипед сүрөттөлгөн. a) CD түз сызык менен кесишүүчү түз сызыктарды; b) FP түз сызык менен кесишүүчү түз сызыктарды; c) CD түз сызыкка параллель түз сызыктарды; d) FP түз сызыкка параллель түз сызыктарды; e) CD түз сызык менен кайчылаш түз сызыктарды; f) FP түз сызык менен кайчылаш түз сызыктарды айткыла.

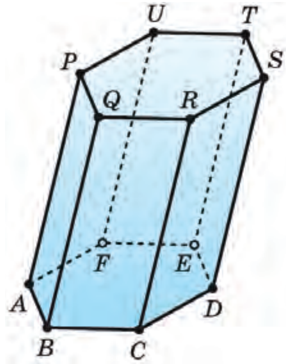
3.4. 2-сүрөттө негизи алты бурчтук болгон $ABCDEFPQRSTU$ параллелепипед сүрөттөлгөн. a) ABC тегиздик менен кесишүүчү түз сызыктарды; b) UTF тегиздик менен кесишүүчү түз сызыктарды; c) PTR тегиздикте жатуучу түз сызыктарды; d) CDR тегиздикке тийиштүү түз сызыктарды; e) FEC тегиздикке параллель түз сызыктарды; f) AQB тегиздикке параллель түз сызыктарды айткыла.

3.5. 1-сүрөттөгү $NOPQDEFC$ параллелепипедде: a) CQ түз сызык менен кесишүүчү тегиздиктерди; b) OP түз сызык менен кесишүүчү тегиздиктерди; c) NO түз сызык жаткан тегиздиктерди; d) DN түз сызык тийиштүү болгон тегиздиктерди; e) CF түз сызыкка параллель тегиздиктерди; f) EO түз сызыкка параллель тегиздиктерди айткыла.

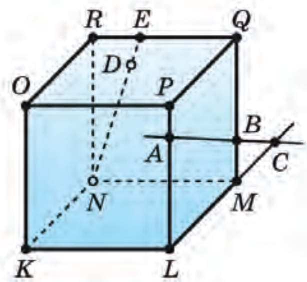
1



2



3



3.6. 2-сүрөтдтө негизи алты бурчтук болгон *ABCDEFPQRSTU* параллелепипед сүрөттөлгөн. a) *UQR* тегиздик менен кесишүүчү тегиздиктерди; b) *FT* түз сызык менен кесишүүчү тегиздиктерди; c) *ACE* тегиздикке параллель тегиздиктерди; d) *ETS* тегиздикке параллель тегиздиктерди айткыла.

3.7. 3-сүрөтдөн пайдаланып, a) *LMQ* жана *NME* тегиздиктерде жатуучу чекиттерди; b) *NR* түз сызык жаткан тегиздиктерди; c) *BC* түз сызыктын *KLN* тегиздик менен кесишүү чекиттерин; d) *PL* жана *ND* түз сызыктардын *OPR* тегиздик менен кесишүү чекиттерин; e) *KON* жана *KLM* тегиздиктер кесише турган түз сызыкты; f) *PDQ* жана *MNK* тегиздиктер кесише турган түз сызыкты; g) *AB* жана *LM* түз сызыктардын кесишүү чекитин; h) *BQ* жана *MC* түз сызыктардын кесишүү чекитин айткыла.

3.8. Бир түз сызыкта жатуучу үч чекиттен тегиздик өткөрүү мүмкүндүгүн далилдегиле. Мындай тегиздиктер саны канча?

3.9. *A, B, C* жана *D* чекиттер бир тегиздикте жатпайт. *AB* жана *CD* түз сызыктардын кесишпестигин далилдегиле.

3.10. Берилген эки түз сызыктын кесишкен чекитинен бул түз сызыктар менен бир тегиздикте жатпай турган түз сызык өткөрүү мүмкүнбү? Жоопторуңарды негиздегиле.

3.11. *A, B, C* чекиттер эки түрдүү тегиздиктин ар биринде жатат. Бул чекиттердин бир түз сызыкта жатышын далилдегиле.

3.12. Түз сызык аркылуу эки түрдүү тегиздик өтүшүн далилдегиле.

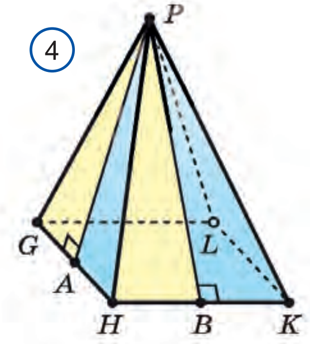
3.13. *a* жана *b* түз сызыктар бир тегиздикте жатпайт. *a* жана *b* түз сызыктарга параллель *c* түз сызык өткөрүү мүмкүнбү?

3.14. Эгер тегиздик эки параллель түз сызыктан бирин кесип өтсө, ал экинчисин да кесип өтүшүн далилдегиле.

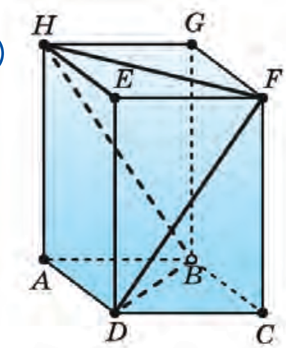
3.15. Эки кайчылаш түз сызыктардан каалаган бири аркылуу экинчисине параллель тегиздик өткөрүү мүмкүндүгүн далилдегиле.

3.16. ABC үч бурчтук берилген. AB түз сызыкка параллель тегиздик бул үч бурчтуктун AC жагын A_1 чекитте, BC жакты B_1 чекитте кесип өтөт. A_1B_1 кесиндинин узундугун тапкыла. Анда: a) AB = 15 см , $AA_1 : AC = 2 : 3$; b) AB = 8 см, $AA_1 : AC = 5:3$; c) B_1C = 10 см, $AB : BC = 4:5$;
d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.

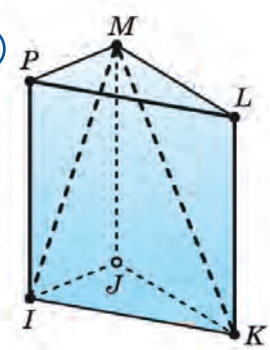
4



5



6



3.17. 4-сүрөттө төрт бурчтуу туура пирамида берилген. PA жана PB – пирамида PGH жана PHK грандарынын бийиктиктери болсо, $\Delta PGA = \Delta PHB$ экендигин далилдегиле.

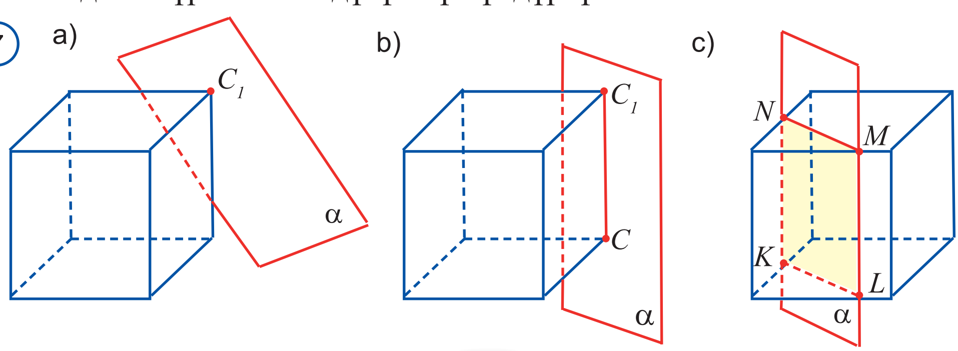
3.18. $ABCDHGFE$ туура бурчтуу параллелепипеддин (5-сүрөт) каптал кыры 8 см ге негизи жагы 6 см ге тең квадраттан турат. Мейкиндиктеги $HFDBH$ сынык сызыктын узундугун тапкыла.

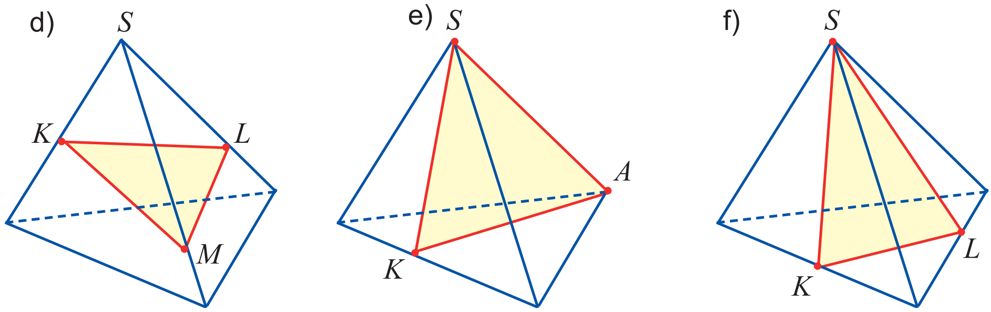
3.19. $IJKPML$ үч бурчтуу туура призманын (6-сүрөт) негизинин кыры жана каптал кырынын узундуктары 2:3 катышта. Эгер $IPLKMI$ мейкиндиктеги сынык сызыктын узундугу $16+4\sqrt{13}$ кө тең болсо, призманын каптал бетин тапкыла.

3.20. Негизи квадрат болгон тик бурчтуу параллелепипеддин каптал бети 12 см² ка барабар. Негизинин диагоналы $\sqrt{2}$ болсо, каптал гранынын диагоналын тапкыла.

3.21. 7-сүрөттө келтирилген абалдарда мейкиндиктеги фигуралардын кандай кесиндиси сүрөттөлгөндүгүн түшүндүргүлө.

7





3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдун AD жана CD кырларында M жана N чекиттер берилген. Кубду MNB_1тегиздик менен кескенде пайда боло турган кесиндини жасагыла.

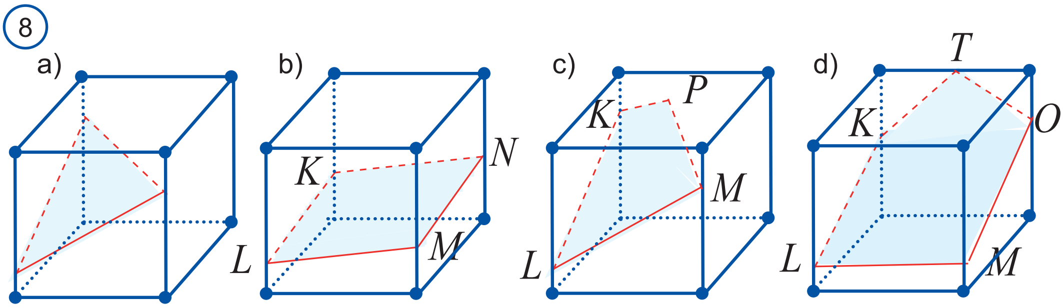
3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубту сызгыла жана AB, BC жана BB_1 кырлары ортолору болгон M, N жана L чекиттерди белгилегиле. a) кубду MNL тегиздик менен кескенде пайда боло турган кесиндини жасагыла; b) MNL үч бурчтуктун туура экендигин далилдегиле; c) кубдун кыры 1 см болсо, MNL үч бурчтук бетин тапкыла.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипеддин кырлары $AB = 6$ см, $AD = 6$ см жана $AA_1 = 8$ см. Параллелепипеддин BC_1D тегиздик менен кесиндиси тең капталы үч бурчтук экендигин далилдегиле жана бул үч бурчтук бийиктигин тапкыла.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призманы чийгиле . Призманын AD, AA_1 жана DD_1 кырлары ортолору болгон M, N жана L чекиттеринен өтүүчү тегиздик менен кесиндисин жасагыла.

3.26. Кубду тегиздик менен кескенде кесиндиде 8-сүрөттө сүрөттөлгөн кайсы абалдарда болушу мүмкүн? Кайсылары болушу мүмкүн эмес?

8



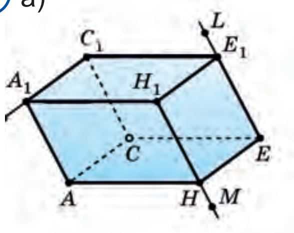
3.27. 9-сүрөттө берилген маалыматтар негизинде a) K, L жана M; b) A, B жана C; c) A, B жана C чекиттерден өтүүчү мейкиндиктеги фигуралардын тийиштүү кесиндилерин жасагыла.

3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ призманын MM_1, M_1P_1 жана M_1T_1 кырларында жаткан

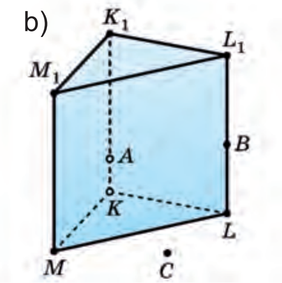
A, B жана *C* чекиттери алынган (10-сүрөт). Призманын *ABC* тегиздик менен кесиндисин жасагыла.

3.29. Берилген маалыматтар негизинде 11-сүрөттө *Ал, V* жана *W,* 12-сүрөттө *A* жана *B* чекиттеринен өтүүчү мейкиндиктеги фигуралардын тийиштүү кесиндилерин жасагыла.

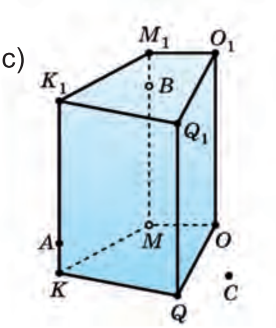
9 а)



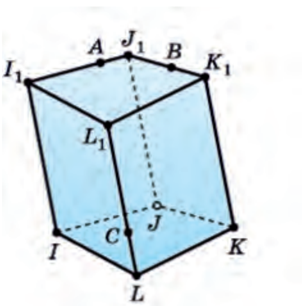
b)



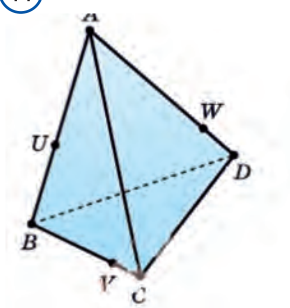
c)



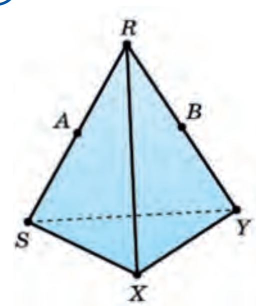
10



11



12



Колдонмолор жана практикалык компетенцияларды калыптандыруу

1.Эмне себептен имарат үчүн чукур казуудан алдын белгилөө иштеринде бекем тартылган жиптен пайдаланылат?

Жообу: эки тегиздик кесилишүүсү түз сызыктан түзүлгөн болот.

2. Кирпич куюу калыбына жай салынып, тегиз жыгач бөлөгү калып үстүдө жүргүзүп, ашыкча ылай бөлүгүн сындырып алып ташталат. Анда эмне себептен кирпичтин бети тегиз чыгат?

3. Жасалган стулдун жактары бир тегиздикте жаткандыгын текшерүү үчүн уста стулдун карама-каршы жактарына жип тартып текшерет. Бул методду колдоп көргүлө жана ал эмнеге негизделгенин айткыла.

Жообу: эки кесишүүчү сызык жалгыз тегиздикти аныктайт.

4. Бир бөлөк жыгач тактаны аралап жатып, уста аралаш сыртын тегиз болушуна кандай жетишет?

Жообу: жыгач тактанын эки кошуна жактарына AB жана AC кесиндилерин чийип жана арраны мүмкүн болушунча ушул кесиндилерден өтө турган кылып арралону аткарышты. Натыйжада, эки кесишүүчү түз сызыктардан өтүүчү тегиздик жалгыз болгондугу үчүн арралоо сырты тегиз чыгат.

5. Фотоаппаратты орнотуу үчүн арналган түзмөк эмне себептен үч буттуу кылып жасалат?

Жообу: бир түз сызыкта жатпаган үч чекиттен жалаң бир тегиздик өтөт.

6. Уста иштеген тактай сыртынын тегиздигин кандай текшерет. Бул метод эмнеге негизделген?

Жообу: эгер түз сызыктын эки чекити тегиздикте жатса, анын өзү дагы бүтүндүгүнчө ушул тегиздикте жатат.

7. Эмне себептен үч буттуу мототцикл эки буттуусуна караганда тургунрак болот? Жообу: бир түз сызыкта жатпаган үч чекиттен жалаң бир тегиздик өтөт.

8. Эмне үчүн ачык эшиктер жел жүргөндө аз абалынча аракетке келет? Эмне себептен бул жабык эшиктер менен болбойт?

Жообу: түз сызык жана анда жатпаган чекиттен жалаң бир тегиздик өткөрүү мүмкүн.

9. Кесинди жагы 7 дм болгон квадраттан түзүлгөн, бийиктиги 4 м болгон, 18 түркүгүн куруу үчүн канча кирпич керек болот?
(Кирпичтин өлчөмдөрү: 1:1,5:3 дм. Куруу жараянында 5 % кирпич чыгындыга кетет). *Жообу: 8200 даана.*

Жооптор жана көрсөтмөлөр

1.23. *AB//CD*. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ см, $8\frac{2}{3}$ см. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **1.26.** 14 см. **1.27.** $8\sqrt{3}$ см. **1.28.** 17 см. **1.29.** 24 см. **1.30.** 4,8 см. **1.31.** 18 см.

2.6. 256 м². **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ см². **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ см; $18\sqrt{3}$ см; b) $405\sqrt{3}$ см²; c) $648\sqrt{3}$ см². **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ см; $2\sqrt{73}$ см; b) $48\sqrt{73}$ см²; c) $144+48\sqrt{73}$ см². **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ м; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ м; b) 192 м²; c) 282 м²; **2.13.** a) 5 м; $\sqrt{89}$ м; b) $8(5+\sqrt{34})$ м²; c) $8(11+\sqrt{34})$ м². **2.14.** a) 13 см; 12 см; b) 360 см²; c) $30(12+5\sqrt{3})$ см². **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ см². **2.17.** a) 168π см²; b) 168π см²; c) $2{,}4\pi$ м²; d) $1{,}68\pi$ м². **2.18.** 625π см². **2.19.** 252π м². **2.20.** π^2 м². **2.21.** 4 см; 16 см. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 м². **2.24.** 37 мм. **2.25.** 1040π см². **2.26.** a) 75π см²; b) 288π дм²; c) $6{,}25\pi$ м². **2.28.** a) 88π см²; b) 88π см²; c) 540π дм²; d) $3{,}24\pi$ м²;

3.18. $\sqrt{10}$ см. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ см. **3.20.** 72 дм². **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м².

Колдонмону түзүүдө пайдаланылган жана кошумча үйрөнүүгө сунуш кылынган окуу-методик адабияттар жана электрон ресурстар

1. А. Азамов, Б. Хайдаров. "Математика сайёраси". Тошкент. «Ўқитувчи», 1993.
2. Й. Сайитов «Математика ва математиклар хақида».Тошкент. «Ўқитувчи», 1992.
3. Ёш математика қомусий лугати. Тошкент. «Ўзбекистон энциклопедияси», 1991.
4. С.И. Афонина Математика ва гўзаллиқ, Тошкент, «Ўқитувчи», 1986.
5. Р.К. Атажанов Геометрия ясаш методлари, Тошкент, «Ўқитувчи», 1982.
6. Х. Наржигитов, Ч. Мирзаев Стереометриялык маселелерди чыгаруу. Академик лицейлер үчүн окуу колдонмо.-Ташкент, 2004 ж.
7. И. Исраилов, З. Пашаев Геометрия. Академик лицейлер үчүн окуу колдонмо II бөлүк. Toshkent, «Ўқитувчи», 2005 у.
8. А.В. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. «Просвешение», 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. «Просвешение», 2002.
10. Я.И. Перельман Қизиқарли геометрия, Тошкент. «Ўқитувчи», 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. «Математикалыка 10», учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. «Геометрия 10» учебник, Киев, «Генеза», 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. «Просвещение», 2013.
16. С. Даниел Александр, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Сэңage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Apris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rineapt and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Элге билим берүү министрлигинин кабар билим порталы.
20. http://www.eduportal.uz – Мультимедия борбору кабарлоо билим порталы.
21. http://www.school.edu.ru – Орто билим берүү порталы (орус тилинде).
22. http://маthc.chat.ru – Математика колейдоскоп (орус тилинде).
23. http://www.problems.ru Математикадан маселелер издөө тизими (орус тилинде);
25. http://www.pдmi.ras.ru/olyмp – Математикадан олимпиада маселелери (орус тилинде).
26. http://www.ixl.coм – Аралыктан туруп окутуу сайты(англис тилинде).
27. http://www.mathkang.ru – «Kenguru» Эл аралык математика тандоо сайты (орус тилинде).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM

O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi
o‘quvchilari uchun darslik
1- nashr
(qirg‘iz tilida)

Редактор: Г. Усмонова
Которгон Г. Усмонова
Техн. Редактор: К. Мадьяров
Компьютерде беттеген: Р. Маликов

Басмакана лицензиясы AI № 296. 22.05.2017
Басууга уруксат берилди 05.12.2017. Форматы 70×100 1/16
«TimesNewRoman» гарнитурасы.
Көлөмү: 9,0 басма таб. Басма таб. 9,0.
Нускасы 788 нускада
Оригинал-макет «Extremum Press» МЧЖда
даярдалды. 100053, Ташкент ш.
Багышамал көчөсү, 3. Тел: 234-44-05
Өзбекстан Басма сөз жана кабар агенттигинин «O‘qituvchi»
басма-полиграфиялык чыгармачылык үйү басмаканасында басылды.
100206, Ташкент ш. Юнусабад кварталы,
Жаңышаар көчөсү, 1-үй.
Заказ № 262-17.