МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ
ГЕОМЕТРИЯ
II БӨЛІМ

Орта білім беретін мекемелердің 10-сынып
оқушыларына арналған оқулық

1-басылымы

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі бекіткен

ТАШКЕНТ 2017

УДК 51(075.3)
ББК 22.1
М 54

Алгебра және анализ бастамалары бөлімінің авторлары:

М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.Қ. Аманов.

Геометрия бөлімінің авторы:

Б.Қ. Хайдаров

Пікір жазғандар:

Б.Қ. Бешимов – Мырза Ұлықбек атындағы Өзбекстан Ұлттық университетіндегі “Геометрия және топология” кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы.

М.Д. Пардаева – Республикалық Білім орталығы директорының орынбасары.

Д.Е. Давлетов – Низами атындағы ТМПУ-дегі “Математиканы оқыту әдістемесі” кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының кандидаты.

Р.О. Рузимов – Сіргелі ауданындағы №237 жалпы білім беретін мектептің математика пәнінің оқытушысы.

С.Р Сумбердиева – Сіргелі ауданындағы №6 ММЖОБ мектептің математика пәнінің оқытушысы.

Оқулықтың "Алгебра және анализ бастамалары" бөлімінде пайдаланылған белгілер және олардың білдіретін мағынасы:

△ – мысалды шешу (дәлелдеу) басталды

▲ – мысалды шешу (дәлелдеу) аяқталды

(!) – бақылау жұмыстары мен тест (сынақ) жаттығулары

(?) – сұрақтар мен тапсырмалар

– негізгі мәлімет

– күрделі жаттығулар

Республикалық мақсатты кітап қоры қаржыларының есебінен басылды.

ISBN 978-9943-5056-7-4

III ТАРАУ

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ТЕҢДЕУЛЕР

47-49 ҚАТЫНАСТАР ЖӘНЕ БЕЙНЕЛЕУЛЕР. ФУНКЦИЯ

Төмендегі кестеде Нью-Йорк қаласының аэропортындағы автомашиналардың тұрағында уақытқа қарап төленетін қаржы мөлшерлері көрсетілген:

Төленетін қаржының құны уақытқа тікелей байланысты екені көрініп тұр.

Уақыт (t)	Құны
0 – 1 сағат	\$5,00
1 – 2 сағат	\$9,00
2 – 3 сағат	\$11,00
3 – 6 сағат	\$13,00
6 – 9 сағат	\$18,00
9 – 12 сағат	\$22,00
12 – 24 сағат	\$28,00

Осы кестеге қарап төмендегі сұраққа жауап береміз:

Автомашинаның бір сағат тұруына қанша ақша жұмсалады?

5 АҚШ доллары ма, 9 АҚШ доллары ма немесе 11 АҚШ доллары ма?

Қолайсыз жағдайға түспеу және мәселені анықтау үшін біз кестедегі деректерді графиклық көрініске келтіреміз. Кестедегі “2 – 3 сағат” жазуы “2 сағаттан астам бірақ 3 сағаттан астам болмаған уақыт”, яғни $2 < t \leqslant 3$ аралық деп түсініледі. Осы жағдайда төмендегі кестені пайда етеміз:

Уақыт (t)	**Құны**
$0 < t \leqslant 1$ сағат	\$5,00
$1 < t \leqslant 2$ сағат	\$9,00
$2 < t \leqslant 3$ сағат	\$11,00
$3 < t \leqslant 6$ сағат	\$13,00
$6 < t \leqslant 9$ сағат	\$18,00
$9 < t \leqslant 12$ сағат	\$22,00
$12 < t \leqslant 24$ сағат	\$28,00

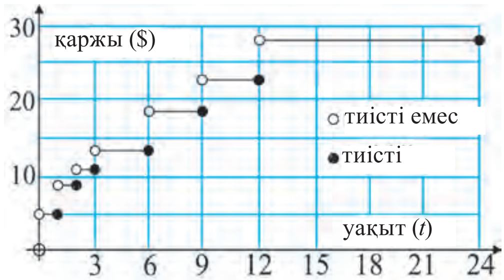
Математика тілінде осы кесте екі айнымалы (*уақыт пен төленетін қаржы мөлшері*) арасындағы **қатынасқа** мысал болады.

Қатынасты реттелген жұптықтар жиыны ретінде мағыналауға болады, мысалы:

$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Автомашиналардың тұрағында $0 < t \leqslant 24$ аралықтағы t уақытқа қарап төленуі қажет болған қаржының өзгеруі төмендегідей бейнеленеді:

Горизонталь осьтегі айнымалының қабылдайтын мәндерінің жиыны қатынастың *анықталу облысы* делінеді.



Мысалы, $\{t \mid 0<t\leqslant 24\}$ жиын жоғарыдағы *уақыт* пен төленетін *қаржы мөлшері* арасындағы қатынастың, ал $\{-2, 1, 4\}$ жиын $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ қатынастың анықталу облысы болады.

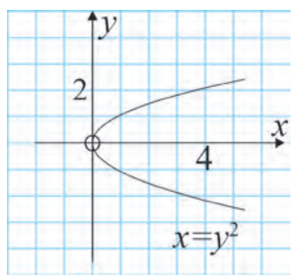
Вертикаль осьтегі айнымалының қабылдайтын мәндерінің жиыны қатынастың *мәндер жиыны* делінеді.

Мысалы, $\{5, 9, 11, 13, 18, 22, 28\}$ жиын жоғарыдағы *уақыт* пен төленетін *қаржы мөлшері* арасындағы қатынастың, ал $\{3, 5, 6\}$ жиын $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ қатынастың мәндер жиыны болады.

Енді қатынасқа дәлірек анықтама береміз. Декарт координаталар жазықтығында берілген нүктелер жиыны **қатынас** делінеді. Қатынас көбінесе *x, y* **айнымалылар** қатысқан теңдеулер көрінісінде беріледі.

Мысалы, $y=x+3$, $x=y^2$ теңдеулердің әрбірі қатынасты анықтайды.

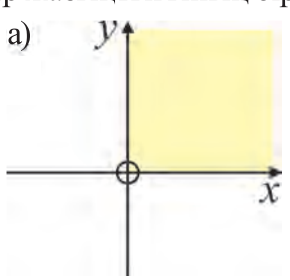
Осы теңдеулердің әрбірі Декарттың координаталар жазықтығында нүктелер жиынын пайда етеді.



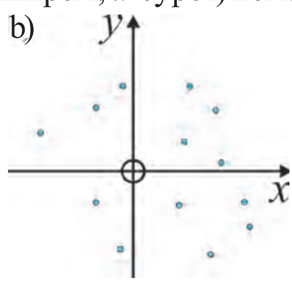
Кейбір қатынастарды теңдеулердің көмегімен өрнектеуге болмайды.

Мысалы, $x>0$, $y>0$ шартты қанағаттандыратын (x, y) нүктелер жиынын (координаталар жазықтығының бірінші ширегі, *a*-сурет) немесе *b*-суреттегі

a)



b)



нүктелер жиынын теңдеулер көмегімен өрнектеуге болмайды.

Егер қатынаста бірінші координатасы тең болған екі түрлі нүктесі болмаса, бұл қатынас **бейнелеу**, немесе **функция** делінеді.

Демек, функция – қатынастың арнаулы түрі екен.

Берілген қатынастың функция екенін тексерудің екі тәсілін келтіреміз.

Алгебралық тәсіл

Бұл тәсіл қатынас теңдеудің көмегімен берілген жағдайда қолданылады. Мұнда берілген теңдеуге x пен y-тің кез келген мәнін қойған кезде x-тің әрбір мәні үшін y-тің бір ғана мәні пайда болса, осы қатынас функция болады.

Мысалы, $y=3x-2$ теңдеуге x-тің кез келген мәнін қойсақ, y-тің бір ғана мәні пайда болады. Демек, бұл теңдеудің көмегімен анықталған қатынас функция болады.

Сонымен бірге $x=y^2$ теңдеумен анықталған қатынас функция болмайды, өйткені, мысалы, $x=4$ мәнін қойсақ, екі $y=\pm 2$ мәндер пайда болады.

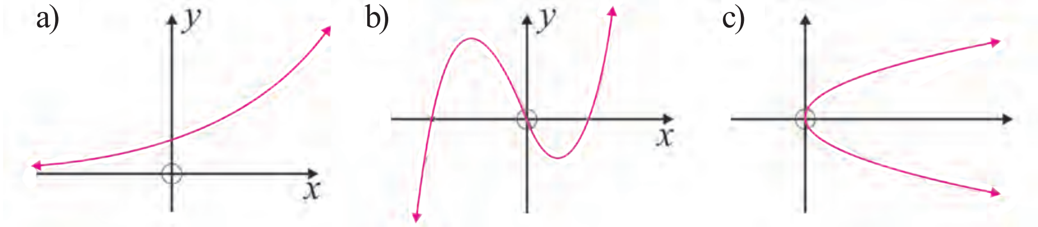
Графиктік тәсіл

Қатынастар Декарт координаталар жүйесінде жиын көрінісінде берілген болсын. Егер біз барлық мүмкін болған вертикаль түзулерді сызатын болсақ, осы түзулердің кез келгенінің берілген қатынаспен қиылысу нүктелерінің саны біреуден артпайтын болса, онда бұл қатынас функция болады. Керісінше, егер қандай да бір вертикаль түзудің берілген қатынаспен қиылысу нүктелерінің саны біреуден көп болса, онда қатынас функция болмайды.

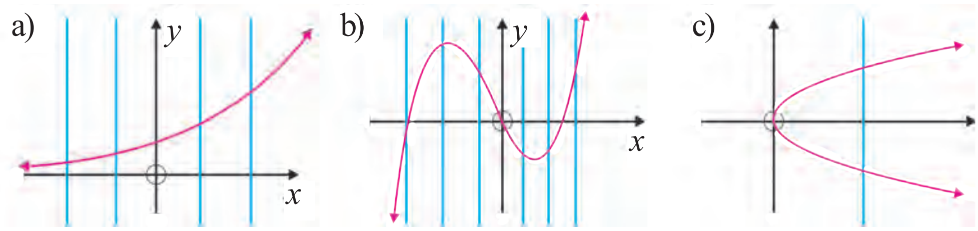
Мұнда біз төмендегілерге шартты түрде келісеміз:

- Егер түзуге шағын ақ түстегі дөңгелек белгіленген болса, (—o—), мұндай нүкте түзуге тиісті емес.
- Егер түзуге шағын қара түстегі дөңгелек белгіленген болса, (——●), бұл нүкте түзуге тиісті .
- ——→ көрінісіндегі оқ (стрелка) түзу осы бағытта шексіз жалғастырылуы мүмкін екенін білдіреді.

1-мысал. Төмендегі қатынастардың қайбірі функция болуын тексереміз.



△ Вертикаль түзулерді сызып, төмендегі қорытындыға келеміз:



a) және b) қатынастардың әрбірі функция болады (өйткені, кез келген вертикаль түзу онымен ең көбі бір нүкте арқылы қиылысады), ал c) қатынас функция емес, өйткені оны екі нүктесінде қиятын вертикаль түзу бар.

Есептеу құрылғысы төмендегі алгоритм бойынша жұмыс істесін:

1-қадам. Қандай да бір сан енгізілуде.

2-қадам. Енгізілген сан 2-ге көбейтілуде.

3-қадам. Шыққан нәтижеге 3 қосылуда.

Мысалы, құрылғыға 4 саны енгізілсе, нәтижеде $4 \cdot 2 + 3 = 11$ саны пайда болады.

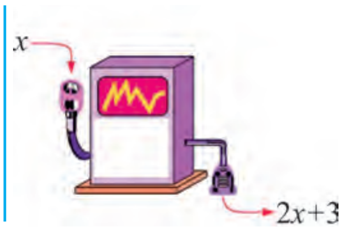
Дәл солай құрылғыға (-4) саны енгізілсе, нәтижеде $2 \cdot (-4) + 3 = -5$ саны пайда болады.

Жалпы, құрылғыға x саны енгізілсе, нәтижеде $2x + 3$ саны пайда болады.

Құрылғыға қандай да бір x саны енгізілсе, нәтижеде $2x + 3$ мән пайда болатыны көрініп тұр.

Демек, осы құрылғы істейтін алгоритм функцияны анықтайды.

Бұл жағдай $f{:}x \mapsto 2x+3$, $f(x) = 2x+3$ немесе $y = 2x+3$ түрінде жазылады.



Егер $f(x) = 2x + 3$ болса, оның -4 санына сәйкес мәні $f(-4) = 2(-4)+3= -5$ түрінде табылады.

Жалпы, $f(x)$ − функцияның берілген x сандағы *мәні* деп айтылады және бұл қатынас $y=f(x)$ түрінде жазылады.

2-мысал. Егер $f{:}x \mapsto 2x^2-3x$ болса: a) $f(5)$; b) $f(-4)$ мәндерін тап.

$f(x) = 2x^2-3x$ қатынасқа $x=5$ және $x=-4$ сандарын қойып, оларға сәйкес мәндерді табамыз:

a) $f(5)=2\cdot(5)^2-3\cdot(5)=2\cdot25-15=35$;

b) $f(-4)=2\cdot(-4)^2-3\cdot(-4) = 2\cdot(16)+12 =44$.

3-мысал. Егер $f(x) = 5-x-x^2$ болса: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ мәндерін тап және нәтижені ықшамда.

$f(x)=5-x-x^2$ функцияға x-тың орнына $-x$ және $x+2$ мәндерін қойып, оларға сәйкес мәндерді табамыз:

a) $f(-x)=5-(-x)-(-x)^2=5+x-x^2$;

b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-(x^2+4x+4)=3-x-x^2-4x-4=-x^2-5x-1$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

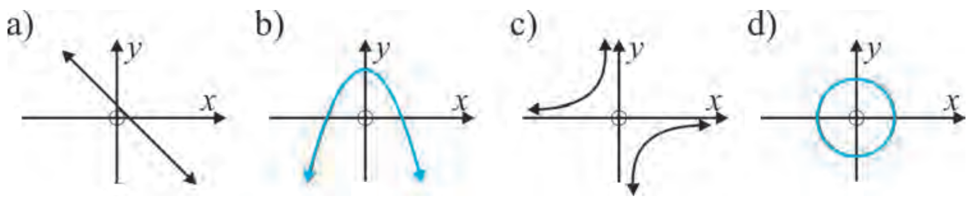
1. Қатынасқа мысалдар келтір.
2. Бейнелеу немесе функцияға анықтама бер.
3. Функцияның анықталу облысын түсіндір.
4. Функцияның мәндер жиынын түсіндір.

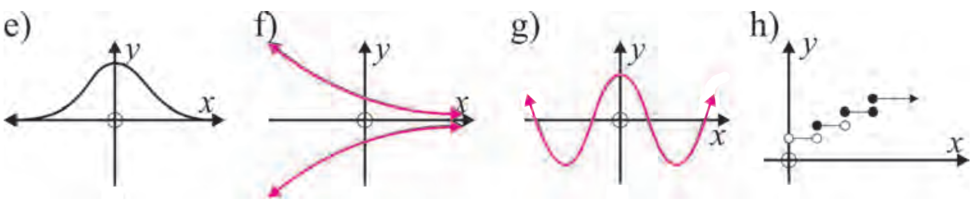
Жаттығулар

73. Төмендегі қатынастардың қайсылары функция болады:

a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$;
b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\}$;
c) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\}$;
d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\}$;
e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\}$;
f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\}$?

74. Төмендегі қатынастардың қайсылары функция болады?





75. Декарттың координаталар жазықтығында берілген кез келген түзу функция бола ма? Жауабыңды негіздеп бер.

76. $x^2+y^2=9$ теңдеудің көмегімен берілген қатынас функция бола ма?

77. Егер $f:x\mapsto 3x+2$ болса, төмендегі мәндерді тап:

A) $f(0)$; B) $f(2)$; C) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Егер $f:x\mapsto 3x-x^2+2$ болса, төмендегі мәндерді тап:

A) $f(0)$; B) $f(3)$; C) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Егер $g:x\mapsto x-\frac{4}{x}$ болса, төмендегі мәндерді тап:

A) $g(1)$; B) $g(4)$; C) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Егер $f(x)=7-3x$ болса, төмендегі мәндерді тап және нәтижені мүмкін болса ықшамда:

A) $f(a)$; B) $f(-a)$; C) $f(a+3)$; D) $f(b-1)$; E) $f(x+2)$; F) $f(x+h)$.

81. Егер $F(x)=2x^2+3x-1$ болса, төмендегі мәндерді тап және пайда болған нәтижені ықшамда:

A) $F(x+4)$; B) $F(2-x)$; C) $F(-x)$; D) $F(x^2)$; E) $F(x^2-1)$; F) $F(x+h)$.

82. $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$ функция үшін:

A) **I** $G(2)$ **II** $G(0)$ **III** $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ -ларды тап;

B) Қандай x-терде $G(x)$ жоқ?

C) $G(x+2)$-ні тап және ықшамда;

D) x-тің $G(x)=-3$ болатын x мәнін тап.

83. Функция f әріпімен белгіленген болсын. f және $f(x)$ белгілерінің мағыналарының арасында қандай айырмашылық бар?

84. Ескіру нәтижесінде көшірме жасайтын құрылғының t жылдан кейінгі бағасы $V(t)=9650-860t$ заңдылық бойынша өзгереді.

A) $V(4)$-ті тап және оның мағынасын түсіндір.

B) $V(t)=5780$ болғандағы t-ны тап. Жағдайды түсіндір.

C) Құрылғы қандай бағаға сатып алынған?

85. Бір координаталар жазықтығында $f(2)=1$, $f(5)=3$ болатын үш түрлі функция графиктерін сыз.

86. $f(2)=1$ және $f(-3)=11$ болатын $f(x)=ax+b$ сызықты функцияны тап.

87. $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ болса, a, b-ларды тап.

88. $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ болатын $T(x)=ax^2+bx+c$ квадраттық функцияны тап

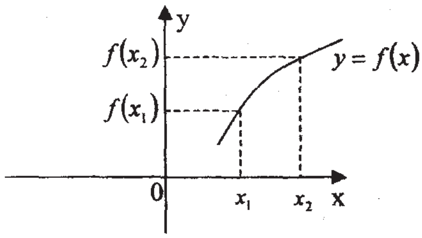
89. $f(x)=2^x$ болса, $f(a)\,f(b)=f(a+b)$ теңдікті дәлелде.

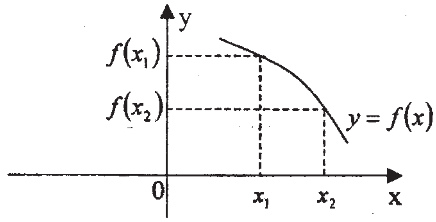
50-51 ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МОНОТОНДЫҒЫ, ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ МӘНДЕРІ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Функцияның монотондығы

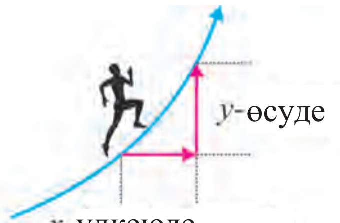
Егер $x_1<x_2$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x_1, x_2\in I$ үшін $f(x_1)<f(x_2)$ теңсіздік орындалса, I аралықтағы $y=f(x)$ функция *өспелі* делінеді.

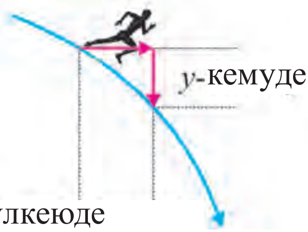
Егер $x_1<x_2$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x_1, x_2\in I$ үшін $f(x_2)<f(x_1)$ теңсіздік орынды болса, I аралықтағы $y=f(x)$ функция *кемімелі* делінеді.



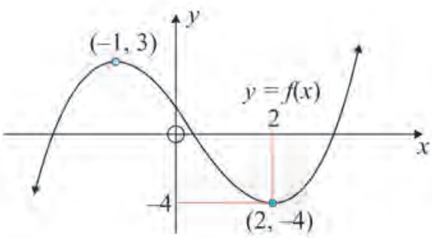


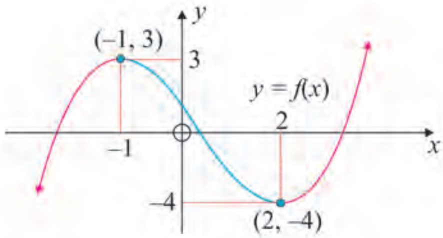
Егер функция өспелі болса, график бойынша солдан оңға "қозғалсақ", ординаталар артады; функция кемімелі болса, ординаталар да кемиді.





1-мысал. Функцияның өсуі мен кемуінің аралықтарын тап:





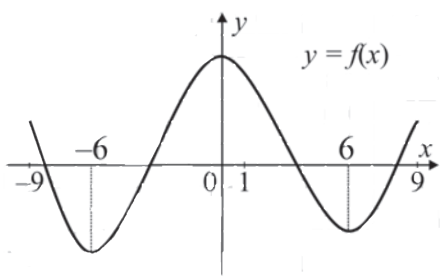
△Егер функция өспелі болса, графиктің бойымен солдан-оңға қозғалсақ, ординаталар өседі (графикте қызыл түсте). Демек, функция $x \leqslant -1$ және $x \geqslant 2$ аралықтарда өседі. Жауапты $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ түрінде де жазуға болады.

Дәл солай, егер функция кемитін болса, графиктің бойымен солдан оңға қозғалсақ, ординаталар кемиді (графикте көк түсте). Демек, функция $-1 \leqslant x \leqslant 2$ аралықта кемиді. ▲

2-мысал. Функция қайсы аралықтарда өседі?

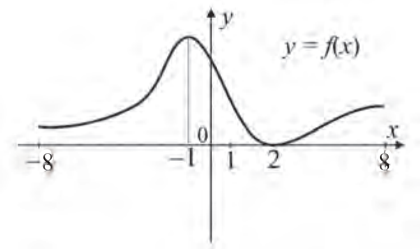
△Бұл функция $[-9; 9]$ аралықта берілген.

Егер функция өспелі болса, графиктің бойымен солдан-оңға қозғалсақ, ординаталар үлкейеді. Демек, функция $[-6; 0]$ және $[6; 9]$ аралықта өседі. Жауапты $[-6; 0] \cup [6; 9]$ түрінде де жазуға болады. ▲



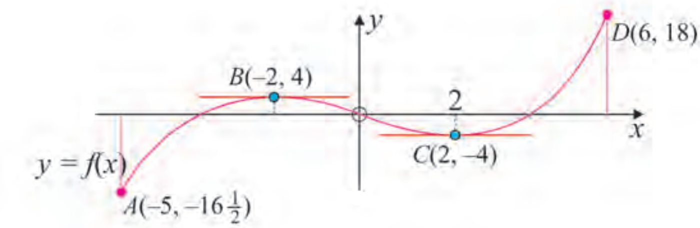
3-мысал. Функция қайсы аралықтар кемиді?

Егер функция кемімелі болса, графиктің бойымен солдан оңға қозғалсақ, ординаталар кішірейеді. Демек, функция $[-1; 2]$ аралықта кемиді.



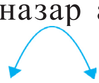
Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері туралы түсінік береміз.

$-5 \leqslant x \leqslant 6$ аралықта анықталған функцияның графигін қарастырайық.



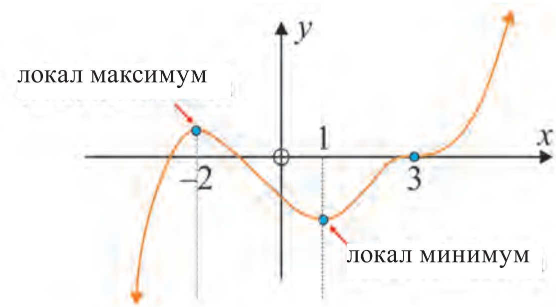
A нүктенің ординатасы басқа нүктелердің ординаталарынан кіші болғандықтан осы нүкте **глобал минимум** нүктесі делінеді. Функцияның оған сәйкес болған мәні **функцияның ең кіші мәні** делінеді. Біздің мысалымыздағы функцияның ең кіші мәні −16,5-ке тең.

Дәл осылай, *D* нүктенің ординатасы басқа нүктелер ординаталарынан үлкен болғандықтан осы нүкте **глобал максимум** нүктесі делінеді. Функцияның оған сәйкес болған мәні **функцияның ең үлкен мәні** делінеді. Біздің мысалымыздағы функцияның ең үлкен мәні 18-ге тең.

Енді *B* нүктеге назар аударайық. Графиктің оған жақын болған нүктелерінің жиыны  пішінге ие. Мұндай қасиетке ие болған нүкте **локал максимум** нүктесі делінеді.

Дәл осылай, графиктің *C* нүктеге жақын болған нүктелері жиыны  пішінге ие. Мұндай қасиетке ие болған нүкте **локал минимум** нүктесі делінеді.

Тек қана локал минимум мен локал максимумға ие болған функцияға мысал келтірейік:

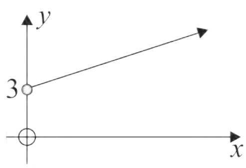


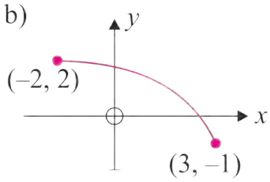
Сұрақтар мен тапсырмалар

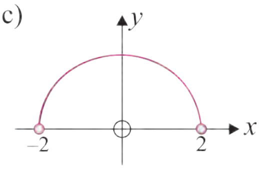
1. Аралықтағы өспелі функцияға анықтама бер.
2. Аралықтағы кемімелі функцияға анықтама бер.
3. Сызбаға қарап функцияның өсуі қалай анықталады?
4. Сызбаға қарап функцияның кемуі қалай анықталады?

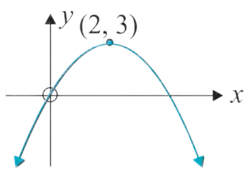
Жаттығулар

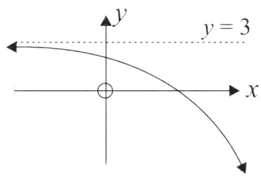
90. Функция үшін I) өсу; II) кему аралықтарын тап:
Егер мүмкін болса, олардың локал максимумын және минимумын, ең үлкен және ең кіші мәндерін тап:

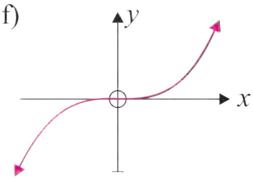
a) 

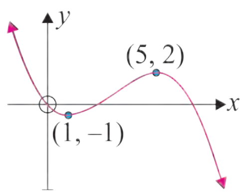
b) 

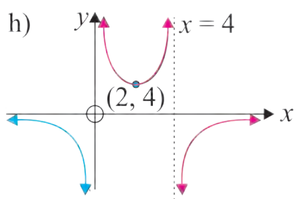
c) 

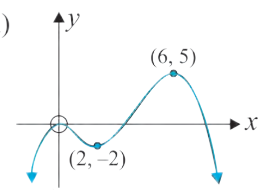
d) 

e) 

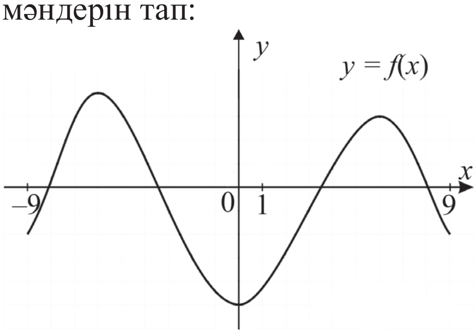
f) 

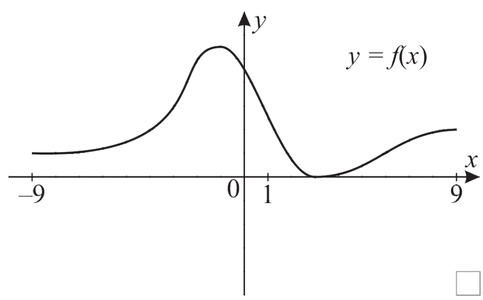
g) 

h) 

i) 

91. [–9; 9] аралықта берілген функция қайсы аралықтарда өседі?
Қайсы аралықтарда кемиді?
Оның локал максимумын және минимумын, ең үлкен және ең кіші мәндерін тап:



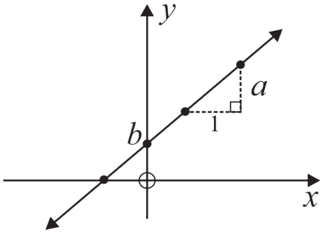


52-54 СЫЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ КВАДРАТТЫҚ МОДЕЛЬДЕР

Сызықтық функция

$f(x)=ax+b$ көрінісіндегі функция сызықтық делінеді, мұнда x, y – айнымалылар, a, b – берілген сандар, $a\neq 0$.

Сызықтық функцияның графигі координата жазықтығындағы түзу болып, мұнда a сан бұрыш коэффициенті делінеді.



Төменде біз сызықтық функцияларды қарастырамыз.

1-мысал. Теннис кортын жалға алу бағасы $C(h)=5h+8$ (АҚШ доллары) формуласымен анықталған, мұнда h – жалға алу уақыты (сағатта). 4 және 10 сағатқа жалға алуға қанша қаржы жұмсалады?

△ $C(h)=5h+8$ формуланы пайдаланып, $C(4)=5\cdot4+8=20+8=28$ және $C(10)=5\cdot10+8=50+8=58$ екенін табамыз. Демек, 4 сағатқа 28 АҚШ долларына, ал 10 сағатқа 58 АҚШ долларына тең қаржы жұмсалады. ▲

2-мысал. Нью Йорктағы такси пассажир алу үшін тоқтауға 3 АҚШ доллары 30 цент, ал әр километріне 1 АҚШ доллары 75 цент алады.

a) Кестені дәптеріңе көшіріп жаз және оны толықтыр:

d – арақашықтық (км)	0	2	4	6	8	10
C – қаржы ($)						

b) C және d арасындағы байланысты графиктік көріністе өрнекте;

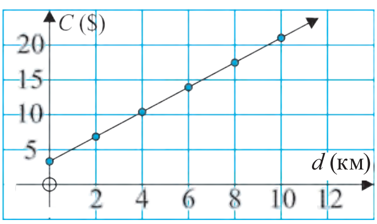
c) C (d) функцияның алгебралық көрінісін – формуласын жаз;

d) 9,4 км жүру үшін қанша қаржы жұмсалады?

△ a) 3,3 АҚШ долларына бірін-кетін $2\cdot1,75=3,5$ АҚШ долларын қосып, ұяшықтарды толықтырамыз:

d – арақашықтық (км)	0	2	4	6	8	10
C – қаржы ($)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80

b)



Бұл – сызықтық функция.

c) Бұрыш коэффициентін табамыз:

$$a=\frac{20,80-17.30}{10-8}=1,75.$$

Демек, $C(d)=1,75d+3,3$.

d) $C(9,4)=1,75\cdot9,4+3,3=19,75$.

Демек, 19,75 АҚШ доллары жұмсалады. ▲

Квадраттық функция

$y=ax^2+bx+c$ көріністегі функция квадраттық функция делінеді, мұнда x, y − айнымалылар, a, b, c − берілген сандар, $a\neq 0$.

$y=2x^2+4x-5$ функцияның: a) $x=0$; b) $x=3$ нүктелердегі мәнін табайық.

a) $x=0$ болсын. Онда $y=2\cdot 0^2+4\cdot 0-5=0+0-5=-5$.

b) $x=3$ болсын. Онда $y=2\cdot 3^2+4\cdot 3-5=18+12-5=25$.

3-мысал. Тас лақтырылғанда t секундтағы оның жерге қатысты биіктігі $h(t)=-5t^2+30t+2$ функцияның көмегімен анықталады.

a) $t=3$ болғанда тас жерден қанша биіктікте болады?

b) Тас қандай биіктіктен тұрып атылды?

c) Қандай уақытта тастың биіктігі 27 м болады?

△ a) $h(3)=-5\cdot 3^2+30\cdot 3+2=-45+90+2=47$.

Демек, атылған тас $t=3$ секундтан соң 47 метрлік биіктікте болады.

b) тас $t=0$ болғанда атылғандықтан, $h(0)=-5\cdot 0^2+30\cdot 0+2=2$. Демек, тас 2 м биіктіктен атылған.

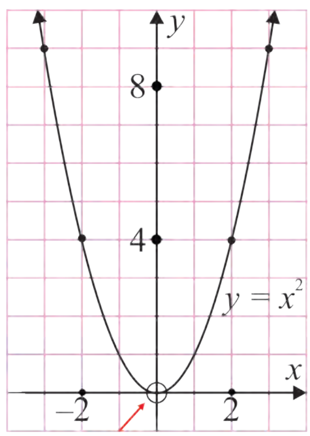
c) Тас жерден 27 м биіктікте болса, $h(t)=27$ болады, яғни $-5t^2+30t+2=27$. Осы теңдеуді шешеміз: $-5t^2+30t-25=0$, $t^2-6t+5=0$, $t_1=1$, $t_2=5$. Демек, тас 27 м биіктікте 1 секундтен соң (жоғарыға көтерілгенде) және 5 секундтен соң (төменге түскенде) болады. ▲

Квадраттық функцияның графигі

$f(x)=x^2$ функцияны қарастырайық. Оның кейбір нүктелеріндегі мәндерінің кестесін құрастырайық:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Кестедегі (x, y) нүктелерді координата жазықтығында салып, оларды тегіс сызықпен түйістіріп, осы графикті пайда етеміз:



Пайда болған пішін **парабола** деп аталады. Параболаның тармақтары жоғарыға бағытталған болып, олар ордината осіне қатысты симметрик болған қисық сызық болатыны көрініп тұр.

(0, 0) нүкте $y=x^2$ **параболаның төбесі** делінеді.

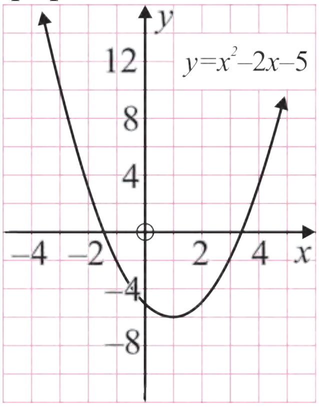
4-мысал. $y=x^2-2x-5$ квадраттық функцияның графигін сал.

△ Функцияның бір нүктесіндегі, мысалы $x=-3$ нүктесіндегі мәнін табайық:
$f(-3)=(-3)^2-2(-3)-5=9+6-5=10$.

Функцияның бірнеше нүктедегі мәнін тауып, кестені құрастырамыз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

(x, y) нүктелерді координата жазықтығында салып, оларды тегіс сызықпен қосып, берілген квадраттық функцияның графигін пайда етеміз:



Пайда болған график те парабола пішінінде. Оның тармақтары да жоғарыға бағытталған. ▲

Кез келген $y=ax^2+bx+c$ параболаның ординаталар осі – Oy осімен қиылысу нүктесін табамыз:

$x=0$, $y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0+0+c=c$.

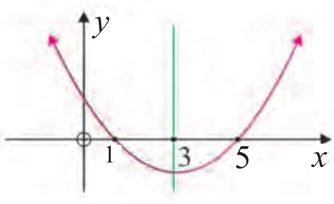
Демек, парабола (0, c) нүктеде ординаталар осімен қиылысады.

$y=ax^2+bx+c$ параболаның абсциссалар осімен қиылысу нүктелерін табу үшін $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеудің шешімдерін табу жеткілікті.

Мысалы, $y=x^2-2x-15$ параболаның абсциссалар осімен қиылысу нүктелерін табамыз. $x^2-2x-15=0$ деп, осы квадрат теңдеуді шешеміз. Оның шешімдері $x=-3$ және $x=5$ болады. Демек, $y=x^2-2x-15$ парабола абсциссалар осімен (−3, 0), (5, 0) нүктелерде қиылысады. $y=ax^2+bx+c$ парабола үшін $x=h$ көріністегі вертикаль түзу оның *симметрия* осі болады.

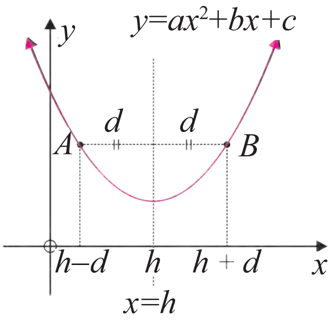
Егер $y=ax^2+bx+c$ парабола абсциссалар осімен қиылысатын болса, h сан параболаның Ox осімен қиылысу нүктелері абсциссаларының орташа арифметикалық мәніне тең болады.

5-мысал. Суреттегі параболаның симметрия осін тап.



△ Егер парабола абсциссалар осімен (1, 0) және (5, 0) нүктелерде қиылысатын болса, $x=\dfrac{5+1}{2}=3$ – симметрия осі болады. ▲

Егер $y=ax^2+bx+c$ парабола абсциссалар осімен қиылыспайтын болса, h санды басқа тәсілмен де табуға болады.



Көріп тұрғанымыздай, абсциссалар $h-d$ және $h+d$ болған A, B нүктелер бірдей ординаталарға ие, яғни $f(h-d)=f(h+d)$, демек, A және B $x=h$ оське қатысты симметриялы нүктелер.

Осы шартты пайдаланып, төмендегі теңдіктен h-ті табамыз:

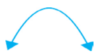
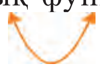
$a(h-d)^2+b(h-d)+c=a(h+d)^2+b(h+d)+c$ немесе

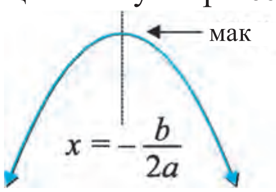
$a(h^2-2hd+d^2)+bh-bd=a(h^2-2hd+d^2)+bh+bd$

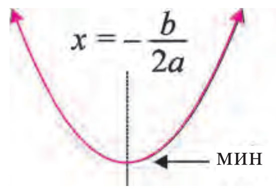
немесе $-4ahd=2bd$, бұдан $h=\frac{-b}{2a}$. Демек, симметрия осі $h=\frac{-b}{2a}$ екен.

Қорытынды. $y=ax^2+bx+c$ параболаның симметрия осі $x=\frac{-b}{2a}$ болады. Параболаның өзіне-өзі симметриялы болған нүктесі параболаның төбесі делінеді. Параболаның төбесінің координаталары $x=\frac{-b}{2a}$, $y=y(\frac{-b}{2a})=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$

Парабола осі $(-\frac{b}{2a},0)$ нүктеден Oy осіне параллель болып өтеді.

$a<0$ болғанда параболаның пішіні  сияқты болып, оның төбесі $y=ax^2+bx+c$ квадраттық функцияның максимум нүктесі, $a>0$ болғанда параболаның пішіні  сияқты болып, оның төбесі квадраттық функцияның минимум нүктесі болады.





6-мысал. $y=3x^2+4x-5$ параболаның симметрия осін тап.

$y=3x^2+4x-5$ үшін $a=3$, $b=4$.

Демек, $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 3}=-\frac{2}{3}$, яғни $x=-\frac{2}{3}$ – симметрия осі.

7-мысал. $f(x)=x^2+6x+4$ параболаның төбесін тап.

$a=1$, $b=6$. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot 1}=-3$.

Демек, парабола төбесінің абсциссасы $x=-3$,

ал ординатасы: $y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.

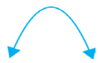
Сондықтан параболаның төбесі $(-3,-5)$ координаталарға ие.

8-мысал. Спортшы допты жоғарыға лақтырды, мұнда доптың t секундтан кейінгі биіктігі $H(t)=30t-5t^2$ метр болды, $t\geqslant 0$.

a) Неше секундта доп ең жоғары нүктеге жетеді?

b) Ең жоғары нүкте жерден қаншалықты биікте болады?

c) Доп неше секундтан соң жерге түседі?

a) $H(t)=30t-5t^2$ үшін $a<0$, $a=-5$. Сондықтан бұл парабола төмендегі пішінде болады: . $t=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-30}{2\cdot(-5)}=3$ секундта максимумға жетеді.

Яғни доп ең жоғары нүктеге 3 секундта көтеріледі.

b) Максимал биіктікті табамыз:

$H(3)=30\cdot3-5\cdot3^2=90-45=45$, яғни ең жоғары нүкте жерден 45 метр биіктікте болады.

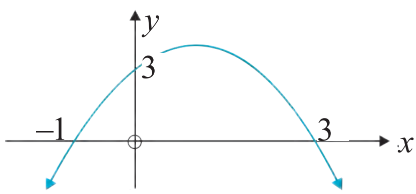
c) $H(t)=0$ болса, доп жерге түседі. Осы теңдеуді шешеміз:

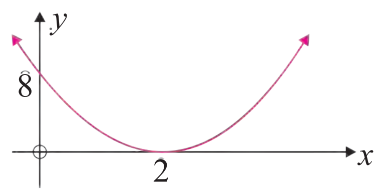
$30t-5t^2=0$, $5t^2-30t=0$, $5t(t-6)=0$. Бұдан $t_1=0$ немесе $t_2=6$.

Демек, 6 секундтан соң доп жерге түседі.

Төменде біз параболаның пішініне қарап квадраттық функцияның формуласын табуға қатысты мысалдарды келтіреміз.

9-мысал. Берілген параболаларға қарап квадраттық функция формуласын жаз:

a) 

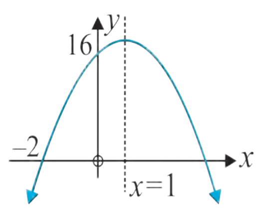
b) 

a) Парабола тармақтары төменге қараған, ол абсциссалар осімен −1 және 3 нүктелерде қиылысады. Сондықтан $y=a(x+1)(x-3)$, $a<0$. $x=0$-де $y=3$ шарттан $a=-1$-ді табамыз.

Демек, квадраттық функция $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$ формуламен өрнектеледі.

b) Парабола тармақтары жоғарыға қараған, ол абсциссалар осімен $x=2$ нүктеде түйіседі. Сондықтан $y=a(x-2)^2$, $a>0$. $x=0$-да $y=8$ шарттан $a=2$-ні табамыз. Демек, квадраттық функция $y=2(x-2)^2$ формуламен беріледі.

10-мысал. Берілген параболаға қарап квадраттық функцияның формуласын жаз.



$x=1$ − симметрия осі болғандықтан, абсциссалар осімен екінші қиылысу нүктесі $x=4$ болады. Демек, $y=a(x+2)(x-4)$. Бұдан $x=0$, $y=16$. Сондықтан $16=a(0+2)(0-4)$. Бұдан $a=-2$ немесе $y=-2(x+2)\cdot(x-4)=-2x^2+4x+16$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Сызықтық функция дегеніміз не?
2. Сызықтық функцияның бұрыш коэффициенті дегеніміз не?

3. Квадраттық функция дегеніміз не?
4. Квадраттық функцияның төбесі қалай табылады?
5. Қашан квадраттық функция максимумға ие болады?
6. Қашан квадраттық функция минимумға ие болады?

Жаттығулар

92. Ескірудің нәтижесінде автомашинаның бағасы t жылдан соң $V(t)=25000-3000t$ еуро заңдылықпен өзгереді.

a) $V(0)$ мәнді тап. Осы мәннің мағынасын түсіндір;

b) $V(3)$ мәнді тап. Осы мәннің мағынасын түсіндір;

c) $V(t)=10000$ мәнге неше жылдан соң жетеді?

93. АҚШ-та электромонтер шақырылғаны үшін $60 және әрбір сағаты үшін $45 қызмет ақысын алады.

a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ болғандағы сәйкес кестені құрастыр. C қызмет ақысының t уақытқа байланысуын график көріністе өрнекте.

b) $C(t)$ функцияның формуласын (алгебралық көрінісін) жаз.

c) $6\frac{1}{2}$ сағатқа қанша қаржы төленеді?

94. Цистернада 265 литр су бар. Одан әр минутта 11 литр су алынуда.

a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ болғанда алынатын судың V литрлік көлемі t (минут) уақытқа қалай байланысуын өрнектейтін кесте құрастыр.

b) $V(t)$ байланысуды графиктік көріністе өрнекте;

c) $V(t)$ функцияның формуласын (алгебралық көрінісін) жаз.

d) 15 минуттан соң цистернада қанша су қалады?

e) Цистерна қанша уақыттан соң босайды?

95. Төмендегілердің қай бірі квадраттық функция:

a) $y=2x^2-4x+10$; c) $y=-2x^2$; e) $3y+2x^2-7=0$;

b) $y=15x-8$; d) $y=\frac{1}{3}x^2+6$; f) $y=15x^3+2x-16$?

96. (x, y) жұптық көрсетілген $y=ax^2+bx+c$ квадраттық функциямен өрнектелген қатынаста бола ма:

a) $f(x)=6x^2-10$, $(0, 4)$;
b) $y=2x^2-5x-3$, $(4, 9)$;
c) $y=-4x^2+6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$;
d) $y=-7x^2+9x+11$, $(-1, -6)$;
e) $f(x)=3x^2-11x+20$, $(2, -10)$;
f) $f(x)=-3x^2+x+6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. $y=ax^2+bx+c$ квадраттық функция үшін y-тің берілген мәніне сәйкес болған x-тің мәнін тап:

a) $y=x^2+6x+10$, $y=1$; c) $y=x^2-5x+1$, $y=-3$;
b) $y=x^2+5x+8$, $y=2$; d) $y=3x^2$, $y=-3$.

98. Материалдық дене 80 м/с жылдамдықпен жоғарыға лақтырылған. Оның t секундта жерге қатысты биіктігі $h(t)=80t-5t^2$ функциямен анықталады.

a) 1 секунд, 3 секунд, 4 секундтан соң дененің биіктігін тап;
b) қайсы уақытта дененің биіктігі 140 метр болады? 0 метр ше? Жауаптарға сәйкес жағдайларды түсіндір.

99. Өнім өндіретін кәсіпкердің табысы төмендегі формуламен есептеледі:

$P(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+36x-40$ (мың сум), мұндағы x – өнімдердің саны.

a) 0 өнім, 20 өнім өндірілгенде кәсіпкер қандай табысқа ие болады?
b) 270 мың сум табыс алу үшін кәсіпкер қанша өнім өндіруі қажет?

100. Функцияның $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ мәндеріне сай мәндерін тап. Нәтижелерді кесте көрінісінде бер және графиктерін сал:

a) $y=x^2+2x-2$;
b) $y=x^2-3$;
c) $y=x^2-2x$;
d) $f(x)=-x^2+x+2$;
e) $y=x^2-4x+4$;
f) $f(x)=-2x^2+3x+10$;
g) $y=x^2-5x+6$;
h) $y=x^2+x+1$;
i) $y=-x^2+x-1$.

101. Бұл графиктер қандай пішінде болады? Параболалардың ординаталар осімен қиылысу нүктесін тап:

a) $y=x^2+2x+3$;
b) $y=2x^2+5x-1$;
c) $y=-x^2-3x-4$;
d) $f(x)=3x^2-10x+1$;
e) $y=3x^2+5$;
f) $y=4x^2-x$;
g) $y=8-x-2x^2$;
h) $f(x)=2x^2-x^2-5$;
i) $y=6x^2+2-5x$

102. Функциялар графиктері ординаталар осімен қай нүктелерде қиылысады:

a) $y=(x+1)(x+3)$;
b) $y=(x-2)(x+3)$;
c) $y=(x-7)^2$;
d) $y=(2x+5)(3-x)$;
e) $y=x(x-4)$;
f) $y=-(x+4)(x-5)$;
g) $y=(x-1)(x-6)$;
h) $y=-(x+2)(x+4)$;
i) $y=-(x-3)(x-4)$?

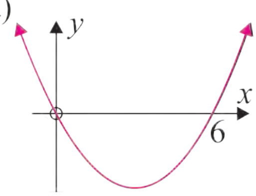
103. Параболалардың абсциссалар осімен қиылысу нүктесін тап:

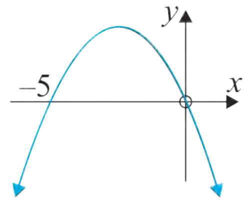
a) $y=x^2-x-6$;
b) $y=x^2-16$;
c) $y=x^2+5$;
d) $y=3x-x^2$;
e) $y=x^2-12x+36$;
f) $y=x^2+x-7$;
g) $y=-x^2-4x+21$;
h) $y=2x^2-20x+50$;
i) $y=2x^2-7x-15$;
j) $y=-2x^2+x-5$;
k) $y=-6x^2+x+5$;
l) $y=3x^2+x-1$

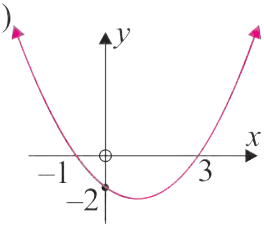
104 Параболалардың координаталар осімен қиылысу нүктесін тап:

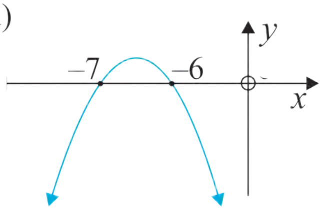
a) $y=x^2+x-2$;
b) $y=(x+3)^2$;
c) $y=(x+5)(x-2)$;
d) $y=x^2+x+4$;
e) $y=3x^2-3x-36$;
f) $y=-x^2-8x-16$;
g) $y=-x^2-7x$;
h) $y=-2x^2+3x+7$;
i) $y=2x^2-18$;
j) $y=-x^2+2x-9$;
k) $y=4x^2-4x-3$;
l) $y=6x^2-11x-10$.

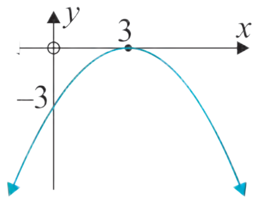
105. Параболаның симметрия осін тап:

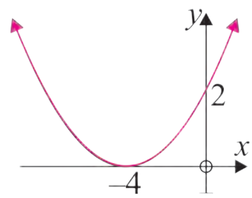
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

106. Параболаның симметрия осін тап:

a) $y=(x-2)(x-6)$;
b) $y=x(x+4)$;
c) $y=-(x+3)(x-5)$;
d) $y=(x-3)(x-8)$;
e) $y=2(x-5)^2$;
f) $y=3(x+2)^2$.

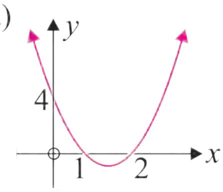
107. Параболаның симметрия осін тап:

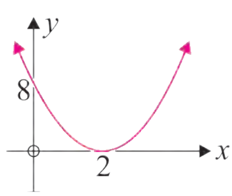
a) $y=x^2+6x+2$;
b) $y=x^2-8x-1$;
c) $f(x)=2x^2+5x-3$;
d) $y=-x^2+3x-7$;
e) $y=2x^2-5$;
f) $y=-5x^2+7x$;
g) $f(x)=x^2-6x+9$;
h) $y=10x-3x^2$;
i) $y=\frac{1}{8}x^2+x-1$.

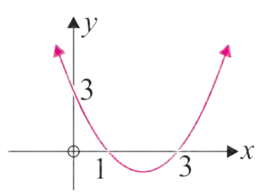
108. Парабола төбесінің координаталарын тап:

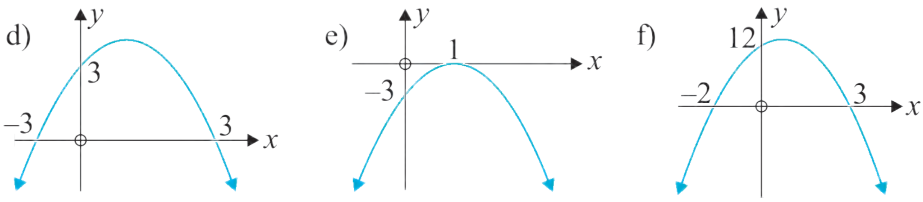
a) $y=x^2-4x+7$;
b) $y=x^2+2x+5$;
c) $f(x)=-x^2+6x-1$;
d) $y=x^2+3$;
e) $f(x)=2x^2+12x$;
f) $y=-3x^2+6x-4$;
g) $y=x^2-x-1$;
h) $y=-2x^2+3x-2$;
i) $y=-\frac{1}{4}x^2+3x-2$.

109. Параболаға қарап, оған сәйкес квадраттық функцияның формуласын тап:

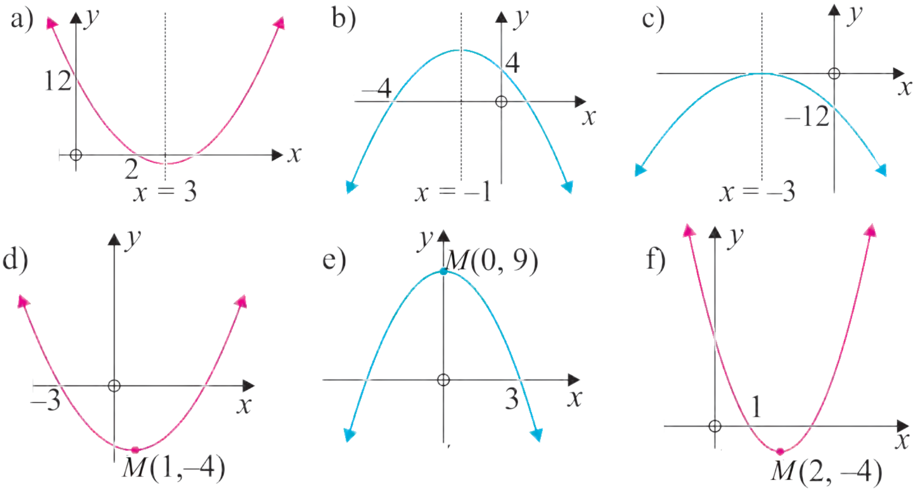
a) 

b) 

c) 



110. Параболаға қарап, квадраттық функцияның формуласын жаз:



111. Ділшат теңізге меруертті алу үшін сүңгіді. Оның t секундтан соң сүңгу тереңдігі $H(t)=-4t^2+4t+3$ метр болды, $t \geqslant 0$.

a) меруерттер қандай тереңдікте орналасқан?

b) Ділшат меруертті алуға қанша уақыт жұмсайды?

c) Ділшат қандай биіктіктен суға сүңгиді?

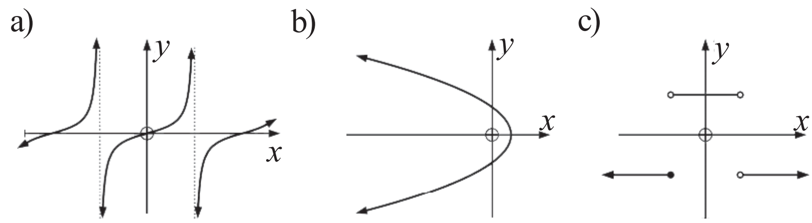
112. Жасмина көйлек тігу үшін тапсырыс алды. Ол бір күнде x дана көйлек тігетін болса, ол $P(x)=-x^2+20x$ АҚШ доллары мөлшерінде табыс табады.

a) Ең үлкен табыс алуы үшін ол қанша көйлек тігуі қажет?

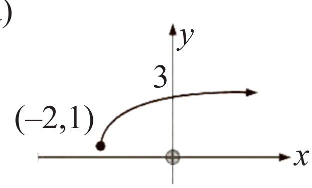
b) Ең үлкен табыс қанша долларға тең?

Бақылау жұмысының үлгісі

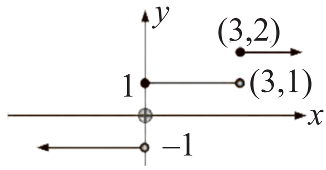
1. Төмендегілердің қайсылары функциялар болып табылады?



d)



e)

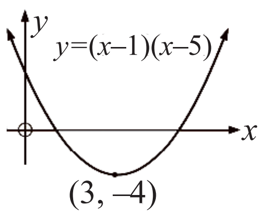


2. Төмендегі реттелген жұптық жиындардың қайсылары бейнелеулер болады? Жауабыңды негіздеп бер.

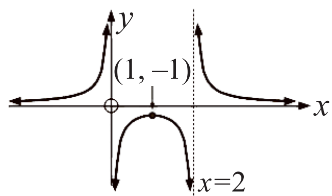
a) $\{(1, 2),(-1, 2),(0, 5),(2, -7)\}$; b) $\{(0, 1),(1, 3),(2, 5),(0, 7)\}$;
c) $\{(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4)\}$.

3. Графиктік көріністе берілген функциялардың анықталу облысын және мәндер жиынын тап.

a)

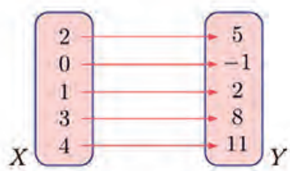


b)

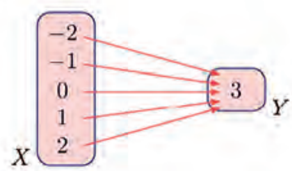


4. Төмендегі диаграмма $y=f(x)$ бейнелеуді беруде.

a)



b)



1) $y=f(x)$ бейнелеудің анықталу облысын және мәндер жиынын жаз.

2) $y=f(x)$ бейнелеу жазықтықтағы координаталар жүйесінде қалай өрнектеледі?

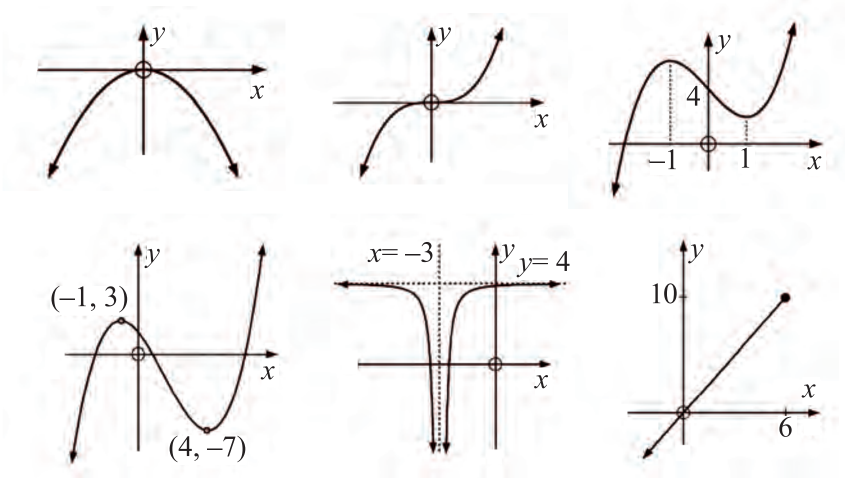
3) $y=f(x)$ үшін анық өрнекті жаз.

5. $f(x)=2x-x^2$ функция үшін:

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$ мәндерді тап.

6. $g(x)=x^2-3x$ функция үшін a) $g(x+1)$; b) $g(x^2-2)$ өрнектерді тап және ықшамда:

7. Графиктік көріністе берілген функциялардың кему және өсу аралықтарын тап.



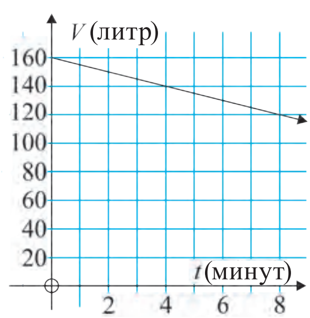
8. a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-3x+2$;
c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=-x^3$ функциялар үшін:

1) функциялардың осьтермен қиылысу нүктелерін тап.

2) локал максимум, локал минимум нүктелерінің координаталарын тап.

3) функциялардың графигін жуықтап сыз.

9. Төмендегі графикте минутта өрнектелген t уақытта цистернадан құйылатын мұнай өнімінің V көлемі өрнектелген.



1) Құйылатын мұнай өнімі көлемінің уақытқа байланысының формуласын тап.

2) 15 минутта қанша мұнай құйылады?

3) 50 литр мұнай қанша уақытта құйылады?

4) Цистерна қанша уақытта босайды?

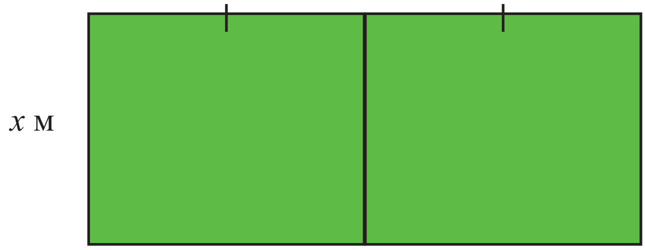
10. Тас теңіздің деңгейінен 60 метрлік биіктіктен жоғарыға лақтырылған. t секундтан соң тастың теңіз деңгейіне қатысты биіктігі $H(t)=-5t^2+20t+60$ метрге тең болса:

1) Неше секундтан соң тастың биіктігі ең үлкен болады?

2) Тастың теңіз деңгейіне қатысты биіктігі қаншаға тең болады?

3) Тас неше секундтан соң суға түседі?

11. Фермер суретте көрсетілген бірдей ауданға ие болған көршілес тұрған екі астық алқабын 2000 метрлік қабырғамен қоршап алды.



1) Алқаптардың жалпы ауданы x арқылы қалай өрнектеледі?
2) Екі алқаптың жалпы ауданы ең көбі нешеге квадрат метрге тең болуы мүмкін? Осы алқаптардың өлшемдерін анықта.

55 ПЕРИОДТЫҚ ҮДЕРІСТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ БАҚЫЛАУ

Периодтық үдерістер табиғат пен техникада кең таралған. Оларға мысалдар келтірейік:

- жыл мезгілдері бойынша ауа-райының өзгеруі;
- айлардағы орташа температураның өзгеруі;
- күн мен түннің алмасуы;
- теңіз жағалауындағы судың тереңдігі;
- жануарлардың саны;
- күн белсенділігінің өзгеруі;
- механикадағы, электртехникадағы периодтық тербелістер.

Бұл үдерістерде белгілі бір уақыт аралығында қайталанып тұратын жағдайлар байқалады. Олар жағдайға қарап периодтық, тербелетін немесе циклдік делінеді.

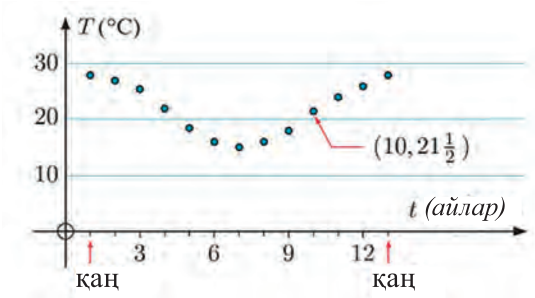
Мысалы, Оңтүстік Африкадағы Кейптаун қаласында бір айлық максималды температураның өзгеруін көрсететін кестеге назар аударайық:

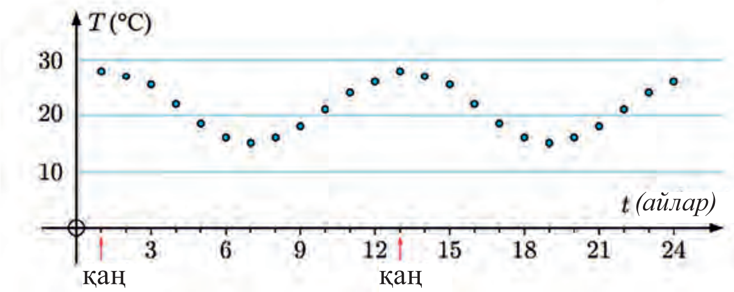
Ай	Қаң	Ақп	Нау	Сәу	Мам	Мау	Шіл	Там	Қыр	Қаз	Қар	Жел
Темп (0°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Осы деректерді графиктік көріністе өрнектейік. Ол үшін ординаталар осі температураны, абсциссалар осі айдың реттік санын (мысалы, ақпанға t=2) білдірсін.

Бұл графикте қаңтар айында орташа 28°C температура болуы байқалуда. Осы мән жыл сайын қаңтарда, яғни әр 12 айда қайталануы табиғи.

Қалған айлар үшін де орташа температураның өзгеруін шамамен жуықтап бейнелейтін графикті сызып, оны кейінгі жылға да жалғастырсақ болады:





Егер $y=f(t)$ функция t айдағы орташа температураны өрнектесе, $f(0)=f(12)=f(24)=...$, $f(1)=f(13)=f(25)=...$ және сол сияқты заңдылық, жалпылама түрде, кез келген t үшін $f(t+12)$ болатыны бақылануда.

Мұнда қайталануы байқалған 12 айлық мерзімді период деп атаймыз.

X жиында анықталған $f(x)$ функцияға кез келген x-те $f(x+T)=f(x)$ теңдеуді қанағаттандыратын $T>0$ бар болса, $f(x)$ функция периодты делінеді, мұнда $x+T \in X$.

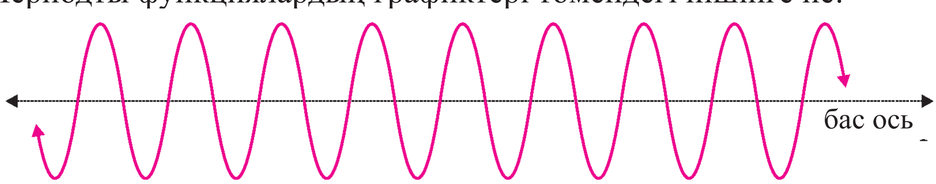
Көрініп тұрғанындай, $f(x+T)=f(x)$ болса, онда $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=...$

Мұндай $T>0$ сандардың ең кіші мәнін функцияның периоды деп атаймыз.

Дөңгелек түзудің бойымен айналып қозғалса, ондағы белгілі бір нүкте *циклоида* деп аталатын қисық сызықтың бойымен периодты түрде қозғалады.

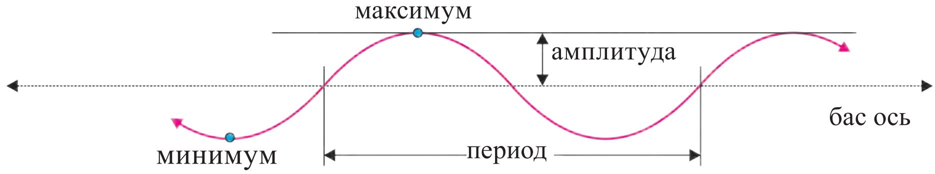
Циклоида $y=f(x)$ көріністегі теңдеуге ие емес екенін айту қажет.

Периодты функциялардың графиктері төмендегі пішінге ие:



Бас ось теңдеуі төмендегідей табылады: $y = \dfrac{\max + \min}{2}$, мұнда *max* – функцияның ең үлкен, ал *min* ең кіші мәні.

Периодты функцияның графигі төмендегі құрамдық бөліктерге ие:



Амплитуда функцияның максимумы мен ось (немесе ось пен минимум) арасындағы арақашықтық болып, ол төмендегідей табылады:

$$\text{амплитуда} = \frac{\max - \min}{2}.$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Периодтық үдерістерге мысалдар айт.
2. Функцияның периодына анықтама бер.
3. Периодты функцияның амплитудасы қалай есептеледі?
4. Циклоиданың не екенін түсіндір.
5. Қай кезде квадраттық функция максимумға (минимумға) ие?

Жаттығулар

113. Әрбір жағдай үшін деректерді графиктік көріністе өрнекте және оларды периодты немесе периодты емес екені жайлы қорытынды шығар:

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	1,4	1	0	–1	–1,4	–1	0	1	1,4	1	0

b)

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

c)

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

114. Төмендегі кестеде дөңгелек түзудің бойымен айналып қозғалса, онда белгіленген нүктенің қозғалысын өрнектейтін шамалар көрсетілген:

Қашықтық (см)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Биіктік (см)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1

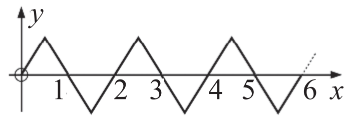
Қашықтық (см)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
Биіктік (см)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3

a) Биіктіктің қашықтыққа байланыстылығын графикпен өрнекте.

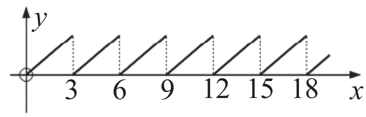
b) Бұл үдеріс периодты ма? Егер периодты болса, ось теңдеуін, функцияның максимумын, периодын, амплитудасын тап.

115. Төмендегілердің қайбірі периодтық үдерісті өрнектейді?

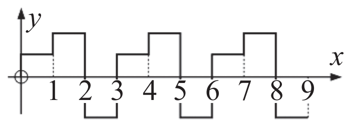
a)



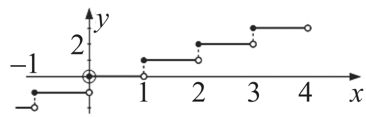
b)



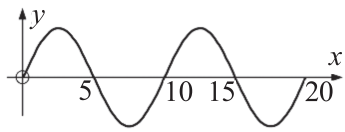
c)



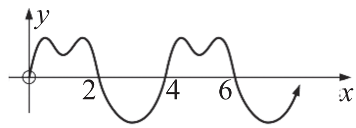
d)



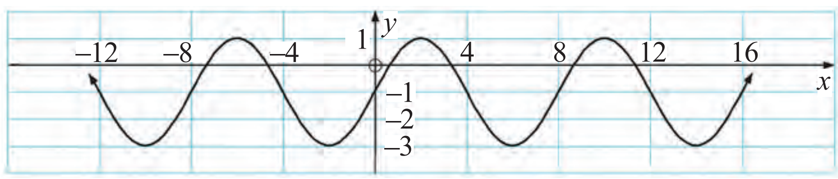
e)



f)



116.



Берілген периодты функция үшін:

a) амплитуданы тап; b) периодты тап;

c) бірінші максимум нүктесін тап;

d) екі максимум арасындағы қашықтықты анықта;

e) бас остің теңдеуін құрастыр.

56-58 $y=\sin x$, $y=\cos x$ ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ КӨМЕГІМЕН МОДЕЛЬДЕУ

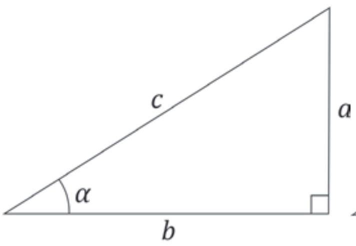
Тікбұрышты үшбұрышта a, b – катеттер, c – гипотенуза болсын. α деп a катетке қарама-қарсы бұрышты белгілейміз (1-сурет).

Геометрия курсында α бұрыштың синусы мен косинусы төмендегі теңдіктердің көмегімен енгізіледі:

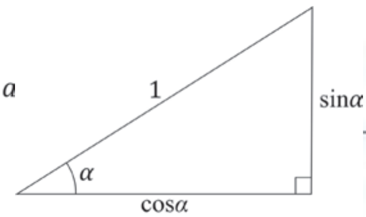
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Гипотенузаны 1 деп алсақ, 1-сурет 2-суреттегі көрініске келеді.

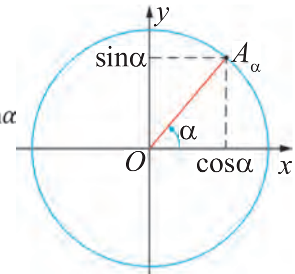
Жазықтықтағы координаталар жүйесін енгізіп, оған *радиусы 1-ге тең шеңберді – бірлік шеңберді* қарастырамыз және осы шеңберде α бұрышқа сәйкес болған нүктені белгілейміз (3-сурет).



1-сурет.



2-сурет.

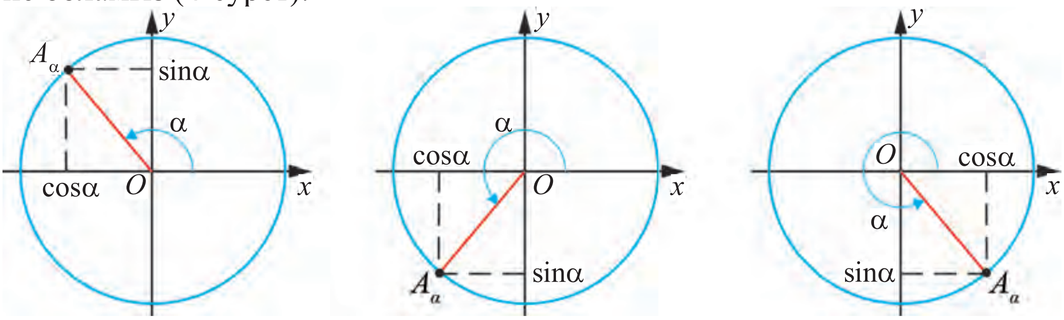


3-сурет.

α бұрыштың синусы деп (1;0) нүктені координаталар басының айналасында α бұрышқа бұрудың нәтижесінде пайда болған A_α нүктенің ординатасына айтылады (sinα түрінде белгіленеді).

Дәл осылай, α бұрыштың косинусы деп (1; 0) нүктені координаталар басының айналасында α бұрышқа бұрудың нәтижесінде пайда болған A_α нүктенің абсциссасына айтылады (cosα түрінде белгіленеді).

α бұрышқа сәйкес нүкте басқа ширектерде жатса, төмендегідей пішінге ие боламыз (4-сурет):



4-сурет.

Пифагор теоремасына орай, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ – *негізгі тригонометриялық тепе-теңдік* орынды, мұнда $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Тригонометрияда қаралған бұрыштарды (доғаларды) градустарда немесе радиандарда өлшеуге болады.

α центрлік бұрышқа сәйкес доға ұзындығының сол доға радиусымен салыстырмалы мәні осы бұрыштың радиан өлшемі делінеді.

Градустарда берілген α бұрыштың радиан өлшемі $\dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha$ -ға тең.

Көп кездесетін бұрыштардың радиан өлшемдерінің кестесін келтірдік:

Градус	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

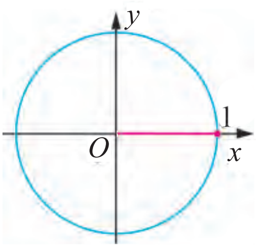
Кейбір α бұрыштардың синусы мен косинусының мәндерін табайық.

1. $\alpha=0°$ болсын (5-сурет). Осы жағдайға сәйкес нүктенің абсциссасы 1-ге, ал ординатасы 0-ге тең, демек, $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$.

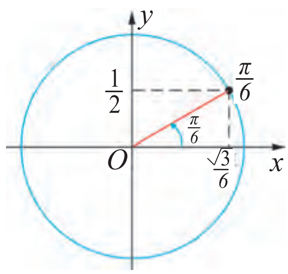
2. $\alpha=\pi/6=30°$ болсын (6-сурет). Тікбұрышты үшбұрышта 30° бұрышқа қарсы катет гипотенузаның жартысына тең себепті, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ болады. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікке орай $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\alpha=\pi/4=45°$ болсын (7-сурет). Осы жағдайда теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш пайда болады.

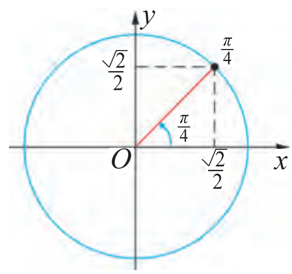
Мұндай үшбұрышта α бұрыштың синусы мен косинусы өзара тең. Оларды x дейміз. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктен $x^2+x^2=1$, яғни $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ болады. Демек, $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



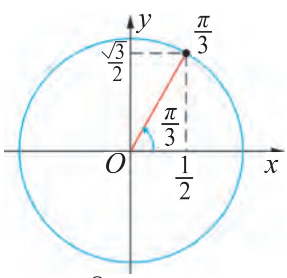
5-сурет.



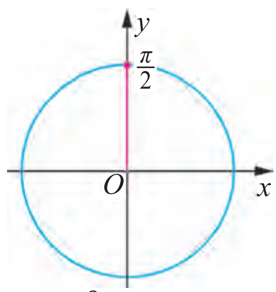
6-сурет.



7-сурет.



8-сурет.

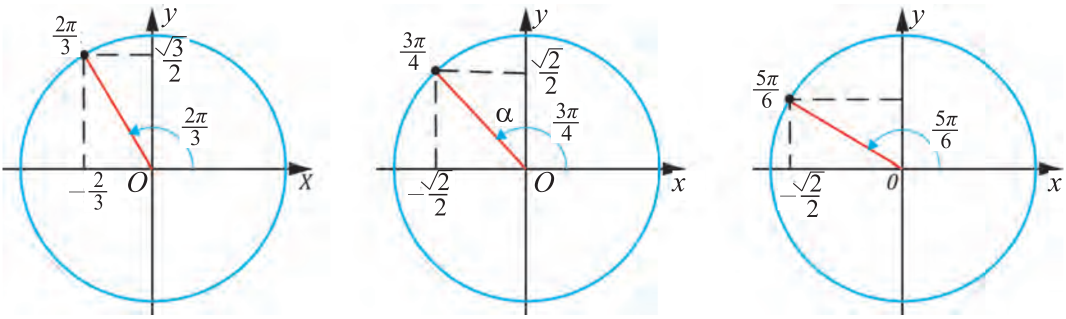


9-сурет.

4. $\alpha=\pi/3=60°$ болсын (8-сурет). Осы жағдайда да дәл $\alpha=\frac{\pi}{6}$ жағдайға ұқсас тұжырым жасап, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдіктерге ие боламыз.

5. $\alpha=\pi/2=90°$ болсын (9-сурет). Осы жағдайға сәйкес нүктенің

абсциссасы 0-ге, ал ординатасы 1-ге тең. Демек, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$.



10-сурет.

6. $\frac{2\pi}{3}=120°$, $\frac{3\pi}{4}=135°$, $\frac{5\pi}{6}=150°$ болған жайттарды көрелік (10-сурет).

$\frac{2\pi}{3}$, нүкте үшін $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$. Онда, бұл нүкте $\frac{\pi}{3}$ нүктеге Oy осімен салыстырғанда симметриялы. Демек, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{3\pi}{4}$ нүкте үшін $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$. Онда, бұл нүкте $\frac{\pi}{4}$ нүктеге Oy осімен салыстырғанда симметриялы. Демек, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

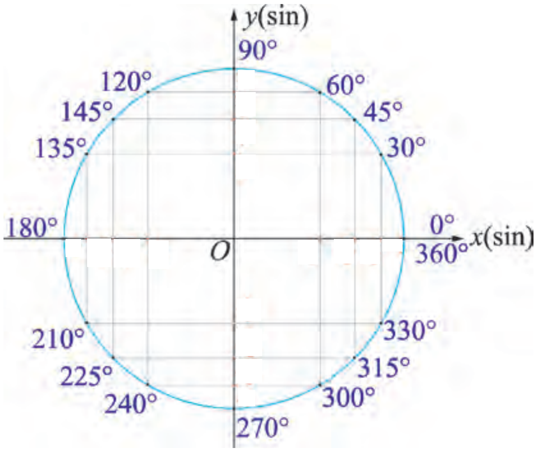
$\frac{5\pi}{6}$ нүкте үшін $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$. Онда, бұл нүкте $\frac{\pi}{6}$ нүктеге Oy осімен салыстырғанда симметриялы. Демек, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

7. $\alpha=\pi=180°$ жағдайда $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$ екенін дәлелдеу және сәйкес суретті салуды оқушыға ұсынамыз.

Жоғарыда біз $[0; \pi]$ аралықта кейбір бұрыштар үшін синус пен косинус мәндерін анықтадық. Осы бұрыштардың әрбіріне π-ді қосып, $[\pi; 2\pi]$ аралықтағы бұрыштар үшін де синус пен косинус мәндерін анықтауға болады.

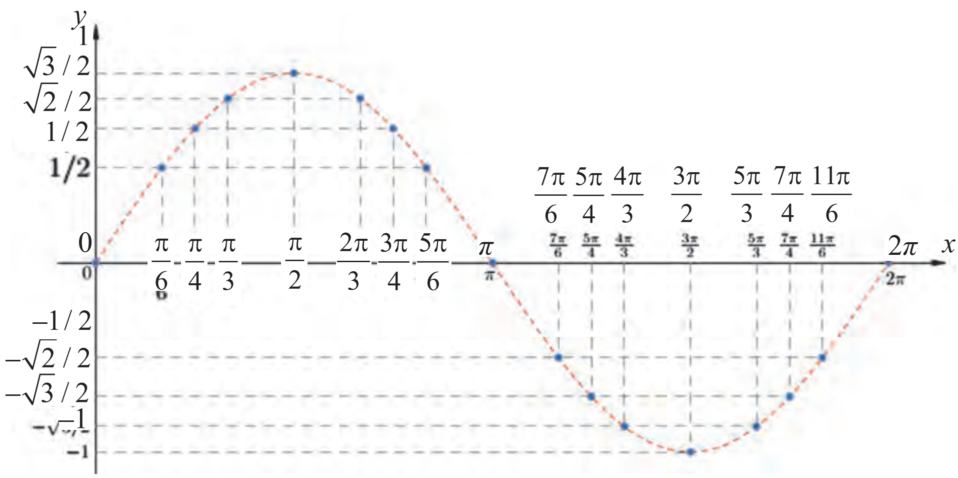
Нәтижені *тригонометриялық шеңбер* деп аталған 11-суретте өрнектейміз:

Жоғарыдағы мәндерді пайдаланып, $y=\sin x$, $y=\cos x$ функциялар графиктерін салуға болады. Ол үшін абсциссалар осінде α бұрыштың мәндерін, ал ординаталар осінде синустың сәйкес мәндерін алып, пайда болған нүктелерді белгілейміз. Сосын белгіленген нүктелерді тегіс сызықпен қосып, $[0;2\pi]$ аралықтағы $y=\sin x$ (12-сурет) функция графигін пайда етеміз. $y=\cos x$ (13-сурет) графигі де осылай салынады.

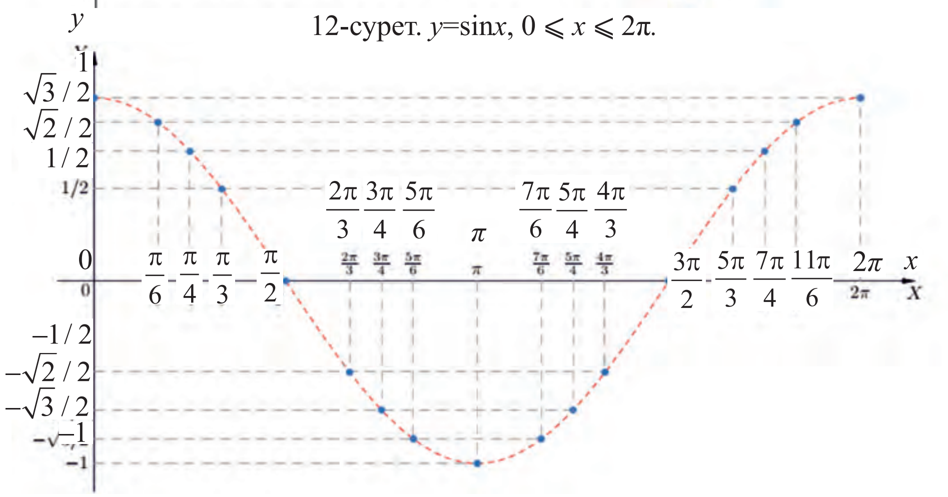


$30° = \frac{\pi}{6}$;	$45° = \frac{\pi}{4}$;	$60° = \frac{\pi}{6}$;
$90° = \frac{\pi}{2}$;	$120° = \frac{2\pi}{3}$;	$135° = \frac{3\pi}{6}$;
$180° = \pi$;	$210° = \frac{7\pi}{6}$;	$225° = \frac{5\pi}{4}$;
$240° = \frac{4\pi}{3}$;	$270° = \frac{3\pi}{2}$;	$300° = \frac{5\pi}{3}$;
$315° = \frac{7\pi}{4}$;	$330° = \frac{11\pi}{6}$.	

11-сурет. Тригонометриялық шеңбер. Синус пен косинустың кейбір мәндері.

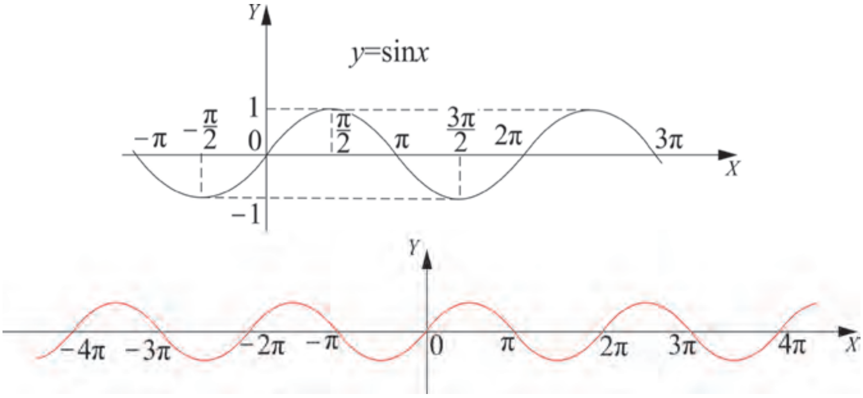


12-сурет. $y=\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

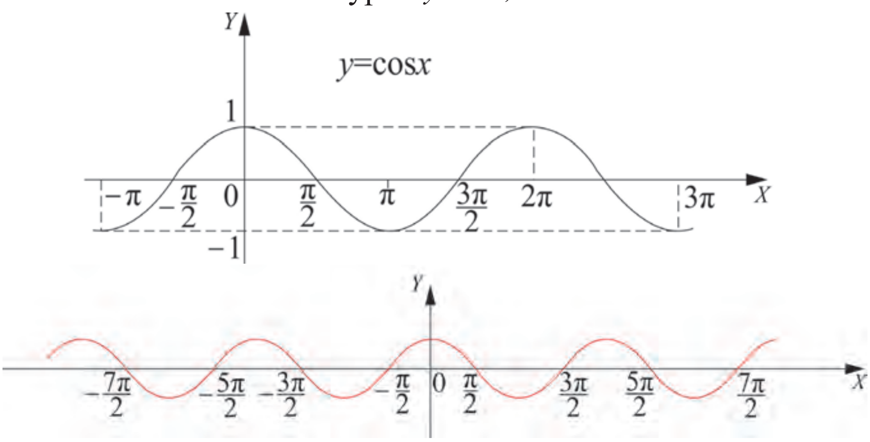


13-сурет. $y=\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Осы графиктерді периодты түрде жалғастырып, $y=\sin x$, $y=\cos x$ функциялардың графиктерін пайда етеміз (14- және 15-суреттер).



14-сурет. $y=\sin x,\ x\in R$.



15-сурет. $y=\cos x,\ x\in R$.

Графиктерді оқып, мына қорытындыға келеміз: $y=\sin x$ ($y=\cos x$) функцияның периоды 2π-ге, амплитудасы 1-ге, ең үлкен мәні 1-ге, ең кіші мәні -1-ге тең.

Қолдануларда көп кездесетін $y=a\sin x$ және $y=\sin bx$, $b\neq 0$ функциялар туралы кейбір тұжырымдарды келтіреміз.

$y=a\sin x$ функцияның амплитудасы $|a|$-ға тең. Оның графигі $y=\sin x$ функцияның графигін $|a|>1$ болғанда ординаталар осі бойынша созу, ал $|a|<1$ болғанда сығу нәтижесінде пайда болады. $y=\sin bx$ функцияның периоды $\dfrac{360°}{|b|}$-ға тең. Бұл функцияның графигі $y=\sin x$ функцияның графигін $0<|b|<1$ болғанда абсциссалар осі бойынша созу, $|b|>1$ болғанда сығу нәтижесінде пайда болады.

$y=\sin x+c$ көріністегі функцияның графигі $y=\sin x$ функцияның графигін

c бірлікке параллель көшірудің нәтижесінде пайда болады және мұндағы $y=\sin x+c$ функцияның бас осі $y=c$ теңдеуге ие.

Жоғарыдағыларды ескеріп, $y=a\sin bx+c$ көріністегі функцияның графигін пайда етуге болады.

Мысалы, $y=2\sin 3x+1$ функцияны қарастырайық.

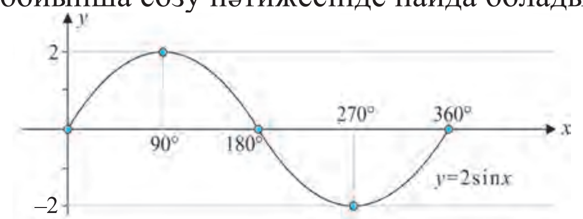
Бұл функцияның графигі $y=\sin x$ фцнкцияның графигінен төмендегідей пайда болады:

1. Амплитуданы екіге көбейтіп, $y=2\sin x$-ті пайда етеміз
2. Периодты үшке бөліп, $y=2\sin 3x$-ті пайда етеміз
3. Берілген 1 бірлікке параллель көшіреміз. $y=2\sin 3x+1$ функцияның бас осі $y=1$ теңдеуге ие.
4. Нәтижеде $y=2\sin 3x+1$ функцияның графигін пайда етеміз.

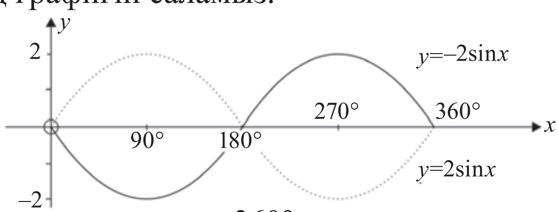
Осыған ұқсас тұжырымдарды $y=\cos x$ функция туралы да айтуға болады.

1-мысал. $y=2\sin x$, $y=-2\sin x$, $y=\sin 2x$ функциялардың графиктерін сал, $0°\leq x\leq 360°$.

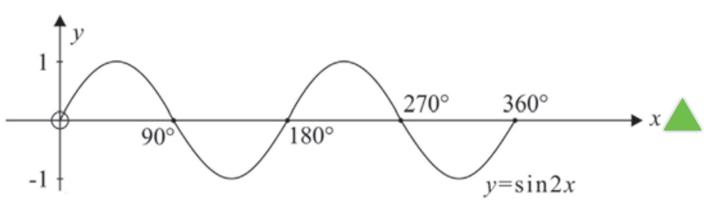
△Алдымен $y=2\sin x$ функцияның графигін саламыз. Бұл функцияның амплитудасы 2-ге тең және оның графигі $y=\sin x$ функцияның графигін ординаталар осі бойынша созу нәтижесінде пайда болады:



$y=-2\sin x$ функцияның графигі $y=2\sin x$ функцияның графигіне абсциссалар осімен салыстырғанда симметриялы. Мұны пайдаланып, $y=-2\sin x$ функцияның графигін саламыз.

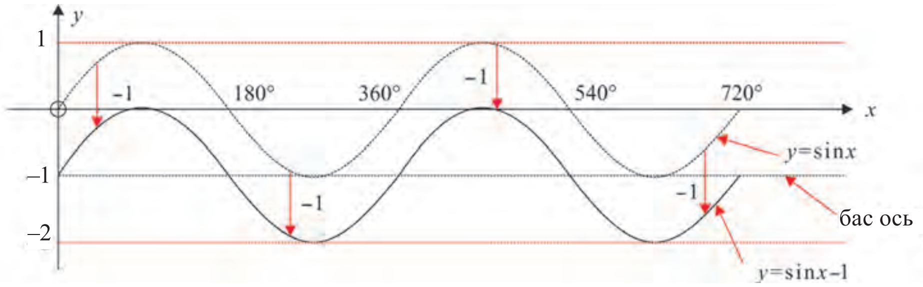


$y=\sin 2x$ функцияның периоды $\dfrac{360°}{2}=180°$. Бұл функцияның графигі төмендегідей болады:



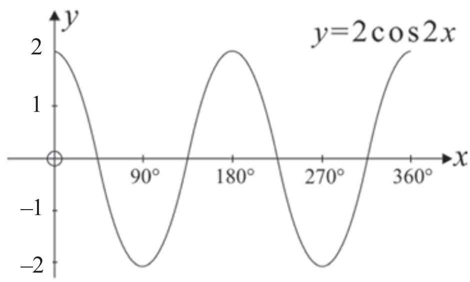
▲

2-мысал. $0° \leqslant x \leqslant 720°$ болғанда $y=\sin x$ va $y=\sin x-1$ функциялардың графигін сал.



3-misol. $0° \leqslant x \leqslant 360°$ кесіндіде $y=2\cos 2x$ функцияның графигін саламыз.

$a=2$. Демек, функцияның амплитудасы $|2|=2$ болады, ал $b=2$ болғандықтан функцияның периоды $\frac{360°}{|b|}=\frac{360°}{2}=180°$ болады. Бұдан мына графикке ие боламыз:



Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Бірлік дөңгелектегі бұрыш синусына анықтама бер.
2. Бірлік дөңгелектегі бұрыш косинусына анықтама бер.
3. 30°-тық бұрыш үшін синус пен косинусты есепте.
4. $y=\sin x$ функцияның графигін сыз.
5. $y=\cos x$ функцияның графигін сыз.

Жаттығулар

117. Графиктерді $0° \leqslant x \leqslant 360°$ кесіндіде сал:

a) $y=3\sin x$; b) $y=-3\sin x$; c) $y=\frac{3}{2}\sin x$; d) $y=-\frac{3}{2}\sin x$.

118. Графиктерді $0° \leqslant x \leqslant 540°$ кесіндіде сал:

a) $y=\sin 3x$; b) $y=\sin(\frac{x}{2})$; c) $y=\sin(-2x)$; d) $y=-\sin\frac{x}{3}$.

119. Функцияның периодын анықта:

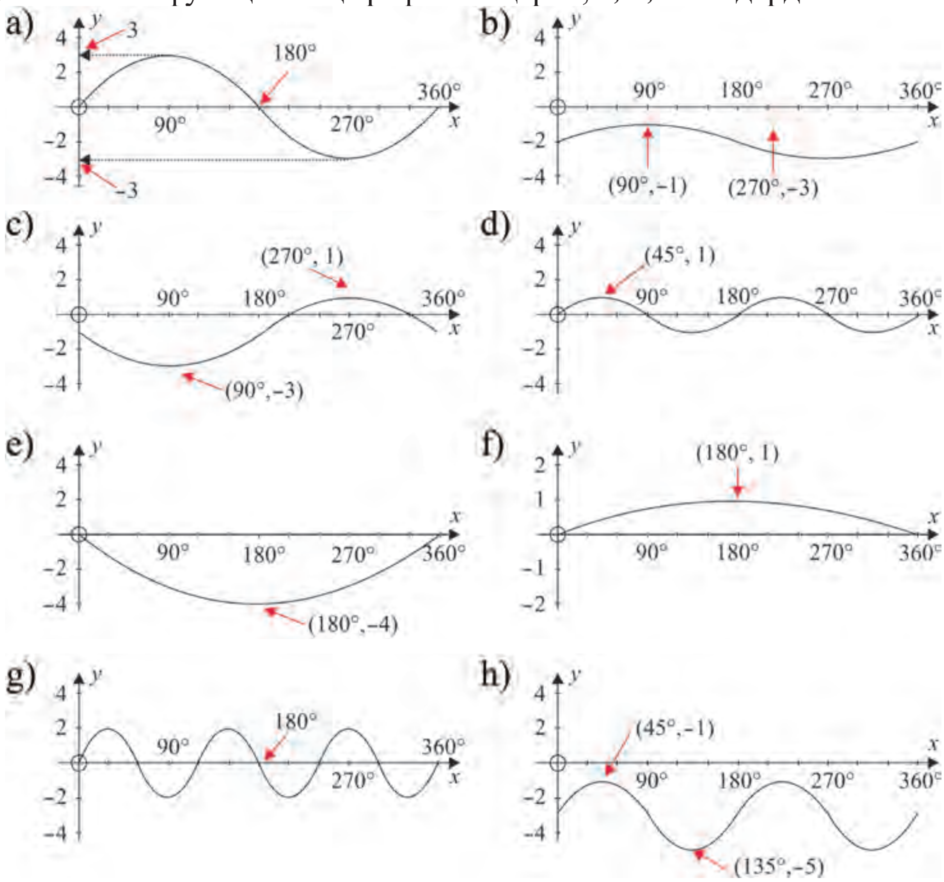
a) $y=\sin 4x$; b) $y=\sin(-4x)$; c) $y=\sin(\frac{x}{3})$; d) $y=\sin(0,6x)$.

120. Егер $y=\sin bx$, $b>0$ үшін функцияның периоды

a) 900°; b) 120°; c) 2160°; d) 720°

-қа тең болса, b-ны тап.

121. $y = a\sin bx + c$ функцияның графигіне қарап, a, b, c сандарды тап:

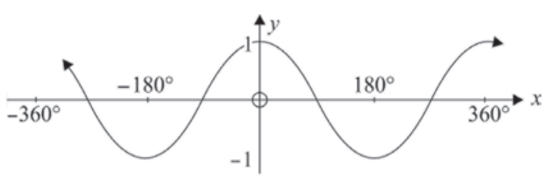


122. Графиктерді $0° \leqslant x \leqslant 360°$ кесіндіде сал:

a) $y = \sin x + 1$; b) $y = \sin x - 2$; c) $y = 1 - \sin x$;

d) $y = 2\sin x - 1$; e) $y = \sin 3x + 1$; f) $y = 1 - \sin 2x$.

123. $y = \cos x$ функцияның графигіне қарап,



a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos x - 1$; c) $y = \frac{2}{3}\cos x$;

d) $y = \frac{3}{2}\cos x$; e) $y = -\cos x$; f) $y = \cos 2x$;

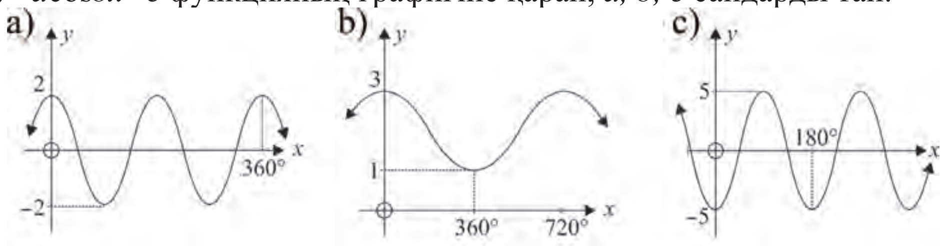
g) $y = \cos(\frac{x}{2})$; h) $y = 3\cos 2x$ функциялардың графиктерін сал.

124 Функцияның периодын анықта:

a) $y=\cos3x$; b) $y=\cos(\frac{x}{3})$; c) $y=\cos(\frac{x}{2})$; d) $y=\cos4x$.

125. $y=a\cos bx+c$ функция берілген болсын. a, b, c сандардың геометриялық мағынасын анықта.

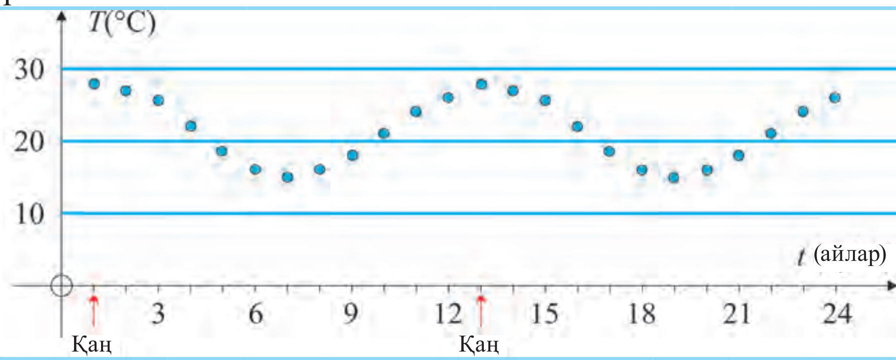
126. $y=a\cos bx+c$ функцияның графигіне қарап, a, b, c сандарды тап.



4-мысал. Төменде Оңтүстік Африкадағы Кейптаун қаласында ауа-райының бір айлық максималды температурасының өзгеруін көрсететін кесте берілген:

Ай	*Қаң*	*Ақп*	*Нау*	*Сәу*	*Мам*	*Мам*	*Шіл*	*Там*	*Қыр*	*Қаз*	*Қар*	*Жел*
T(°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Максимал температураның өзгеруін шамамен өрнектейтін графикті келтіреміз:



Осы үдерістің моделі $T=a\cos bt+c$ көріністе болсын деп қарастырып, параметрлер – a, b, c-ларды табамыз. Период 12 ай болғандықтан

$$\frac{360°}{|b|}=12\text{, яғни } b=\frac{360°}{12}=30°.$$

Амплитуданы есептейміз: $\frac{\max-\min}{2}\approx\frac{28-15}{2}=6,5$. Бұдан $\alpha\approx6,5$.

Бас ось максимал және минимал мәндер түзулерінің арасында болғандықтан $c\approx\frac{28+15}{2}\approx21,5$.

Демек, бір айлық максимал температура уақыт өтуімен өзгеруінің математикалық моделі $T \approx 6,5\ \cos 30t + 21,5$ функциясы болып табылады.

Жаттығулар

127. Антарктидадағы Полюс базасында 30 жыл барысында орташа температура төмендегідей болғаны белгілі:

Айдың реттік саны	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура (°С)	0	–4	–10	–15	–16	–17	–18	–19	–17	–13	–6	–1

Орташа температура өзгеруінің математикалық моделін жаса.

128. Теңіз жағалауында теңіз суының көтерілуі мен артқа қайтуы үдерісі бақыланғанда төмендегілер анықталды: 1) судың тереңдігінің ең үлкен және ең кіші мәндерінің арасындағы айырмашылық 14 метр; 2) судың тереңдігі ең үлкен мәндеріне орташа әр 12,4 сағатта жетеді. Судың тереңдігінің уақытқа қатысты өзгеруінің математикалық моделін жаса және оны графиктік көріністе өрнекте.

129. Велосипедтің дөңгелегіне сары түсті сәуле қайтарғыш орнатылған. Велосипед кешке тегіс жолмен қозғалғанда бейнетаспаға түсірілді. Бейне таспаның көмегімен сәуле қайтарғыштың жолға қатысты биіктігі уақыт өтуімен қалай өзгеретіні анықталып, төмендегі кесте толтырылды:

Уақыт (*t*, сек)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Биіктік (*H*, см)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) синус функциясын пайдаланып, үдерістің математикалық моделін жаса.

b) үдерісті графиктік көрініске келтір;

c) дөңгелектің радиусын тап;

d) велосипед қандай жылдамдықпен қозғалуда?

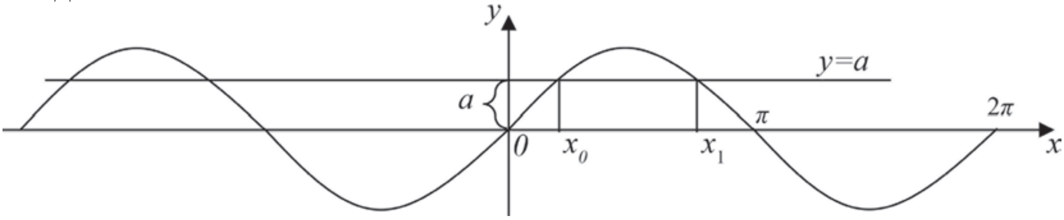
59-61 ЕҢ ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

$\sin x = a$ теңдеу

Бізге белгілі болғанындай, $-1 \le \sin x \le 1$, сондықтан $\sin x = a$ теңдеу $|a| > 1$ болғанда шешімі жоқ. $-1 \le a \le 1$ аралықта теңдеудің шешімін табу үшін төмендегі анықтаманы енгіземіз.

$a \in [-1;1]$ санның *арксинусы* деп синусы a-ға тең болған $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ санға айтылады: егер $\sin x = a$ және $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ болса, $\arcsin a = x$.

Теңдеуді шешу үшін 16-суреттегі $y=\sin x$ функцияның графигін пайдаланамыз.



16-сурет.

Графикте көрініп тұрғанындай, $a \in [-1;1]$ болғанда $y=a$ функция $[0;2\pi]$ аралықта $y=\sin x$ функция графигінің абсциссалары x_0 және $x_1=\pi-x_0$ болған нүктелерде қиылысады. Осы екі нүктені бір формуламен жазуға болады:

$$x=(-1)^n \arcsin a, \text{ мұнда } n = 0, 1.$$

$y=\sin x$ функцияның периодтығын пайдаланып, теңдеуді шешу үшін мына формуланы пайда етеміз:

$$x=(-1)^k \arcsin a+ \pi k,\ k \in Z. \qquad (1)$$

1-мысал. Есепте: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

△Анықтамаға орай $-1 \le \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1$, $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ және $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болғаны үшін $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Дәл солай, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ болады.▲

2-мысал. Теңдеуді шеш: $\sin x=\frac{1}{2}$.

△(1) формулаға орай теңдеудің шешімі

$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ болады.▲

3-мысал. Теңдеуді шеш: $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△$y=\sin x$ функция тақ болғаны үшін $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ болады.

(1) формуланы қолданып, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in Z$ теңдікті

пайда етеміз. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ болғандықтан $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$,

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$, немесе $x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$ шешімдерді аламыз. ▲

sin$x$=a теңдеудің маңызды жағдайлардағы шешімдерін келтіреміз:

$a=1$ болғанда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $a=-1$ болғанда $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$;

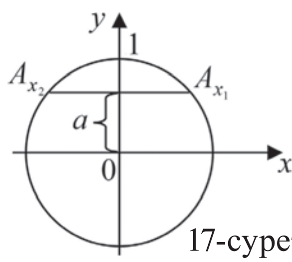
$a=0$ болғанда $x=\pi k,\ k\in Z$.

4-мысал. Теңдеуді шеш: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

△ $a=0$ болғандықтан $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k$, $\frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$, яғни $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z$

шешімдерді табамыз. ▲

sin$x$=a теңдеуді шешуді бірлік дөңгелекте түсіндіру оңай. sin$x$-тің анықтамасына орай, оның мәні бірлік дөңгелектегі A_x нүктенің ординатасы. $|a|<1$ болғанда мұндай нүктелер 2-еу, яғни A_{x_1} және A_{x_2}. $a=\pm1$ болғанда 1-еу (17-сурет).



17-сурет.

cos*x*=*a* теңдеу

$-1\le\cos x\le1$ болғандықтан cos$x$=a теңдеу $|a|>1$ болғанда шешімі жоқ. $-1\le a\le1$ аралықта теңдеудің шешімін табу үшін төмендегі анықтаманы енгіземіз.

$a\in[-1;1]$ санның ***аркосинусы*** деп косинусы a-ға тең болған $x\in[0;\pi]$ санға айтылады: егер cos$x$=a және $x\in[0;\pi]$ болса, arccos a=x.

Анықтамаға орай, $[0;\pi]$ аралықта cos$x$=a теңдеу бір x=arccos$a$ түбірге ие. y=cos$x$ функция жұп болғандықтан $[-\pi;0]$ аралықта да бір x=−arccos$a$ бір шешімге ие. Функцияның периоды 2π. Бұл жағдайда cos$x$=a теңдеудің шешімі үшін $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$ (2)

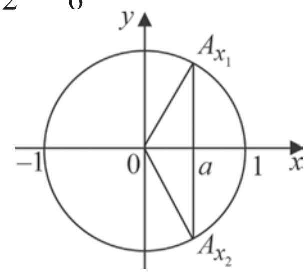
формуланы пайда етеміз.

5-Мысал. Есепте: 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

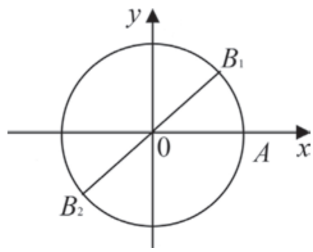
△Анықтамаға орай, $-1 \le \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1$, $\frac{\pi}{6} \in [0;\pi]$ және $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болғандықтан $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ болады. Дәл солай, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ болады.▲

6-мысал. Теңдеуді шеш: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

△(2) формулаға орай теңдеудің шешімі $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, бірақ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Демек, шешім мына көріністе болады: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$▲



18-сурет.



19-сурет.

$\cos x = a$ теңдеудің шешілуін бірлік дөңгелекте түсіндіреміз (18-сурет). $\cos x$ функцияның анықтамасына орай оның мәні бірлік дөңгелектегі A_x нүктенің абсциссасы болады. $|a|<1$ болғанда мұндай нүктелер 2-еу, яғни A_{x_1} және A_{x_2}; $a=1$ және $a=-1$ болғанда мұндай нүктелер біреу.

$\cos x = a$ теңдеудің маңызды жағдайлардағы шешімдерін келтіреміз:
$a=1$ болғанда $x=2\pi k$, $k \in Z$; $a=-1$ болғанда $x=\pi+2\pi k$, $k \in Z$;
$a=0$ болғанда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

7-мысал. Теңдеуді шеш: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

△$\cos x = 0$ теңдеудің шешімі формуласынан $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ -ні пайда етеміз. Бұдан, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.▲

tg*x*=*a* теңдеу

Бұл теңдеуді шешу үшін төмендегі анықтаманы енгіземіз. $a \in R$ санның *арктангенсі* деп, тангенсі a санға тең болған $x \in (-\pi/2;\pi/2)$ санға айтылады: егер $\mathrm{tg}\,x = a$ және $x \in (-\pi/2;\pi/2)$ болса, $\mathrm{arctg}\,a = x$.

$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ болғандықтан $\mathrm{tg}\,x$ бірлік дөңгелектегі B $(x;\ y)$ нүкте ординатасының абсциссасымен салыстырмалы мәніне тең (19-сурет), яғни бұл нүкте $\frac{y}{x}=a$ түзумен бірлік дөңгелектің қиылысу нүктесі. 19-суретке орай мұндай нүктелер 2-еу: B_1 және B_2 нүктелер. Сондықтан теңдеудің шешімі төмендегідей болады:

$$x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (3)$$

8-мысал. Есепте: 1) arctg1; 2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ және $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ және $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан $\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

9-мысал. Теңдеуді шеш: $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$

(3)-ке орай, теңдеудің шешімдері төмендегідей болады:

$x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi n$. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}(\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ болғандықтан теңдеудің шешімдері $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, немесе $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Ең қарапайым тригонометриялық теңдеулер үшін кестені келтіреміз:

Теңдеу	Шешімдері	Кейбір қасиеттері
$\sin x=a$	$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.$	$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.$	$\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\operatorname{tg}x=a$	$x=\operatorname{arctg}a+\pi k,\ k\in Z.$	$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a,\ a\in R.$

Үшінші бағандағы қасиеттер теріс сандар арксинустары (арккосинустары, арктангенстері) мәндерін оң сандар арксинустары мәндері арқылы табу мүмкіндігін береді. Мысалы, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}.$$

10-мысал. Теңдеуді шеш: $\cos(10x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}$.

$10x+\frac{\pi}{8}=z$ белгілеуді енгізіп, $\cos z=\frac{1}{2}$ теңдеуді пайда етеміз. Бұдан

(2) формулаға орай $z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$, яғни $10x+\frac{\pi}{8}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ немесе $x=\frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$. ▲

sin$x$=sin$a$, cos$x$=cos$b$, tg$x$=tg$c$ көріністегі теңдеулер

Бұл теңдеулердің шешімі, сәйкесінше, төмендегідей болады:

$x=(-1)^k a+\pi k,\ k\in Z;\quad x=\pm b+2\pi n,\ n\in Z;\quad x=c+\pi m,\ m\in Z.$ (4)

11-мысал. Теңдеуді шеш: $\cos(3x-40°)=\cos(2x+60°)$.

△(4) формулаға орай, $3x-40°=\pm(2x+60°)+360°n,\ n\in Z$ теңдеуді пайда етеміз. Бұдан белгісіз x табылады:

$$3x-40°=2x+60°+360°n \Leftrightarrow x=100°+360°n,\ n\in Z;$$

$$3x-40°=-2x-60°+360°n,\ 5x=-20°+360°n \Leftrightarrow x=-4°+72°n,\ n\in Z. ▲$$

12-мысал. Теңдеуді шеш: $\sin^2x+3\sin x+2=0$.

△$\sin x=z$ белгілеу енгізіп, $z^2+3z+2=0$ квадрат теңдеуге келеміз. Бұл теңдеуді шешіп $z_1=-2,\ z_2=-1$-лер табылады. Белгілеуге орай, $\sin z=-2$ және $\sin x=-1$ теңдеулерді пайда етеміз. $\sin z=-2$ шешімге ие емес. $\sin x=-1$ теңдеу $x=270°+360°k,\ k\in Z$ шешімге ие. Демек, теңдеудің шешімі $x=270°+360°k$, $k\in Z$ болады. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. sin$x$=a теңдеу қалай шешіледі? Мысалмен түсіндір.
2. cos$x$=a теңдеу қалай шешіледі? Мысал келтір.
3. tg$x$=a теңдеу қалай шешіледі? Мысалдың көмегімен түсіндір.
4. arcsin a санға анықтама бер. Мысалмен түсіндір.
5. arccos a санға анықтама бер. Мысалмен түсіндір.
6. arctg a санға анықтама бер. Мысалмен түсіндір.

Жаттығулар

Есепте (**130 – 141**):

130. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{1}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin(-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

133. 1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos 1$;

134. 1) $\mathrm{arctg}\,1$; 2) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3\cdot\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

135. 1) $\mathrm{arctg}\,0$; 2) $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 3) $\mathrm{arctg}(-1)$; 4) $7\cdot\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\frac{1}{2}$.

137. 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2\arccos 1+3\arccos 0$; 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2\arccos(-1)-3\arccos 0$; 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3\mathrm{arctg}\sqrt{3}+3\arccos\frac{1}{2}$; 2) $3\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2\mathrm{arctg}\,1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Өрнектер мағынаға ие немесе ие емес екенін анықта (**142 – 143**):

142. 1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\mathrm{tg}(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; 3) $\mathrm{tg}(3\arccos\frac{1}{2})$.

Теңдеуді шеш: (**144 – 161**):

144. 1) $\sin x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=1$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 2x=-1$; 4) $\cos 3x=1$.

147. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-1$; 3) $\cos 5x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x=-1$.

148. 1) $\mathrm{tg}x=-\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{tg}x=1$; 3) $\mathrm{tg}9x=-1$; 4) $\mathrm{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\mathrm{tg}x=0$; 2) $\mathrm{tg}x=2$; 3) $\mathrm{tg}6x=-3$; 4) $\mathrm{tg}5x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2\cos x+1=0$; 2) $2\cos x-\sqrt{3}=0$; 3) $2\cos x-\sqrt{2}=0$.

151. 1) $\sqrt{2}\sin x-1=0$; 2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; 3) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

152. 1) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\,4x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos(-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1$; 3) $2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; 2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)=1$; 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$.

155. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; 3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

156. 1) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$; 2) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

157. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

158. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

159. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; 2) $\mathrm{tg}^2 x-3\,\mathrm{tg}\,x-4=0$;
3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; 4) $\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x+1=\sqrt{3}$.

160. 1) $\cos x=\cos 2x$; 2) $\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}3x$; 3) $\sin 7x=\sin 3x$; 4) $\cos 4x=\cos 5x$.

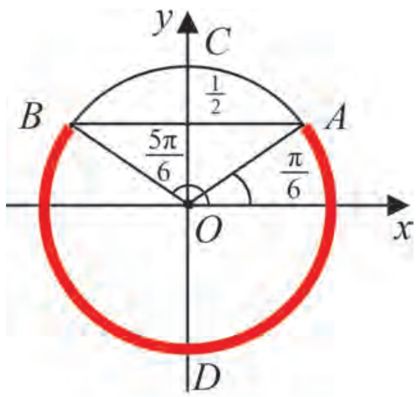
161. 1) $\sin 4x=\sin x$; 2) $\sin 2x=\cos 3x$; 3) $\mathrm{tg}10x=\mathrm{tg}8x$; 4) $\sin 5x=\sin 7x$.

62-64 ЕҢ ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

$a_1 < \sin x < b_1$, $a_2 < \cos x < b_2$, $a_3 < \mathrm{tg}x < b_3$ көріністегі теңсіздіктер *ең қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер* делінеді. Мұнда a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 − берілген нақты сандар. Мұндай теңсіздіктерді шешу үшін бірлік дөңгелекті, функцияның графигін пайдалану қолайлы.

1-мысал. $\sin x \le 0{,}5$ теңсіздікті $[0, 2\pi]$ кесіндіде шеш.

△ Бірлік дөңгелекті қарастырамыз. Осы дөңгелекте ординаталары 0,5-ке тең және одан кіші нүктелерді табамыз. 20-суретте көрінгеніндей, BDA доғаның барлық нүктелері жоғарыдағы шартты қанағаттандырады. Сол үшін x сандардың $\left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ жиыны теңсіздіктің шешімі болады. *Жауабы*: $x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ▲

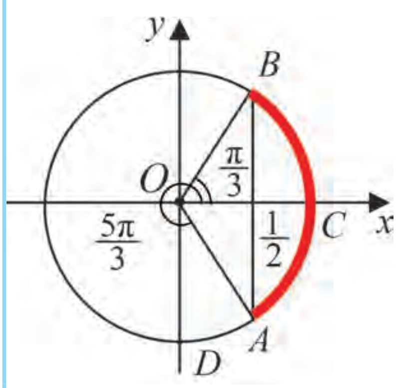


20-сурет.

2-мысал. $\cos x > \frac{1}{2}$ теңсіздікті $[0;2\pi]$ кесіндіде шеш.

△ Бірлік дөңгелекте абсциссалары $\frac{1}{2}$-ге тең және одан үлкен нүктелерді табамыз. 21-суретте көрініп тұрғанындай, ACB доғаның барлық нүктелері жоғарыдағы шартты қанағаттандырады. Сол үшін x-тердің $\left[0;\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ жиыны теңсіздіктің шешімі болады.

Жауабы: $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ ▲



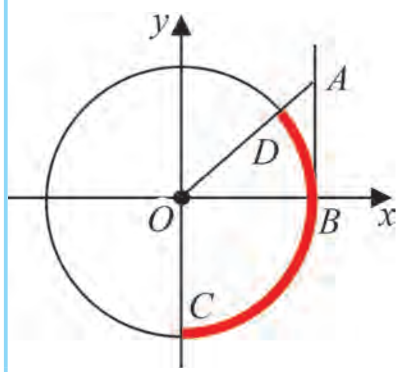
21-сурет.

3-мысал. tg$x$≤1 теңсіздікті $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралықта шеш.

△ Бірлік дөңгелектің B нүктесімен Oy осіне параллель AB түзу өткіземіз (22-сурет).

Ондағы A нүктені $OB=AB$ болатындай етіп таңдаймыз. △ AOB теңбүйірлі және тікбұрышты. OA гипотенузаның шеңбермен қиылысу нүктесі D болсын. Суретте көрінгеніндей, DBC доғаның барлық нүктелері теңсіздікті қанағаттандырады.

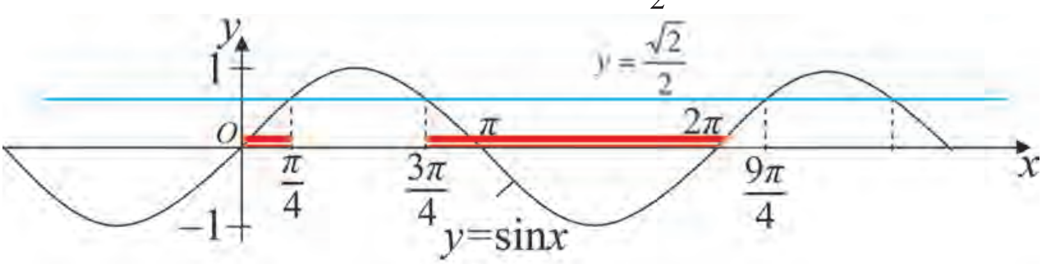
Жауабы: $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$. ▲



22-сурет.

4-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Бір координаталар жүйесінде $y=\sin x$ және $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (23-сурет) функциялардың графиктерін сызып, $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеудің $[0;2\pi]$



23-сурет.

кесіндідегі шешімін табамыз. Суретте көрініп тұрғанындай, $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңсіздіктің $[0;\ 2\pi]$ кесіндідегі шешімі $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ және $\left(\frac{3\pi}{4};2\pi\right]$ аралықтар болады. Функцияның периодтығынан x-тің $\left[2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;2\pi(n+1)\right]$, $n\in Z$ жиыны теңсіздіктің шешімі болады. ▲

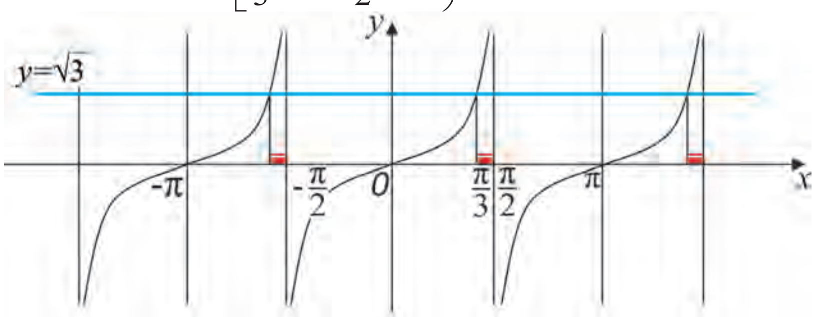
5-мысал. Теңсіздікті шеш: $-2\cos x \geq 1$. Сәйкес сурет сал.

△ Алдымен $y=\cos x$ және $y=-\frac{1}{2}$ функциялардың графигін бір координаталар жүйесінде сызамыз. Одан $\cos x=-\frac{1}{2}$ теңдеудің $[0;2\pi]$ кесіндідегі шешімдері $\frac{2\pi}{3}$ және $\frac{4\pi}{3}$ екенін анықтаймыз. Демек, теңсіздіктің шешімдері $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$ кесінділерден құралған екен. ▲

6-мысал. Теңсіздікті шеш: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

△ $y=\operatorname{tg} x$ және $y=\sqrt{3}$ функциялардың графигін бір координаталар жүйесінде сызамыз (24-сурет). $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ теңдеуді $[0;\pi]$ кесіндідегі шешімін табамыз. Бұл теңдеудің шешімі $x=\frac{\pi}{3}$. Сондықтан теңсіздіктің $[0, \pi]$ кесіндідегі шешімдерінің жиыны $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралықта. $y=\operatorname{tg} x$ функцияның периоды π екенін пайдаланып, теңсіздіктің барлық шешімдерін табамыз:

$$\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), \; n \in Z. ▲$$



24-сурет.

Сұрақтар мен тапсырмалар

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x > -1$ теңсіздіктер қалай шешіледі?

Жаттығулар

162. Теңсіздікті берілген аралықта шеш:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$;   2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos x > \frac{1}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

5) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in [-\pi; 0]$;

6) $\operatorname{tg} x <, \frac{1}{\sqrt{3}},\ x \in \left(;-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

8) $\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Теңсіздікті шеш (**163–169**):

163. 1) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -1$; 3) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x \le \frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

166. 1) $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) \le \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \ge 1$; 3) $2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2\sin 2x \cos 2x \ge \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) \ge \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4} - 2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(1 - \frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Бақылау жұмысының үлгісі

Теңдеулерді шеш (**1 – 4**):

1. $\sin 3x = 0$.

2. $4\cos 6x = -2\sqrt{3}$.

3. $5 \cdot \operatorname{tg} 4x = 3$.

4. $5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

Теңсіздіктерді $x \in [0; \pi]$ аралықта шеш (**5 – 6**):

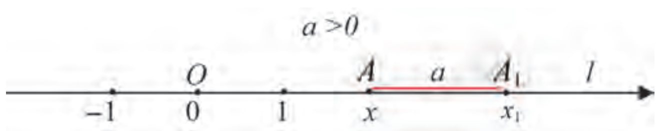
5. $\sin x > \frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg} x \le -1$.

68 ГРАФИКТЕРДІ АЛМАСТЫРУ

Жылжыту

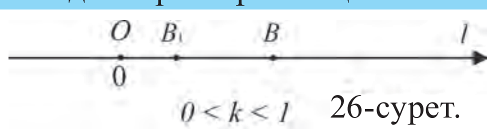
l санның осі және *O* нүкте ондағы есептің басы болсын (25-сурет). *l*-ның әрбір нүктесі *a* бірлікке жылжытылсын. Егер $a>0$ болса, жылжыту оң бағытта болады (ось бағытында) болады. Егер $a<0$ болса, жылжыту қарама-қарсы бағытта орындалады, $a=0$-де нүктелер өз орнынан жылжымайды. Егер *x* координаталы $A=A(x)$ нүкте *a* бірлікке жылжығанда $A_1(x_1)$ нүктеге өткен болса, A_1 нүктенің координатасы $x_1=x+a$ формула бойынша анықталады. *A* нүкте A_1 нүктенің түпнұсқасы (прообразы), ал A_1 *A*-ның нұсқасы (образы) делінеді.



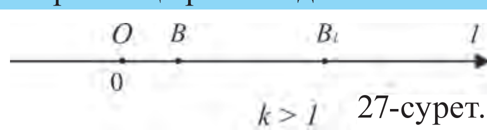
25-сурет.

Созу

l санның осінде $B(x)$ нүкте *O* координатаның басынан *k* рет алыстатылып (немесе *O*-ға жақындатылып), $B_1(x)$ нүктеге өткізілген болсын. B_1 нүктенің координатасы $x_1=kx$ формула бойынша есептеледі. Егер $k>0$ болса, B_1 және *B* нүктелер *O* нүктенің бір жағына; егер $k<0$-де B_1 және *B* нүктелер *O*-ның түрлі жағына орналасады. Егер $|k|<1$ болса (26-сурет), $x=OB$ кесінді *k* рет қысқарады; егер $|k|>1$ болса, (27-сурет) *OB* кесінді ***k*** рет созылады, $k=1$-де *B* және B_1 нүктелер дәлме-дәл түседі, $k=-1$-де олар *O* нүктеге қатысты симметриялық орналасады.



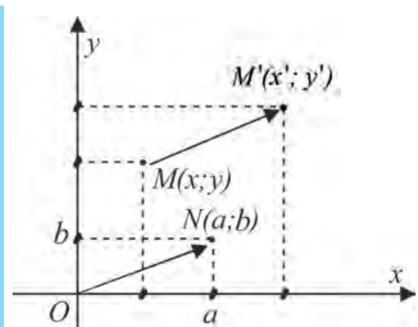
26-сурет.



27-сурет.

Параллель көшіру

Параллель көшіруде *xOy* координата жазықтығындағы барлық нүктелер бірдей бағытта бірдей қашықтыққа көшеді (28-сурет). Өйткені, $O(0;0)$ координатаның басы $N(a;\ b)$ нүктеге көшірілген болса, $M(x;\ y)$ нүкте $M'(x';\ y')$-ке көшеді. $M'(x';\ y')$ нүктенің координаталары үшін төмендегі формула орынды: $x'=x+a,\ y'=y+b$.



28-сурет.

Функцияның графигін алмастыру

Жоғарыдағы алмастырулар (жылжыту, созу, параллель көшіру) $y=f(x)$ функция графигінің көмегімен $y=f(x-a)+b$, $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (мұнда a, b, m, k − өзгермейтін сандар және $m \neq 0$, $k \neq 0$) функциялардың графгін сызу мүмкіндігін береді.

Мысалы, $y=f(x-a)+b$ функцияның графигін $y=f(x)$ функция графигінің көмегімен сызу үшін $y=f(x)$ функция графигінің әрбір нүктесі a бірлік оңға жылжыйды және b бірлік жоғарыға көтеріледі, яғни $(a; b)$ вектор бойынша параллель көшіріледі.

$y=f(x)$ функция графигінің көмегімен $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ функцияның графигін сызу үшін $y=f(x)$ функция графигінің әрбір нүктесінің абсциссасы Ox бойынша k рет сығылады ($k>0$ болса – оңға, $k<0$ болса – солға) және ординатасы Oy ось бойынша m бірлікке созылады ($m>0$ болса – жоғарыға, $m<0$ болса – төменге).

1-мысал. $y=3x$ функция графигінің көмегімен $y=3(x-1)+4$ функцияның графигін сыз.

△ $y=3(x-1)+4$ функцияның графигін сызу үшін $y=3x$ функцияның графигі $(1; 4)$ вектор бойынша параллель көшіріледі. ▲

2-мысал. $y= -2\,x+4$ функция графигінің көмегімен $y= -2(x+3)+5$ функцияның графигін сыз.

△ $y= -2(x+3)+5$ функцияның графигін сызу үшін $y= -2\,x+4$ функцияның графигі $(3;1)$ вектор бойынша параллель көшіріледі. ▲

3-мысал. $y=x^2$ параболаның графигін пайдаланып, $y=2-(x+3)^2$ функцияның графигін сыз.

△ $y=2-(x+3)^2$ функцияның графигін сызу үшін $y=x^2$ функцияның графигі алдымен 3 бірлік солға жылжытылады және Ox осіне қатысты симметриялық көшіріледі. Сосын пайда болған график Oy осі бойынша 2 бірлік жоғарыға көтеріледі. ▲

4-мысал. $y=\sin x$ функция графигінің көмегімен $y=\sin 2x$ функцияның графигін сыз.

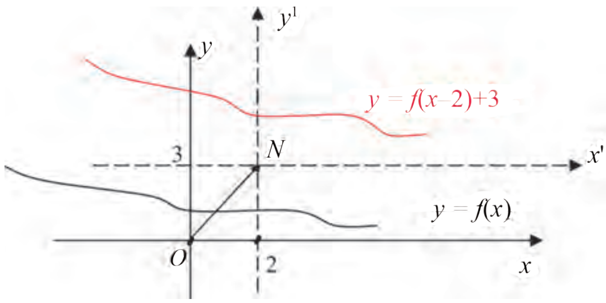
△ $y=\sin 2x$ функцияның графигін сызу үшін $y=\sin x$ функцияның графигінің әрбір нүктесінің абсциссасы Ox осі бойынша екі рет оңға сығылады.
▲

5-мысал. $y=\cos x$ функция графигінің көмегімен $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ функцияның графигін сыз.

$\triangle$ $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ немесе $y=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ функциянның графигін сызу үшін алдымен $y=\cos x$ функцияның графигі оңға $\frac{\pi}{8}$-ге жылжытылады, соң абсциссасы оңға екі рет сығылады, ординатасы екі рет жоғарыға созылады. Пайда болған график Ox осі бойынша симметриялы көшіріледі. $\blacktriangle$

6-мысал. $y=f(x)$ функция графигінің көмегімен $y=f(x-2)+3$, функцияның графигін сыз.

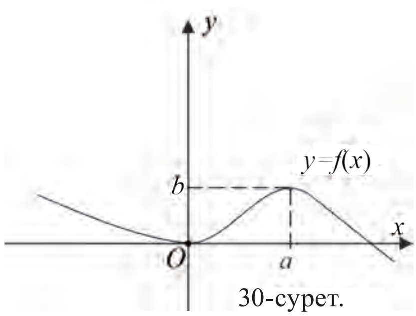
$\triangle$ $y=f(x-2)+3$ функцияның графигін сызу үшін $y=f(x)$ функция графигінің әрбір нүктесі (2;3) вектор бойынша параллель көшіріледі. (29-сурет). $\blacktriangle$



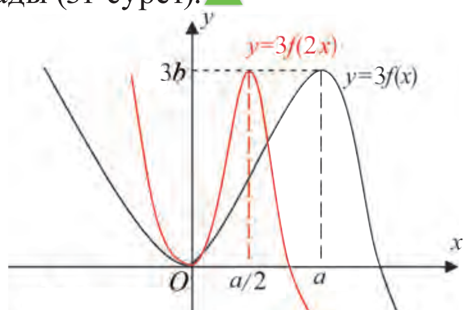
29-сурет.

7-мысал. $y=f(x)$ функция графигінің көмегімен (30-сурет) $y=3f(2x)$ функцияның графигін сыз ($m=3,\quad k=\frac{1}{2}$ болған жағдайда).

$\triangle$ $y=f(x)$ функция графигі Ox ось бойынша оңға 2 рет сығылады және Oy ось бойынша жоғарыға 3 рет созылады (31-сурет). $\blacktriangle$



30-сурет.



31-сурет.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Жылжыту дегеніміз не? Созу ше? Параллель көшіру ше? Мысалдар келтір.

2. $y=\sin x$ функция графигінің көмегімен $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ функцияның графигін сыз.

Жаттығулар

170. $y=f(x)=x^2-2x+3$ функция графигінің көмегімен көрсетілген функциялардың графигін сыз:

1) $y=f(x)+1$; 2) $y=3f(x)$; 3) $y=3f(x)-2$;

4) $y=f(x-1)+1$; 5) $y=2f(x+1)+1$; 6) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

7) $y=\frac{1}{2}f(2x)$; 8) $y=f(2x)-3$; 9) $y=2f(2x)-5$.

171. $y=f(x)=x^2-5x+6$ функция графигінің көмегімен көрсетілген функциялардың графигін сыз:

1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$; 3) $y=f(2x)$; 4) $y=3f\left(\frac{x}{3}\right)+1$;

5) $y=-f(x)$; 6) $y=2f(x)-3$; 7) $y=-f(-x)$; 8) $y=2f(x+1)+5$.

172. $y=\cos x$ функция графигінің көмегімен көрсетілген функциялардың графигін сыз:

1) $y=\cos x-1$; 2) $y=2\cos x+1$;

3) $y=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

69-70 ПАРАМЕТРЛІК КӨРІНІСТЕ БЕРІЛГЕН ҚАРАПАЙЫМ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІ

Материялық нүктенің (x,y) координаталары t параметрге байланысты болсын: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. t қандай да бір T аралыққа өзгерсе $(\varphi(t), \psi(t))$ нүктелер жиыны қандай болады? Бұл жиынды *параметрлік көріністе берілген функцияның графигі* деп атаймыз.

1-мысал. Материялық нүктенің координаталары параметрлік көріністе $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=5t+8 \end{cases}$ берілген. Осы материялық нүкте қозғалысы барысында сызған сызықты (материялық нүктенің траекториясын) тап.

△ Теңдеулерден t параметрді табамыз: $t=\frac{x-1}{3}$ және $t=\frac{y-8}{5}$.

Пайда болған өрнектерден $\frac{x-1}{3}=\frac{y-8}{5}$ теңдеуге келеміз. Бұдан $5x-5=3y-24$, немесе $5x-3y+19=0$. Бұл түзудің теңдеуі.

Демек, ізделінген функция $3y=5x+19$, немесе $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$ екен.

Жауабы: $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$. ▲

2-мысал. $\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$ параметрлік көріністе берілген функцияның графигі қандай сызық болады?

△Берілген теңдіктерден $\sin t=\frac{x-3}{5}$, $\cos t=\frac{y+7}{5}$ екенін табамыз.

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ тепе-теңдікті пайдаланып, $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+\left(\frac{y+7}{5}\right)^2=1$ теңдеуге келеміз. Бұдан $(x-3)^2+(y+7)^2=25$. Бұл теңдеу центрі $(3; -7)$ және радиусы $r=5$ болған шеңбердің теңдеуі.▲

3-мысал. Материялық нүкте координаталары $x=7t^2+1$, және $y=3t$ заңдылықпен өзгерсе, x және y арасындғы байланысты анықта, $t\geq 0$.

△Берілген заңдылықтардан t-ны табамыз: $t=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t=\frac{y}{3}$. Осы өрнектерден $\frac{y}{3}=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ теңдеуге келеміз. Бұдан $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ функцияны табамыз. Демек, ізделінген функция $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ екен.▲

4-мысал. $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ параметрлік көріністе берілген функцияның графигі қандай сызық болады, мұнда $0\leq t\leq 2\pi$?

△Берілген теңдіктерден $\sin t=\frac{x}{4}$ және $\cos t=\frac{y}{3}$ екенін табамыз.

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ тепе-теңдікті пайдаланып, $(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{3})^2=1$, немесе $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеуді пайда етеміз. Осы теңдеумен берілген нүктелер жиынының центрі координата басында және жарты осьтері $a=4$, $b=3$ болған *эллипс* деп аталады. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

Параметрлік көріністе берілген функцияларға мысалдар келтір.

Жаттығулар

173. Материялық нүктенің координаталары параметрлік көріністе берілген. Осы материалдық нүкте қозғалысы барысында сызған сызықтың (траекториясының) формуласын тап. Сәйкес суретін сыз:

1) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 4t+8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6t+4, \\ y = 9t+3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4t+9, \\ y = 7t+18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 12t+11, \\ y = 15t+18. \end{cases}$

174. Материалдық нүктенің координаталары параметрлік көріністе берілген. x және y координаталар арасындағы байланысты анықта:

1) $\begin{cases} x = 17t^2+1, \\ y = 13t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 27t^2+21, \\ y = 23t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 37t^2+31, \\ y = 33t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 47t^2+41, \\ y = 43t. \end{cases}$

175. Параметрлік көріністе берілген функцияның графигі қандай сызықтан құралған? Сәйкес суретін сыз:

1) $\begin{cases} x = 7\sin t, \\ y = 7\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 9\sin t, \\ y = 9\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

176. Параметрлік көріністе берілген функцияның графигі қандай сызықтан құралған? Сәйкес суретін сыз:

1) $\begin{cases} x = 6\sin t+3, \\ y = 6\cos t+7, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\cos t-1, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2\sin t-3, \\ y = 2\cos t+7, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

71 КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ГРАФИГІ

Дәреже және оның қасиеттері

Нақты санның көрсеткіштік дәрежесі төмендегі қасиеттерге ие ($a>0$, $a\neq1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$;

4) $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) егер $0<a<b$ және $x>0$ болса, $a^x<b^x$; 7) егер $0<a<b$ және $x<0$ болса, $a^x>b^x$;

8) егер $x<y$ және $a>1$ болса, $a^x<a^y$; 9) егер $x<y$ және $0<a<1$ болса, $a^x>a^y$ болады.

1-misol. Салыстыр: $2^{-\sqrt{3}}$ және $3^{-\sqrt{3}}$.

△ 7-қасиетке орай $0<2<3$ және $-\sqrt{3}<0$ болғандықтан $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

2-мысал. Салыстыр: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ және $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

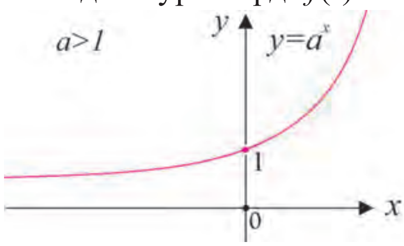
△ 9-қасиетке орай 0,2<0,3 және $0<\frac{1}{2}<1$ болғандықтан $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

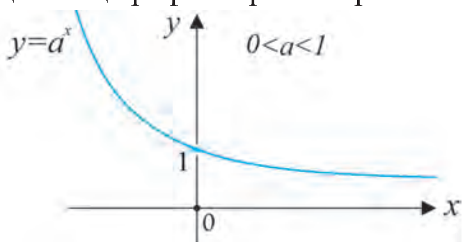
Көрсеткіштік функция және оның қасиеттері

$f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ көріністегі функция *көрсеткіштік функция* делінеді. Мұндай функция төмендегі қасиеттерге ие:

1) анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$ аралықтан құралған;
2) мәндер облысы $(0; +\infty)$ аралықтан құралған;
3) барлық $a(a>0,\ a\neq 1)$ үшін $a^0=1$;
4) $a>1$ болса, функция өспелі;
5) $0<a<1$ болса, функция кемімелі болады.

Төмендегі суреттерде $f(x)=a^x$ функцияның графиктері келтірілген.





Сұрақтар мен таспырмалар

1. Нақты сан көрсеткіштік дәрежесінің қасиеттерін атап айт. Мысалдар келтір.
2. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін айт.

Жаттығулар

177. Есепте:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}}:3^{2\sqrt{3}}$; 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1}\cdot 16^{1-3\sqrt{2}}$.

Салыстыр (**178 – 179**):

178. 1) $2^{-\sqrt{3}}$ және 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ және $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ және 1.

179. 1) $-3^{\sqrt{2}}$ және 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ және $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; және 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$

180. Функцияның өспелі немесе кемімелі екенін анықта (**180 – 182**):

1) $y=4^x$; 2) $y=-3^x$; 3) $y=5^x-2$; 4) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$.

181. 1) $y=\sqrt{3}^{x}$; 2) $y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^{x}$; 3) $y=(\frac{\pi}{3})^{x}$; 4) $y=(\sqrt{3}-1)^{x}$.

182. 1) $y=(\sqrt{3}-1)^{-x}$; 2) $y=(\sqrt{10}-2)^{x}$; 3) $y=\left(\pi-\sqrt{2}\right)^{x}-3$.

72-74 ТІКЕЛЕЙ ШЕШІЛЕТІН КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$ көріністегі теңсіздік

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$ теңсіздік көрсеткіштік теңсіздікке мысал болады. Бұл теңсіздік $a>1$ болғанда $f(x)>g(x)$ теңсіздікке, ал $0<a<1$ болғанда $f(x)<g(x)$ теңсіздікке мәндес.

1-мысал. Теңсіздікті шеш: $3^{x+5}>3^{2-5x}$.

△ $a=3>1$ болғандықтан берілген теңсіздік $x+5>2-5x$ теңсіздікпен мәндес. Бұдан $6x>-3$, немесе $x>-0,5$ екенін табамыз. Демек, теңсіздіктің шешімі $(-0,5;\infty)$ аралықтан құралған. *Жауабы*: $x\in(-0,5;\infty)$. ▲

2-мысал. Теңсіздікті шеш: $2\cdot3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}-5\cdot3^{x}<63$.

△ 3^x-ті жақшадан шығарамыз: $3^x(2\cdot3^2-2\cdot3-5\cdot1)<63$. Ықшамдап, $3^x<9$ теңсіздікті пайда етеміз. Бұдан $x<2$. *Жауабы*: $x\in(-\infty;2)$. ▲

3-мысал. Теңсіздікті шеш: $8^{5x^2-46}\geq 8^{2(x^2+1)}$.

△ $a=8>1$ болғандықтан теңсіздік $5x^2-46\geq2(x^2+1)$ теңсіздікпен мәндес. Осы теңсіздікті шешеміз: $3x^2\geq48$, бұдан $x^2\geq16$. Демек, берілген теңсіздіктің шешімі $x\in(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ болады. ▲

$a^x<b$ теңсіздіктің ($a>0$, $a\neq1$) $b<0$ болғанда шешімі жоқ екені және $a^x>b$ теңсіздіктің $b<0$ болғанда шешімі $(-\infty;+\infty;)$ аралықтан құралатыны белгілі.

4-мысал. Теңсіздікті шеш: $4^x+2^x-6\geq0$.

△ $2^x=t$ алмастыру енгіземіз, нәтижеде $t^2+t-6\geq0$ квадрат теңсіздік пайда болады. Бұдан $t\leq-3$, $t\geq2$ екенін табамыз және $2^x\geq2$ сондай-ақ $2^x\leq-3$ теңсіздіктерге келеміз. 1-теңсіздіктен $x\geq1$ шешім табылады, ал 2-теңсіздіктің шешімі жоқ. Демек, берілген теңсіздіктердің шешімі $[1;+\infty;)$ аралықтан құралған. *Жауабы*: $x\in[1;+\infty;)$. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

? $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq1$ теңсіздік туралы мәлімет айт. Мысалдар келтір

Жаттығулар

Теңсіздікті шеш (**183 – 184**):

183. 1) $4^{3x+5} \le 4^{3-5x}$; 2) $7^{4x+5} < 7^{9-5x}$; 3) $6^{x+5} > 6^{3x}$, 4) $8^{x+5} \le 8^{2-5x}$;
5) $11^{x} < 11^{2+5x}$; 6) $2^{x-5} > 2^{25x}$; 7) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x} \le -6$;
8) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} < 68$; 9) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^{x} \le 31$;
10) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x} < 10$. 11) $13^{x^2+46} \le 13^{x^2+25x}$;
12) $3^{x^2-4x} < 3^{2\left(x^2-15\right)}$; 13) $7^{2x^2-4} \le 7^{3(x^2-x)}$;

184. 1) $9^{x} + 3^{x} - 6 \le 84$; 2) $25^{x} + 5^{x} - 30 > 0$;
3) $5 \cdot 4^{x} + 2^{x} - 6 \le 0$; 4) $9^{x} + 3^{x} - 12 > 0$;

Бақылау жұмысының үлгісі

1. $\begin{cases} x = 7\sin 5t \\ y = 7\cos 5t \end{cases}$ көріністегі функцияның графигін сал.

2. $y = 11^{x} + 7$ функцияның қасиеттерін жаз.

Теңсіздіктерді шеш (**3 – 5**):

3. $6^{x^2-7x-1} < 6^{7}$. **4.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{17x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{54-x}$. **5.** $0,7^{-3x} \le 1$.

75-78 ЛОГАРИФМ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ. ЕҢ ҚАРАПАЙЫМ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

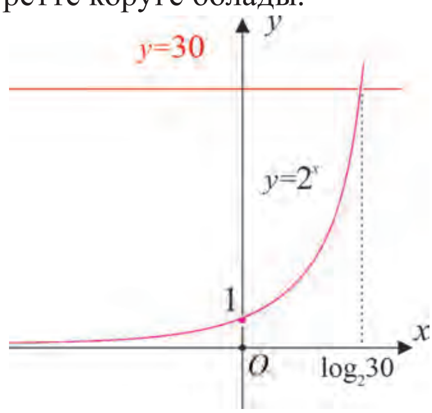
Логарифм туралы түсінік

$2^{x}=32$ теңдеудің түбірі $x=5$, бірақ $2^{x}=30$ теңдеудің түбірі қалай табылады? Осы сияқты теңдеулерді шешу үшін санның логарифмі ұғымы енгізіледі. $2^{x}=30$ *теңдеу бір ғана түбірге ие*. Оны 32-суретте көруге болады.

Осы түбір 30 санының 2 негізге орай логарифмі делінеді және $\log_2 30$ түрінде белгіленеді. Демек, $2^{x}=30$ теңдеудің түбірі $x=\log_2 30$ сан.

Мына анықтаманы енгіземіз:

b оң санның *a* негізге орай логарифмі деп, *b* санды пайда ету үшін негіз *a*-ны шығару қажет болған дәреженің көрсеткішіне айтылады және $\log_a b$ түрінде белгіленеді. Негіз $a>0$ және $a \ne 1$ шартты қанағаттандыру қажет.



32-сурет.

Мысалы, $\log_3 9=2$, өйткені $9=3^2$. Сондай-ақ, $\log_2 \frac{1}{8}=-3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

1-мысал. Есепте: $\log_3 81$.

△ Логарифмнің анықтамасына орай, $3^4=81$ болғандықтан $\log_3 81=4$. ▲

Логарифмнің қасиеттері:

• негізгі логарифмдік тепе-теңдік: егер $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ болса, $a^{\log_a b}=b$ теңдік орынды;

• егер $a>0$, $a\neq1$ болса, $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$;

• егер $a>0$, $a\neq1$ және $x>0$, $y>0$ болса, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;

• егер $a>0$, $a\neq1$ және $x>0$, $y>0$ болса, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y$;

• егер $a>0$, $a\neq1$, $x>0$ болса $\log_a x^n = n\cdot\log_a x$;

• жаңа негізге (бір негізден басқа негізге) өту формуласы: егер $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq1$ болса, $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$;

• егер $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ болса, $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

$\log_{10}x=\lg x$ және $\log_e x=\ln x$ түрінде белгілеу қабылданған. ($e=2,718281...$).
Мұнда $\lg x$ өрнек x-тің ондық логарифмі, ал $\ln x$ x-тің натурал логарифмі делінеді. $f(x)=\log_a x$ функция (мұнда x – аргумент, $a>0$, $a\neq1$) a негізді *логарифмдік функция* делінеді.

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

• анықталу облысы $(0; +\infty)$ аралық;

• мәндер облысы $\mathbb{R}=(-\infty; +\infty)$;

• нөлі: $x=1$, яғни $\log_a 1=0$.

• $a>1$ болса, логарифмдік функция $(0; +\infty)$ аралықта өспелі;

• $0<a<1$ болса, логарифмдік функция$(0;+\infty)$ аралықта кемімелі.

2-мысал. Салыстыр: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ және 0.

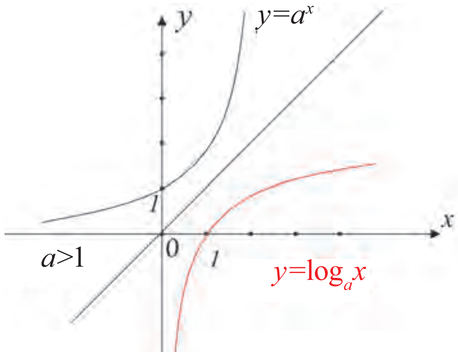
△ $\log_{\frac{1}{2}}1=0$, негіз $a=\frac{1}{2}$, яғни функция кемімелі $0<\frac{1}{2}<1$ және $0<\frac{1}{3}<1$ болғандықтан $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}1$ болады. Демек, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>0$ екен. ▲

3-мысал. Функцияның анықталу облысын тап: $f(x)=\log_2\frac{x^2-5x+6}{x-1}$.

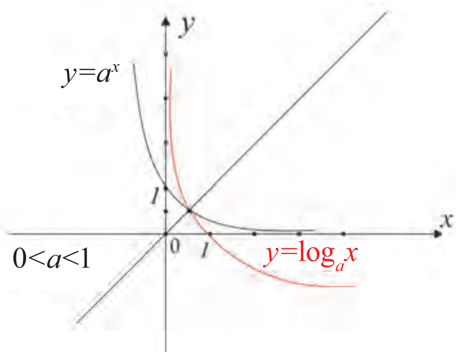
△ Осы логарифмдік функцияның анықталу облысы x-тің $\frac{x^2-5x+6}{x-1}>0$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінің жиынынан құралған. Осы теңсіздікті шешіп, функцияның анықталу облысы $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$ екенін табамыз. ▲

33- және 34-суреттерде $y=a^x$ және $y=\log_a x$ функциялардың ($a>1$ және $0<a<1$ жағдайлар үшін) графиктері біргелікте өрнектелген.



33-сурет.



34-сурет.

4-мысал. Салыстыр: $\log_3 2+\log_3 8$ және $\log_3(2+8)$.

△Логарифм қасиеттерін пайдаланамыз: $\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 16$ $\log_3(2+8)=\log_3 10$. Логарифмнің негізі 3>1 болғандықтан $\log_3 16>\log_3 10$. Бұдан: $\log_3 2+\log_3 8>\log_3(2+8)$. ▲

5-мысал. Есепте: $A=4^{\log_8 125}+27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}$.

△Логарифмнің қасиеттерін пайдаланамыз: $\frac{1}{2}\log_3 4=\log_3 2;$

$$\log_8 125=\frac{\log_2 125}{\log_2 8}=\frac{3\log_2 5}{3}=\log_2 5.; \quad 4^{\log_8 125}=4^{\log_2 5}=2^{2\log_2 5}=2^{\log_2 25}=25.$$

Сондай-ақ, $27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}=27^{\frac{1}{3}-\log_3 2}=27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\log_3 2}=$

$=3\cdot 3^{-3\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3\frac{1}{8}}=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. Демек, $A=25+\frac{3}{8}=25\frac{3}{8}$. ▲

6-мысал. Есепте: $\dfrac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}$.

△Логарифмнің қасиеттерін пайдаланамыз:

$$\lg 54+\lg\frac{1}{2}=\lg(54\cdot\frac{1}{2})=\lg 27=\lg 3^3=3\lg 3,$$

$$\lg 72-\lg 8=\lg\frac{72}{8}=\lg 9=\lg 3^2=2\lg 3.$$

Онда: $\dfrac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}=\dfrac{3\lg 3}{2\lg 3}=\dfrac{3}{2}$. *Жауабы*: $\dfrac{3}{2}$. ▲

Ең қарапайым логарифмдік теңдеу

$\log_a x=b$ көріністегі теңдеуді ($a>0$, $a\neq 1$, b – нақты сан) ең қарапайым логарифмдік теңдеу деуге болады. Теңдеудің бір ғана шешімі: $x=a^b$.

7-мысал. Теңдеуді шеш: $\log_3 x=\dfrac{1}{2}$.

△ Логарифмнің анықтамасына орай, шешімі $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. *Жауабы*: $x=\sqrt{3}$. ▲

8-мысал. Теңдеуді шеш: $\log_x 16=2$.

△ Логарифмнің анықтамасына орай, $x^2=16$ және $x>0$, $x\neq 1$ Демек, теңдеудің шешімі $x=4$ екен. *Жауабы*: $x=4$. ▲

9-мысал. Теңдеуді шеш: $\log_2(x^2-5x+10)=4$.

△ Логарифмнің анықтамасына орай, $x^2-5x+10=2^4$ теңдеуді пайда етеміз. Квадрат теңдеуді шешіп $x_1=-1$, $x_2=6$ түбірлерді табамыз. Демек, теңдеудің шешімі $\{-1; 6\}$ екен. *Жауабы*: $x=-1$, $x=6$. ▲

10-мысал. Теңдеуді шеш: $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

△ Логарифмнің анықтамасына орай, $2x-3>0$, $x>1$ болуы қажет. Теңдеудің анықталу облысы $x>\dfrac{3}{2}$ аралықтан құралған. Логарифмнің қасиетіне орай, $2x-3=x-1$ теңдеуге келеміз, одан $x=2$. Бұл түбір анықталу облысына тиісті. *Жауабы*: $x=2$. ▲

11-мысал. Теңдеуді шеш: $\log_x(x+2)=2$.

△ Түбірдің анықталу облысын табамыз: $x+2>0$ $x>0$, $x\neq 1$, яғни теңдеу $(0,1)\cup(1;\infty)$ жиында анықталған. Логарифмнің анықтамасына орай, $x+2=x^2$ теңдеуді пайда етеміз. Осы квадрат теңдеуді шешіп $x_1=-1$, $x_2=2$ түбірлерді табамыз. Осы түбірлерден тек $x=2$ анықталу облысына тиісті. Сондықтан да ол берілген теңдеудің шешімі болады. *Жауабы*: $x=2$. ▲

12-мысал. Теңдеуді шеш: $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

△ $t=\log_3 x$ белгілеу енгізіп, $t^2-5t+6=0$ квадрат теңдеуді пайда етеміз. Оны шешіп, $t=2$ және $t=3$ түбірлерді табамыз. Осы түбірлерді $t=\log_3 x$-ке қойып, $\log_3 x=2$ және $\log_3 x=3$ теңдіктерді аламыз. Бұл теңдеулердің шешімдері, сәйкесінше, 9 және 27 болады. *Жауабы*: $x=9$, $x=27$. ▲

Ең қарапайым логарифмдік теңсіздік

$\log_a x > b$ көріністегі теңсіздікті ($a>0$, $a \neq 1$, b – нақты сан) ең қарапайым логарифмдік теңсіздік деуге болады.

13-мысал. Теңсіздікті шеш: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

$3-x>0$ болуы қажет, $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$ болғандықтан $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$. Негіз $a=\frac{1}{2}<1$ болғандықтан логарифмдік функция кемімелі, демек, $3-x<8$, және $0<3-x<8$. Бұдан $-3<-x<5$ немесе $-5<x<3$ теңсіздіктерге келеміз. *Жауабы*: $x \in (-5;3)$.

14-мысал. Теңсіздікті шеш: $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

Логарифмдік функцияның қасиеттерінен төмендегі теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x+1<2x-3, \\ x+1>0, \\ 2x-3>0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x > \\ x > \quad 1, \\ x > \end{cases}$$

Бұл жүйенің шешімі $(4;+\infty)$ аралықтан құралған. *Жауабы*: $x \in (4;+\infty)$.

15-мысал. Теңсіздікті шеш: $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$.

Логарифмдік функцияның анықтамасына орай, $x>0$ болуы қажет. $t=\log_{\frac{1}{2}} x$ белгілеу енгіземіз. Онда $t^2-9 \leq 0$ теңсіздікті пайда етеміз. Оны шешіп $-3 \leq t \leq 3$, яғни $-3 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ теңсіздіктерге келеміз. $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$; $3=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ болғандықтан $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$. Негіз $a=\frac{1}{2}<1$ болғаны үшін $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ функция кемімелі, демек, $\frac{1}{8} \leq x \leq 8$ болуы қажет.

Жауабы: $x \in [\frac{1}{8};8]$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Логарифмге анықтама бер. Мысалдар келтір.
2. Логарифмнің қасиеттерін айт. Мысалмен түсіндір.
3. Логарифмдік функциялардың қасиеттерін айт
4. Ең қарапайым логарифмдік теңдеу не және ол қалай шешіледі?

5. Ең қарапайым логарифмдік теңсіздік не және ол қалай шешіледі? Мысалдар келтір.

Жаттығулар

185. Есепте:

1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 3) $\log_5 0,04$; 4) $\log_{0,1} 1000$; 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Салыстыр:

1) $\log_2 3$ және $\log_2 5$; 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ және $\log_5 4$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ және $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ және 1; 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ және $\log_3(2+5)$; 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ және 0.

187. Есепте:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; 2) $e^{\ln 5}$; 3) $2^{3\log_2 5}$; 4) $3^{2+\log_3 5}$; 5) $7^{-2\log_7 6}$;

6) $3^{3-\log_3 54}$; 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; 8) $\lg 25 + \lg 4$; 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$; 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Функциялардың анықталу облысын тап:

1) $y = \log_3(2x-5)$; 2) $y = \log_7(x^2-2x-3)$; 3) $y = \log_5(4-x^2)$.

4) $y = \log_2(x^2-2x+1)$; 5) $y = \log_{\sqrt{2}}(3-x)$; 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Функцияның графигін сыз:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3) $y = \log_4(x-1)$; 4) $y = -\log_3 x$.

190. Теңдеуді шеш:

1) $\log_2 x = -5$; 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 4) $\log_x 128 = 7$;

5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; 7) $\log_3 x = 5$;

8) $\log_2(x-5) = \log_2(4x+1)$; 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 10) $\log_5(3-2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6) = -2$; 12) $\log_2(x+1) + \log_2(8-x) = 3$; 13) $\log_x 5 = 2$;

14) $\lg(x^2+x-10)-\lg(x-3)=1$; 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

16) $5^{4-x}=6$; 17) $\log_x 3+\log_3 x=2$; 18) $5^{x^2}=6$; 19) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

20) $\lg(x^2-6x+19)=1$; 21) $\log_5(5^x-4)=1-x$; 22) $\lg(x^2-21)=2$.

191. Теңсіздікті шеш:

1) $\log_8 x>2$; 2) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$; 3) $\log_8 x<2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

5) $\lg(3-2x)>1$; 6) $2^{x+1}<3$; 7) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$; 8) $2^{|x+1|}>3$.

79-81 КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КӨМЕГІМЕН МОДЕЛЬДЕУ

1-мысал. Бактерия белгілі уақыттан (бірнеше сағат немесе минуттардан) соң екіге бөлінеді және бактериялардың саны екі есе артады. Кезектегі уақыттан соң осы екі бактерия да екіге бөлінеді және популяцияның мөлшері (бактериялардың жалпы саны) тағы екі есеге артады; енді, бактериялардың саны төртеу болды. Осы көбею үдерісі қолайлы жағдайларда (популяция үшін қажетті ресурстар: жер, азық, су, энергия, тағы басқалар бар болса) жалғаса береді.

Мысалы, бастапқыда 10 миллион бактерия бар екені, осы бактериялар бір сағаттан соң екіге бөлінетіні белгілі болсын. Төмендегі кесте $t = 1, 2, 3, 4$ сағаттан соң b популяцияның мөлшері қалай өзгеруін өрнектейді:

t (сағат)	0	1	2	3	4
b_t (миллион)	10	20	40	80	160

Сонымен бірге, барлық бактериялар да әр сағатта бірдей уақытта синхронды түрде екіге бөлінбейтіні белгілі. Осы жағдайда t бүтін сан болмағанда (мысалы, $t=1\frac{1}{2}$ сағат) бактериялар популяциясының мөлшерін табу мәселесі тұр.

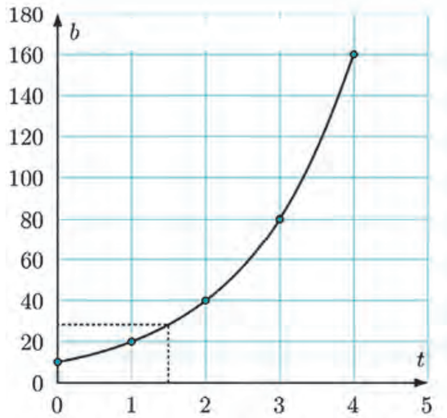
a) $b_1, b_2, \ldots$ тізбек қандай тізбек?

b) Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесінде кесте бойынша сәйкес нүктелерді белгілеп, соң пайда болған нүктелерді тегіс сызықпен қос.

c) $t=1\frac{1}{2}$ сағаттан соң бактериялардың популяциясы қандай болады?

d) Бактериялар популяциясының кез келген t уақытқа қатысты өзгеруін қандай функцияның көмегімен модельдеуге болады?

△ кестенің 2-қатардағы b_1, b_2, ... сандар тізбегінің бөлімі 2-ге тең болған геометриялық прогрессия екені белгілі. Оның ортақ көрінісі төмендегідей болады: $b_t=20\cdot 2^{t-1}$, мұнда $t=1, 2, 3, 4$.



Жазықтықтағы координатлар жүйесінде кесте бойынша сәйкес нүктелерді белгілеп, соң пайда болған нүктелерді тегіс сызықпен қосамыз:

$t=1\frac{1}{2}$ сағат өткенде бактериялардың популяциясы шамамен 28 миллион екенін көруге болады.

Пайда болған қисық сызық пішініндегі көрсеткіштік функцияның графигіне ұқсайтыны көрініп тұр. Осы функцияны $b(t)$ деп белгілеп (мұнда $t\geq 0$) $b(t)=20\cdot 2^{t-1}=10\cdot 2^t$, жаза аламыз. ▲

Жалпылай алғанда, $b(t)=b_0 a^t$ заңдылықпен өзгеретін мөлшер (мұнда $b_0>0,\ a>1,\ t\geq 0$) экспоненциальды өспелі мөлшер делінеді.

Төмендегі қорытындыға ие боламыз:

Егер популяцияның мөлшерлік өсуі оның бастауыш (бастапқы) санына пропорционал болса, мұндай популяция экспоненциальды көбейеді.

"Экспоненциальды өсу" тіркесі әдетте қандай да бір қарқынды, тоқтаусыз өсу үдерісін бейнелейді. Мысалы, жануарлардың популяциясы, қандай да бір ел тұрғындарының қарқынды өсуін баспасөзде осылай сипаттайды.

2-мысал. Эпидемиология қызметінің мәліметіне орай, тышқандар популяциясының мөлшері қолайлы жағдайда әр аптада 20%-ға артады екен. Бастапқыда 100 тышқан болса, олардың популяциясының мөлшері қандай заңдылықпен өсуін тап.

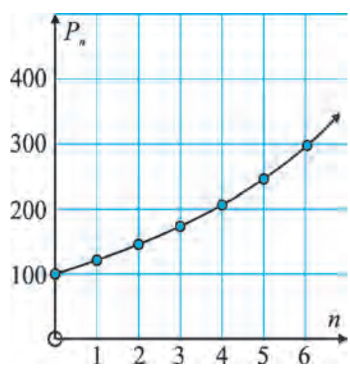
△ Егер P_n деп n апта барысындағы популяцияның мөлшерін белгілесек, төмендегіге ие боламыз:

$P_0=100$ (бастапқы мөлшер) $P_1=P_0\cdot 1{,}2=100\cdot 1{,}2$

$P_2=P_1\cdot 1{,}2=100\cdot(1{,}2)^2$ $\quad P_3=P_2\cdot 1{,}2=100\cdot(1{,}2)^3$

және сол сияқты n апта барысындағы популяцияның мөлшері $P_n=100\cdot(1{,}2)^n$ болады. ▲

Калькуляторды пайдаланып, сәйкес мәндерді есептесек, төмендегі графикке ие боламыз:



6 апта барысындағы популяцияның мөлшері дерлік 3 есеге артатыны көрініп тұр.

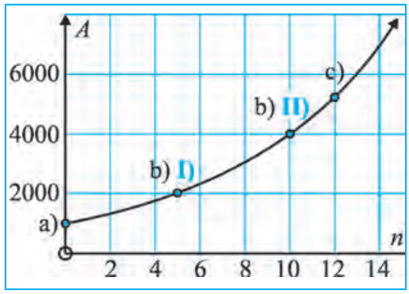
3-мысал. Энтомолог ғалым шегірткелер популяциясының ауыл шаруашылығы алқаптарына жеткізілген зиянын үйренгенде зақымдалған алаңдардың ауданы $A_n=1000 \cdot 2^{0,2n}$ (гектар) заңдылықпен өзгеруін анықтады, мұнда n апталардың саны.

a) Бастапқыда қанша алаңға зиян жеткізілген?

b) **I)** 5, **II)** 10 аптада қанша алаңға зиян жеткізілген?

c) Калькуляторды пайдаланып, 12 аптада қанша алаң зақымдалуын тап.

d) Зақымдалған алаң ауданының апталар санына байланысу заңдылығының графигін сыз.



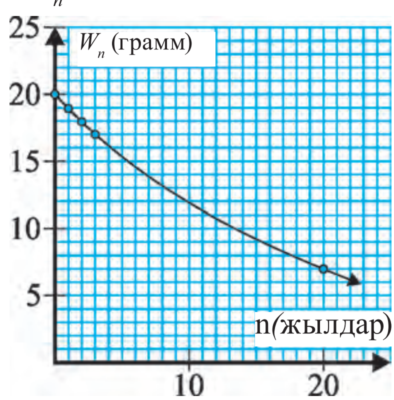
△ a) $A_0=1000 \cdot 2^{0,2\cdot0}=1000$ (гектар). Демек, бастапқыда 1000 гектар алаңға зиян жеткізілген.

b) **I)** $A_3=1000 \cdot 2^{0,2\cdot5}=2000$ зақымдалған алаңның ауданы 2000 гектарға тең.

II) $A_{10}=1000 \cdot 2^{0,2\cdot10}=4000$ зақымдалған алаңның ауданы 4000 гектарға тең.

c) $A_{12}=1000 \cdot 2^{0,2\cdot12}=1000 \cdot 2^{2,4} \approx 5280$ зақымдалған алаңның ауданы шамамен 5280 гектарға тең. ▲

4-мысал. Радиоактивті жемірілудің нәтижесінде массасы 20 грамм болған радиоактивті зат әр жылы 5%-ға кемиді. W_n деп заттың n жылдағы массасын белгілесек,



$W_0=20$ г;
$W_1=W_0 \cdot 0,95=20 \cdot 0,95$ г;
$W_2=W_1 \cdot 0,95=20 \cdot (0,95)^2$ г;
$W_3=W_2 \cdot 0,95=20 \cdot (0,95)^3$ г;
$W_{20}=20 \cdot (0,95)^{20} \approx 7,2$ г;
$W_{100}=20 \cdot (0,95)^{100} \approx 0,1$ г

теңдіктерге ие боламыз.

Бұдан $W_n=20 \cdot (0,95)^n$.

$b(t)=b_0 a^t$ заңдылықпен өзгеретін мөлшер (мұнда $b_0>0$, $0<a<1$, $t \geq 0$) *экспоненциальды кемімелі* мөлшер делінеді.

5-мысал. Ішілген дәрі адамның денесіне жайлап сіңіп, оның t сағаттан соң қалатын мөлшері (дозасы) $D(t)=120 \cdot (0.9)^t$ (мг) заңдылықпен өзгереді.

a) t=0, 4, 12, 24 сағат болғанда $D(t)$-ны тап.

b) Бастапқыда адамның денесіне қандай доза енгізілген?

c) *a)*-дағы деректі пайдаланып, $D(t)$ графикті өрнекте, мұнда $t \geq 0$.

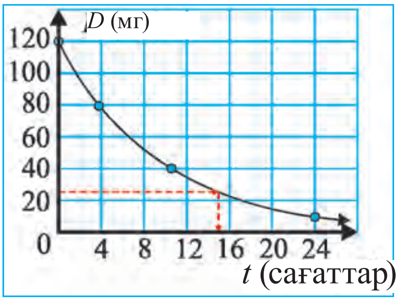
d) Графикті пайдаланып, 25 мг мөлшердегі дәрі адамның денесінде қанша уақыт бойы қалуын бағала.

△ a) $D(t)=120\cdot(0,9)^t$ мг

$D(0)=120\cdot(0,9)^0=120$ мг;	$D(4)=120\cdot(0,9)^4\approx78,7$ мг;
$D(12)=120\cdot(0,9)^{12}\approx33,9$ мг;	$D(24)=120\cdot(0,9)^{24}\approx9,57$ мг;

b) $D(0)=120$ болғандықтан, бастапқыда 120 (мг) дәрі енгізілген.

c)



Осы графикті пайдаланып, адамның денесіне енгізілген 120 мг дәрінің шамамен 15 сағаттан соң 25 мг-ы қалатынын анықтаймыз. ▲

6-мысал. Радиоактивті жемірілудің нәтижесінде радиоактивті заттың массасы $W_t=W_0\cdot2^{-0,001t}$ грамм заңдылықпен өзгереді, мұнда t – жылдар.

a) Бастапқыда зат қандай массаға ие болған?

b) 200 жылдан соң заттың массасының неше пайызы қалады?

△ t=0 болғанда $W_t=W_0\cdot2^0=W_0$ болады. Демек, заттың бастапқы массасы W_0 екен. t=200 болғанда $W_{200}=W_0\cdot2^{-0,001\cdot200}=W_0\cdot2^{-0,2}\approx W_0\cdot0,8706$. Демек, 200 жылдан соң заттың шамамен 87,1 пайызы қалады. ▲

7-мысал. Теңіздің деңгейінен h км биіктікке көтерілгенімізде, атмосфераның басымы $p=76\cdot2,7^{-\frac{h}{8}}$ (см сынап бағаны) заңдылықпен өзгереді екен. 5,6 км биіктікте атмосфера басымы қандай болады?

8-мысал. Теңіз деңгейінен биіктік $h=\dfrac{8000}{0,4343}\lg\dfrac{p_0}{p}$ формуламен есептеледі, мұнда p_0=760 мм сынап бағаны – теңіз деңгейінен атмосфера басымы, ал p болса h (м) биіктіктегі атмосфера басымы. Альпинистер тауға шыққанда 304 мм сынап бағаны басым болғанын анықтады. Альпинистер қандай биіктікке көтерілді?

$$h=\frac{8000}{0,4343}\lg\frac{760}{304}\approx7330,2\ \text{м}.$$

9-мысал. Радиоактивті заттың массасы уақыт өтуімен $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ заңдылыққа орай кемиді, мұнда m_0 – бастапқы уақыттағы масса, m – t уақыттағы масса, T – радиоактивті жемірілу жылдамдығын өрнектейтін коэффициент (жартылай жемірілу периоды).

Қазіргі күнде сақталып қалған заттың m массасын білсек, неше жылда масса m_0-ден m-ға кемуін табамыз:

$$t=-T\log_2\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

Осы қатынас тарихи зерттеулерде де қолданылуын айту қажет.

10-мысал. Табиғи тілдің сөздігіндегі сөздердің саны уақыт өтуімен $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$ заңдылыққа орай кемуі байқалған, мұнда N_0 – бастапқы уақыттағы сөздердің саны, $N(t)$ – t (мың жылдар) уақыттағы сақталып қалған сөздердің саны, λ – тілдегі сөздердің сақталып қалуын өрнектейтін коэффициент.

Қазіргі күнде сақталып қалған сөздің $N(t)$ мөлшерін білсек, неше жылда сөздердің көлемі N_0-ден $N(t)$-ға кемуін табамыз:

$$t=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$

11-мысал. Бастапқыда қала тұрғындары a адам болып, тұрғындардың саны әр жылы 10%-ға артса, тұрғындардың x жылдан соң қанша болатынын анықтайтын формуланы тап.

△ Күрделі пайыз формуласына орай, қала тұрғындарының саны x жылдан соң $y=a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x=a\cdot(1{,}1)^x$ болады. Демек, $y=a\cdot(1{,}1)^x$ формуламен a берілгенде x жылдан соң тұрғындардың саны қанша болатынын анықтауға болады. a=1000000 және жылдар саны x бойынша тұрғындардың санын анықтайтын кестені келтіреміз:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909

10	2 593 742	20	6 727 500

Кестеге орай тұрғындардың саны 5 жылдан соң 1 610 510 адам, 10 жылдан соң 2 593 742 адам, 20 жылдан соң 6 727 500 адам болады.

12-мысал. Бастапқыда қала тұрғындары a адам болып, тұрғындардың саны әр жылы 2%-ға кемісе, тұрғындардың x жылдан соң қанша болатынын анықтайтын формуланы тап.

Күрделі пайыз формуласына орай, қала тұрғындарының саны x жылдан соң $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot 0,98^x$ болады. Демек, $y=a \cdot 0,98^x$ формуламен a берілгенде x жылдан соң тұрғындардың саны қанша болатынын анықтауға болады. a=2000000 және жылдар саны x бойынша тұрғындардың санын анықтайтын кестені келтіреміз:

Кестеге орай тұрғындардың саны 5 жылдан соң 1 807 842 адам, 10 жылдан соң 1 634 146 адам, 20 жылдан соң 1 335 216 адам болады.

x	y	x	y
1	1960000	11	1601463
2	1920800	12	1569433
3	1882384	13	1538045
4	1844736	14	1507284
5	1807842	15	1477138
6	1771685	16	1447595
7	1736251	17	1418644
8	1701526	18	1390271
9	1667496	19	1362465
10	1634146	20	1335216

13-мысал. Қала тұрғындары бастапқыда a адам еді. Егер тұрғындардың саны әр жылы 10%-ға артса, тұрғындардың x жылдан соң қанша болуын және неше жылдан кейін k рет артуын анықтайтын формуланы тап.

$y=a \cdot 1,1^x$ және мысалдың шартынан $y=k \cdot a$ екенін ескеріп, $k=1,1^x$ немесе $x=\log_{1,1}k$ формуланың табылатыны белгілі. Төменде тұрғындардың саны k рет артуы үшін қажетті жылдардың санын анықтайтын кесте келтірілген:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Кестеде көрінгеніндей, тұрғындардың саны 2 рет артуына 7 жыл; 5 рет артуына 17 жыл; 10 рет артуына 24 жыл қажет екен.▲

14-мысал. Қала тұрғындары әр жылы 2 %-ға кеміседі, сондай-ақ тұрғындардың бастапқы саны a адам болса, тұрғындардың x жылдан соң қанша болуын және неше жылдан кейін k рет кемуін анықтайтын формуланы тап.

△ $y=a\cdot 0{,}98^x$ және мысал шартынан $y=\dfrac{a}{k}$ болуын ескеріп $1/k=0{,}98^x$ немесе $x=\log_{0,98}(1/k)$ формуланың табылатыны белгілі. Төменде тұрғындардың саны k рет кемуі үшін қажетті жылдардың санын анықтайтын кесте келтірілген:

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Кестеде көрінгеніндей, тұрғындардың саны 2 рет кемуіне 34 жыл; 5 рет кемуіне 80 жыл; 10 рет кемуіне 114 жыл қажет екен.▲

15-мысал. 1935 жылы америкалық сейсмолог Ч. Рихтер зілзаланы классификациялау үшін 1 – 9,5 балдық магнитудалар шкаласын ұсынған. Мұнда зілзала уақытында пайда болатын сейсмикалық толқын энергиясы интенсивтілік деп аталатын шама арқылы бағаланды. Рихтер шкаласында интенсивтілігі I болған зілзаланың R магнитудасы $R=\lg I$ формуламен табылады.

1966 жылы Ташкентте 5,2 магнитудалы, ал 2010 жылы Гаитиде 7 магнитудалы зілзала болған. Осы зілзалаларды интенсивтілік бойынша салыстырайық.

△ Гаити зілзаласы: $7=\lg I_1$, бұдан $I_1=10^7=10\,000\,000$;

Ташкент зілзаласы: $5{,}2=\lg I_2$, бұдан $I_2=10^{5,2}\approx 158\,489{,}3$.

Бұдан $\dfrac{I_1}{I_2}\approx 63{,}1$. Демек, Гаитиде Ташкенттегімен саластырғанда шамамен 63 есе күштірек зілзала болған.▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Көрсеткіштік модельге мысал келтір.
2. Логарифмдік модельге мысал келтір.

Жаттығулар

192. Егістік өңделмесе, t күннен соң арам шөптер ауданы $A(t)=3\cdot2^{0,1t}$ (кв.м) болған жер алаңын қаптап, мәдени өсімдіктерге зиян жеткізеді.

a) Бастапқыда қанша алаңға зиян жеткізілген?

b) **I)** 2, **II)** 10, **III)** 30 күнде қандай алаңға зиян жеткізіледі?

c) *a), b)*-да алынған деректерді пайдаланып, зақымдалған алаң ауданының күндер санына байланысу заңдылығының графигін сыз.

193. Аралбойы экологиялық жүйесін тіктеу мақсатында сирек кездесетін жануарлардың популяциясын көбейту жобасында экологтар 25 жұптық жануарларды көбейтуде. Зерттеулерге қарағанда, жаратылған жағдайларда бұл жануарлар популяциясының мөлшері $P_n=P_0\cdot1,23^n$ заңдылықпен өзгереді, мұнда P_n – n жылдағы жануарлардың саны.

a) P_0 саны нені білдіреді?

b) **I)** 2, **II)** 5, **III)** 10 жылда қандай популяцияға ие боламыз?

c) *a), b)*-да алынған деректерді пайдаланып, популяция мөлшерінің жылдар санына байланысу заңдылығының графигін сыз.

194. Химиялық реакцияның жылдамдығы $V_t=V_0\cdot2^{0,05t}$ заңдылықпен өзгереді екен, мұнда t(°C) – температура.

a) 0 °C; b) 20 °C температурада реакция жылдамдығы қандай болады?

c) 20 °C температурадағы реакция жылдамдығы 0 °C температурадағы реакция жылдамдығымен салыстырғанда неше пайызға артады?

d) $\left(\dfrac{V_{50}-V_{20}}{V_{20}}\right)\cdot100\%$ мәнді есепте және мағынасын түсіндір.

195. 2017 жылы Аляска жартыаралының жанындағы аралға аюдың 6 жұптығы жіберілді. Бастапқыда аралда аюлар жоқ еді. Аюлардың популяциясы $B_t=B_0\cdot2^{0,18t}$ заңдылықпен (мұнда t – жылдар) өзгерсе, есептеу құрылғыларын пайдаланып, төмендегілерге жауап бер:

a) B_0 саны нені білдіреді? Ол нешеге тең?

b) 2037 жылда қандай популяцияға ие боламыз?

c) 2037 жылдағы аюлардың саны 2027 жылдағы аюлардың санымен салыстырғанда неше пайызға артады?

196. Радиоактивті жемірілудің нәтижесінде радиоактивті заттың массасы $W(t)=250\cdot(0{,}998)^t$ (г) заңдылықпен өзгереді, мұнда t – жылдар.
a) Бастапқыда зат қандай массаға ие болған?
b) **I)** 400, **II)** 800, **III)** 1200 жылда заттың неше грамы қалады?
c) Жоғарыдағы деректерді пайдаланып, $W(t)$-ның графигін өрнекте.
d) Графикті пайдаланып, зат қашан 125 мг мөлшерде қалуын есепте.

197. Қайнаған су суытылғанда оның T температурасы $T(t)=100\cdot2^{-0{,}02t}$ °С заңдылықпен өзгереді, мұнда t – минуттар.
a) Бастапқыда қандай температура болған?
b) **I)** 15, **II)** 20 минуттан соң температура нешеге тең болған?
c) Жоғарыдағы деректерді пайдаланып, $W(t)$-ның графигін өрнекте.
d) Графикті пайдаланып, 78 минуттан соң температура нешеге тең болуын есепте.

198. Электр тізбегіндегі токтың күші $I_t=0{,}6\cdot2^{-5t}$ (А) заңдылықпен өзгереді, мұнда t – секундтар.
a) Бастапқыда қандай ток күші болған?
b) **I)** 0,1, **II)** 0,5, **III)** 1 секундтан соң ток күші нешеге тең болады?
c) Жоғарыдағы деректерді пайдаланып, $W(t)$-ның графигін өрнекте..

199. Теңізде d метрлік тереңдікке қатысты жарық $L(d)=L_0\cdot(0{,}9954)^d$ (кандела) заңдылықпен өзгереді.
a) Теңіздің түбінде қандай жарық болады?
b) 1000 метрлік тереңдіктегі жарық неше пайызға кемиді?

200. 8 бактерия популяциясы 2 сағаттан соң 100-ге жетеді. Осы жағдайда қашан популяция 500-ге жетеді?

201. Ұялы байланыс компаниясының деректеріне орай, компанияның ұялы байланысын пайдаланушылардың саны $N(t)=100000e^{0{,}09t}$ формуламен өрнектеледі, мұнда t – айлар. Қазіргі күнде 3 миллион пайдаланушылардың бар екені белгілі болса, компания қашан жұмысын бастаған?

202. Тамақ микротолқынды пештен алынғанда, ол $T(t)=80e^{-0{,}12t}$ заңдылық негізінде суиды, мұнда t – минуттар. Қазір бөлме температурасы 22° С болса, неше минуттан соң тамақ осы температураға дейін суиды?

203. Жасанды серіктің биіктігі t (жылдар) уақыт өтуімен $H(t)=30000e^{-0{,}2t}$ заңдылықпен өзгереді.
a) 2 жылдан соң биіктік қандай болатынын есепте.
b) Жасанды серік 320 км биіктікте болса, ол атмосфераның жоғары қабаттарында жанып кетеді. Сол кезге дейін қанша уақыт өтеді?

III ТАРАУҒА ҚАТЫСТЫ ЖАТТЫҒУЛАР

Теңдеулерді шеш (**204 – 205**):

204. a) $x^4-1=0$; b) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; c) $3x^4-4x^3-7x^2-4x+5=0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15)=0$; b) $(4x+11)(3x-5)=0$;
c) $x^4-15x^2-16=0$; d) $x^4+24x^2-25=0$.

Теңсіздіктерді шеш (**206 – 208**):

206. a) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4>0$.

207. a) $x^4+8x^3+12x^2\geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x)\leq 0$.

208. a) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$; c) $\dfrac{7x-4}{x+2}\geq 1$; d) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$.

209. Теңдеулер жүйесін шеш:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ xy=56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=84, \\ x^3+y^3=91; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+9xy+2y^2=12, \\ 2x^2+3xy-4y^2=1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=2, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

Теңсіздіктер жүйесін шеш (**210 – 211**) :

210. a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-7\dfrac{3}{21}, \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x}{3}. \end{cases}$

211. a) $\begin{cases} 2x^2+2<5x, \\ x^2\geq x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+2<5x, \\ x^2\geq x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\leq 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0. \end{cases}$

212. Иррационал теңдеуді шеш:

a) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$; d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

Сандарды салыстыр (**213-215**):

213. a) $4,2^{-\sqrt{2}}$ және 1; b) $0,2^{\frac{3}{5}}$ және $0,2^{-\frac{3}{5}}$; c) $(0,4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ және 1.

214. a) $4^{0,5}$ және $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; | b) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ және $3^{0,2}$; | c) $2^{-\frac{3}{4}}$ және $8^{-\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ және $2^{-\sqrt{5}}$; | b) $7^{-0,3}$ және $7^{-\frac{1}{3}}$; | c) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ және $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Функцияның анықталу облысын тап:

a) $y=5^{\sqrt{x^2-1}}$; | b) $y=\dfrac{1}{3^x+1}$; | c) $y=\dfrac{1}{3^{x^2}-9}$; | d) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$.

217. Функцияның мәндер облысын тап:

a) $y=2^{-|x|}$; | b) $y=3+4^{x+1}$; | c) $y=-6^x$; | d) $y=5^{|x|}+1$.

Теңдеулерді шеш (**218-219**):

218. a) $8^x=2^{\frac{1}{5}}$; | b) $121^x-7\cdot 11^x=5\cdot 11^x-11$; | c) $0,5^{\,x^2+x-3,5}=2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x}-5^{2x-1}=6^{2x-1}+5^{2x}$; | b) $4^{x+3}+4^x=130$; | c) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

220. Теңдеулер жүйесін шеш:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ 5^{\,y-x^2}=0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1}=2^y, \\ 0,1^{2x-y}=0,01; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-y}=25, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases}$

221. Теңсіздікті шеш:

a) $4^x\le 3^x$; | b) $16^x-7\cdot 4^x-8<0$; | c) $4^x\cdot 5^{1-x}<\dfrac{25}{4}$; | d) $6^{\frac{x-3}{x+8}}\ge 1$.

222. Сандарды салыстыр:

a) $\log_3 2$ және 2; | b) $\log_3 5$ және $2\cdot\log_3 2$; | c) $\log_2 5$ және $\log_5 2$

d) $\log_{0,2} 5$ және $\log_{0,2} 6$; | e) $\log_4 3$ және $\log_3 4$; | f) $\lg 18,8$ және $\lg 6\pi$.

223. Функцияның анықталу облысын тап:

a) $y=\log_2(2x+7)$; | b) $y=\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$; | c) $y=\log_5(-8x)$; | d) $y=\lg\dfrac{x-3}{x+8}$.

Теңдеулерді шеш:

224. a) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; | b) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x+3}=2$.

Теңдеулер жүйесін шеш (**225 – 226**):

225. a) $\begin{cases} 5^{x-y}=1, \\ 2^{\log_2(x+y)}=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x+\lg y=4, \\ \lg x-\lg y=6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{17}(3^x+2^y)=1, \\ 3^{\,x+1}-4\cdot 2^y=-5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x\cdot 5^y=40, \\ 5^x\cdot 2^y=250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x+5^{\log_5 y}=4, \\ x^y=16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x\cdot 3^y=81, \\ 3^x-3^y=24. \end{cases}$

227. Теңсіздікті шеш:

a) $\log_3(x^2+x+1)\geq 1$; b) $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\leq 1$;

c) $\lg^2 x<\lg x^5-6$; d) $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$; e) $5^{x+7}>2$.

228. Функцияның графигін сыз:

a) $y=1,5\sin(2x-1)$; b) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$; c) $y=\log_3(1-x)$.

229. Салыстыр:

a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ және $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arccos\frac{1}{2}$ және $\operatorname{arctg}(-1)$;

c) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ және $\operatorname{arctg}1$; d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ және $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

230. Есепте:

a) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

Теңдеуді шеш (**231 – 233**):

231. a) $2\cos^2x+5\sin x-4=0$; b) $3\sin^2 2x+7\cos^2x-3=0$; c) $4\operatorname{tg}^2x-5\operatorname{tg}x+1=0$.

232. a) $3\sin^2x+7\sin x-10=0$; b) $2\cos^2x-5\cos x+3=0$; c) $\sin 6x=\sin 3x$.

233. a) $\cos 7x=\cos 2x$; b) $\operatorname{tg}8x=\operatorname{tg}11x$.

Теңсіздікті шеш (**234 – 235**):

234. a) $\sin x>-\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x\leq\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg}3x\geq 1$; d) $\sin 2x\leq\frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x\leq\frac{1}{2}$; b) $\cos 10x\geq 0$; c) $\operatorname{tg}9x\leq\sqrt{3}$; d) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$.

Бақылау тест тапсырмалары

1. Теңдеуді шеш: $\sin 6x=0$.

A) $x=\frac{\pi}{6}n,\ n\in Z$; *B*) $x=\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$; *D*) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

2. Теңдеуді шеш: $\cos 2x=0$.

$A)\ x=2\pi n,\ n\in Z;$ $B)\ x=\pi n,\ n\in Z;$ $C)\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;$ $D)\ x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z.$

3. Теңдеуді шеш: $\mathrm{tg}4x=\sqrt{3}$.

$A)\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$ $B)\ x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$ $C)\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$ $D)\ x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

4. Теңсіздікті шеш: $\sin 2x>3$.

$A)\ x=\pi n,\ n\in Z;$ $B)\ \varnothing;$ $C)\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ $D)\ x=2\pi n,\ n\in Z.$

5. Теңсіздікті шеш: $\cos 2x<3$.

$A)\ (-\infty;+\infty);$ $B)\ \varnothing;$ $C)\ (-\infty;0);$ $D)\ (0;+\infty).$

6. Анықталу облысын тап: $y=12^x$.

$A)\ (-\infty;+\infty);$ $B)\ (0;+\infty);$ $C)\ (-\infty;0);$ $D)\ \varnothing.$

7. Анықталу облысын тап: $y=\log_2(3-x)$.

$A)\ (3;+\infty);$ $B)\ [3;+\infty);$ $C)\ (-\infty;3);$ $D)\ (-\infty;3].$

8. Есепте: $\arcsin\frac{1}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{2};$ $B)\ \pi;$ $C)\ \frac{\pi}{4};$ $D)\ \frac{\pi}{6}.$

9. Есепте: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

10. Есепте: $\mathrm{arctg}1$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

IV ТАРАУ

КОМПЛЕКС САНДАР

86-87 КОМПЛЕКС САНДАР ЖӘНЕ ОЛАРМЕН АМАЛДАР ОРЫНДАУ. КОМПЛЕК САНДЫ ӨРНЕКТЕУ

Комплекс сандар

Комплекс сандар туралы ілім ғылымда, соның ішінде, математикада ерекше орынға ие. Жылдам дамыған бұл сала техникада, сондай-ақ өндірістің көптеген тармақтарында өте кеңінен қолданылады. Осы сандар туралы кейбір деректерді келтіреміз. Жеке бір мысалдан бастаймыз.

$x^2+4=0$ теңдеуді шешу үдерісінде $x_1=2\sqrt{-1}$ және $x_2=-2\sqrt{-1}$ "сандар" пайда болады. Ал нақты сандардың арасында мұндай "сандар" жоқ. Осындай жағдайдан құтылу үшін $\sqrt{-1}$ -ге сан деп қарау қажеттілігі пайда болды.

Бұл жаңа сан ешқандай нақты шаманың өлшемін немесе оның өзгеруін өрнектемейді. Сондықтан $\sqrt{-1}$ -ді ***жорамал*** (қиялдық, ақиқат өмірде жоқ болған) ***бірлік*** деп атау және арнаулы белгілеу қабылданған: $\sqrt{-1}=i$. Жорамал бірлік үшін $i^2=-1$ теңдік орынды.

$a+bi$ көріністегі өрнекті қарастырамыз. Мұнда a және b-лар кез келген сандар, ал i жорамал бірлік.

$a + bi$ өрнек нақты сан a және жорамал сан bi-лардың "комплексінен" құралғаны үшін оны комплекс сан деп атау қабылданған.

$a+bi$ өрнек алгебралық көріністегі комплекс сан деп аталады.

$a+bi$-ді "алгебралық көріністегі комплекс сан" деудің орнына қысқа етіп "комплекс сан" деп атаймыз. Комплекс сандарды бір әріппен белгілеу қолайлы. Мысалы, $a+bi$-ді z-мен белгілейміз. $z=a+bi$ комплекс санның нақты бөлігі a-ны Re(z) (французша réelle − нақты) түрінде, ал жорамал бөлігі b-ны Im(z) (французша *imaginaire* – жорамал) түрінде белгілеу қабылданған: a=Re(z), b=Im(z).

Егер $z=a+bi$ комплекс сан үшін $b=0$ болса, нақты сан $z=a$ пайда болады.

Демек, нақты сандар жиыны R барлық комплекс сандар жиыны C-ның ішкі жиыны болады: $R \subset C$.

1-мысал. $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2{,}1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ комплекс сандардың нақты және жорамал бөліктерін тап.

△ Комплекс сандардың нақты және жорамал бөліктерінің анықтамасына орай табамыз:

$\mathrm{Re}(z_1)=1$; $\mathrm{Re}(z_2)=2$; $\mathrm{Re}(z_3)=2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4)=0$; $\mathrm{Re}(z_5)=0$;

$\mathrm{Im}(z_1)=2$; $\mathrm{Im}(z_2)=-1$; $\mathrm{Im}(z_3)=0$; $\mathrm{Im}(z_4)=2$; $\mathrm{Im}(z_5)=0$. ▲

Комплекс сандар үшін “<”, “>” қатынастары анықталмаған, бірақ тең комплекс сандар ұғымы енгізіледі.

Екі комплекс санның нақты және жорамал бөліктері, сәйкесінше, тең болса, мұндай комплекс сандар өзара тең комплекс сандар деп аталады.

Мысалы, $z_1=1{,}5+\dfrac{4}{5}i$ және $z_2=\dfrac{3}{2}+0{,}8i$ сандары үшін $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=1{,}5$; $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=0{,}8$. Демек, $z_1=z_2$.

Бір-бірінен тек жорамал бөліктерінің таңбасымен ғана ерекшеленетін екі комплекс сан өзара біріккен комплекс сандар делінеді. $z=a+bi$ комплекс санға біріккен комплекс сан $\overline{z}=a-bi$ көрінісінде жазылады

Мысалы, $6+7i$ және $6-7i$-лер біріккен комплекс сандар: $\overline{6+7i}=6-7i$. Осы сияқты $\overline{z}$ санына біріккен сан $\overline{\overline{z}}=z$ болады. Мысалы, $\overline{\overline{6+7i}}=\overline{6-7i}=6+7i$. a нақты санға біріккен сан a-ның өзіне тең: $\overline{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a$. Бірақ, bi жорамал санға біріккен сан $\overline{bi}=-bi$. Өйткені $\overline{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Комплекс сандармен арифметикалық амалдар орындау

Комплекс сандармен арифметикалық амалдар орындау төмендегідей анықталады:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \tag{1}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \tag{2}$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \tag{3}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{4}$$

(1) және (2) теңдіктерді тікелей қолдану қиын емес. Комплекс сандарды көбейту амалының $i^2=-1$ екенін ескеріп, көпмүшелерді көбейту сияқты орындауға болады

2-мысал. Қосындыны тап: $(3+7i)+(-5+4i)$.

△ Қосындыны табу үшін (1) формуланы пайдаланамыз:

$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i$. ▲

3-мысал. Айырманы тап: $(13-7i)-(-5+4i)$.
△Айырманы табу үшін (2) формуланы пайдаланамыз:
$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i$. ▲

4-мысал. Көбейтіндіні тап: $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)$.
△Жақшаларды ашамыз және $i^2=-1$ екенін пайдаланамыз.

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i.$$ ▲

$\frac{a+bi}{c+di}$ бөліндіні есептеу үшін, оның алымы мен бөлімін бөлімнің "біріккен" $c-di$-ге көбейтіп, тиісті амалдарды орындау қажет.

5-мысал. Бөлу амалын орында: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

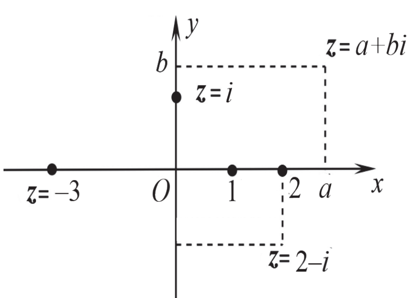
△ $$\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i.$$ ▲

$z+w=0$ теңдікті қанағаттандыратын z, w комплекс сандар *өзара қарама-қарсы сандар* делінеді. z комплекс санға қарама-қарсы санды $-z$-мен белгілеу қабылданған. $z=a+bi$ комплекс санға қарама-қарсы болған бір ғана комплекс сан бар және бұл сан $-z=-a-bi$ комплекс саннан құралған.

$zw=1$ теңдікті қанағаттандыратын z және w комплекс сандар *өзара кері комплекс сандар* делінеді. $z=0$ санға кері сан жоқ. Әрқандай $z\neq 0$ комплекс санға кері комплекс сан бар. Бұл сан $\frac{1}{z}$ саннан құралған.

Комплекс санды жазықтықта өрнектеу

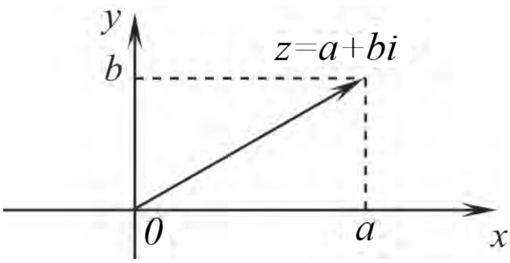
Жазықтықта тікбұрышты Декарт координаталар жүйесі берілген болсын. Онда $z=a+bi$ комплекс санға жазықтықта координаталары $(a;\ b)$ болған нүкте сәйкес келеді.



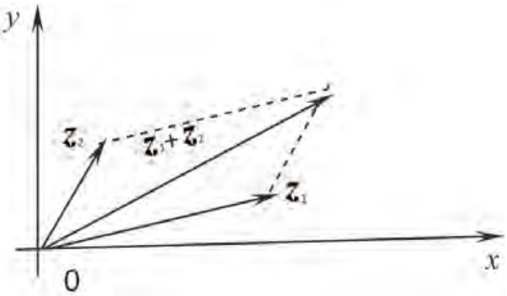
1-сурет.

Осы тәсілмен өрнектеуде $a+0i$ комплекс санға $(a;\ 0)$ координаталы нүкте, ал $0+bi$ комплекс санға $(0;\ b)$ нүкте сәйкес келеді. Сол үшін де Ox осіне нақты ось және Oy осіне жорамал ось делінеді (1-сурет).

$a+bi$ комплекс санды жазықтықта a және b координаталы вектор сияқты етіп те өрнектеуге болады (2-сурет). Ал бұл комплекс сандарды қосуға векторларды қосудың параллелограмм ережесін қолдану мүмкіндігін береді (3-сурет).



2-сурет.



3-сурет.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Жорамал бірлік не? Неге оны енгізуге қажеттілік туындады?
2. Комплекс санның алгебралық көрінісін жаз, мысал келтір.
3. Екі комплекс сан қашан тең делінеді? Мысал келтір.
4. Екі комплекс санның қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі, бөліндісі қалай анықталады? Мысалдармен түсіндір.
5. Қарама-қарсы комплекс сан дегеніміз не?
6. Біріккен комплекс сан дегеніміз не?
7. Өзара кері комплекс сан дегеніміз не? Мысалдар келтір.
8. Комплекс санды вектор сияқты өрнектеу дегеніміз не? Мысалдар келтір.

Жаттығулар

1. Комплекс сандардың нақты және жорамал бөліктерін ауызша айт:

1) $z=-3+7i$;	2) $z=4-\frac{1}{2}i$;	3) $z=-2-5i$;
4) $z=-5,7+5i$;	5) $z=5i$;	6) $z=9$;
7) $z=-7+3i$;	8) $z=8-\frac{1}{2}i$;	9) $z=-5-6i$;
10) $z=-5,7-5i$;	11) $z=-5i$;	12) $z=90$.

2. Комплекс сандарды алгебралық көріністе жаз:

1) $\mathrm{Re}(z)=4,\quad \mathrm{Im}(z)=-5$;	2) $\mathrm{Re}(z)=-2,\quad \mathrm{Im}(z)=3$;
3) $\mathrm{Re}(z)=0,\quad \mathrm{Im}(z)=8$;	4) $\mathrm{Re}(z)=7,\quad \mathrm{Im}(z)=0$;
5) $\mathrm{Re}(z)=6,\quad \mathrm{Im}(z)=-7$;	6) $\mathrm{Re}(z)=-3,\quad \mathrm{Im}(z)=4$;
7) $\mathrm{Re}(z)=0,\quad \mathrm{Im}(z)=9$;	8) $\mathrm{Re}(z)=2,\quad \mathrm{Im}(z)=0$;
9) $\mathrm{Re}(z)=12,\quad \mathrm{Im}(z)=20$.	

3. Тең комплекс сандарды көрсет (**3 – 4**):

1) $2-4i$; | 2) $2+3i$; | 3) $\frac{2}{3}+i$; | 4) $\sqrt{121}-7i$; | 5) $33+44i$; | 6) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}\,i$.

4. 1) $4-3i$; | 2) $1+3i$; | 3) $\frac{1}{3}+i$; | 4) $\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 5) $3+4i$; | 6) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}$.

5. z санына біріккен $\overline{z}$ санды тап (**5 – 6**):

1) $z=5-3i$; 2) $z=-5+3i$; 3) $z=1-i$; 4) $z=2+3i$; 5) $z=-7-i$.

6. 1) $z=7{,}2$; 2) $z=6i$; 3) $z=\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; 4) $z=-2i+(-7+3i)$.

7. Қосындыны тап (**7 – 8**):

1) $(-5+3i)+(2-i)$; | 2) $(-3)+(3-4i)$; | 3) $(2+5i)+(-2-5i)$; | 4) $(-4i)+(3.6-3i)$.

8. 1) $(8-3i)+(8+3i)$; | 2) $(-7+5i)+(7-5i)$; | 3) $9i+(3-8i)$; | 4) $-17i+(-9+16i)$.

9. Айырманы тап (**9 – 10**):

1) $(3+4i)-(4+2i)$; | 2) $(4-6i)-(3+2i)$; | 3) $(2+4i)-(-4+2i)$.

10. 1) $(5+4i)-(5-4i)$; | 2) $7-(8+5i)$; | 3) $7i-(6i+3)$.

11. Көбейтіндіні тап (**11 – 12**):

1) $(4+6i)(3+4i)$; 2) $(5+8i)(3-2i)$; 3) $(6-4i)(3-6i)$.

12. 1) $(-3+2i)(8-4i)$; | 2) $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)$; | 3) $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right)$.

13. Бөліндіні тап (**13 – 14**):

1) $\frac{2+2i}{1-2i}$; | 2) $\frac{4-5i}{3+2i}$; | 3) $\frac{3+4i}{3-4i}$; | 4) $\frac{2+3i}{4-3i}$; | 5) $\frac{4-5i}{3+2i}$.

14. 1) $\frac{4-5i}{-2+3i}$; | 2) $\frac{3}{5-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{3}$; | 4) $\frac{7i}{13-i}$; | 5) $\frac{7+4i}{5-6i}$.

15. Амалдарды орында (**15 – 16**):

1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; | 2) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}$.

16. 1) $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)}$; | 2) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$; | 3) $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}$.

17. Комплекс сандарды жазықтықта өрнекте (**17 – 18**):

1) $z=3+4i$; | 2) $z=3-4i$; | 3) $z=-3+4i$; | 4) $z=-3-4i$; | 5) $z=2i$.

18. 1) $z=4-2i$; | 2) $z=5+3i$; | 3) $z=\frac{2+i}{2-i}$; | 4) $z=(2-i)(1+i)$; | 5) $z=(2+i)(2-i)$.

88 $r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ және $r\cdot e^{i\varphi}$ $(r>0,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$ КӨРІНІСТЕГІ КОМПЛЕКС САНДАР

Бұл тақырыпта комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік көріністерін үйренеміз.

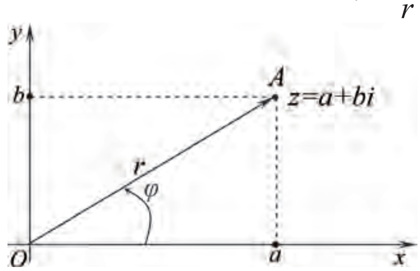
Тригонометриялық көріністегі комплекс сандар

Жазықтықта тікбұрышты Декарт координаталар жүйесі берілген болсын. $z=a+bi$ комплекс санға $(a;\, b)$ координаталы A нүкте сәйкес қойылған болсын. Координаталар басы O және A нүктелерді қосып $\overrightarrow{OA}$ векторды пайда етеміз (4-сурет).

O нүктеден A нүктеге дейінгі $r=OA$ қашықтық **комплекс санның модулі**, абсцисса осінің оң бағыты және $\overrightarrow{OA}$ вектор арасындағы (φ) бұрыш ***комплекс санның аргументі*** делінеді.

Көрініп тұрғанындай,

$$0\le r<+\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{r},\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$



4-сурет.

Комплекс санның $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ көрінісіне оның тригонометриялық пішіні және $z=r\cdot e^{i\varphi}$ көрінісіне көрсеткіштік пішіні делінеді. Комплекс санды тригонометриялық көріністен алгебралық көрініске өткізу үшін төмендегі формула пайдаланылады: $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi.$

1-мысал. Комплекс сандарды тригонометриялық көріністе жаз:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1) $z=i=0+1\cdot i,\quad a=0,\quad b=1,\quad r=\sqrt{0^2+1^2}=1,\quad \cos\varphi=\frac{0}{1}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$

Демек, $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, яғни $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

2) $r=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{2}$ болғандықтан $-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z=-1-i,\ a=-1,\ b=-1,\ r=\sqrt{2},\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{5\pi}{4}.$

Демек, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. ▲

2-мысал. Комплекс сандарды көрсеткіштік көріністе жаз:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1-мысалдың есептеулерін пайдаланамыз:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\qquad -2i=2e^{\frac{3\pi}{2}i},\qquad -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$ ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Комплекс санның модулі не? Ол қалай есептеледі?
2. Комплекс санның аргументі не? Мысал келтір.
3. Комплекс санның тригонометриялық көрінісін түсіндір.
4. Комплекс санның көрсеткіштік көрінісін түсіндір.
5. *Эйлердің атақты формуласын* дәлелде: $e^{i\pi}=-1$.

Жаттығулар

Комплекс санның модулін тап (**19 – 20**):

19. 1) $z=-2+3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=1+\sqrt{3}i$; 4) $z=\sqrt{8}-i$.

20. 1) $z=6-8i$; 2) $z=2+2\sqrt{3}i$; 3) $z=\sqrt{3}+i$; 4) $z=2i$.

Комплекс санның аргументін тап (**21 – 22**):

21. 1) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z=2\sqrt{2}i$.

22. 1) $z=5$; 2) $z=-2i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

Комплекс санды тригонометриялық және көрсеткіштік көріністе жаз (**23 – 24**):

23. 1) $z=-2-2i$; 2) $z=2-2i$; 3) $z=\sqrt{3}-i$; 4) $z=1-\sqrt{3}i$.

24. 1) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; 4) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

89-90 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПІШІНДЕ БЕРІЛГЕН КОМПЛЕКС САНДАРДЫҢ КӨБЕЙТІНДІСІ ЖӘНЕ БӨЛІНДІСІ

Тригонометриялық пішінде берілген комплекс сандарды көбейту

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ тригонометриялық көріністегі комплекс сандардың көбейтіндісі үшін төмендегі формула орынды:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \qquad (1)$$

Ал z_1 және z_2 тригонометриялық көріністегі сандарды бөлу үшін $\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\left[\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)+i\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right]$ формула орынды, $r_1 \neq 0$. (2)

1-мысал. $z_1=3\left(\cos 20°+i\sin 20°\right)$ және $z_2=2\left(\cos 35°+i\sin 35°\right)$ комплекс сандарды көбейт.

△ Жоғарыдағы ережеге орай, көбейтіндіні табамыз:

$z_1\cdot z_2=3\cdot 2(\cos(20°+35°)+i\sin(20°+35°))=6\left(\cos 55°+i\sin 55°\right)$. ▲

2-мысал. $z_1=2\left(\cos 140°+i\sin 140°\right)$, $z_2=3\left(\cos 150°+i\sin 150°\right)$ және 5 cos $z_3=5\left(\cos 70°+i\sin 70°\right)$ комплекс сандарды көбейт.

△ Жоғарыдағы ережеге орай, көбейтіндіні табамыз:

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3=2\cdot 3\cdot 5\left[\cos\left(140°+150°+70°\right)+i\sin\left(140°+150°+70°\right)\right]=30\ \cos 360$$

$$=30\left(\cos 360°+i\sin 360°\right)=30.$$ ▲

3-мысал. $z_1=6\left(\cos 50°+i\sin 50°\right)$ және $z_2=2\left(\cos 25°+i\sin\right.$ комплекс сандардың бөліндісін тап.

△ Бөліндінің ережесіне орай:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\left[\cos\left(50°-25°\right)+i\sin\left(50°-25°\right)\right]=3\left(\cos 25°+i\sin 25°\right).$$ ▲

Натурал дәрежеге шығару

$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ комплекс санды квадратқа шығару үшін комплекс сандарды көбейту формуласын (1) пайдаланамыз: $z^2=r^2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^2=r^2\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right)$.

Сондай-ақ, $z^3=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^3=r^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$. Жалпы, *Муавр формуласы* деп аталатын осы $z^n=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

формула орынды, мұнда $n \in N$.

4-мысал. $z=3\left(\cos 15°+i\sin 15°\right)$ комплекс санды кубқа шығар:

△ (3) формулаға орай:

$$z^3=27\left(\cos 45°+i\sin 45°\right)=\frac{27}{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{27}{\sqrt{2}}(1+i).$$ ▲

5-мысал. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ комплекс санның 10-дәрежесін тап.

△ Берілген санның модулі мен аргументін тауып, оны тригонометриялық көріністе жазып аламыз $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$, $\varphi=\frac{\pi}{3}=60°$, $z=1\cdot\left(\cos 60°+i\sin 60°\right)$, одан:

$$z^{10} = \left(\cos 600° + i\sin 600°\right) = \cos 240° + i\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \cdot$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Тригонометриялық көріністегі комплекс сандар қалай көбейтіледі? Мағынасын түсіндір.
2. Тригонометриялық көріністегі комплекс сандар қалай бөлінеді? Мағынасын түсіндір.
3. Тригонометриялық көріністегі комплекс сандар дәрежеге қалай шығарылады?

Жаттығулар

Комплекс сандарды көбейт (**27 – 28**):

27. 1) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ және $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$ және $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ және $z_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$ және $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Комплекс сандарды бөл (**29 – 30**):

29. 1) $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ -ны $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$-ға;

2) $z_1 = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ -ны $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ -ға.

30. 1) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ -ны $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ -ға;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ -ны $z_2\ (\cos\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ -ға.

Комплекс сандарды дәрежеге шығар (**31 – 32**):

31. 1) $(3(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^4$; 2) $(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})^{10}$; 3) $(\cos\frac{\pi}{22} + i\sin\frac{\pi}{22})^{11}$.

Амалдарды орында (**33 – 34**):

33. 1) $\dfrac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$; 2) $\dfrac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$; 3) $\dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

34. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$;; 3) $\dfrac{3-4i}{3+4i}+\dfrac{5+6i}{5-6i}$.

91 КОМПЛЕКС САННАН КВАДРАТ ТҮБІРДІ ШЫҒАРУ

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ көріністегі комплекс саннан квадрат түбір шығару үшін ізделініп жатқан комплекс санның модулін x және аргументін y деп төмендегі теңдікті жазамыз:

$$\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Теңдіктің екі жақ бөлігін квадратқа шығарып, $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^2(\cos 2y+i\sin 2y)$ және $x^2=r$, $2y=\varphi+2\pi n$ болғандықтан $x=\sqrt{r}$, $y=\dfrac{\varphi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ қатынастарды табамыз. Демек, z комплекс санның квадрат түбірі үшін

$$\beta=\sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{2}\right]$$

формула орынды. n-ге $0, \pm1, \pm2, \ldots$ мәндерді беріп, түрлі түбірлерді табамыз. Тексеру нәтижесінде тек 2 түрлі мән бар екені анықталады, яғни

$$n=0\text{-де}\ \beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \qquad (1)$$

$$n=1\text{-де}\ \beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] \qquad (2)$$

1-мысал. $z=9(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ комплекс саннан квадрат түбір шығар.

△ Жоғарыдағы формулаға орай, квадрат түбірлерді есептейміз:

$$\sqrt{z}=3\left[\cos(30^\circ+180^\circ n)+i\sin(30^\circ+180^\circ n)\right]$$

Осы формулада

$n=0$ үшін $\sqrt{z}=3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ және $n=1$ үшін

$\sqrt{z}=3(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=-\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ квадрат түбірлер табылады. ▲

Комплекс саннан куб түбір шығару үшін мына формула пайдаланылады:

$$z_n=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+360°n}{3}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{3}),$$

n=0, 1, 2.

Осы табылған сандар Декарт координаталар жүйесінде центрі координата басында және радиусы $\sqrt[3]{r}$ болған шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың төбелерінен құралған.

2-мысал. z=1 комплекс санның куб түбірін тап және сызбада көрсет.

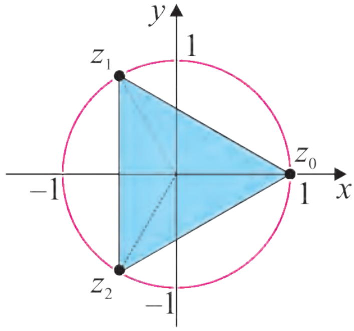
△Осы санның модулі r=1 және аргументі φ=0° болғандықтан,

$$z_n=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{0°+360°n}{3}+i\sin\frac{0°+360°n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2.$$

Осыдан: n=0-де z_0=1·(cos0°+$i$sin0°)=1,

n=1-де $z_1=1\cdot(\cos120°+i\sin120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

n=2-де $z_2=1\cdot(\cos240°+i\sin240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$



5-сурет

Осы сандардың дұрыс үшбұрыштың төбелерінен құралғанын 5-суретте көруге болады.

Комплекс саннан 4-дәрежелі түбір шығаруда төмендегі формула пайдаланылады:

$$z_n=\sqrt[4]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360°n}{4}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{4}\right),$$ мұнда n=0, 1, 2, 3.

3-мысал. $z=i$ комплекс саннан 4-дәрежелі түбір шығар.

△Осы санның модулі r=1, аргументі φ=90° болғандықтан

$$z_n=\sqrt[4]{1(\cos90°+i\sin90°)}=1\cdot\left(\cos\frac{90°+360°n}{4}+\sin\frac{90°+360°n}{4}\right).$$

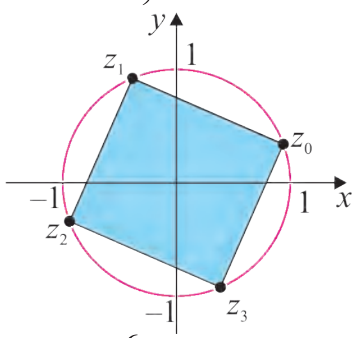
Осыдан: n=0 da z_0=cos22,5°+$i$sin22,5°,

n=1 da z_1=cos112,5°+$i$sin112,5°,

n=2 da z_2=cos202,5°+$i$sin202,5°,

n=3 da z_3=cos292,5°+$i$sin292,5°.

Бұл сандар центрі координата басында және радиусы 1 болған шеңберге іштей сызылған квадраттың төбелерінен құралған (6-сурет).



6-сурет.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Комплекс саннан квадрат түбір қай формуламен табылады?
2. Муавр формуласы дегеніміз не? Оның мағынасын түсіндір.

Жаттығулар

35. Комплекс саннан квадрат түбір шығар (**35 – 36**):

1) $z = 25\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

3) $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$;

5) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{30} + i\cdot\sin\frac{\pi}{30}\right)$; 6) $z = \frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; 8) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

36. 1) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

5) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $z = \frac{16}{9}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$; 8) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

IV тарауға қатысты жаттығулар

37. Есепте:

1) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$; 2) $(1+3i)^3-(4+i^5)$;

3) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$; 4) $5-7i+8i^2-9i^3+i^4$.

38. Алгебралық көріністе жаз:

1) $z = \left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{3i}\right)^2$; 2) $z = \frac{12-13i}{8+6i} + \frac{(1+2i)^2}{i+3}$; 3) $\frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

39. Есепте (**39–42**):

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$; 3) $(1+i)^{2018}\cdot(1-1)^{2018}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{8}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40. 1) $z=\dfrac{(2+i)^{2}}{3-4i}$; 2) $z=\dfrac{(1+2i)^{3}}{2i}-3i^{10}$; 3) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{5}$;

4) $z=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^{7}$; 5) $\dfrac{(4-i)}{3+4i}$; 6) $\dfrac{2-3i}{1-4i}$.

41. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^{2}}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^{3}-(2+3i)^{3}$; 4) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^{2}}{6+8i}$;

5) $\dfrac{33+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 6) $\dfrac{12-5i}{6-8i}+\dfrac{(2+i)^{2}}{1-2i}$.

42. 1) $(2-2i)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos 70^{\circ}+i\sin 70^{\circ}\right)$; 2) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

43. Бөлуді орында:

1) $5\left(\cos 100^{\circ}+i\sin 100^{\circ}\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$; 2) $(6+6i):3\left(\cos 75^{\circ}+i\sin 75^{\circ}\right)$.

44. Дәрежеге шығар:

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{3}$; 2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{4}$; 3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{6}$; 4) 2 2 ;

4) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{5}$; 5) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$. 8) 2 2 .

45. Квадрат түбірді есепте:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}\,i}$; 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$; 4) $\sqrt{-256}$.

46. Теңдікті тексер:

1) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^{5}+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^{5}=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\left(\sin 26^{\circ}+i\cos 154^{\circ}\right)\cdot\left(\sin 27^{\circ}+i\cos 153^{\circ}\right)^{3}}{\sin 17^{\circ}-i\cos 17^{\circ}}=-1$.

47. Кубтың түбірін есепте:

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 2) $\sqrt[3]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt[3]{1-i}$; 5) $\sqrt[3]{-8}$.

48. 4-дәрежелі түбірден шығар:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[4]{1+i}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$; 5) $\sqrt[4]{-16}$.

Бақылау жұмысының үлгілері

1. Есепте: $(35–7i)\cdot(4–6i)$.

2. Бөлуді орында: $\frac{8-i}{40+3i}$.

3. Көбейт: $3(\cos 5°+i \sin 5°)\cdot 8(\cos 3°+i \sin 3°)$.

4. Дәрежеге шығар: $(3(\cos 4°+i \sin 4°))^6$

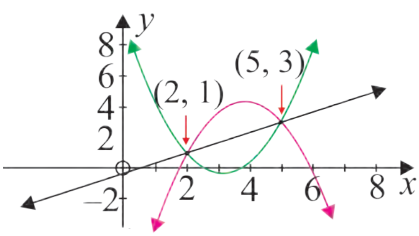
5. Квадрат түбір шығар: $\sqrt{64i}$.

ЖАУАПТАР

III тарау

73. a) Барлық x абсциссалар түрліше болғандықтан бұл функция болады; b) екі нүктеде x абсциссалар бірдей болғандықтан бұл функция болмайды; c) барлық нүктелерде x абсциссалар бірдей болғандықтан бұл функция болмайды; d) барлық x абсциссалар түрліше болғандықтан бұл функция болады; e) барлық x абсциссалар түрліше болғандықтан бұл функция болады; f) барлық нүктелерде x абсциссалар бірдей болғандықтан бұл функция болмайды; **74.** a) Функция; b) функция; c) функция; d) функция емес; e) функция; f) функция емес; g) функция; h) функция емес. **75.** Жоқ, әрқандай вертикаль түзу функция болмайды. **76.** Жоқ, $y=\pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; c) –1; d) –13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; c) –16; d) –68; e) $\frac{17}{4}$. **79.** a) –3; b) 3; c) 3; d) –3; e) $\frac{15}{2}$. **80.** a) $7–3a$; b) $7+3a$; c) $–3a–2$; d) $10–3b$; e) $1–3x$; f) $7–3x–3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2–11x+13$; c) $2x^2–3x–1$; d) $2x^4+3x2–1$; e) $2x^4–x^2–2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h–1$. **82.** a) **I)** $-\frac{7}{2}$; **II)** $-\frac{3}{4}$; **III)** $-\frac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. Бұл құрылғының 4-жылдан кейінгі болатын бағасы. $t=4{,}5$ осынша жылдан кейінгі құрылғының бағасы 5780 болады. Құрылғының бастапқы бағасы 9650-ге тең.

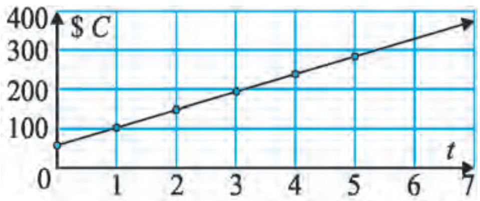
85.



86. $f(x)=–2x+5$. **87.** $a=3$, $b=–2$. **88.** $a=3$, $b=–1$, $c=–4$. **90.** a) **I)** $x>0$; b) **II)** $–2\le x\le 3$; c) **I)** $–2<x\le 0$; **II)** $0\le x<2$; d) **I)** $x\le 2$; **II)** $x\ge 2$; e) **II)** $x\in\mathbb{R}$; f) **I)** $x\in\mathbb{R}$; g) **I)** $1\le x\le 5$; **II)** $x\le 1, x\ge 5$; h) **I)** $2\le x<4$, $x>4$; **II)** $x<0$, $0<x\le 2$; i) **I)** $x\le 0$, $2\le x\le 6$; **II)** $0\le x\le 2$, $x\ge 6$. **92.** a) V(0)=25000 евро. Бұл автомашинаның бастапқы бағасы; b) V(3)=16000. Бұл автомашинаның 3 жылдан кейінгі бағасы; c) $t=5$.

93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285

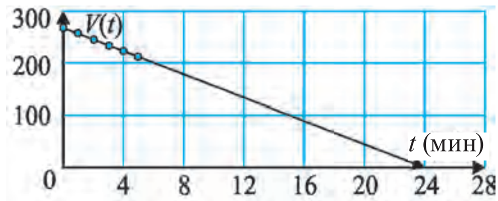


b) C=60+45t; c) $ 352,50.

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210

b)

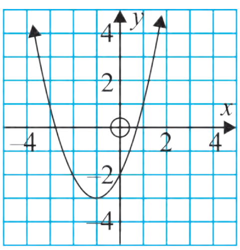


c) $V(t)$ = 265–11t; d) **I)** 100 l.

95. a) Иә; b) жоқ; c) иә; d) иә; e) иә; f) жоқ. **96.** a) Жоқ; b) иә; c) иә; d) иә; e) жоқ; f) жоқ. **97.** a) x=–3; b) x=–2 немесе –3; c) x=1 немесе 4; d) нақты шешімге ие емес. **98.** a) **I)** 75 м; **II)** 195; **III)** 275 м; b) **I)** t=2 с немесе t=14 с; **II)** t=0 с немесе t=16 с. **99.** a) 40 мың, 480 мың; b) 10 немесе 62.

100. a)

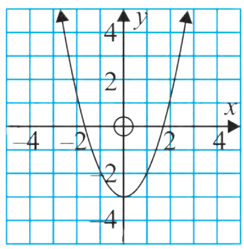
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1	–2	–3	–2	1	6	13



$y=x^2+2x-2$

b)

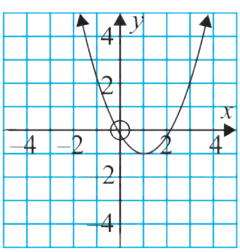
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6	1	–2	–3	–2	1	6



$y=x^2-3$

c)

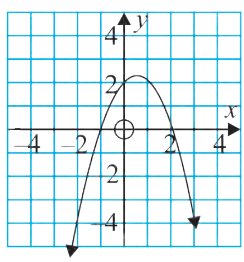
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	–1	0	3



$y=x^2-2x$

d)

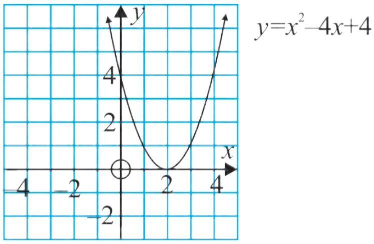
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	–4	0	2	2	0	–4



$f(x)=-x^2+x+2x$

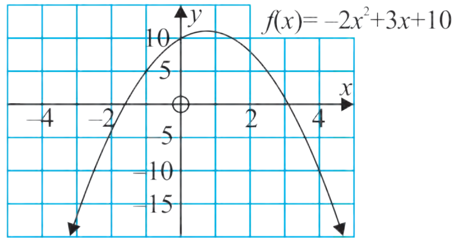
e)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



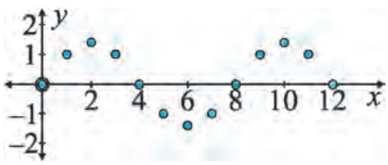
f)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–17	–4	5	10	11	8	1

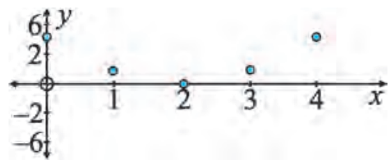


101. a) 3; b) –1; c) –4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) –5; **i)** 2. **102.** a) 3; b) –6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) $x=3$; b) $x=-5/2$; c) $x=1$; d) $x=-4$; e) $x=3$; f) $x=-4$. **106.** a) $x=4$; b) $x=-2$; c) $x=1$; d) $x=11/2$; e) $x=5$; f) $x=-2$. **107.** a) $x=-3$; b) $x=4$; c) $x=-5/4$; d) $x=3/2$; e) $x=0$; f) $x=7/10$; g) $x=3$; h) $x=5/3$; i) $x=-4$. **108.** a) (2, 3); b) (–1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (–3, –18); f) (1, –1); g) (1/2, –5/4); h) (3/4, –7/8); i) (6, 7). **109.** a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d) $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=-3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. **110.** a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. **111.** a) 3 м; b) 0,5 с; c) 4 м.

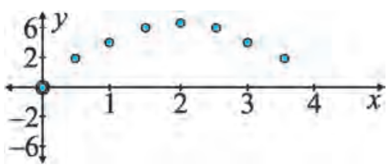
113. a) периодты;



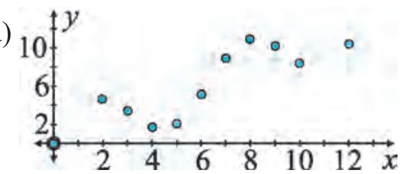
b) периодты емес;



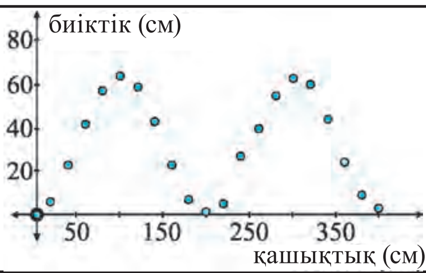
c) периодты емес;



d) периодты емес;

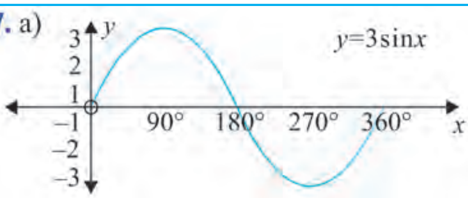


114. a)

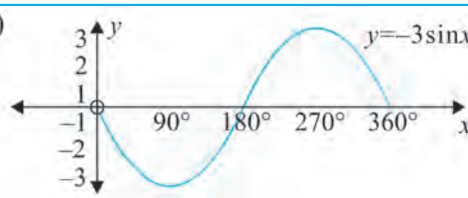


b) Ось теңдеуі максимум периодты амплитудаға сәйкес, $y=32$; 64 см; 200 см; 32 смге тең. **115.** a) периодты; b) периодты; c) периодты; d) периодты емес; e) периодты; f) периодты. **116.** a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) $y=-1$.

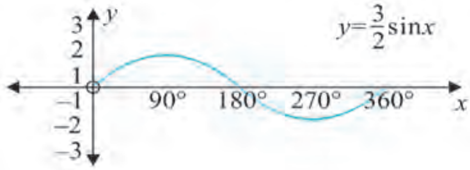
117. a)



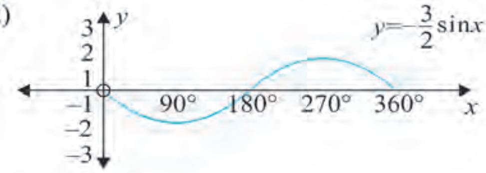
b)



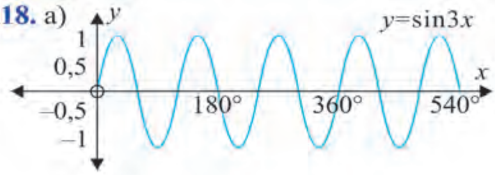
c)



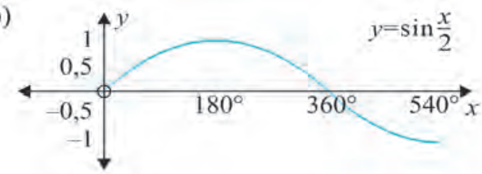
d)



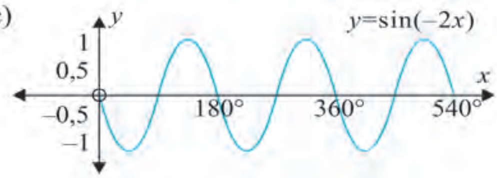
118. a)



b)

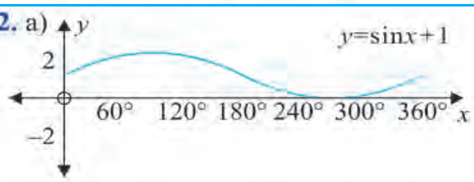


c)

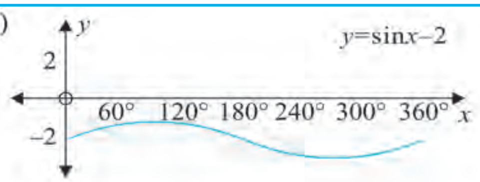


119. a) 90°; b) 90°; c) 1080°; d) 600°; **120.** a) $b=2/5$; b) $b=3$; c) $b=1/6$.
121. a) $y=3\sin x$; b) $y=\sin x-2$; c) $y=-2\sin x-1$; d) $y=\sin 2x$; e) $y=-4\sin(x/2)$; f) $y=\sin(x/2)$; g) $y=2\sin 3x$; h) $y=2\sin 2x-3$.

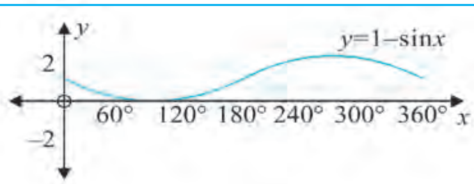
122. a)



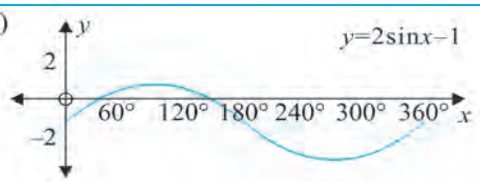
b)



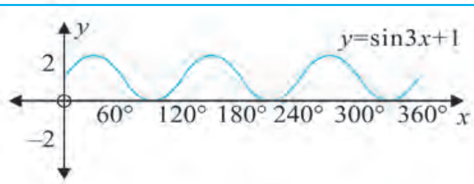
c)



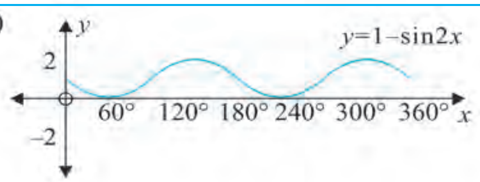
d)



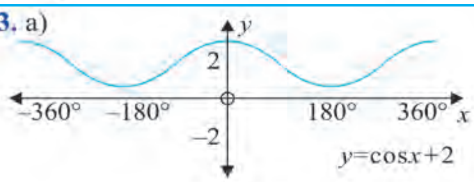
e)



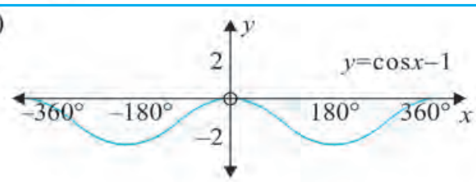
f)



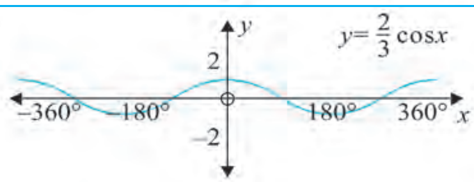
123. a)



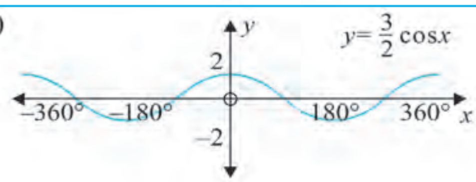
b)

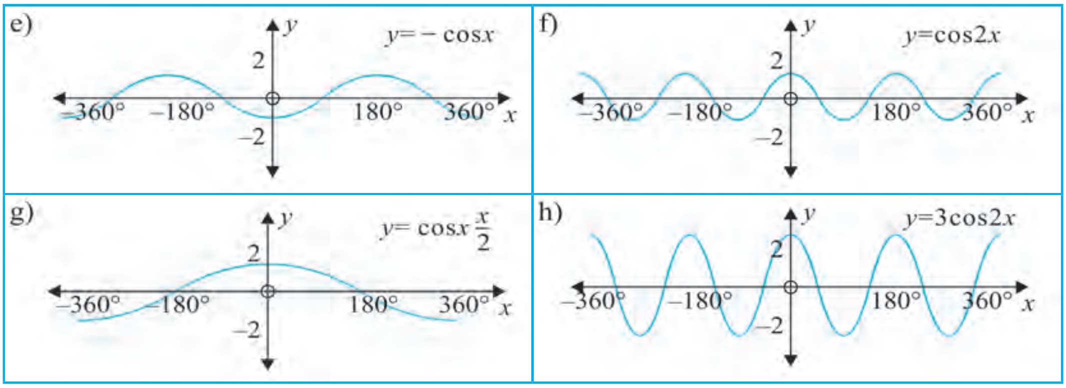


c)



d)





124. a) 120°; b) 1080°; c) 720°. **126.** a) y=2cos2x; b) y=cos(x/2)+2; c) y=–5$x$cos2x. **127.** T=9,5cos(30t)–9,5. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$.
132. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π. **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) –π. **140.** 1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$.
142. 1) мағынаға ие; 2) мағынаға ие емес; 3) мағынаға ие емес.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$ **146.** 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z.$

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z.$ **150.** 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

151. 1) $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$ **152.** 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z.$

153. 1) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z.$

157. 1) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \ x_2=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

158. 2) $x=\pm\arccos(1-\frac{\sqrt{7}}{2})+2n\pi,\ n\in Z.$ **159.** 2) $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$
$x_2=\arccos 4+n\pi,\ n\in Z.$ **160.** 1) $x=\frac{2n\pi}{3},\ n\in Z;$ 3) $x_1=\frac{n\pi}{2},$
$x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5},\ n\in Z.$ **162.** 1) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right);$ 2) $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right);$ 3) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right).$

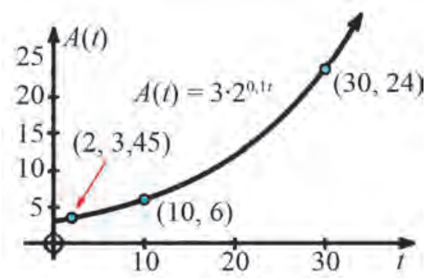
163. 1) $\left[\frac{\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2n\pi\right],\ n\in Z;$ 2) $\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2n\pi\right),\ n\in Z;$

3) $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ -\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$, $n\in Z$. **167.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{3}+n\pi\right]$, $n\in Z$. **173.** 1) $y=2x+6$.

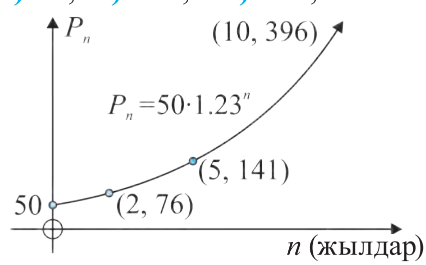
174. 1) $y=13\cdot\sqrt{\frac{x-1}{17}}$. **175.** 1) $x^2+y^2=49$, шеңбер. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, шеңбер.

177. 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) үлкен; 2) кіші. **180.** 1) анықталу облысы: $(-\infty;+\infty)$, мәндер облысы: $(0;\ +\infty)$, $(-\infty;\ +\infty)$ аралықта өспелі. **181.** 1) өседі; 2) кемиді; 3) өседі. **183.** 1) $(-\infty;\ 1]$; 2) $\left(-\infty;\frac{4}{9}\right)$; 7) $[1;\ +\infty]$; 12) $\left(-\infty;\ -2-\sqrt{34}\right)\cup\left(-2+\sqrt{34};\ +\infty\right)$. **184.** 1) $(-\infty;\ 2]$. **185.** 1) 3; 2) –2; 3) –2; 4) –3; 5) –3. **186.** 1) үлкен; 2) үлкен; 3) кіші. **187.** 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\frac{1}{36}$; 9) –2. **188.** 1) $(2{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; 3) $(-2;2)$. **190.** 1) $\frac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) –2; 10) 0,5 және 1; 15) $\frac{1}{7}$ және 49. **191.** 1) $(64;\ +\infty)$; 2) $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup(27;+\infty)$; 7) $(2;5)$.

192. a) 3 м²;
b) **I)** 3,45 м²; **II)** 6 м²; **III)** 24 м²;
c)

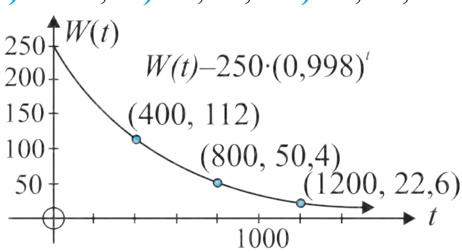


193. a) 50;
b) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;
c)



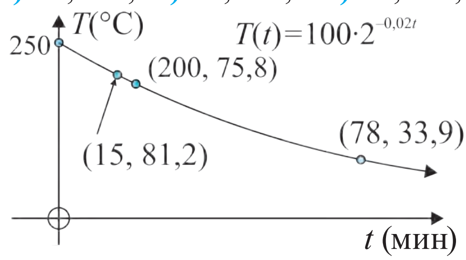
194. a) V_0; b) $2V_0$; c) 100%; d) 183 пайызға артады.

196. a) 250 г;
b) **I)** 112 г; **II)** 50,4 г; **III)** 22,6 г;
c)

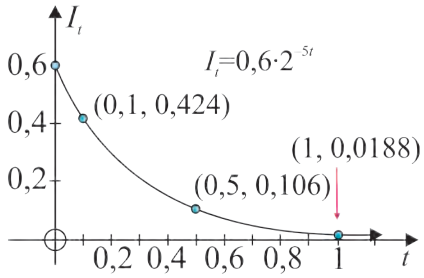


d) ≈346.

197. a) 100°C;
b) **I)** 81,2°C; **II)** 75,8°C; **III)** 33,9°C;
c)



198. a) 0,6 ампер;
b) **I)** 0,424 ампер; **II)** 0,106 ампер;
III) 0,0188 ампер;
c)



199. a) L_0; b) 99%. **200.** Дерлік 3 сағат 15 мин. **201.** 37,8 ай. **202.** 10,8 мин. **203.** 22,7 жыл. **204.** b) 1. **205.** a) $\{-14;\ 3;\ 15\}$; c) $\{-4;4\}$. **206.** a) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

207. a) $(-\infty;-6]\cup[-2;+\infty)$.

208. a) $\left(-2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$; c) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

209. a) $\{(7;8);(8;7);(-7;-8);+8;-7)\}$. **212.** a) 3; b) 2. **213.** a) кіші; b) кіші. **216.** a) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; b) $(-\infty;+\infty)$. **217.** a) $(0;1]$; b) $(3;+\infty)$; c) $(-\infty;0)$. **218.** a) $\dfrac{1}{15}$; b) 0 және 1; c) 1 және –2. **219.** c) 0. **220.** a) $\{(2;3);(-3;8)\}$. **221.** a) $(-\infty;0]$; b) $(-\infty;1{,}5)$. **222.** a) кіші; b) үлкен. **223.** a) $(-3{,}5;+\infty)$; b) $(-2;2)$. **224.** a) $2\sqrt{5}$. **225.** b) $(100000;0{,}1)$. **226.** a) $(3;1)$. **227.** a) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. **229.** a) кіші; b) үлкен.

230. a) $-\dfrac{2\pi}{3}$ **231.** c) $x_1=\dfrac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=\arccos\dfrac{1}{4}+n\pi,\ n\in Z.$

234. a) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi\right),\ n\in Z.$ **235.** c) $\left(-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{9};\dfrac{\pi}{27}+\dfrac{n\pi}{9}\right),\ n\in Z.$

IV тарау

1. 7) Re(z)=–7, Jm(z)=3; 8) Re(z)=8, Jm(z)=5; 9) Re(z)=–0,5, Jm(z)=–6; 10) Re(z)=–5,7, Jm(z)=–5; 11) Re(z)=0, Jm(z)=–5; 12) Re(z)=90, Jm(z)=0.

6. 1) $\bar{z}=7{,}2$; 3) $\bar{z}=4+3i$. **8.** 1) 16; 3) $3+i$. **10.** 1) $8i$; 2) $-1-5i$; 3) $-3+i$. **12.** 2) $1\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}i$. **14.** 1) $-\dfrac{23}{13}-\dfrac{2}{13}i$; 3) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}i$. **16.** 2) $\dfrac{12}{13}$. **20.** 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. **22.** 1) 0; 2) $\dfrac{3\pi}{2}$; 3) $\dfrac{11\pi}{6}$. **24.** 1) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ va $2\cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

28. 1) $z_1\cdot z_2=\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{13\pi}{12}$. **30.** 1) $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}$. **32.** 2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

34. 1) $-\dfrac{42}{29}$; 2) $-18i$. **36.** 1) $z_0=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6})$, $z_1=\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{6})$.

Пайдаланылған және ұсынылған әдебиеттер

1. *Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov.* Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications, 2010.
3. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа.

часть 1, Ташкент, “O‘qituvchi”, 2016.

4. *A.U. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
5. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие, “Рязань”, 2009.
6. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
7. *Г.К. Муравин.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9 – 10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Интернеттегі математика (ағылшын тілінде).
10. Журнал “Математика в школе”.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001-yildan boshlagan).
12. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
14. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Халыққа білім беру министрлігінің ақпарат білім беру порталы.
16. http://www.eduportal.uz – Мультимедиа орталығының ақпарат білім беру порталы.
17. http://www.problems.ru – Математикалық есептер іздеу жүйесі (орыс тілінде).
18. http://matholymp.zn.uz – Өзбекстандағы және әлемдегі математикалық олимпиадалар.

МАЗМҰНЫ

III тарау. **ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ТЕҢДЕУЛЕР ... 3**

47 – 49-сабақтар. Қатынастар және бейнелеулер. Функция 3
50 – 51-сабақтар. Элементар функциялардың монотондығы, ең үлкен және ең кіші мәндері туралы түсінік 8
52 – 54-сабақтар. Сызықтық және квадраттық модельдер 12
55-сабақ. Периодтық үдерістер және оларды бақылау.............................. 23
56 – 58-сабақтар. y=sin$x$, y=cos$x$ функциялар және олардың көмегімен модельдеу 26
59 – 61-сабақтар. Ең қарапайым тригонометриялық теңдеулер 36
62 – 64-сабақтар. Ең қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер.......... 44
68-сабақ. Графиктерді алмастыру 48
69 – 70-сабақтар. Параметрлік көріністе берілген қарапайым функциялардың графиктері.. 51
71-сабақ. Көрсеткіштік функция және оның графигі 53
72 – 74-сабақтар. Тікелей шешілетін көрсеткіштік теңсіздіктер 55
75 – 78-сабақтар. Логарифм туралы түсінік. Логарифмдік функция. Ең қарапайым логарифмдік теңдеулер және теңсіздіктер 56
79 – 81-сабақтар. Көрсеткіштік және логарифмдік функциялардың көмегімен модельдеу 62

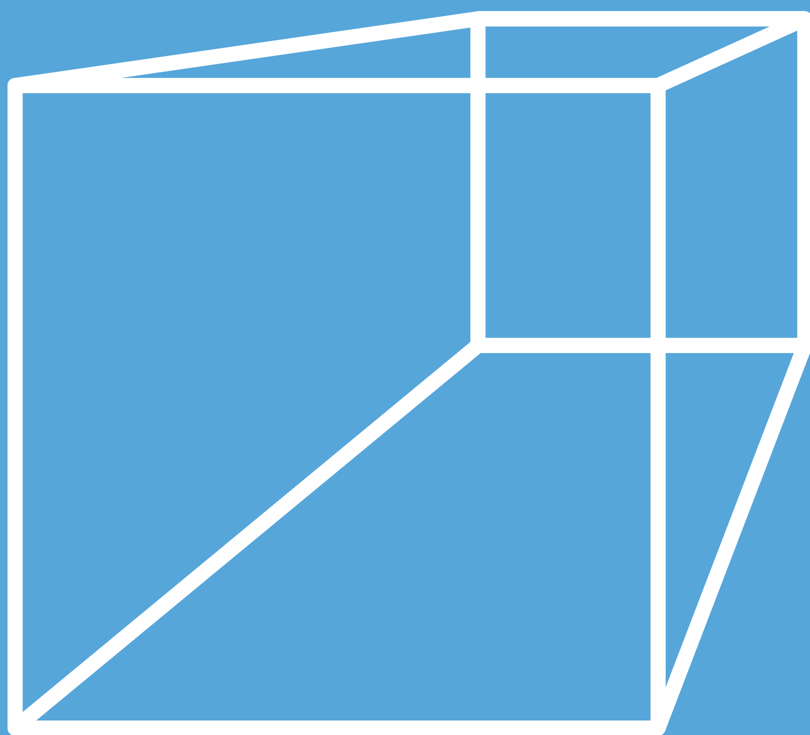
IV тарау. **КОМПЛЕКС САНДАР 75**

86 – 87-сабақтар. Комплекс сандар және олармен амалдар орындау. Комплекс санды өрнектеу 75
88-сабақ. $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ және $r\cdot e^{i\varphi}$ $(r>0,\ 0\le\varphi\le2\pi)$ көріністегі комплекс сандар 80
89 – 90-сабақтар. Тригонометриялық пішінде берілген комплекс сандардың көбейтіндісі және бөліндісі 81
91-сабақ. Комплекс саннан квадрат түбірді шығару 84

Жауаптар 88
Пайдаланылған және ұсынылған әдебиеттер 95

Математика

Геометрия



10-сынып

10-сыныпта геометрияның стереометрия бөлімін – кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін жүйелі үйренуге кірісеміз. Оқулықта кеңістіктегі негізгі фигураларға, көпжақтар мен айналу денелеріне және олардың негізгі қасиеттеріне, кеңістіктегі параллель және перпендикуляр түзулер мен жазықтықтарға, сондай-ақ олардың қасиеттеріне қатысты мәселелер орын алған.

“Геометрия-10” оқулығындағы теориялық материалдарды қарапайым және жеңіл тілмен баяндауға әрекет жасалған. Барлық тақырыптар мен ұғымдар түрлі өмірлік мысалдар арқылы ашылған. Әрбір тақырыптан соң келетін сұрақтар, дәлелдеуге, есептеуге және салуға қатысты көптеген есептер мен мысалдар оқушыны шығармышалық пікірлеуге үндейді, игерілген білімдерді тереңдетуге және пысықтауға жәрдем береді.

“Геометрия-10” оқулығы жалпы білім беретін мектептердің 10-сынып оқушыларына арналған, оны геометрияны өз бетінше үйренуді және қайталауды қалайтын оқырмандардың да пайдалануына болады.

МАЗМҰНЫ

IV бөлім. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың параллельдігі

10. Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы 99
11. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтың өзара орналасуы 106
12. Кеңістіктегі жазықтықтардың өзара орналасуы 108
13. Кеңістіктегі параллель проекция 114
14. Практикалық жаттығулар мен қолданулар 116

V бөлім. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың перпендикулярлығы

15. Кеңістіктегі перпендикуляр түзулер мен жазықтықтар 119
16. Кеңістіктегі перпендикуляр, көлбеу және қашықтық 123
17. Үш перпендикуляр туралы теорема 128
18. Кеңістіктегі жазықтықтардың перпендикулярлығы 132
19. Кеңістіктегі ортогональ проекция және оны техникада пайдалану 137
20. Практикалық жаттығулар мен қолданулар 140

Оқулықтың "Геометрия" бөлімінде пайдаланылған белгілер және олардың білдіретін мағынасы:

– теореманың сипаттамасы

– теорема дәлелінің соңы

– аксиоманың сипаттамасы

– практикалық қолдану

– тақырып бойынша сұрақтар

– тарихи көріністер

– белсенділендіретін жаттығу

– геометриялықбасқатырмалар

IV БӨЛІМ

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

10 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Кеңістіктегі екі a және b түзулер бір жазықтықта жататын болып, өзара қиылыспайтын болса, олар *параллель түзулер* делінеді. a және b түзулердің параллельдігі $a||b$ түрінде жазылады.

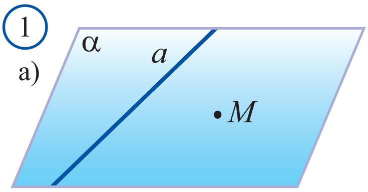
Жазықтықта берілген нүкте арқылы берілген түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады. Мұндай қасиет – кеңістікте де орынды болады:

4.1-теорема.* *Кеңістікте берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге параллель тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

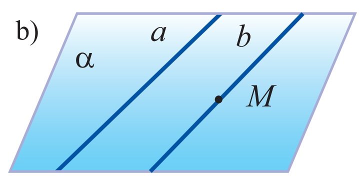
Дәлелдеу. a – берілген түзу және M – осы түзуден тыс жатқан нүкте болсын (1.a-сурет). Дәлелденген 2.1-теоремаға орай, берілген a түзу және одан тыс жатқан M нүкте арқылы тек бір ғана α жазықтықты өткізуге болады.

1

a)



b)



Ал α жазықтықта M нүкте арқылы берілген a түзуге параллель тек бір ғана b түзуді жүргізуге болады (1.b-сурет).

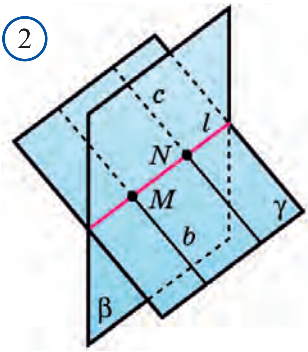
Дәл осы b түзу ізделінген бір ғана түзу болады. ❑

Жазықтықта жатқан екі параллель түзудің бірі үшінші түзуді қиып өтсе, олардың екіншісі де осы түзуді қиып өтеді. Осыған ұқсайтын қасиет кеңістікте де орынды болады:

4.2-теорема.* *Кеңістікте берілген екі параллель түзудің бірі жазықтықты қиып өтсе, олардың екіншісі де осы жазықтықты қиып өтеді.

Дәлелдеу. *b* және *c* параллель түзулер берілген болып, олардың бірі – *b* түзу берілген β жазықтықты *M* нүктеде қиып өтсін (2.а-сурет).

2



b және *c* түзулер параллель болғандықтан олар бір жазықтықта жатады. Бұл – γ жазықтық болсын.

β және γ жазықтықтар үшін *M* ортақ нүкте. Онда S3 аксиомаға орай, бұл жазықтықтар бір *l* түзудің бойымен қиылысады. Осы түзу γ жазықтықта жатады және *b* түзуді *M* нүктеде қиып өтеді. Сондықтан, бұл түзу *b* түзуге параллель *c* түзуін де *N* нүктеде қиып өтеді.

l түзу β жазықтықта да жатқандықтан *N* нүкте осы β жазықтыққа да тиісті. Демек, *N* нүкте β және γ жазықтықтар үшін ортақ нүкте.

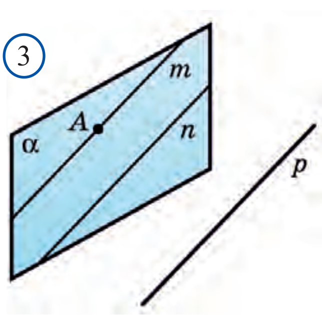
Енді *c* түзудің β жазықтықпен басқа ортақ нүктесінің жоқ екенін көрсетеміз. Кері жорамал жасайық. Айталық, *c* түзудің β жазықтықпен тағы басқа да *K* ортақ нүктесі бар болсын. Онда S2 аксиомаға орай, *c* түзу β жазықтықта жатады. Онда *c* түзу β және γ жазықтықтар үшін ортақ болады. Бірақ *l* – осындай түзу еді. Бұдан *c* түзудің *l* түзумен дәлме-дәл түсуі келіп шығады. Ал мұның болуы мүмкін емес. Өйткені *b* түзу *c* түзуге параллель және *l* түзуді қиып өтеді. Қайшылық жорамалдың қате екенін көрсетті. ❑

Екі түзудің әрбірі үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель болатыны сендерге планиметриядан белгілі. Осы қасиет кеңістікте де орынды болып, ол түзулердің параллельдік белгісі деп айтылады.

4.3-теорема. Үшінші түзуге параллель болатын екі түзу өзара параллель болады.

Дәлелдеу. Айталық, *m* және *n* түзулер *p* түзуге параллель болсын. *m* және *n* түзулердің бір жазықтықта жататынын және өзара қиылыспайтынын, яғни параллель екенін көрсетеміз.

3



m түзудегі *A* нүктені аламыз және осы нүкте мен *n* түзу арқылы α жазықтық жүргіземіз. *m* түзудің α жазықтықта жататынын дәлелдейміз.

Айталық, мұндай болмасын. *m* түзу α жазықтықпен ортақ нүктеге ие болғандықтан, ол жазықтықты қиып өтеді. Онда 4.2-теоремаға орай, бұл жазықтықты *m* түзуге параллель болған *p* түзу де, *p* түзуге параллель болған *n* түзу де қиып өтеді. Бірақ мұның болуы мүмкін емес, өйткені *n* түзу α жазықтықта жатады.

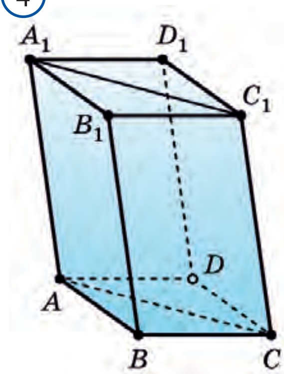
Демек, m және n түзулер α жазықтықта жатады.

Енді осы түзулердің қиылыспайтынын дәлелдейміз. Тағы да кері жорамал жасаймыз. m және n түзулер қандай да бір B нүктеде қиылысатын болсын. Онда B нүкте арқылы p түзуге параллель екі m және n түзулер өтеді. Ал мұның, 4.1-теоремаға орай болуы мүмкін емес.❑

Енді параллелепипедтің төмендегі қасиеттерін дәлелдейміз

1-қасиет. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедте (4-сурет) табан диагональдары мен бүйір қырларынан түзілген ACC_1A_1 төртбұрыш параллелограмнан құралған болады.

4



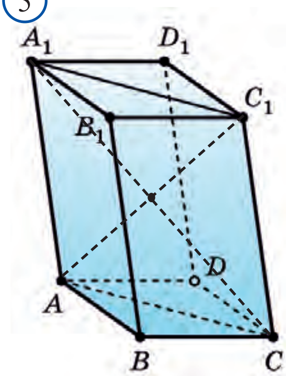
Шынында да, параллелепипедтің ABB_1A_1 және BCC_1B_1 жақтары анықтамасына орай, параллелограмм.

Осы параллелограмдардың қарама-қарсы қабырғалары өзара тең. Атап айтсақ, $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$.

Параллелепипедтің анықтамасына орай, $AA_1 \parallel BB_1$ және $BB_1 \parallel CC_1$. Онда 4.2-теоремаға орай, $AA_1 \parallel CC_1$ және $AA_1 = CC_1$ болады. Демек, AC_1CA_1 төртбұрыш – параллелограмм.

2-қасиет. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедтің (4-сурет) қарама-қарсы жақтары өзара тең.

5



Жоғарыдағы қасиетке орай, AC_1CA_1 – параллелограмм және $AC = A_1C_1$. Онда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар үш қабырға бойынша тең болып, ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштар да өзара тең болады. Нәтижеде, $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмдар да өзара тең болады.

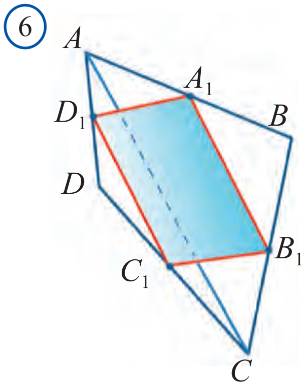
Басқа қарама-қарсы жақтардың теңдігі де осылайша дәлелденеді.

3-қасиет. Параллелепипедтің барлық диагональдары бір нүктеде қиылысады және осы нүктеде тең екіге бөлінеді (5-сурет).

1-қасиетке орай, AC_1CA_1 – параллелограмм. Онда осы параллелограмдардың диагональдары A_1C және AC_1 бір нүктеде қиылысады және осы қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді.

Қалған диагональдардың қиылысуы және осы нүктеде тең екіге бөлінуі де осыған ұқсас түрде дәлелденеді.

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын кесінділер (сәулелер)



өзара *параллель кесінділер* (*сәулелер*) деп аталады.

Есеп. Төбелері бір жазықтықта жатпайтын кеңістіктегі төртбұрыш қабырғаларының центрлері параллелограмның төбелері болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. $ABCD$ – кеңістіктегі төртбұрыш және A_1, B_1, C_1 және D_1 – төртбұрыш қабырғаларының центрлері болсын (6-сурет). Онда, A_1B_1 кесінді – ABC үшбұрыштың AC қабырғасына параллель центрлік түзуі, ал C_1D_1 кесінді ACD үшбұрыштың AC қабырғасына параллель центрлік түзуі болады.

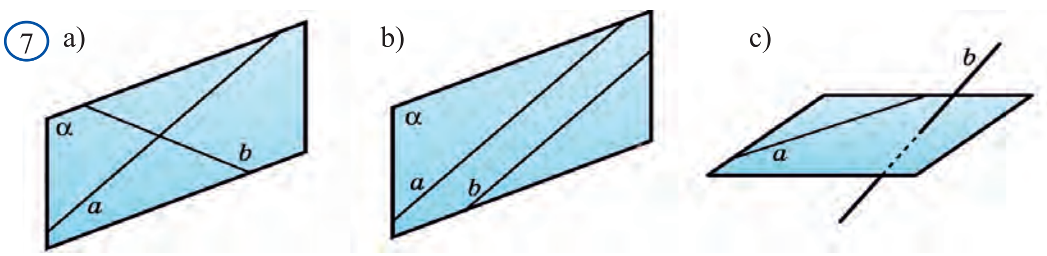
4.3-теоремаға орай, A_1B_1 және C_1D_1 түзулер параллель болады. Демек, олар бір жазықтықта жатады.

A_1D_1 және B_1C_1 түзулердің параллельдігі де дәл осылай дәлелденеді.

Осылайша, $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрыш бір жазықтықта жатады және оның қарама-қарсы қабырғалары параллель. Демек, ол параллелограмм болады. ❑

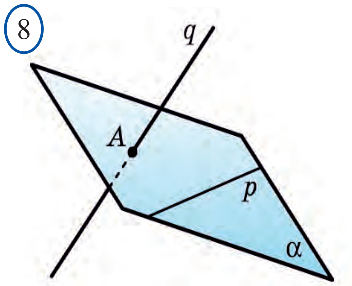
Егер кеңістікте екі түзу өзара қиылысса немесе өзара параллель болса, олар бір жазықтықта жатады (7.a- және 7.b-сурет). Кеңістіктегі бір жазықтықта жатпайтын түзулер *айқас түзулер* деп аталады (7.c-сурет).

Айқас түзулерді төмендегі белгіге орай тануға болады:



4.4-теорема. Егер екі түзудің бірі қандай да бір жазықтықта жатса, ал екіншісі осы жазықтықты бірінші түзуде жатпаған нүкте арқылы қиып өтсе, онда бұл түзулер айқас түзулер болады.

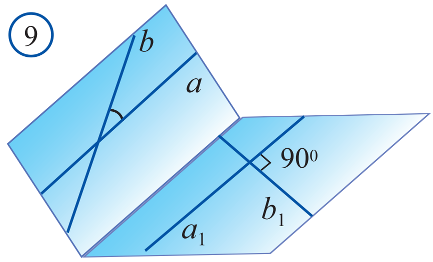
Дәлелдеу. Айталық, p түзу α жазықтықта жататын болсын. Ал q түзу бұл жазықтықты p түзуге тиісті болмаған A нүктеде қиып өтсін (8-сурет). p және q түзулердің айқас екенін дәлелдейміз.



Кері жорамалдаймыз: p және q түзулер қандай да бір β жазықтықта жататын болсын. Онда β жазықтыққа p түзу мен A нүкте тиісті болады. Өз кезегінде A нүкте q жазықтыққа да тиісті. Демек,

α және β жазықтықтар дәлме-дәл түседі. Нәтижеде, шартқа орай a жазықтыққа тиісті болмаған q түзу осы жазықтыққа тиісті болып қалды. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. ❑

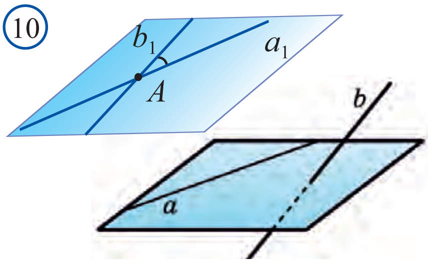
9



Екі түзудің қиылысуынан пайда болған сыбайлас бұрыштардың кішісі *екі түзудің арасындағы бұрыш* делінеді.

Айқас түзулердің арасындағы бұрыш деп, осы түзулерге параллель болған қиылысатын түзулердің арасындағы бұрышқа айтылады (9-сурет).

10



Іс жүзінде a және b айқас түзулердің арасындағы бұрышты табу үшін (10-сурет):

1) қандай да бір A нүкте таңдалады;

2) A нүкте арқылы айқас түзулерге параллель a_1 және b_1 түзулер өткізіледі;

3) осы түзулердің арасындағы бұрыш өлшенеді.

Бұл алгоритмнің нәтижесі – A нүктеге байланысты емес екені туралы ойланып көріңдер.

Арасындағы бұрыш 90°-қа тең түзулер *перпендикуляр түзулер* деп аталады. Параллель түзулердің арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп саналады.

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

1. *Параллель түзулердің қандай қасиеттерін білесің?*
2. *Түзулердің параллельдік белгісін айт.*
3. *Параллелепипедтің қандай қасиеттерін білесің?*
4. *Түзулердің айқастық белгісін айт.*
5. *Түзулердің арасындағы бұрыш қалай анықталады?*
6. *Айқас түзулер параллель болуы мүмкін бе?*

4.1. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралеллепипедтегі; b) $ABCA_1B_1C_1$ призмадағы параллель қырлардың жұптарын анықта.

4.2. Қандай пирамидаларда параллель болады?

4.3. Жазықтықта түзу параллель түзулердің бірін қиып өтсе, екіншісін де қиып өтетіні белгілі. Осы қасиет кеңістікте де орынды болады ма?

4.4. Дұрыс растауды тап:

а) Кеңістіктегі түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель көптеген түзулерді өткізуге болады;

b) үшінші түзуге параллель түзулер түзулер өзара қиылысады; *c*) егер екі түзу жазықтықта жатса, олар қиылысады; *d*) түзу және онда жатпаған нүкте арқылы екі түрлі жазықтық өткізуге болады; t) кеңістіктің жазықтықта жатпаған нүктесі арқылы осы жазықтықты қиятын көптеген түзулерді өткізуге болады.

4.5. A ұшы a жазықтықта жатқан AB кесіндіде C нүкте таңдалған. B және C нүктелер арқылы өткізілген параллель түзулер a жазықтықты, сәйкесінше, B_1 және C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді. Егер: а) C нүкте B кесіндінің центрі және $BB_1 = 14$ см; b) $AC : CB = 3 : 2$ және $BB_1 = 50$ см болса, CC_1 кесіндінің ұзындығын тап.

4.6. Бір жазықтықта жатпайтын $MNOP$ параллелограмм және EK табанды $MNEK$ трапеция берілген. а) PO және EK түзулердің өзара орналасуын анықта; b) трапецияның табандары $MN = 45$ см, $EK = 55$ см-ге тең болып, оған іштей шеңбер сызуға болады. Трапецияның периметрін тап.

4.7. a және b түзулер бір жазықтықта жатады. Осы түзулердің өзара орналасуының мүмкін болған жағдайын көрсет.

a) a және b параллель; *b*) a және b қиылысады; *c*) a және b қиылыспайды; *d*) a және b айқас; *e*) a және b параллель емес.

4.8. a және b түзулер c түзуге параллель. a және b түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

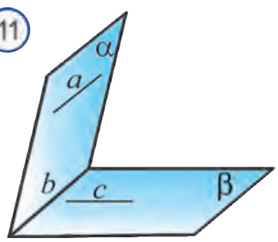
4.9. 11-суретте α және β жазықтықтар b түзудің бойымен қиылысады. Егер $a||b$, c және b түзулер параллель болмаса, a және c түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

4.10. 12-суретте M нүкте ABC үшбұрыштың сыртында жатыр. MA, MC, MB түзулерге айқас түзулерді анықта.

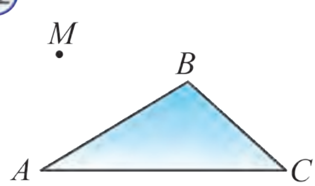
4.11. 13-суретте PQ түзу $ABCD$ төртбұрыштың сыртында жатыр және BC-ға параллель. а) PQ және AB; b) PQ және CD; c) PQ және AD қандай түзулер?

4.12. 14-суретте M нүкте ABC үшбұрыштың сыртында жатыр. MA, MB, MC кесінділердің центрлері, сәйкесінше, K, F, P нүктелермен белгіленген. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC түзулердің қайсылары өзара параллель?

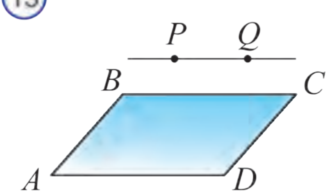
11



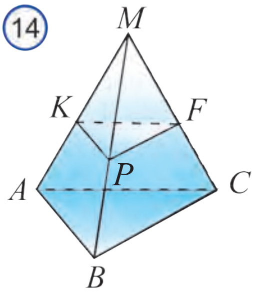
12



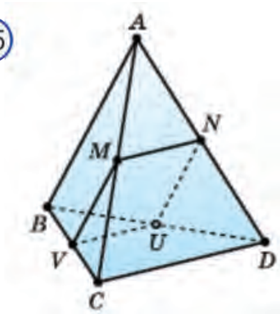
13



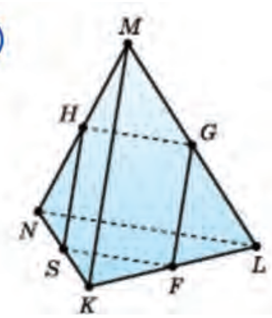
14



15



16



4.13. *M, N, U, V* нүктелер *ABCD* пирамиданың, сәйкесінше, *AC, AD, BD* және *BC* қырларының центрлері (15-сурет). Егер *AB* = 20 см, *CD* = 30 см болса, *MNUV* төртбұрыштың периметрін тап.

4.14. *H, G, F, S* нүктелер үшбұрышты *KLMN* пирамиданың, сәйкесінше, *MN, ML, LK* және *KN* қырларының центрлері (16-сурет). Егер *LK* = 18 мм, *MN* = 22 мм болса, *HGFS* төртбұрыштың периметрін тап.

4.15. Түзу арқылы түрліше екі жазықтық өткізу мүмкін екенін дәлелде.

4.16. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүкте берілген. Олардың үшеуі арқылы өтетін неше жазықтық өткізуге болады?

4.17. *A, B, C* нүктелер берілген екі жазықтықтың әрбірінде жатады. Осы нүктелердің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

4.18. *a* түзудің бойымен қиылысатын екі жазықтық берілген. *b* түзу олардың бірінде жатады және екіншісін қиып өтеді. *a* және *b* түзулердің қиылысатынын дәлелде.

4.19. Үш жазықтықтың әр екеуі өзара қиылысады. Жазықтықтардың қиылысуы түзулердің екеуі қандай да бір нүктеде қиылысатын болса, үшінші қиылысу сызығы да осы нүкте арқылы өтетінін дәлелде.

4.20. Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысса, онда оның төбелері бір жазықтықта жататынын дәлелде.

4.21. *K, Z, M, N* нүктелер *SABC* үшбұрышты пирамиданың, сәйкесінше, *SA, AC, BC*, *SB* кесінділердің центрлері. Егер пирамиданың бүйір қырлары *b*, табанының қабырғасы *a*-ға тең болса, *KZMN* төртбұрыштың периметрін тап.

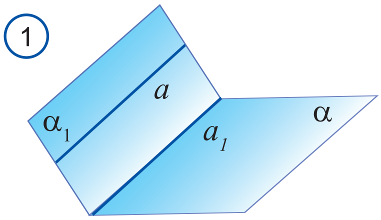
4.22. *XU* және *VT* түзулер параллель, ал *XY* және *VT* түзулер айқас. Егер: a) $\angle YXU = 40^{\circ}$; b) $\angle YXU = 135^{\circ}$; c) $\angle YXU = 90^{\circ}$ болса, *XY* және *VT* түзулердің арасындағы бұрышты тап

4.23. *l* түзу *ABCD* параллелограмның *BC* қабырғасына параллель және оның жазықтығында жатпайды. *l* және *CD* түзулер айқас екенін дәлелде. Егер пирамиданың бұрыштарының бірі: a) 58°; b) 133° болса, *l* және *CD* түзулердің арасындағы бұрышты тап.

11 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

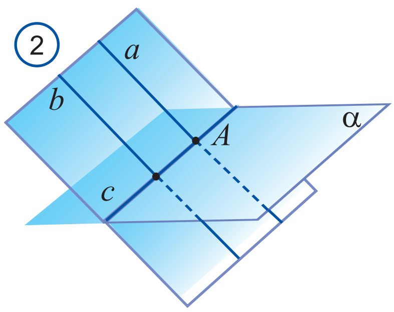
Егер түзу мен жазықтық қиылыспайтын болса, *түзу мен жазықтық параллель* делінеді. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі төмендегі белгі арқылы анықталады.

4.5-теорема.* *Егер жазықтықта жатпайтын түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, бұл түзу жазықтықтың өзіне де параллель болады.



Дәлелдеу. Айталық, α – жазықтық, a – онда жатпайтын түзу, ал a_1 α жазықтықта жататын және a-ға параллель түзу болсын.

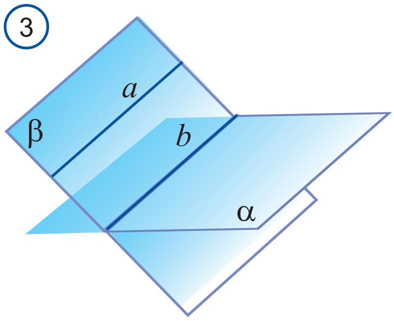
a және a_1 түзулер арқылы α_1 жазықтықты жүргіземіз (1-сурет). α және α_1 жазықтықтар a_1 түзу бойынша қиылысатыны белгілі.



Егер a түзу α жазықтықты қиып өтсе, онда қиылысу нүктесі a_1 түзуге тиісті болатын еді. Бірақ бұл мүмкін емес, өйткені a және a_1 түзулер параллель. Сондықтан, a түзу α жазықтықты қиып өте алмайды.

Демек, a түзу α жазықтыққа параллель. ❑

Есеп. Егер жазықтық екі параллель түзудің бірін қиып өтсе, екіншісі де қиып өтетінін дәлелде.



Дәлелдеу. a және b – екі параллель түзу, ал α жазықтық a түзуді A нүкте арқылы қиып өтетін болсын (2-сурет).

a және b түзулер арқылы жазықтық жүргіземіз. Ол α жазықтықты қандай да бір c түзудің бойымен қиып өтеді. c түзу a түзуді A нүкте арқылы қиып өтеді.

Демек, оған параллель болған b түзуді де қиып өтеді. c түзу α жазықтықта жатқандықтан α жазықтық b түзуді де қиып өтеді.

4.6-теорема.* *Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель болған түзу арқылы өтсе, бұл жазықтықтардың қиылысуының түзуі де берілген түзуге параллель болады.

Дәлелдеу. Айталық, a түзу α жазықтыққа параллель және β жазықтықта жатсын. Ал b түзу α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі болсын (3-сурет). Онда, a және b түзулер β жазықтықта жатады және өзара қиылыспайды. Кері жағдайда, a түзу β жазықтықты қиып өтетін еді.

Демек, a және b түзулер өзара параллель. ❑

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

1. *Түзу мен жазықтық кеңістікте өзара қалай орналасуы мүмкін?*
2. *Түзу мен жазықтық қашан параллель болады?*
3. *Түзудің жазықтыққа параллельдік белгісін айт.*
4. *Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтардың орналасуына байланысты қандай қасиеттерді білесің?*

4.24. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты дұрыс призманың бір-біріне параллель қырлары мен жақтарын анықта.

4.25. Дұрыс растауды таңда:

a) кеңістіктегі түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель көптеген түзулер өткізуге болады;

b) үшінші түзуге параллель түзулер бір нүктеде қиылысады;

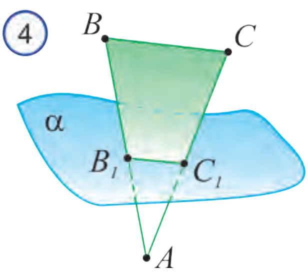
c) егер түзудің екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, түзу жазықтықты қиып өтеді;

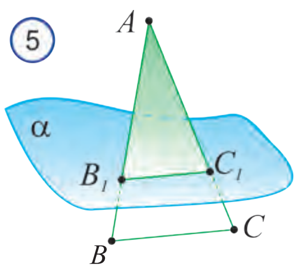
d) түзу және онда жатпаған нүкте арқылы екі әр түрлі жазықтық өткізуге болады;

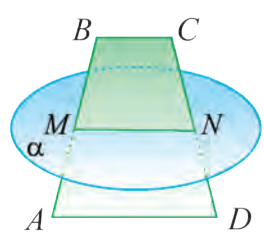
e) кеңістіктегі жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы берілген жазықтықты қиып өтетін көптеген түзулер өткізуге болады.

4.26. A және C нүктелер α жазықтықта жатыр. B және D нүктелер β жазықтықта жатыр. AC, CD, BD, AB, BC және AD түзулердің қайсылары β жазықтықты қиып өтеді?

4.27. ABC үшбұрыш α жазықтықты B_1 және C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді (4-сурет). Егер $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ см, $BC \| B_1C_1$ болса, B_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап.

4


5


6


4.28. α жазықтық ABC үшбұрыштың AB және AC қабырғаларын B_1 және

C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді (5-сурет). Егер $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$ болса, BC кесіндінің ұзындығын тап.

4.29. α жазықтық $ABCD$ трапецияның AD табанына параллель және бүйір қырларын M және N нүктелер арқылы қиып өтеді (6-сурет). Егер $AD = 17$ см, $BC = 9$ см болса, MN кесіндінің ұзындығын тап.

4.30. Жазықтыққа онда жатпайтын нүкте арқылы неше параллель түзу өткізуге болады?

4.31. a түзу α жазықтыққа параллель. Дұрыс растауларды тап.

a) a түзу α жазықтықтың тек бір ғана түзуіне параллель болады;

b) a түзу α жазықтықтың тек бір ғана түзуінен басқа барлық түзулеріне айқас болады;

c) α жазықтықта a түзуге параллель және айқас болған көптеген түзулер табылады;

d) α жазықтықта тек бір ғана a түзуге параллель және осы жазықтықтың кез келген нүктесі арқылы өтетін түзу бар.

4.32. A, B, C, D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. M, N, K, Z нүктелер, сәйкесінше, AD, BD, BC, AC кесінділердің центрлері. Егер $CD=AB$ болса, MK және NZ түзулердің перпендикулярлығын дәлелде.

4.33. $ABCD$ параллелограмның AB және BC қабырғалары α жазықтықты қиып өтеді. AD және DC түзулер де α жазықтықты қиып өтетінін дәлелде.

4.34. ABC және ABD үшбұрыштар бір жазықтықта жатпайды. CD түзуге параллель болған кез келген түзудің осы үшбұрыштар жазықтығын қиып өтетінін дәлелде.

4.35. Берілген екі түзуді қиып өтетін түзулердің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

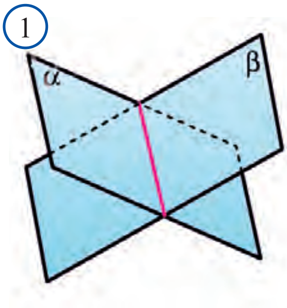
12 КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Екі түзу ортақ нүктеге ие болуы немесе ортақ нүктеге ие болмауы мүмкін. Бірінші жағдайда S3 акисомасына орай бұл жазықтықтар ортақ түзуге де ие болады, яғни түзудің бойымен қиылысады (1-сурет). Екінші жағдайда жазықтықтар қиылыспайды (2-сурет).

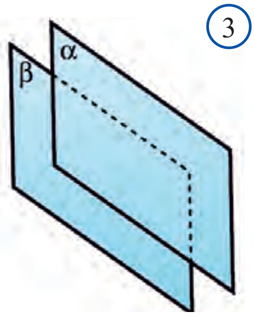
Қиылыспайтын жазықтықтар *параллель жазықтықтар* деп аталады. Параллель жазықтықтарды бөлменің едені мен төбесіне, қарама-қарсы қабарғаларына қарап көз алдымызға келтіруімізге болады (3-сурет).

Екі жазықтықтың параллельдігі төмендегі белгі арқылы анықталады.

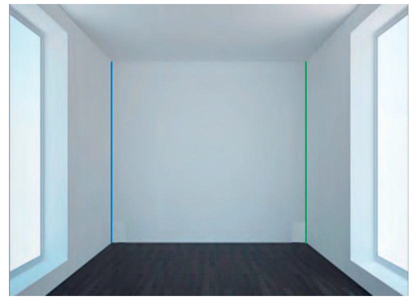
1



2

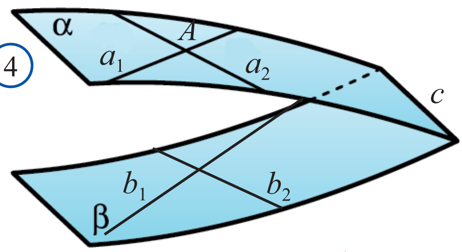


3



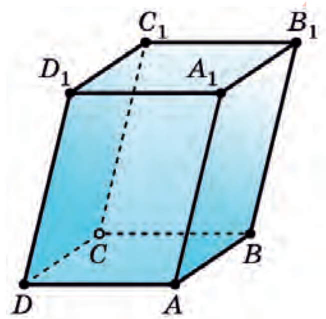
4.7-теорема. ***Егер бір жазықтықтағы қиылысатын екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге сәйкесінше параллель болса, бұл жазықтықтар параллель болады.***

4



Дәлелдеу. Айталық, α және β – жазықтықтар берілген, a және b – α жазықтықта жатқан және A нүктеде қиылысатын түзулер, ал a_1 және b_1 – β жазықтықта жатқан және, сәйкесінше, a және b түзулерге параллель түзулер болсын (4-сурет).

5



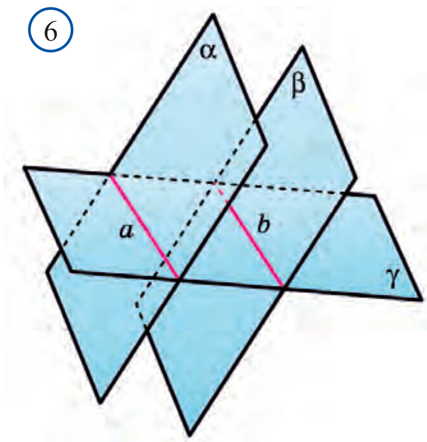
Жорамал жасаймыз, α және β жазықтықтар өзара параллель болмасын, яғни қандай да бір c түзудің бойымен қиылысатын болсын. Онда 4.6-теоремаға орай, a_1 және a_2 түзулер, сәйкесінше, b_1 және b_2 түзулерге параллель болып, β жазықтыққа да параллель болады. Сондықтан олар осы жазықтықта жатқан c түзуді де қиып өтпейді.

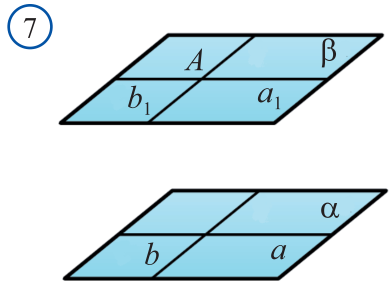
Сөйтіп, α жазықтықта жатқан A нүкте арқылы c түзуге параллель екі a_1 және a_2 түзу өтуде. Параллельдік аксиомасына орай, мұндай болуы мүмкін емес. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. ❑

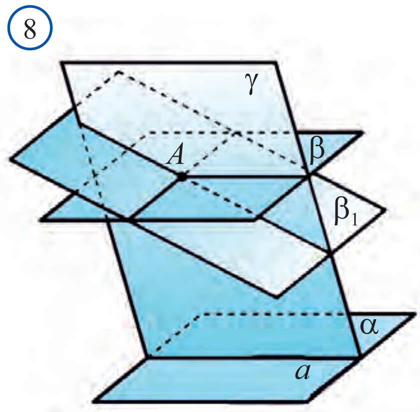
Осы теореманы пайдаланып, параллелопипедтің бүйір қырлары (5-сурет) параллель болатынын өз бетіңше дәлелде.

4.8-теорема. ***Екі параллель жазықтықтың үшінші жазықтықпен қиылысу түзулері өзара параллель болады.***

Дәлелдеу. Айталық, α және β параллель жазықтықтар γ жазықтықты, сәйкесінше, a және b түзулердің бойымен қиып өтсін (6-сурет). a және b түзулердің параллель екенін дәлелдейміз.







Жорамал жасаймыз, a және b түзулер қандай да бір Q нүктеде қиылыссын. Онда Q нүкте α жазықтықта жатады, өйткені a түзу α жазықтықта жатады. Сондай-ақ, Q нүкте β жазықтықта жатады, өйткені b түзу β жазықтықта жатады. Нәтижеде, α және β жазықтықтар ортақ Q нүктеге ие болуда. Ал бұл шартқа орай мүмкін емес. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. ❑

4.9-теорема. Берілген жазықтыққа оған тиісті болмаған нүкте арқылы бір ғана параллель жазықтық өткізуге болады.

Дәлелдеу. Берілген α жазықтық арқылы қиылысатын екі a, b түзу жүргіземіз. Берілген A нүкте арқылы оларға параллель a_1, b_1 түзулерді жүргіземіз (7-сурет).

a_1, b_1 түзулер арқылы β жазықтық жүргіземіз. Бұл жазықтық 4.7-теоремаға орай, α жазықтыққа параллель болып, ізделеніп жатқан параллель болады.

Енді осы жазықтықтың жалғыздығын көрсетеміз. Жорамал жасаймыз, α жазықтыққа параллель тағы бір β_1 жазықтық бар болсын (8-сурет). A нүкте және a түзу арқылы өтетін γ жазықтықты жүргіземіз. Бұл жазықтық β жазықтықты a_1 түзудің бойымен, β_1 жазықтықты a_2 түзудің бойымен қиып өтеді. a_1, a_2 түзулер 4.6-теоремаға орай a түзуге параллель болады. Бірақ бұл мүмкін емес, өйткені жазықтыққа онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана түзу өткізуге болады. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. ❑

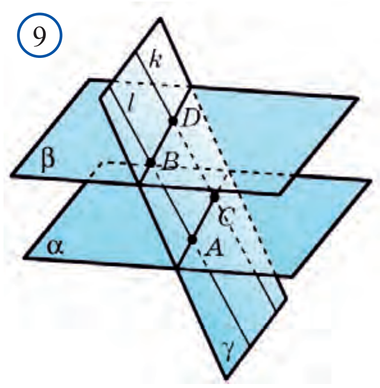
4.10-теорема. Үшінші жазықтыққа параллель екі жазықтық өзара параллель болады.

Бұл теореманы өз бетіңше дәлелде.

4.11-теорема. Параллель жазықтықтар арасындағы параллель түзулердің кесінділері тең болады.

Дәлелдеу. Айталық, α және β жазықтықтар k және l түзулерден AB және CD кесінділерді ажыратып алсын (9-сурет).

9



Осы кесінділердің теңдігін көрсетеміз.

k және l түзулер арқылы өтетін γ жазықтық параллель жазықтықтарды AC және BD түзулердің бойымен қиып өтеді. Нәтижеде, қарама-қарсы қабырғалары параллель болған $ABCD$ төртбұрышқа, яғни параллелограмға ие боламыз. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болады Атап айтқанда, $AB = CD$. ❑

4.12-теорема. ***Үш параллель жазықтықтардың арасындағы кез келген түзулердің кесінділері өзара пропорциональ болады.***

Теореманы өз бетіңше дәлелде.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Жазықтықтар кеңістікте қалай орналасуы мүмкін?*
2. *Параллель жазықтықтар деп қандай жазықтықтарға айтылады?*
3. *Жазықтықтардың параллельдік белгісін айт.*
4. *Кеңістікте жазықтықтардың орналасуымен байланысты қандай қасиеттерді білесің?*
5. *Параллелепипедтің бүйір қырлары параллель болуын негіздеп бер.*

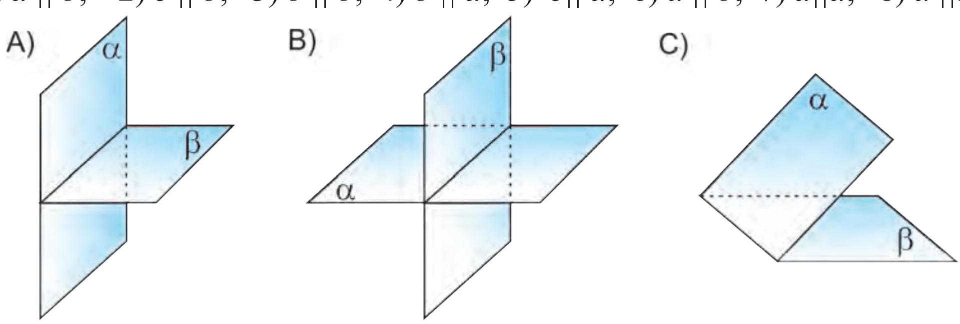
4.36. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедтің; b) $ABCA_1B_1C_1$ призманың параллель жақтарын анықта.

4.37. Бірде-бір ортақ нүктесі болмаған α және β жазықтықтар кеңістікте қалай орналасады?

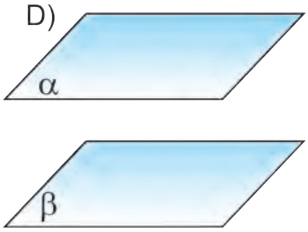
4.38. α және β жазықтықтар параллель. a және b түзулер α жазықтықта жатыр, ал c және d түзулер β жазықтықта жатыр. Төмендегі растаулардың қайсылары дұрыс:

1) $a \parallel b$;   2) $c \parallel b$;   3) $b \parallel b$;   4) $b \parallel a$;   5) $c \parallel a$;   6) $d \parallel b$;   7) $a \parallel a$;   8) $d \parallel a$?

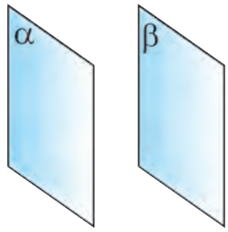
10



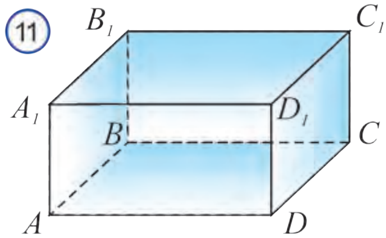
D)



E)



11



4.39. Қиылысатын екі жазықтық бейнеленген үш суретті көрсет (10-сурет).

4.40. α және β жазықтықтар параллель. Олардың ешбіріне тиісті болмаған нүкте арқылы γ жазықтық өткізілген. Дұрыс растауларды көрсет.

a) γ жазықтық α жазықтыққа параллель болған бір ғана жазықтық;

b) γ жазықтық β жазықтықты қиып өтетін бір ғана жазықтық;

c) γ жазықтық β жазықтыққа параллель болған бір ғана жазықтық;

d) γ жазықтық α жазықтықты қиып өтетін бір ғана жазықтық;

e) γ жазықтық α жазықтыққа да, β жазықтыққа да параллель болған бір ғана жазықтық.

4.41. 11-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед бейнеленген.

a) $A_1B_1C_1D_1$ және B_1A_1AB; b) ADD_1A_1 және $ABCD$; c) ABB_1A_1 және C_1D_1DC; d) $BADC$ және ABB_1A_1; e) CC_1B_1B және ADD_1A_1 жазықтықтардың өзара орналасуын анықта.

4.42. AB, BC кесінділер $ABCD$ параллелограмның қабырғалары болып, олар, сәйкесінше, a және b түзулерге параллель (12-сурет). a және b түзулер өзара қиылысады және α жазықтыққа тиісті. $ABCD$ және α жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

4.43. a және b айқас түзулер берілген. a түзу арқылы өтетін және β жазықтыққа параллель болған неше жазықтық өткізуге болады?

4.44. Екі а және β жазықтықтардың қиылысу түзуі үшінші γ жазықтыққа параллель. α және β жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

4.45. AB және CD параллель түзулер арқылы өткізілген γ жазықтық α және β параллель жазықтықтарды, сәйкесінше, AC және BD түзулердің бойымен қиып өтеді (13-сурет). Егер $BD = 15$ см болса, AC кесіндінің ұзындығын тап.

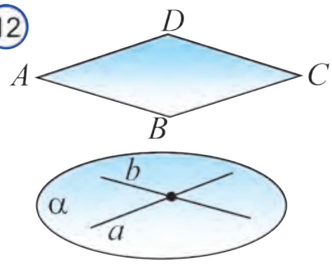
4.46. Кез келген екі айқас түзу арқылы бір ғана параллель жазықтықтардың жұбын өткізудің мүмкін екенін дәлелде.

4.47. α және β жазықтықтар параллель. α жазықтықта жататын кез келген түзу β жазықтыққа параллель болатынын дәлелде.

4.48. O нүкте – бір жазықтықта жатпайтын AA_1, BB_1, CC_1 кесінділердің ортақ центрі. ABC және $A_1B_1C_1$ жазықтықтар параллель екенін дәлелде.

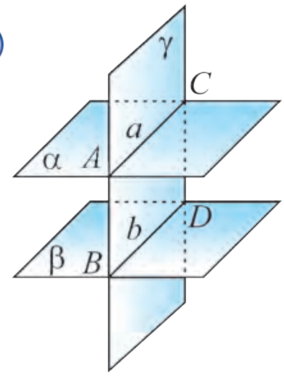
4.49. *ABCD* параллелограмм және оны қиып өтпейтін жазықтық берілген. Параллелограмның *A, B, C, D* төбелерінен жазықтықты, сәйкесінше, A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелер арқылы қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. Егер $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м және $CC_1 = 1$ м болса, DD_1 кесіндінің ұзындығын тап.

12



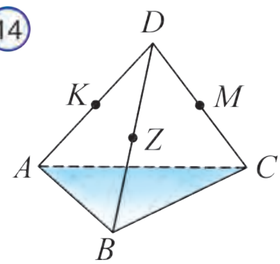
4.50. Екі параллель жазықтық берілген. Бір жазықтықтың *A* және *B* нүктелері арқылы екінші жазықтықты A_1 және B_1 нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. Егер $AB = a$ болса, A_1B_1 кесіндінің ұзындығын тап.

13



4.51. α және β жазықтықтар параллель. α жазықтықтың *M* және *N* нүктелері арқылы β жазықтықты *K* және *L* нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. *MNLK* параллелограмм екенін дәлелде. Егер $ML = 14$ см, $NK = 8$ см және $MK : MN = 9 : 7$ болса, *MNLK* төртбұрыштың периметрін тап

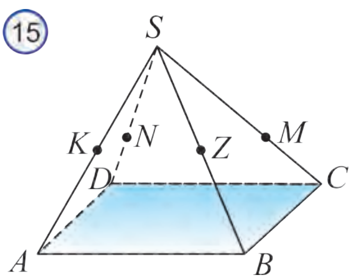
14



4.52. *OF* және *OP* сәулелер α және β параллель жазықтықтарды, сәйкесінше, F_1, P_1, F_2, P_2 нүктелерде қиып өтеді. Егер $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см және $P_1P_2 = 4$ см болса, OP_1 кесіндінің ұзындығын тап.

4.53. *OA* және *OB* сәулелер α және β параллель жазықтықтарды, сәйкесінше, A_1, B_1, A_2, B_2 нүктелерде қиып өтеді. Егер $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см және $A_2B_2 = 50$ см болса, A_1B_1 кесіндінің ұзындығын тап.

15



4.54. *D* нүкте *ABC* үшбұрыш жазықтыққа тиісті емес (14-сурет). *K, M, Z* нүктелер, сәйкесінше, *DA, DB* және *DC* кесінділердің центрі. *ABC* және *KZM* жазықтықтардың өзара орналасуын тап.

4.55. *S* нүкте *ABCD* параллелограмм жазықтыққа тиісті емес (15- сурет). *K, Z, M, N* нүктелер, сәйкесінше, *SA, SB, SC* және *SD* кесінділерге тиісті. Егер $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ болса, *ABCD* және *KZMN* жазықтықтардың өзара орналасуын тап.

13 КЕҢІСТІКТЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯ

Кеңістіктегі фигуралар түрлі тәсілдермен жазықтықта кескінделеді. Төменде олармен танысамыз.

Кеңістіктегі фигураны жазықтыққа *параллель проекциялау* деп мынадай кескіндеуге айтылады, онда фигураның әрбір нүктесі берілген проекциялау бағытына параллель болған түзулердің бойымен жазықтыққа көшіріледі.

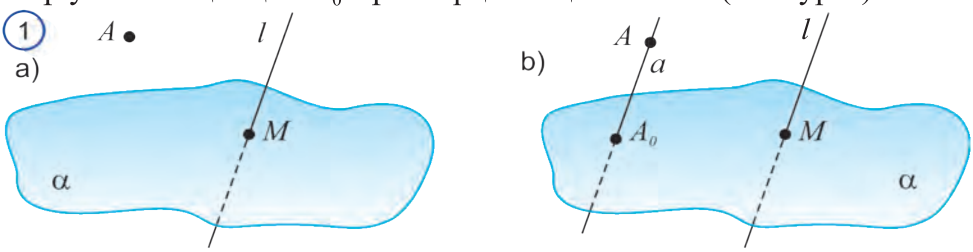
Параллель проекциялауды жарықтың сәулелерінің көмегімен қандай да бір заттың қабырғаға немесе еденге түсірілген көлеңкесіне теңеуге болады.

Осылайша, параллель проекциялауда қандай да бір фигура және *проекциялау жазықтығы* деп аталатын жазықтық алынады, сондай-ақ *проекциялау бағыты*, яғни қандай да бір түзу таңдалады. Әрине, бұл түзу проекция жазықтығымен қиылысуы қажет.

Айталық, кез келген α жазықтық пен проекциялау түзуі l және жазықтықта да, түзуде де жатпайтын A нүкте берілген болсын (1.a-сурет).

A нүкте арқылы α жазықтыққа l түзуге параллель болған түзу жүргіземіз. Осы түзу α жазықтықты A_0 нүкте арқылы қиып өтсін (1.b-сурет).

1



Табылған A_0 нүкте A нүктенің α жазықтыққа *параллель проекциясы* делінеді.

Айталық, қандай да бір F фигураны α жазықтыққа l бағыт бойынша параллель проекциялау қажет болсын. Ол үшін F фигураның кез келген нүктесін аламыз, одан l-ға параллель түзу жүргіземіз және оның α жазықтықпен қиылысу нүктесін белгілейміз. Мұндай нүктелер α жазықтықта қандай да бір F_1 фигураны пайда етеді. Дәл осы F_1 фигура F фигураның α жазықтықтағы параллель проекциясы болады. 2-суретте F фигураның α жазықтыққа проекциясы – F_1 фигура кескінделген.

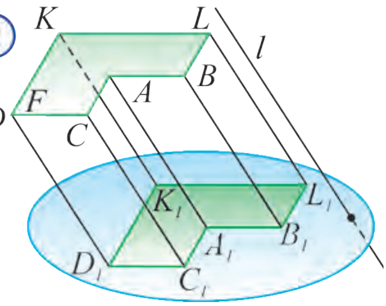
Параллель проекциялаудың төмендегі қасиеттерін келтіреміз. Оларды өз бетіңше дәлелдеуге әрекет жаса. Параллель проекциялауда: нүкте – нүктеге, кесінді – кесіндіге, түзу – түзуге өтеді.

Параллель түзулер проекциясы параллель болады яки дәлме-дәл түседі.

Төмендегі қасиеттерді дәлелдейік.

1-қасиет. ***Фигураның түзу кесінділерінің проекциясы да кесінділерден құралады.***

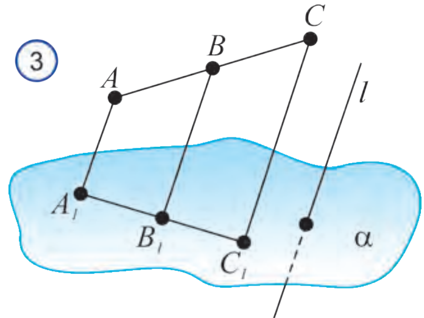
2



Шынында да, AC кесіндінің нүктелерін проекциялайтын барлық түзулер α жазықтықты A_1C_1 түзудің бойымен қиып өтетін жазықтықта жатады (3-сурет). AC кесіндінің кез келген B нүктесі A_1C_1 кесіндінің B_1 нүктесіне өтеді.❑

2-қасиет. ***Фигураның параллель кесінділерінің проекциясы да параллель кесінділерден құралады.***

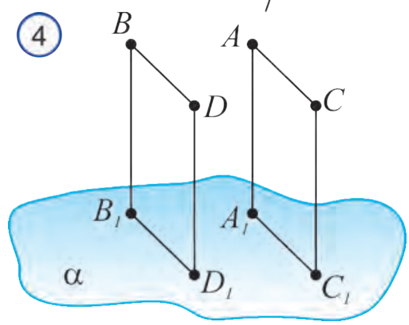
3



Шынында да, AC және BD қандай да бір фигураның параллель кесінділері болсын (4-сурет). Олардың проекциялары – A_1C_1 және B_1D_1 кесінділер де параллель болады, өйткені олар екі параллель жазықтықты α жазықтықпен қиғанда пайда болады.

3-қасиет. ***Бір түзуде немесе параллель түзулерде жатқан кесінділер ұзындықтары салыстырмалылығы өз проекциялары ұзындықтары салыстырмалылығына тең.***

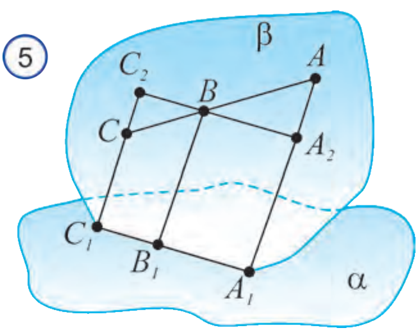
4



Шынында да, 5-суретте AC және A_1C_1 түзулер β жазықтықта жатады. AC кесіндінің B нүктесінен A_1C_1-ға параллель болған A_2C_2 түзуді жүргіземіз.

Пайда болған BAA_2 және BCC_2 үшбұрыштар ұқсас болады. Үшбұрыштардың ұқсастығы мен $A_1B_1=A_2B$ және $B_1C_1=BC_2$ теңдіктердің ізделенген салыстырмалылығына ие боламыз: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$. ❑

5



Осылайша, параллель проекциялауда түзуде немесе параллель түзулерде жатқан кесінділер ұзындықтарының салыстырмалылығы сақталады екен.

Атап айтсақ, кесіндінің центрі проекцияның центріне өтеді.

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

1. *Кеңістіктегі фигураны жазықтыққа параллель проекциялау деген не?*

2. Нүктенің жазықтыққа параллель проекциясы қалай табылады?

3. Параллель проекциялау жазықтығы және проекциялау бағыты деп нені айтамыз?

4. Параллель проекциялаудың қандай қасиеттерін білесің?

5. Параллель проекциялауды қай жерде пайдалануға болады?

4.56. Параллель проекциялауда кесіндінің проекциясы: a) кесінді; b) нүкте; c) екі нүкте; d) сәуле; e) түзу болуы мүмкін беі?

4.57. Параллель проекциялауда квадраттың проекциясы: a) квадрат; b) параллелограмм; c) ромб; d) тік төртбұрыш; e) трапеция; f) кесінді болуы мүмкін бе?

4.58. Параллель жазықтықтардың бірінде жатқан үшбұрыш екінші жазықтыққа параллель проекцияланса, оның ауданы өзгермейтінін дәлелде.

4.59. Параллелограмның параллель проекциясы трапеция болуы мүмкін бе? Жауабыңды негіздеп бер.

4.60. Дұрыс үшбұрыштың параллель проекциясы дұрыш үшбұрыш бола ма?

4.61. Тікбұрышты үшбұрыштың параллель проекциясы тікбұрышты үшбұрыш бола ма?

4.62. ABC үшбұрыштың параллель проекциясы $A_1B_1C_1$ үшбұрыштан құралған. Осы проекциялауда ABC үшбұрыштың: a) медианасы; b) биіктігі; c) биссектрисасы. $A_1B_1C_1$ үшбұрыштың сәйкес: a) медианасы; b) биіктігі; c) биссектрисасына өте ме?

4.63. ABC үшбұрыштың параллель проекциясы $A_1B_1C_1$ үшбұрыштан құралған. Егер $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см болса, $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см бола ма?

4.64. AB кесіндінің параллель проекциясы A_1B_1 кесіндіден құралған. AB кесіндіден алынған C нүктенің проекциясы C_1 нүкте. $AB = 48$ см, $A_1B_1 = 36$ см. Егер AC кесіндінің ұзындығы: a) 24 см; b) 12 см; c) 8 см; d) 32 см; e) 36 см болса, A_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап

14 ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР МЕН ҚОЛДАНУЛАР

4.65. a) Екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық неше ортақ нүктеге ие болады?

4.66. a) Екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық; d) үш жазықтық бір ғана ортақ нүктеге ие болуы мүмкін бе?

4.67. Төрт нүкте бір жазықтықта жатпайды. a) олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе? b) Олар арқылы неше жазықтық өткізуге болады?

4.68. m және n түзулер қиылысады, ал d түзу n түзуге параллель. m және *d* түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

4.69. *ABC* үшбұрыштың *C* төбесінен өтетін және *AB* қабырғаға параллель болған неше жазықтық өткізуге болады?

4.70. *ABCD* және *ABKZ* параллелограмдар түрлі жазықтықтарда жатыр. Параллель түзулерді көрсет: a) *DA* және *KB*; b) *CD* және *KZ*; c) *BC* және *AZ*; d) *DA* және *ZA*; e) *CB* және *KB.*

4.71. *A* және *C* нүктелер α жазықтыққа, *B* және *D* нүктелер β жазықтыққа тиісті. *AC, CD, BD, AB, BC, AD* түзулердің қайсылары β жазықтықты қияды?

4.72. *AB, AC, KB, KD* кесінділер α жазықтықты қиып өтеді. *AK, AD, BD, KC, CD* түзулердің қайсылары α жазықтықты қияды?

4.73. Бір жазықтықта жатпайтын *AB, AC* және *AD* түзулер α жазықтықты B_1, C_1 және D_1 нүктелерде қиып өтеді. B_1, C_1 және D_1 нүктелер тізбектеле қосылса, қандай фигура пайда болады?

4.74. α жазықтықты қимайтын *MN* кесіндінің ұштарынан және центрінен параллель түзулер өткізілген. Егер осы түзулер α жазықтықты, сәйкесінше, M_1, N_1, және K_1 нүктелерде қиып өтсе және KK_1= 9 см, NN_1 = 15 см болса, MM_1 кесіндінің ұзындығын тап.

4.75. α жазықтықтың *P* және *Z* нүктелері арқылы оған тиісті болмаған ұзындықтары *PK* = 6 см және *ZM* = 9 см болған параллель кесінділер түсірілген. *MK* түзу α жазықтықты *O* нүкте арқылы қиып өтеді. Егер *MK* = 6 см болса, *MO* кесіндінің ұзындығын тап.

4.76. Параллелограмды параллель проекциялауда квадрат пайда болуы мүмкін бе?

4.77. Үшбұрыштың параллель проекциясы берілген. Осы үшбұрыш медианаларының проекциялары қалай салынады?

4.78. *MNZ* үшбұрыш және *MNPS* (*BC* – табан) параллелограмм бір жазықтықта жатпайды. *Q* және *R* нүктелер *CB* және *DA* кесінділердің центрі, ал *M* және *N* нүктелер *DP* және *CZ* кесінділердің центрі. *MN* және *QR* түзулердің параллель екенін дәлелде.

4.79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың (6-сурет) a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; c) *ABCD*; d) DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1 жақтарының қайсылары A_1B_1 түзуге параллель болады?

4.80. *PRT* үшбұрыш берілген. *PT* түзуге параллель α жазықтық *PR* қабырғаны *S* нүктеде, *RT* қабырғаны *Q* нүктеде қиып өтеді (7-сурет). Егер *SR* = 7 см, *SQ* = 3 см және *SP*= 35 см болса, *PT* қабырғаны тап.

4.81. α жазықтық *ABCD* трапецияның табаны *AD*-ға параллель және *AB* мен *CD* қабырғаларды *M* және *N* нүктелерде қиып өтеді (8-сурет). *AD* = 20 см, MN = 16 см. Егер M нүкте AB кесіндінің центрі және AB = 8 см болса, трапецияның периметрін тап.

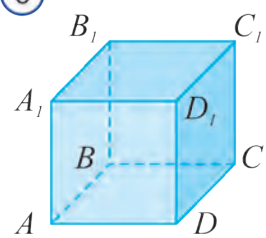
4.82. α жазықтықтың P және Z нүктелеріне оған тиісті емес PK = 6 см және ZM = 9 см кесінділер өткізілген. MK түзу жазықтықты O нүктеде қиып өтеді. Егер MK = 6 см болса, MO қашықтықты тап.

4.83. $ABCD$ тік төртбұрыштың AB қабырғасы α жазықтыққа параллель, ал AD қабырғасы бұл жазықтыққа параллель емес. $ABCD$ және α жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

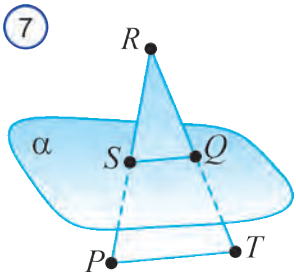
4.84. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің төменде берілген жақтарының қайсылары A төбесі және $ABCD$ жағына параллель болады:

A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD?

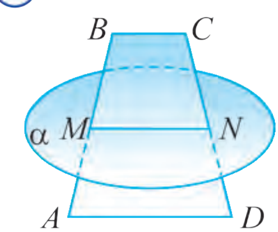
6



7



8



4.85. Ромбтың екі диагоналы α жазықтыққа параллель. Ромб жазықтығы мен α жазықтықтың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

4.86. D нүкте ABC үшбұрыштың жазықтығында жатпайды. K, Z және M нүктелер, сәйкесінше, DA, DB және DC кесінділердің центрлері. ABC және KZM жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

Қолданулар мен іс жүзіндік компетенцияларды қалыптастыру

1. Теміржол вагондары осьтері бір-бірімен салыстырғанда қалай орналасқан?

2. Теміржол вагондары осьтері рельспен салыстырғанда қалай орналасқан?

3. Қоршаған ортадан параллель және айқас түзулерге мысалдар келтір.

4. Не үшін жазу столының суырмалары кейде тегіс ашылмайды?

5. Не үшін насостың поршені оның ішінде бір тегіс қозғалмайды?

6. Тігіншінің таспасымен немесе кез келген ұзындықтағы таяқпен дәліз еденінің шетіне қағылған рейкалардың параллельдігін тексеруге бола ма?

7. Ағаштан жасалған брустың (тақта) барлық жақтары тік төртбұрыш пішінде. Оны көлденең қырларының бойымен қалай араласаң да, пайда болған барлық қималар параллелограмм болатынын дәлелде.

V БӨЛІМ

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

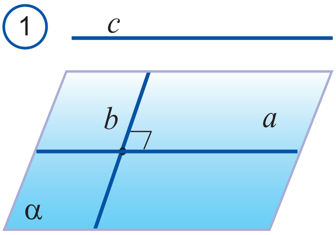
15 КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Есімізге түсіреміз, кеңістікте берілген екі түзудің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, олар өзара *перпендикуляр түзулер* делінеді. Перпендикуляр түзулер қиылысатын және айқас болуы мүмкін. 1-суретте a және b перпендикуляр түзулер қиылысатын, ал b және c перпендикуляр түзулер айқас. a және b түзулердің перпендикулярлығы $a \perp b$ түрінде жазылады.

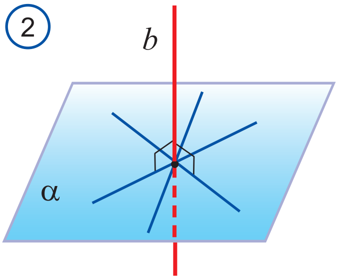
Жазықтықтағы кез келген түзуге перпендикуляр түзу *жазықтыққа перпендикуляр* делінеді (2-сурет). α жазықтық және b түзулердің перпендикулярлығы $b \perp \alpha$ түрінде жазылады.

Қоршаған ортадан перпендикуляр пішіндерге көптеген мысалдарды келтіруге болады. Әдетте, үйдің қабырғалары мен бағандары, мұналар жермен салыстырғанда тік, яғни перпендикуляр етіп құрылған. Бөлмедегі шкаф, үстел, тоңазытқыш еденмен салыстырғанда тік орнатылған (3-сурет).

1



2



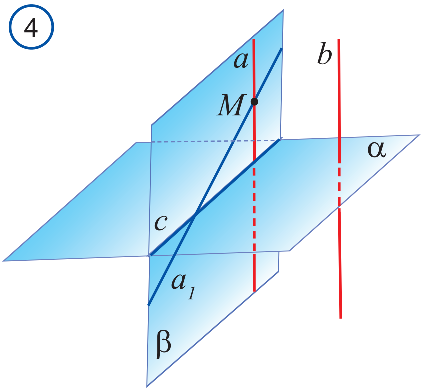
3

Енді кеңістіктегі перпендикуляр түзулердің кейбір қасиеттеріне тоқталамыз.

Егер a түзу α жазықтықта жатса немесе оған параллель болса, онда α жазықтықта жатқан және a түзуге параллель басқа b түзу де табылады. Сондықтан, жазықтыққа перпендикуляр түзу әрине осы жазықтықты қиып өтеді. Кері растау да орынды болады.

5.1-теорема. Егер екі түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, олар өзара параллель болады.

4



Дәлелдеу. a және b түзулер α жазықтыққа перпендикуляр болсын (4-сурет). Осы түзулердің өзара параллель екенін дәлелдейміз.

a түзудің қандай да бір M нүктесі арқылы b түзуге параллель a_1 түзу жүргіземіз.

Онда, $a_1 \perp \alpha$ болады.

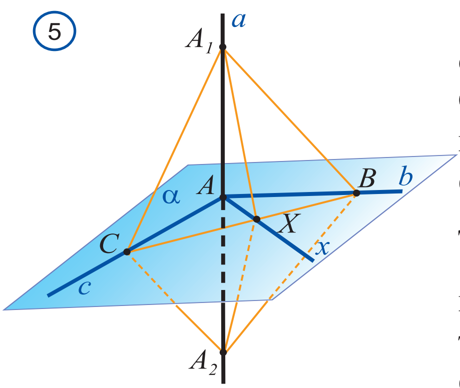
a және a_1 түзулердің беттесе түсуін көреміз. Айталық, ондай болмасын, a және a_1 түзулер беттесе түспесін. Онда a және a_1 түзулер жатқан β жазықтықтағы M нүкте арқылы α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі – c түзуге екі a және a_1 перпендикуляр түзу өтеді. Ал бұның болуы мүмкін емес. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

Демек, a және b түзулер өзара параллель. ❑

Енді түзудің жазықтыққа перпендикулярлық белгісін келтіреміз.

5.2-теорема. Егер түзу жазықтықта жатқан екі қиылыстын түзуге перпендикуляр болса, ол жазықтыққа да перпендикуляр болады.

5



Дәлелдеу. a түзу α жазықтықта жатқан екі b және c түзуге перпендикуляр болсын. Онда a түзу b және c түзулердің қиылысу нүктесі A арқылы өтеді (5-сурет). a түзудің α жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелдейміз.

α жазықтықтың A нүктесі арқылы кез келген x түзу жүргіземіз және оның a түзуге перпендикуляр болатынын көреміз. α жазықтықта A нүкте арқылы өтпейтін, b, c және x түзулерді қиып өтетін кез келген түзуді жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктелері, сәйкесінше B, C және X нүктелер болсын.

a түзуде A нүктенің түрлі қабырғаларына AA_1 және AA_2 кесінділерді қоямыз. Пайда болған A_1BA_2 және A_1CA_2 үшбұрыштар теңбүйірлі болады (мұны өз бетіңше негізде). Бұдан A_1BC және A_2BC үшбұрыштардың теңдігі келіп шығады (мұны да өз бетіңше негізде). Өз кезегінде, бұдан A_1BX және A_2BX бұрыштардың теңдігі мен A_1BX және A_2BX үшбұрыштардың теңдігі де келіп шығады (мұны да өз бетіңше негізде).

Атап айтсақ, $A_1X = A_2X$ болады. Онда A_1XA_2 үшбұрыш теңбүйірлі болады. Сондықтан оның XA медианасы оның биіктігі де болады. Ал бұл, өз кезегінде x түзудің a түзуге перпендикуляр болатынын көрсетеді. Демек, a түзу α жазықтыққа перпендикуляр. ❑

Бұл теоремадан нәтиже ретінде төмендегі қасиеттер келіп шығады. Оларды өз бетіңше негізде.

5.3-теорема. ***Егер түзу екі параллель жазықтықтың біріне перпендикуляр болса, екіншісіне де перпендикуляр болады.***

5.4-теорема. ***Егер екі жазықтық бір түзуге перпендикуляр болса, олар параллель болады.***

Төменде "бар болу және жалғыздық теоремалары" деп аталатын қасиеттерді де өз бетіңше дәлелдеу үшін келтіреміз.

5.5-теорема. ***Кеңістіктің кез келген нүктесінен берілген түзуге перпендикуляр бір ғана жазықтық өткізуге болады.***

5.6-теорема. ***Кеңістіктің кез келген нүктесінен берілген жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу өткізуге болады.***

Нәтиже (жалпыланған Пифагор теоремасы). ***Тікбұрышты параллелепипед диагоналының квадраты оның үш өлшемдері квадраттарының қосындысына тең.***

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед болсын (6-сурет). CC_1 қыр $A_1B_1C_1D_1$ жаққа перпендикуляр болғандықтан A_1C_1C тікбұрышты үшбұрыш болады. Онда Пифагор теоремасына орай,

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \qquad (1).$$

$A_1D_1C_1$ да тікбұрышты үшбұрыш. Тағы Пифагор теоремасына орай,

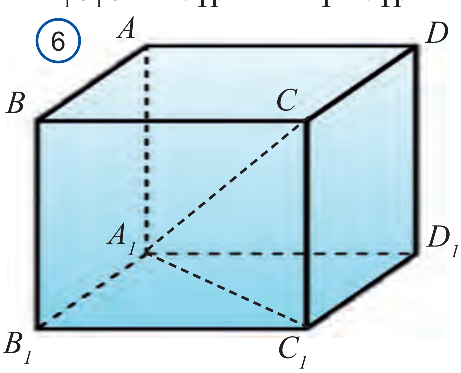
$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \qquad (2).$$

Онда, (1) және (2)-ге орай: $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

$A_1D_1 = B_1C_1$ болғандықтан

$A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. ❑

6



Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. Кеңістіктегі қандай түзулер өзара перпендикуляр болады?

2. Айқас түзулер перпендикуляр болуы мүмкін бе?

3. 7-суретте қайсы қала көрініп тұр? Суретте қандай түзулер мен жазықтықтар көрінеді? Суреттен параллель, перпендикуляр және айқас түзулерге мысалдар келтір.

4. Қандай түзу жазықтыққа перпендикуляр болады?

5. Бір жазықтыққа перпендикуляр түзулердің қасиеттерін айт.

6. Түзу және жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін айт.

7. Параллель жазықтықтардың біріне перпендикуляр болған түзудің қасиетін айт.

8. Бір түзуге перпендикуляр болған жазықтықтардың қасиетін айт.

9. Жалпыланған Пифагор теоремасы не туралы?

5.1. SB кесінді $ABCD$ параллелограмның жазықтығына перпендикуляр (8-сурет). SB перпендикуляр болған түзулерді айт.

5.2. Қандай да бір l түзу ABC үшбұрыштың AB және AC қабырғаларына перпендикуляр. l түзу және ABC үшбұрыш жазықтығының өзара орналасуын анықта:

а) l түзу ABC жазықтықты қиып өтеді, бірақ оған перпендикуляр емес; b) l түзу ABC жазықтыққа тиісті; c) l түзу ABC жазықтыққа перпендикуляр; d) l түзу ABC жазықтыққа параллель.

5.3. KO түзу $ABCD$ параллелограмм жазықтығына перпендикуляр (9-сурет). KO түзуге перпендикуляр түзуді анықта

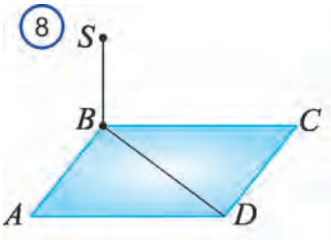
5.4. MB түзу ABC үшбұрыштың AB және BC қабырғаларына перпендикуляр (10-сурет). X нүкте AC қабырғаның кез келген нүктесі болса, MBX үшбұрыштың түрін анықта.

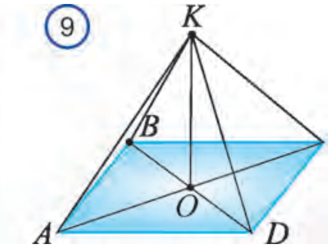
5.5 . $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің AA_1C_1C және BB_1D_1D диагональ кесінділері перпендикуляр екенін дәлелде.

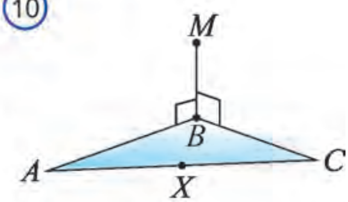
5.6. $ABCD$ төртбұрыштың қабырғалары $A_1B_1C_1D_1$ тік төртбұрыштың қабырғаларына сәйкесінше параллель. $ABCD$ тік төртбұрыш екенін дәлелде.

5.7. α жазықтық m түзуге, m түзу n түзуге параллель. Жазықтықтың n түзуге перпендикуляр болатынын дәлелде.

5.8. $ABCD$ трапецияның AB табаны жатқан түзу α жазықтыққа перпендикуляр. Осы трапецияның CD табаны жатқан түзу де α жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелде.

8


9


10


5.9. Кеңістіктегі түзудің кез келген нүктесі арқылы перпендикуляр түзу өткізуге болатынын дәлелде.

5.10. Кеңістіктегі түзудің кез келген нүктесі арқылы оған перпендикуляр екі түрлі түзу өткізуге болатынын дәлелде.

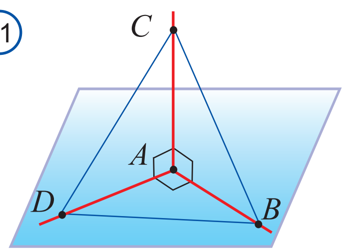
5.11. AB, AC, AD түзулер жұбымен өзара перпендикуляр (11-сурет). Егер

1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1,5,$см;

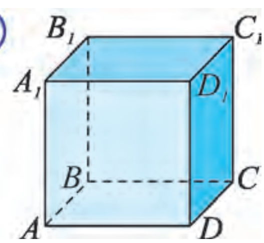
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;

3) $AB = b$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см;

4) $BD = c$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см болса, CD кесіндінің ұзындығын тап.

11


5.12. $ABCD$ тік төртбұрыштың A төбесінде оның жазықтығына перпендикуляр AK түзу өткізілген. K нүктеден тік төртбұрыштың басқа төбелеріне қашықтық 6 м, 7 m, 9 м. AK қашықтықты тап.

12


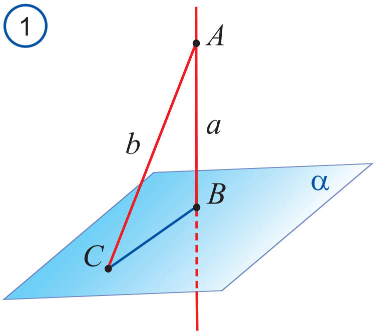
5.13. A және B нүктелер арқылы α жазықтыққа перпендикуляр және оны, сәйкесінше, C және D нүктелерде қиып өтетін түзу өткізілген. Егер $AC = 3$ м, $BD = 2$ м және $CD = 2,4$ м болса және AB кесінді α жазықтықты қиып өтпесе, A және B нүктелердің арасындағы қашықтықты тап.

5.14. 12-суретте бейнеленген кубтың қыры: a) 4 см; b) 8 см болса, AB_1C үшбұрыштың периметрін және DAC_1 үшбұрыштың ауданын тап.

16 КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯР, КӨЛБЕУ ЖӘНЕ ҚАШЫҚТЫҚ

α жазықтыққа онда жатпайтын A нүкте арқылы перпендикуляр a түзу жүргіземіз (1-сурет). Бұл түзу жазықтықты B нүкте арқылы қиып өтсін. Сондай-ақ, жазықтықтың қандай да бір C нүктесін A нүктемен қосамыз.

1



Нәтижеде пайда болған

AB кесінді – *жазықтыққа түсірілген перпендикуляр;*

AC кесінді – *жазықтыққа түсірілген көлбеу;*

BC кесінді – *көлбеудің жазықтықтағы проекциясы;*

B нүкте – *перпендикулярдың табаны;*

C нүкте – *көлбеудің табаны* деп аталды.

2

ABC үшбұрыш тікбұрышты және онда AB катет, ал AC гипотенуза болғандықтан әрдайым $AB < AC$ болады.

Демек, қандай да бір жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығы осы нүкте арқылы өткізілген кез келген көлбеудің ұзындығынан кіші болады.

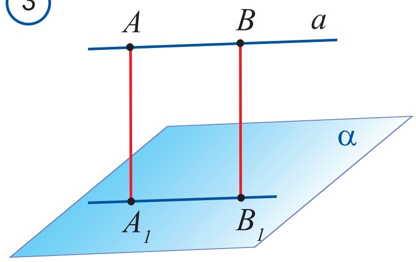
Нүктеден жазықтыққа дейінгі болған қашықтық деп нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығына айтылады.

Ташкенттегі сағат мұнарасының биіктігі 30 м дейілгенде, мұнараның төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр ұзындығы түсініледі (2-сурет).

5.7-теорема. Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда оның барлық нүктелері жазықтықтан бірдей қашықтықта болады.

Дәлелдеу. a – берілген түзу және α – берілген жазықтық болсын (3- сурет). a түзуде екі A және B нүктені аламыз. Олардан α – жазықтыққа перпендикулярлар түсіреміз. Осы перпендикулярлардың табаны, сәйкесінше, A және B нүктелер болсын. Онда A және B нүктелерден α жазықтыққа дейінгі болған қашықтықтар, сәйкесінше, AA_1 және BB_1 кесінділер болады. 4.6-теоремаға орай, AA_1 және BB_1 кесінділер параллель болады.

3



Демек, олар бір жазықтықта жатады. Бұл жазықтық α жазықтықты A_1B_1 түзудің бойымен қиып өтеді. a түзу A_1B_1 түзуге параллель болады, өйткені ол α жазықтықты қиып өтпейді.

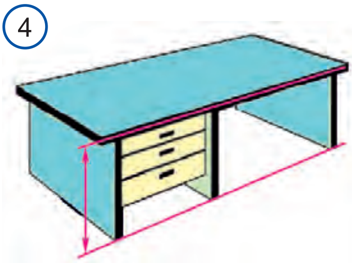
Сөйтіп, ABA_1B_1 төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары параллель.

Демек, ол параллелограмм. Бұл параллелограмда $AA_1 = BB_1$. ❑

Түзуден оған параллель болған жазықтыққа дейінгі қашықтық деп түзудің кез келген нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтық айтылады.

Жазықтықтың кез келген екі нүктесінен оған параллель болған жазықтыққа дейінгі қашықтық бірдей болады. Бұл қасиет алдыңғы теорема дәлеліне ұқсас дәлелденді.

4

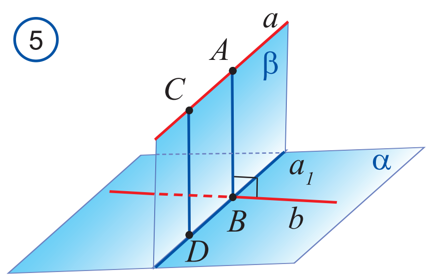


Екі параллель жазықтықтар арасындағы қашықтық деп бір жазықтықтың кез келген нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтық айтылады. 4-суретте көрсетілген столдың биіктігі еден мен стол жазықтықтары арасындағы қашықтыққа тең болады.

5.8-теорема. Екі айқас түзу бір ғана ортақ перпендикулярға ие болады.

Дәлелдеу. a және b айқас түзулер болсын (5-сурет). Осы түзулерде сондай A және B нүктелерді таңдау мүмкіндігін көрсететін боламыз, AB түзу a-ға да, b-ға перпендикуляр болады. α жазықтық b түзу арқылы өтетін және a түзуге параллель болсын. a түзу арқылы C нүктені аламыз және одан α жазықтыққа CD перпендикуляр түсіреміз. Қиылысатын a және CD түзулер арқылы β жазықтықты . a_1 түзу – α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі болсын.

5



$a_1 \parallel a$ болғандықтан a_1 және b түзулер қандай да бір B нүктеде қиылысады. B нүкте арқылы β жазықтықта жататын, a түзуге BA перпендикуляр түсіреміз.

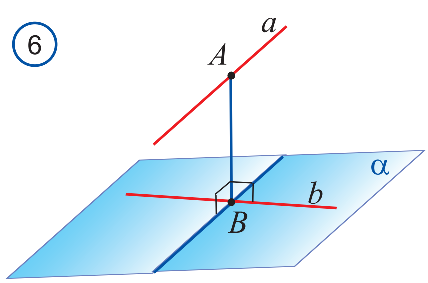
Нәтижеде, AB және CD түзулердің әр екеуі де β жазықтықта жатады және a түзуге перпендикуляр болады. Сондықтан, $AB \parallel CD$ және $AB \perp \alpha$ болады.

Демек, $AB \perp a$ және $AB \perp b$ болады. AB ізделінген түзу болып, ол a және b айқас түзулердің әр екеуіне де перпендикуляр болады.

Ортақ перпендикулярдың жалғыздығын өз бетіңше дәлелде. ❑

Екі айқас түзудің арасындағы қашықтық деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығына айтылады.

6



Жоғарыдағы теоремадан төмендегідей қорытынды келіп шығады:

Екі айқас a және b түзудің арасындағы қашықтық (6-сурет) a түзудің кез келген нүктесінен b түзу жатқан және a түзуге параллель болған α жазықтыққа дейінгі қашықтыққа тең болады.

Жоғарыдағыларға негізделіп, енді біз кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуын цифрлардың көмегімен сипаттауымызға болады.

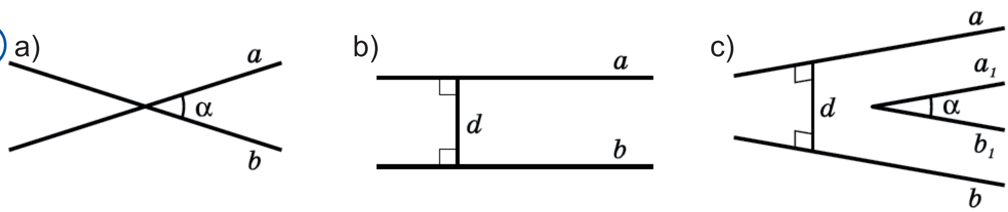
Егер кеңістіктегі екі түзу:

• өзара қиылысатын болса, олардың арасындағы α бұрыш (7.a-сурет),

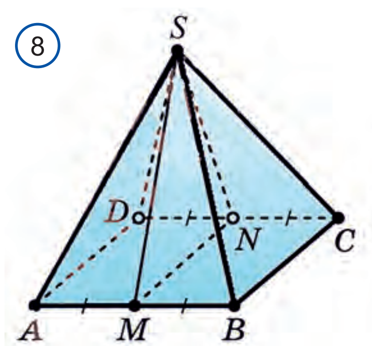
• өзара параллель болса, олардың арасындағы d қашықтық (7.b-сурет),

• өзара айқас болса, олардың арасындағы α бұрыш және арасындағы d қашықтық (7.c-сурет) осы түзулердің өзара орналасуын цифрлы сипаттайды.

7



8



Есеп. Төртбұрышты $SABCD$ пирамиданың барлық қырлары a-ға тең. Оның AB және SC қырларының арақашықтығын тап (8-сурет).

Шешуі. 4.8-теоремаға орай, AB және SC қырларында X және Y нүктелер бар болып, XY түзу AB және SC қырлардың әр екеуіне де перпендикуляр болады. Сондай-ақ, XY түзу, SC түзу жатқан және AB түзуге параллель болған жазықтыққа да перпендикуляр болады.

Айталық, α жазықтық – S нүкте арқылы өтетін және AB түзуге перпендикуляр болған жазықтық болсын. Осы жазықтық AB және CD қырлардың центрі – M және N нүктелер арқылы өтеді. Онда $XY \parallel \alpha$ және XY кесіндінің α жазықтықтағы проекциясы XY кесіндіге тең болады.

Енді X және Y нүктелердің α жазықтықтағы қайсы нүктелерге проекцияланатынын анықтаймыз.

$AB \perp \alpha$ болғандықтан AB қырдың барлық нүктелері M нүктеге проекцияланады. Демек, X нүкте M нүктеге проекцияланады.

S және C нүктелер сәйкесінше, S және N нүктелерге проекцияланғандықтан, SC кесінді SN кесіндіге өтеді. SN түзу AB түзуге параллель жазықтықта жатқандықтан, ізделіп жатқан XY кесіндінің проекциясы – SN түзуге M нүктеден түсірілген перпендикулярдан құралған болады.

Осы перпендикулярдың ұзындығы d-ны табаны a және бүйір қабырғасы $\frac{a\sqrt{3}}{2}$-ға тең болған SMN теңбүйірлі үшбұрыштың ауданының өрнектерн пайдаланып табамыз.

Бір қабырғадан бұл үшбұрыштың ауданы: $\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}$-ға тең, ал екінші қабырғадан: $\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}d$-ға тең. Осы екі теңдіктен $d=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ болады.

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

1. Жазықтыққа түсірілген перпендикуляр мен көлбеуге анықтама бер.

2. Көлбеудің жазықтықтағы проекциясы деп неге айтылады?

3. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық қалай анықталады?

4. Жазықтыққа параллель болған түзу және жазықтықтың арасындағы қашықтық қалай табылады?

5. Екі параллель жазықтықтардың арақашықтығы қалай табылады?

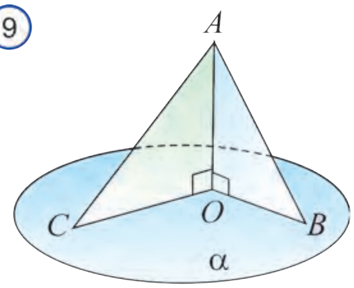
6. Екі айқас түзулердің арасындағы қашықтық қалай табылады?

7. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуын қандай цифрлы шамалар анықтайды?

5.15. A, B, Q нүктелер α жазықтыққа тиісті, ал M нүкте оған тиісті емес және $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB кесінділердің қай бірі: a) перпендикуляр; b) көлбеу; c) көлбеу проекциясы екенін анықта.

5.16. A нүктеден a жазықтыққа AB және AC көлбеулер мен AO перпендикуляр өткізілген (9-сурет). Егер AB = 2,5 см, AC = 3 см болса, көлбеулердің проекцияларын өзара салыстыр.

9



5.17. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу түсірілген (9-сурет). Егер көлбеулердің бірі екіншісінен 26 см ұзын, ал проекциялары 12 см және 40 см болса, осы көлбеулердің ұзындықтарын тап.

5.18. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрінен үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түзу өткізілген. Осы түзудің әрбір нүктесі үшбұрыштың төбелерінен бірдей ұзындықта жататынын дәлелде.

5.19. Ауданы a) 21 см^2; b) 96 см^2; c) 44 см^2; d) 69 см^2; e) 156 см^2 болған $ABCD$ квадраттың жазықтығына ұзындығы 10 см болған DM перпендикуляр түсірілген. MA көлбеудің ұзындығын тап.

5.20. Тікбұрышы C болған ABC үшбұрыштардың сүйір бұрышының төбесінен үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр AD түзу өткізілген.

егер $AC = c$, $BC = b$ және $AD = c$ болса, D нүктеден B және C төбелеріне дейінгі қашықтықты тап.

5.21. Бір-бірінен 3,4 м ұзындықта болған вертикаль бағандардың жоғарғы төбесі тосынмен қосылған. Бағандардың биіктігі 5,8 м және 3,9 м болса, тосынның ұзындығын тап.

5.22. 15 м ұзындықтағы телефон желісі бағанға жердің бетінен 8 м биіктікте ілінген және одан биіктігі 20 м болған көпқабатты үйдің төбесіне тартылған. Үй мен бағанның арасындағы қашықтықты тап.

5.23. Жазықтыққа P нүктеден түсірілген PQ перпендикуляр ұзындығы 1-ге, ал PA және PB көлбеулердің ұзындықтары 2-ге тең. C нүкте AB кесіндінің центрі. Егер a) $\angle APB = 90^0$; b) $\angle APB = \beta$ болса, QC кесіндінің ұзындығын тап.

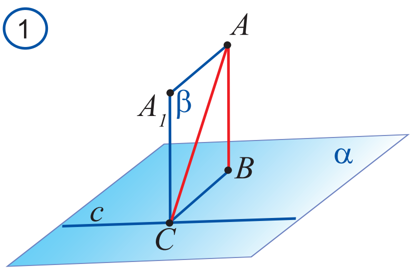
5.24. $ABCD$ параллелограмның доғал B бұрышының төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр болған BH кесінді түсірілген. Егер $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ болса, параллелограмның қабырғаларын тап.

5.25. M нүкте қабырғасы 60 см болған дұрыс ABC үшбұрыштың әрбір төбесінен 40 см қашықтықта орналасқан. ABC үшбұрыштың жазықтығынан M нүктеге дейінгі болған қашықтықты тап.

17 ҮШ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

5.9-теорема. Егер жазықтыққа түсірілген көлбеудің табанынан өтетін түзу көлбеудің проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

1



Дәлелдеу. Айталық, AB кесінді α жазықтыққа түсірілген перпендикуляр, ал AC кесінді көлбеу болсын. c түзу α жазықтықта жататын, C нүктеден өтетін және көлбеу проекциясына перпендикуляр болған түзу болсын(1-сурет). AB-ға параллель A_1C түзуді жүргіземіз. Осы түзу α жазықтыққа перпендикуляр болады.

AB және AC_1 түзулер арқылы β жазықтықты жүргіземіз. c түзу CA_1 түзуге перпендикуляр болады. Осы шартқа орай, CB түзуге де перпендикуляр еді. Онда c түзу β жазықтыққа да перпендикуляр болады.

Демек, c түзу β жазықтықта жатқан AC көлбеуге де перпендикуляр болады. ❑

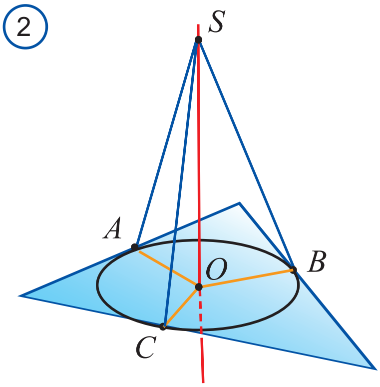
Бұл теоремада үш перпендикуляр туралы айтылып жатқандықтан "Үш перпендикуляр туралы теорема" атауын алған. Осы теоремаға кері болған теорема да орынды болады. Оны өз бетіңше дәлелде.

5.10-теорема. Егер жазықтыққа түсірілген көлбеудің табанынан өтетін түзу көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады.

1-есеп. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі арқылы үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түзу өткізілген (2-сурет). Осы түзудің кез келген нүктесі үшбұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататынын дәлелде.

Дәлелдеу. Айталық, A, B, C – үшбұрыш қабырғаларының шеңбермен қиылысу нүктелері, O – шеңбердің центрі, ал S перпендикулярдағы кез келген нүкте болсын.

2



OA үшбұрыштың қабырғасына перпендикуляр болғандықтан үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, OA да осы қабырғаға перпендикуляр болады. Онда SAO тікбұрышты үшбұрыш болады. Осы үшбұрышта Пифагор теоремасына орай,

$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$,

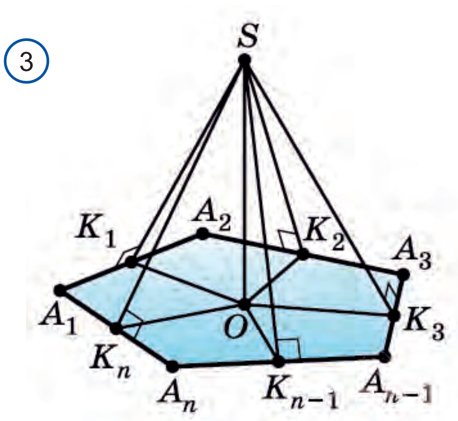
мұнда r – шеңбердің радиусы.

Дәл осыған ұқсас, SBO тікбұрышты үшбұрыштан $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ және SCO тікбұрышты үшбұрыштан $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ екенін табамыз.

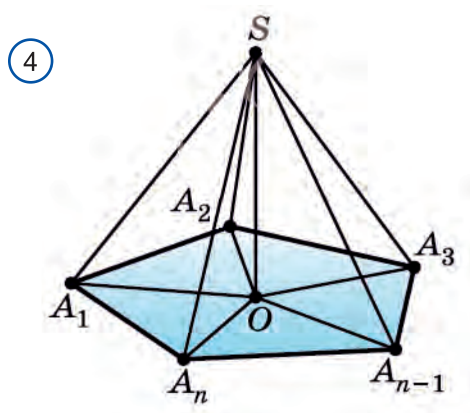
Демек, $SA = SB = SC$. ❑

Жоғарыда келтірілген 3-, 4-суреттердің негізінде 1-есепке ұқсас және кез келген көпбұрышқа ортақ жағдайларды өз бетіңше дәлелдеу үшін келтіреміз.

3



4

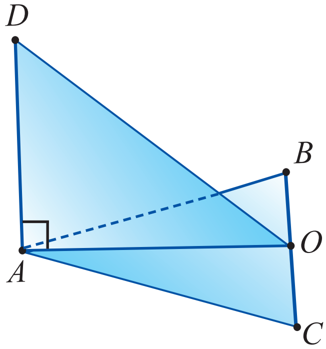


2-есеп. Кеңістіктегі нүкте көпбұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан болып, одан көпбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрімен беттесе түсетінін дәлелде (3-сурет).

3-есеп. Кеңістіктегі нүкте көпбұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта орналасқан болып, одан көпбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрімен беттесе түсетінін дәлелде (4-сурет).

4-есеп. ABC үшбұрыштың жазықтығына оның A нүктесінен перпендикуляр түсірілген (5-сурет). Егер $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ және $AD = 36$-ға тең болса, D нүктеден BC түзуге дейінгі қашықтықты тап.

5



Шешуі. Ізделінген қашықтық D нүктеден BC қабырғаға түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең болады. Осы кесіндіні түсіру үшін оның BC қабырғадағы табанын табу қажет болады. Ол үшін ABC үшбұрыштың A төбесінен BC қабырғасына AO биіктікті түсіреміз: $AO \perp BC$.

Онда үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, $BC \perp DO$ болады. Демек, DO ізделінген кесінді екен.

Енді DO кесіндінің ұзындығын табамыз. Ол үшін, алдымен ABC үшбұрыштың ауданын Герон формуласын пайдаланып табамыз:

$p = (a + b + c) / 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$

$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$

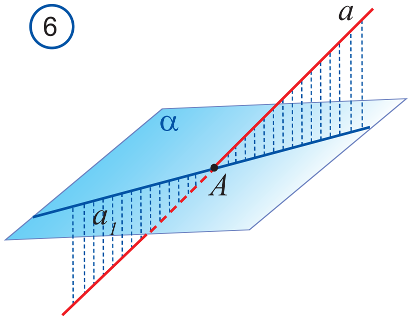
$DO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$

ADO тікбұрышты үшбұрышта, Пифагор теоремасына орай

$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$

Айталық, α жазықтық пен оны қиып өтетін және сондай-ақ осы жазықтыққа перпендикуляр болмаған a түзу берілген болсын (6-сурет). a түзудің әрбір нүктесінен перпендикулярлар түсіреміз. Бұл перпендикулярлардың табандары a_1 түзуді құрайды.

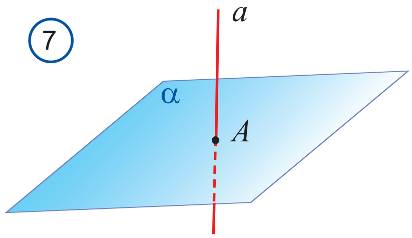
6



a_1 түзу a түзудің α жазықтықтағы *проекциясы* деп аталады.

a түзу мен α жазықтықтың арасындағы

бұрыш деп, түзу мен оның осы жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрышқа айтылады.



Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса (7-сурет), онымен жазықтықтың арасындағы бұрыш 90°-қа, егер параллель болса, осы түзумен жазықтықтың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады.

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

1. *Үш перпендикуляр туралы теореманы түсіндір. Неге ол осылай аталды?*
2. *Үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теореманы айт және түсіндір.*
3. *Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш қалай анықталады?*
4. *Жазықтық пен оған перпендикуляр түзудің арасындағы бұрыш неше градус болады?*

5.26. A нүкте қабырғасы a-ға тең болған теңқабырғалы үшбұрыштардың төбелерінен a қашықтықта жатады. A нүктеден үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

5.27. α жазықтықтан тыста болған S нүкте арқылы оған тең үш SA, SB, SC көлбеу мен SO перпендикуляр өткізілген. Перпендикулярдың O табаны ABC үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелде.

5.28. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 3 м-ге тең. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 2 м қашықтыққа дейінгі нүктеден үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

5.29. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны мен биіктігі 4 м-ге тең. Берілген нүкте үшбұрыштың жазықтығынан 6 м қашықтықта және оның төбелерінен бірдей қашықтықта жатады. Осы қашықтықты тап.

5.30. A нүктеден квадраттың төбелеріне дейінгі қашықтық a-ға тең. Квадраттың қабырғасы b-ға тең болса, A нүктеден квадраттың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

5.31. Берілген нүктеден жазықтыққа өткізілген берілген ұзындықтағы көлбеулердің табандарының геометриялық орнын тап.

5.32. Берілген нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 10 см және 17 см болған екі көлбеу жүргізілген. Осы көлбеулер проекциясының айырмасы 9 см-ге тең. Көлбеулердің проекцияларын тап.

5.33. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілген. Егер: 1) олардың бірі екіншісінен 26 см ұзын, көлбеулердің проекциялары 12 см және 40 см болса; 2) көлбеулердің ұзындықтары 1 : 2 қатынаста болып, олардың проекциялары 1 см және 7 см-ге тең болса, көлбеулердің ұзындықтарын тап.

5.34. α жазықтықтан d қашықтықта жатқан A нүктеден жазықтықпен 30°

бұрышты құрайтын AB және AC көлбеулер жүргізілген. Олардың α жазықтыққа проекциялары өзара 120°-тық бұрышты құрайды. BC кесіндінің ұзындығын тап.

5.35. Егер тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі жазықтыққа тиісті, ал екіншісі онымен 45°-тық бұрышты құрайтын болса, гипотенуза бұл жазықтықпен 30°-тық бұрышты құрайтынын дәлелде.

5.36. a көлбеу α жазықтықпен 45°-тық бұрышты құрайды, жазықтықтың b түзуі көлбеу проекциясымен 45°-тық бұрышты құрайды. a және b түзулердің арасындағы бұрыштың 30°-ға тең екенін дәлелде.

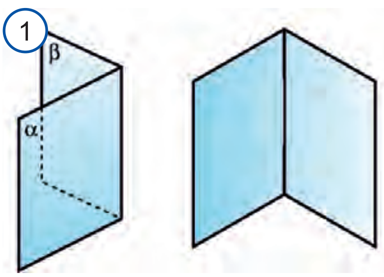
5.37. P нүкте қабырғасы a-ға тең $ABCD$ квадраттың әрбір төбесінен a қашықтықта жатады. Квадраттың жазықтығы мен AP түзудің арасындағы бұрышты тап.

5.38. Үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары өзара тең. Пирамиданың қыры мен осы қыры тиісті болмаған жағының арасындағы бұрышты тап.

5.39. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері a, b және c-ға тең. Параллелепипед диагональдары мен оның жақтарының арасындағы қашықтықты тап.

18 КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

1



Екі жартыжазықтық пен оларды шектеп тұратын ортақ түзуден құрылған геометриялық фигура *екі жақты бұрыш* деп аталады (1-сурет). Жартыжазықтықтар екі жақты бұрыштың *жақтары*, ал оларды шектейтін түзу екі жақты бұрыштың *қыры* деп аталды.

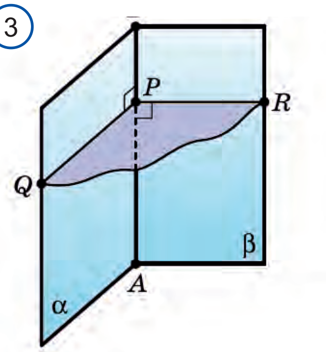
Екі жақты бұрыштарды қоршаған ортадағы төмендегі заттарға қарап, көз алымызға келтіруімізге болады (2- сурет): кітап, ноутбук, ашық есік, үйдің төбесі.

Екі жақты бұрыш қырының кез келген нүктесінен оның жақтарында жататын және осы қырына перпендикуляр болған сәулелерді шығарамыз. Осы сәулелер пайда еткен бұрыш екі жақты бұрыштың *сызықты бұрышы* деп аталады (3-сурет).

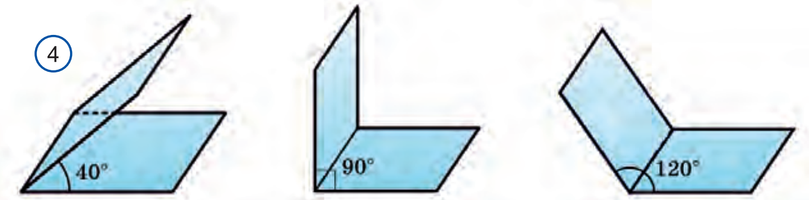
Анықтамадан көрініп тұрғанындай, екі жақты бұрыштың сызықты бұрышы қырында таңдалған нүктемен анықталады және шексіз көп болады. Сонда да, екі жақты бұрыштың сызықты бұрышының үлкендігі қырында таңдалған нүктеге байланысты емес, яғни олардың барлығы өзара тең болады.

2

3



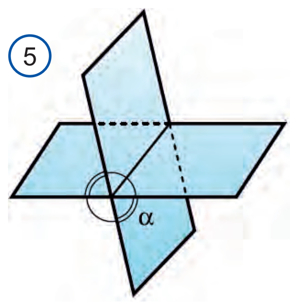
4



Екі жақты бұрыштың үлкендігі оның сызықты бұрышының үлкендігімен анықталады. Сызықты бұрыштың сүйір, тік, доғал және жазық болуына қарап, екі жақты бұрыштар да, сәйкесінше, сүйір, тік, доғал және жазық екі жақты бұрышқа бөлінеді. 4-суретте түрлі екі жақты бұрыштар көрсетілген.

Екі қиылысатын жазықтық бүкіл кеңістікті ортақ қырға ие болған төрт екі жақты бұрышқа ажыратады (5-сурет). Осы екі жақты бұрыштардың бірі α-ға тең болса, олардың тағы бірі де α-ға болады. Ал қалған екеуінің мәні 180° – α-ға болады

5

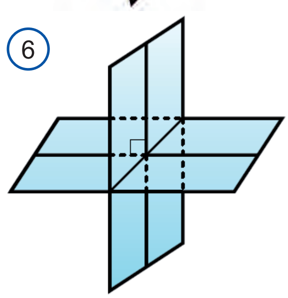


Осы екі жақты бұрыштардың ішінде 90°-тан кішісі де болады. Осы бұрыштардың мәні қиылысатын *жазықтықтар арасындағы бұрыштар* деп алынады.

Егер екі жақты бұрыштардың бірі тік, яғни 90°-қа тең болса, қалған үшеуі де тік болады (6-сурет).

Тікбұрыштың астында қиылысатын жазықтықтар – *перпендикуляр жазықтықтар* деп аталады.

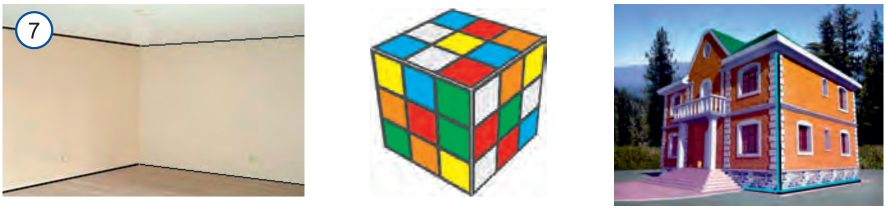
6



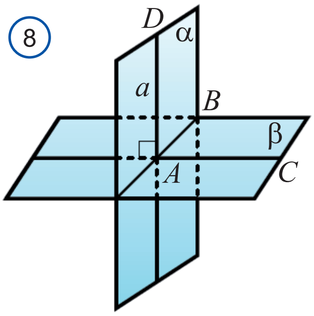
Перпендикуляр жазықтықтарға қоршаған ортадан мысал ретінде бөлменің едені мен қабырғаларын, ортақ қырға ие бөлме қабырғаларын, ортақ қырға ие Рубик кубының жақтарын, жердің беті мен үй қабырғаларын, сондай-ақ үйдің бір-біріне тұтасқан қабырғаларын келтіруге болады (7-сурет).

α және β жазықтықтардың перпендикулярлығы түзулердегі сияқты “⊥” белгінің көмегімен, α ⊥ β түрінде жазылады.

7



8



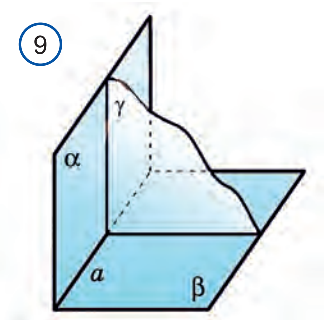
Енді перпендикуляр жазықтықтардың қасиеттеріне тоқталамыз. Мына теорема – "жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі" деп аталады.

***5.11-теорема.* Егер жазықтықтардың бірі екіншісіне перпендикуляр түзумен жүргізілсе, мұндай жазықтықтар өзара перпендикуляр болады.**

Дәлелдеу. Айталық, α және β жазықтықтар берілген болып, α жазықтық β жазықтыққа перпендикуляр болған a түзумен жүргізілсін (8-сурет). β жазықтық пен a түзудің қиылысу нүктесі A болсын. a⊥b екенін дәлелдейміз.

α және β жазықтықтар AB түзудің бойымен қиылысуда. Онда, $AB \perp a$ болады, өйткені шартқа орай $\beta \perp a$. β жазықтықта жатқан және AB түзуге перпендикуляр болған AC түзуді жүргіземіз. Нәтижеде, пайда болған DAC бұрыш αβ екі жақты бұрыштың сызықты бұрышы болады. Шартқа орай, $a \perp \beta$. Онда, DAC тікбұрыш. Демек, $\alpha \perp \beta$. ❑

9



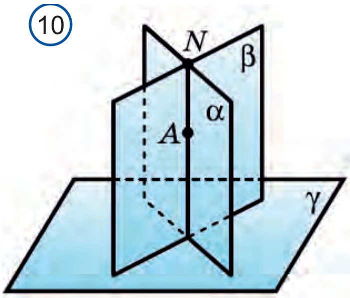
Бұл теоремадан төмендегі нәтиже туындайды.

***Нәтиже.* Егер жазықтықтар екі жазықтықтың қиылысу түзуіне перпендикуляр болса, осы жазықтықтардың әрбіріне де перпендикуляр болады (9-сурет).**

4.11-теоремаға кері теорема да орынды болады. Оны дәлелсіз келтіреміз.

***5.12-теорема.* Егер екі перпендикуляр жазықтықтардың бірінің қандай да бір нүктесі арқылы екіншісіне перпендикуляр түзу жүргізілсе, осы түзу бірінші жазықтықта жатады.**

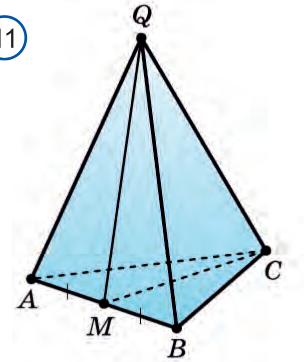
10



***Нәтиже.* Егер екі перпендикуляр жазықтық үшінші жазықтыққа перпендикуляр болса, олардың қиылысу түзуі де осы жазықтыққа перпендикуляр болады (10-сурет).**

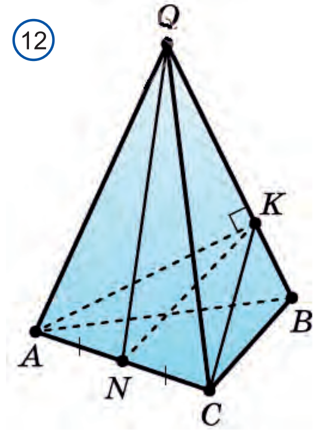
1-есеп. M нүкте $QABC$ дұрыс пирамиданың табанындағы қырының центрі болса (11-сурет), QCM жазықтық пирамида табанының жазықтығы ABC-ға перпендикуляр екенін дәлелде.

11



Дәлелдеу. AB кесінді теңбүйірлі AQB және ACB үшбұрыштардың табаны болғандықтан осы үшбұрыштар медианалары QM және CM-ға да перпендикуляр болады. Сонымен бірге, AB кесінді QCM жазықтыққа да перпендикуляр болады. Онда 5.12-теоремаға орай, ABC жазықтық QCM жазықтыққа перпендикуляр болады. ❑

12



2-есеп. $QABC$ дұрыс пирамиданың төбесіндегі доғал AQB бұрышы α-ға тең. Оның бүйір қырындағы екі жақты бұрышын тап (12-сурет).

Шешуі. Айталық, N нүкте AC қырдың центрі, ал AK болса, A нүктеден BQ қырға түсірілген перпендикуляр болсын.

ABQ және CBQ үшбұрыштардың теңдігінен $CK \perp BQ$ болады. Сондықтан AKC бұрыш BQ екі жақты бұрыштың сызықты бұрышы болады.

AKQ және ANQ тікбұрышты үшбұрыштардан $AK = \sin\alpha$, $AN = AQ \sin(\alpha/2)$ екенін табамыз.

Ал AKN тікбұрышты үшбұрыштардан

$\sin(\frac{\angle AKC}{2}) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ -ға иеміз.

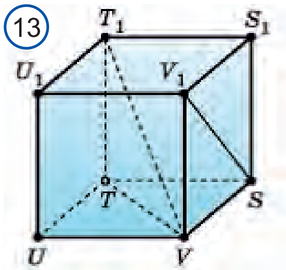
Бұдан, $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

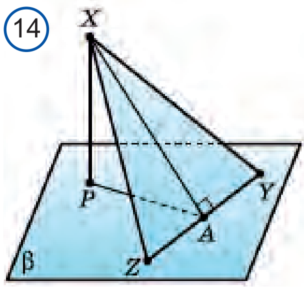
? Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Екі жақты бұрыш дегеніміз не?*
2. *Қандай бұрыш жазықтықтардың арасындағы бұрыш деп аталады?*
3. *Тікбұрыштың астында қиылыстын жазықтықтар қалай аталады?*
4. *Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін айт.*
5. *Перпендикуляр жазықтықтардың қасиеттерін айт және түсіндір.*

5.40. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің; b) $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың перпендикуляр жақтарын анықта, тік екі жақты бұрыштарды айт.

5.41. $STUVS_1T_1U_1V_1$ кубта (13-сурет): a) TVT_1 бұрыш; b) T_1ST бұрыш T_1SVT екі жақты бұрыштың сызықты бұрышы бола ма? V_1UTS екі жақты бұрыштың мәндерін тап.



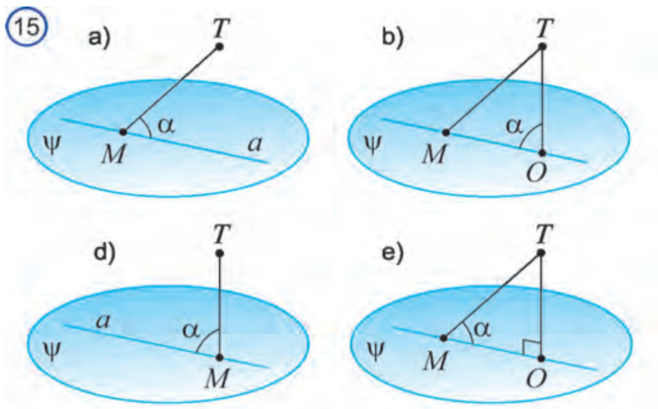
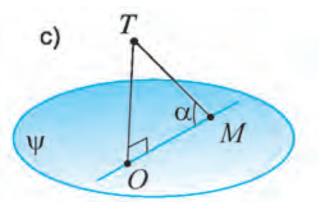


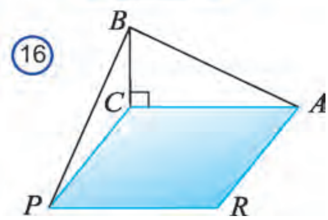
5.42. Екі екі жақты бұрыштың біреуден жағы ортақ, қалған жақтары біргелікте жазықтықты құрайды. Осы екі жақты бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең екенін дәлелде.

5.43. *XYZ* үшбұрыштың *YZ* қабырғасы β жазықтықта жатады. Оның *X* төбесінен *XA* биіктік және β жазықтыққа *XP* перпендикуляр жүргізілген (14-сурет). *XAP* бұрыш *XYZP* екі жақты бұрыштың сызықты бұрышы екенін дәлелде.

5.44. Үшбұрышты *ABCD* пирамиданың *CD* қыры *ABC* жазықтыққа перпендикуляр. $AB = BC = AC = 6$ және $BD = 3\sqrt{7}$ болса, *DACB, DABC, BDCA* екі жақты бұрыштарды тап.

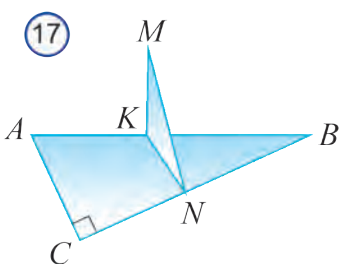
5.45. *T* нүктеден ψ жазықтыққа көлбеу жүргізілген (15-сурет). Төмендегі суреттердің қайсыларында жазықтық пен көлбеудің арасындағы α бұрыш дұрыс берілген?



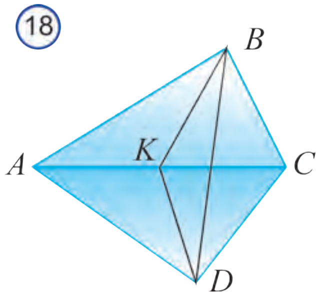
5.46. Үшбұрышты *ABCD* пирамидада *DAB, DAC, ACB* бұрыштар тік, $AC = CB = 5$ және $DB = 5\sqrt{5}$ болса, *ABCD* екі жақты бұрышты тап.

5.47. Екі жақты бұрыштың сызықты бұрышының жазықтығы оның әрбір жағына перпендикуляр екенін дәлеледе.



5.48. Екі жақты бұрыштың бір жағында жатқан екі нүкте оның қырынан, сәйкесінше, 51 см және 34 см қашықтықта жатыр. Осы нүктелердің біріншісі басқа жағынан 15 см қашықтықта жатқандығы белгілі болса, осы жақтан екінші нүктесіне дейінгі болған қашықтықты тап.

5.49. ABC тікбұрышты үшбұрыш ($\angle C = 90°$) және $ACPR$ квадрат жазықтықтар өзара перпендикуляр (16-сурет). Квадраттың қабырғасы 6 см, үшбұрыштың гипотенузасы 10 см. BP кесіндінің ұзындығын тап.



5.50. MK кесінді тікбұрышты ABC үшбұрыш ($\angle C = 90°$) жазықтығына перпендикуляр (17-сурет). $KN||AC$, $AK = KB$, $AC =$ $= 12$ см, $MK = 8$ см болса, MN кесіндінің ұзындығын тап.

5.51. ABC және ADC теңбүйірлі үшбұрыштар жазықтықтары перпендикуляр (18-сурет). AC олардың ортақ табаны. BK кесінді ABC үшбұрыштың медианасы.

$BK = 8$ см, $DK = 15$ см болса, BD кесіндінің ұзындығын тап.

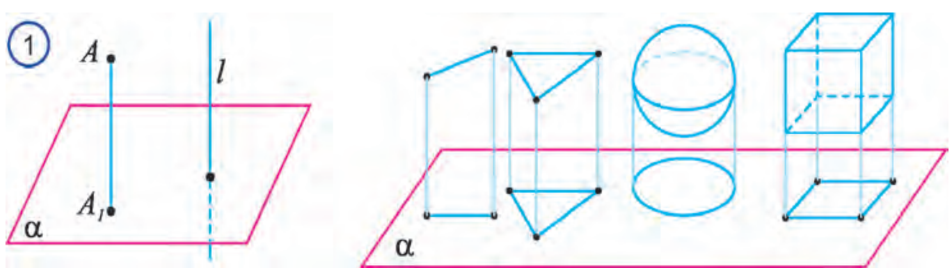
19 КЕҢІСТІКТЕГІ ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫ ТЕХНИКАДА ПАЙДАЛАНУ

Егер проекция бағыты l проекциялау жазықтығы α-ға перпендикуляр болса, мұндай параллель проекциялау *ортогональ проекциялау* деп аталды (1-сурет).

Ортогональ проекциялауда пайда болған фигура берілген фигураның *ортогональ проекциясы* немесе қысқаша *проекциясы* деп айтылады.

Параллель проекциялаудың барлық қасиеттері ортогональ проекциялауда да орынды болады. Төменде тек ортогональ проекцияға тиісті болған маңызды қасиетті дәлелдейміз.

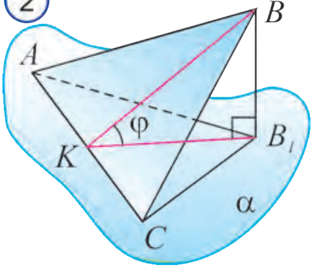
5.13-теорема. Көпбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы көпбұрыш ауданын оның жазықтығы мен проекция жазықтығының арасындағы бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең.



Дәлелдеу. 1) Алдымен үшбұрыш пен оның қандай да бір қабырғасынан өтетін жазықтықтағы проекциясы үшін қарастырамыз.

Айталық, ABC үшбұрыштың α жазықтықтағы проекциясы AB_1C үшбұрыш болсын.

2



ABC үшбұрыштың *BK* биіктігін түсіреміз. Үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, B_1K кесінді KBB_1 үшбұрыштың биіктігі болады (2-сурет).

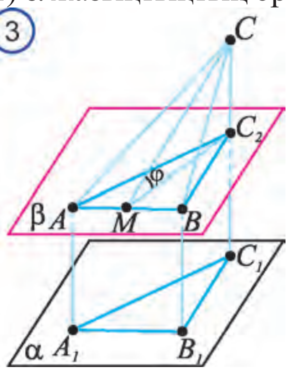
BKB_1 бұрыш – үшбұрыштың жазықтығы мен проекция жазықтығының арасындағы φ бұрыштан құралады. BKB_1 үшбұрышта: $KB_1 = KB \cdot \cos\varphi$.

Онда, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$, $S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1$.

Бұлардан, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$-ті пайда етеміз. 1-жағдайда теорема дәлелденді.

2) α жазықтықтың орнына оған параллель болған β жазықтық алынғанда да теорема орынды болады (3-сурет). Бұл параллель проекциялау қасиетін пайдаланып дәлелденеді.

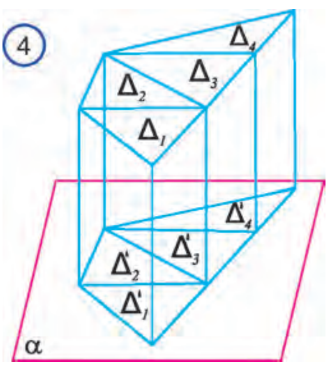
3



3) Енді ортақ, көпбұрыш жағдайына келетін болса (4-сурет), онда теорема көпбұрышты диагональдарының көмегімен үшбұрыштарға бөлу арқылы жоғарыда қарастырылған жеке жағдайға келтіріліп дәлелденеді. ❑

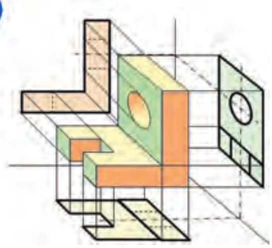
Ортогональ проекцияны техникалық сызба сызуда түрлі детальдарды жобалауда пайдаланады. Түрлі машина детальдарының сызбалары бір, екі немесе үш өзара перпендикуляр проекциялар жазықтықтарына ортогональ проекциялау жолымен пайда етіледі (5-сурет). Бұл проекциялар қайсы бағытта проекцияланғанына қарап, вертикаль (тік), горизонталь және және фронталь проекциялар деп те аталады.

4



? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар*

5



1. *Ортогональ проекциялау деп нені айтады?*
2. *Ортогональ проекциялаудың қасиеттерін айт.*
3. *Ортогональ проекциялауды техникада қалай пайдалануға болады?*
4. *Бір түзуге перпендикуляр болған жазықтықтың қасиетін айт.*
5. *Жалпыланған Пифагор теоремасы не туралы?*
6. *Үшінші жазықтыққа перпендикуляр екі түзу өзара параллель бола ма?*
7. *Екінші жазықтыққа перпендикуляр жазықтық пен түзу өзара параллель бола ма?*
8. *Берілген түзу арқылы берілген жазықтыққа перпендикуляр болған неше жазықтық*

жүргізуге болады?

9. *α жазықтық β жазықтыққа перпендикуляр. α жазықтықтағы әрқандай түзу β жазықтыққа перпендикуляр бола ма?*

10. *Бірінші жазықтыққа көлбеу болған кесінді арқылы өтетін екінші жазықтық біріншісіне перпендикуляр бола ма?*

11. *Тікбұрышты параллелепипедтің қиылысатын жақтары өзара перпендикуляр бола ма?*

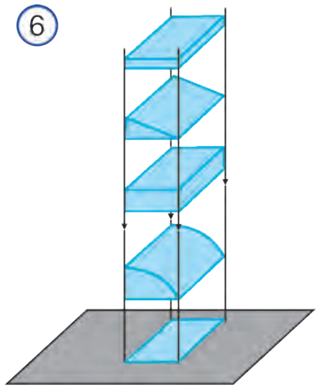
5.52. трапецияның ортогональ проекциясы: a) квадрат; b) кесінді; c) тік төртбұрыш; d) параллелограмм; e) трапецияның бірі болуы мүмкін бе?

5.53. 6-суретке қарап ортогональ проекциясы тік төртбұрыш болған геометриялық фигураны айт.

5.54. A_1B_1 кесінді AB кесіндінің α жазықтыққа ортогональ проекциясы (7-сурет). Егер $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см болса, B_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап.

5.55. Ұзындығы 5 см болған AB кесіндінің ω жазықтыққа ортогональ проекциясының ұзындығы 3 см болған AC кесіндіден құралған (8-сурет). AB кесіндінің ω жазықтыққа көлбеу бұрышының косинусын тап.

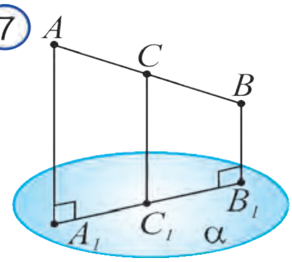
6



5.56. Егер AB түзуден C нүктеге дейінгі қашықтық (9-сурет) C түзуден ABD жазықтыққа дейінгі қашықтықтан екі есе үлкен болса, ABC және ABD жазықтықтардың арасындағы бұрышты тап.

5.57. ABC үшбұрыштың ауданы 18 см²-ға тең. $KC \perp (ABC)$. Егер ABK және ABC үшбұрыштар жазықтықтарының арасындағы бұрыш: a) $\alpha = 30°$; b) $\alpha = 45°$; a) $\alpha = 60°$ болса, ABK үшбұрыштың ауданын тап (10-сурет).

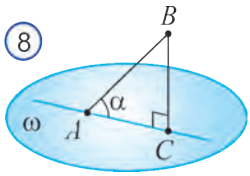
7



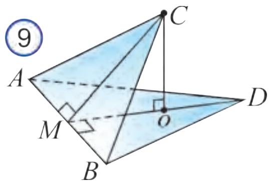
5.58. ABC және ABD үшбұрыштардың жазықтықтарының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Егер $AB = 4\sqrt{3}$ болса, CD қашықтықты тап.

5.59. Ауданы 48 см²-ға тең болған үшбұрыштардың ортогональ проекциясының қабырғалары 14 см, 16 см және 6 см болған үшбұрыштардан құралған. Осы үшбұрыштың жазықтығы мен оның проекциясының арасындағы бұрышты есепте.

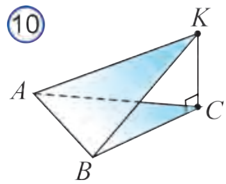
8



9



10



5.60. Ауданы 12 см^2-ге тең болған үшбұрыштардың ортогональ проекциясының қабырғалары13 см, 14 см және 15 см болған үшбұрыштардан құралған. Осы үшбұрыштың жазықтығы мен оның проекциясының арасындағы бұрышты есепте.

20 ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР МЕН ҚОЛДАНУЛАР

Қолданулар мен іс жүзіндік компетенцияларды қалыптастыру

1. Екі көрші бөлменің қабырғалары тұтасқан сызықтың еденге перпендикулярлығын қандай өлшеулердің көмегімен тексеруге болады?

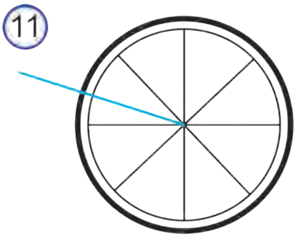
2. Ұзындық өлшейтін құрылғы – пулетканың көмегімен бағанның тік екенін қалай тексеруге болады?

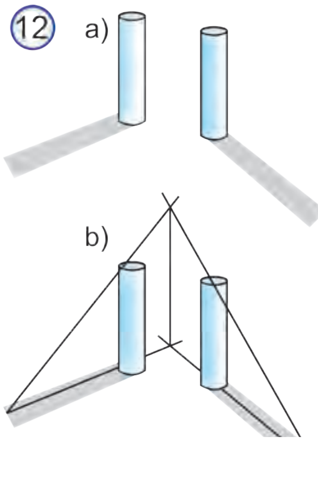
3. Дөңгелек осі жазықтықтың ол дөңгеленетін жазықтыққа перпендикулярлығын қалай тексеруге болады?

4. Неліктен қыста үйдің төбесінен төменге қарай өсіп тұрған мұздарды, олардың қалыңдығын ескермей, өзара параллель деуге болады?

5. Оқушы практикалық жұмыс орындауда. Орнатылған бірнеше бағандардың Жермен салыстырғанда тік екенін тексеру үшін олардың тек біреуін ғана тексерді. Қалған бағандардың тік екенін төмендегідей тексерді: барлық бағандардың биіктігін, олардың төменгі табандары мен жоғарғы төбелерінің арасындағы қашықтықты өлшеп шешім қабылдады. Ол осы жұмысты дұрыс орындады ма?

11





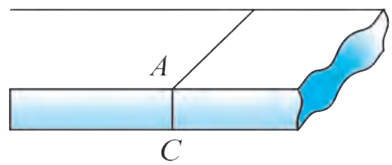
6. Не үшін есік, ол ашық па немесе жабық па, әрдайым еденмен салыстырғанда перпендикуляр болады?

7. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығына айқын мысал ретінде дөңгелектің сымы жатқан жазықтықтың дөңгелек осімен салыстырғандағы орналасуын келтіруге болады (11-сурет). Ось дөңгелектің әрбір сымына перпендикуляр. Қозғалыс барысында дөңгелектің сымдары әрқайсысы бір нүктеде қиылысатын кесінділерден құралған дөңгелектің жазықтығын пайда етеді. Егер ось горизонталь орналасқан болса, дөңгелек қандай жазықтықта айналады? Неге?

Нұсқау: дөңгелек осіне перпендикуляр жазықтыққа перпендикуляр болады.

8. Биіктікке секіру жаттығуы орындалуда. Кедергі ағашты қою үшін қыры 25 м болған куб және өлшемдері 25×25×50 болған тікбұрышты параллелепипед пайдаланылуда. 1) 125 см; 2)150 см; 3) 175 см биіктікке секіру жаттығуларын қалай ұйымдастыруға болады?

13



9. 12-суретте екі вертикаль баған мен олардың көлеңкесі бейнеленген. Осы деректерді пайдаланып, жарықтық көзі (шам) орналасқан нүктені және оның горизонталь жазықтыққа проекциясын тап және төмендегі сұрақтарға жауап бер.

а) Бағандардың вертикальдығы маңызды ма?

b) Көлеңке түсірген жазықтықтың горизонтальдығы маңызды ма?

c) Суретте берілген деректердің барлығы да маңызды ма?

Шешуі. 12-суретте тиісті салулар келтірілген. Жарықтық көзінің орнын табуға бағандардың бағыты маңызға ие емес, бірақ олардың вертикаль екені маңызды. Егер бағандар вертикаль және көлеңке горизонталь жазықтыққа түсетін болса, есепті шешу үшін суреттегі бір бағанның көлеңкесін және екінші бағаннан түсетін көлеңкенің бағытын білу жеткілікті (*12.b-сурет*).

10. Дөңгелек үстелге қабырғасы a-ға тең болған квадрат пішіндегі дастарқан салынған. Дөңгелектің центрі квадраттың центрімен беттесе түседі. Дастарқанның ұштары оның қабырғаларының центрлерімен салыстырғанда қаншалықты еденге жақын? *Жауабы*: $a(2 - 1)/2 = 0{,}207\ a$.

11. Қабырғаның тік екені шоқулмен (бір ұшына тас байланған жіп) тексеріледі. Егер шоқулдың жібі қабырғаға қаншалықты жабысып тұрса, қабырға соншалықты тік болады. Бұл қаншалықты дұрыс? Осы тексеру тәсілі қаншалықты дұрыс?

12. Аралаудың беті араланып жатқан тақтаның барлық қырларына перпендикуляр болуын қамтамасыз үшін (13-сурет) тақтаның бетіне аралау сызықтарын қалай белгілеу қажет?

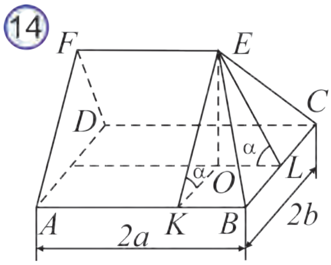
13. Бөлменің сыбайлас қабырғаларының өзара перпендикулярлығын тексеру үшін Пифагор теоремасын қалай пайдалануға болады?

14. Бағанның тік екенін тексеру үшін бағанның табанымен бір түзуде жатпайтын екі нүкте арқылы бақыланады. Осы тексеру тәсілін негіздеп бер.

Нұсқау: Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісін пайдалан.

15. Шығып болмайтын төбедегі нүктеге биік баған орнатылған. Шоқулдың көмегімен оның тік екенін қалай тексеруге болады?

Шешу: Бағанның қандай да бір вертикаль түзумен бір жазықтықта жататынын және тағы басқа вертикаль түзумен бір (*басқа*) *жазықтықта жататынын көрсету жеткілікті. Алдымызға шоқулды сондай қоюымыз ке-*



рек, оның және бағанның жоғарғы төбелері, сондай-ақ көзіміз бір түзуде жатқанда, шоқулдың жібі мен баған бір түзуде жатсын. Бұл тәсіл төмендегілерге негізделген: 1) *вертикаль баған кез келген вертикаль түзумен бір жазықтықта жатсын*; 2) *егер екі параллель түзу екі қиылысатын жазықтықта жатса, осы түзулер жазықтықтардың қиылысу түзуіне де параллель болады.*

16. Екі вертикаль орналасқан жазық айна берілген. Осы айналардың бірінің бетіне параллель болған, горизонталь сәуле екінші айнадан бірінші айнаның бетіне перпендикуляр болған түзудің бойымен қайтады. Айналардың арасындағы бұрышты тап.

Нұсқау: Жарықтықтың қайту заңдылығын пайдалан. *Жауабы:* 45°.

17. Горизонталь сәуле вертикаль орналасқан екі жазық айнадан қайтуда. Алдымен сәуле бірінші айнаның бетіне параллель болған болса, екінші рет қайтарылудың нәтижесінде екінші айнаның жазықтығына параллель болып қалады. Айналардың арасындағы бұрышты тап.

Жауабы: 60°.

18. Қалыңдығы 5 м, ауданы 4 м^2 болған, квадрат пішіндегі полат платформа төрт ұшынан трос сымтемірмен горизонталь ілінген. Әрбір трос сымтемірдің ұзындығы 2 м. Трос сымтемірдің платформамен салыстырғандағы көлбеу бұрышын тап. Биіктігі 0,9 м, табанының диаметрі 0,6 м болған цилиндр пішіндегі бакты осы платформаға орналастыруға бола ма?

Жауабы: 45°, *бакты орналастыруға болады.*

19. Су төрт жағынан ағып түсетін үй шатыры табанына ортогональ проекцияланған. Үйдің шатыры қырларының проекциясы тік төртбұрыш пішіндегі үй шатыры табаны бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелде.

20. Табаны $ABCD$ тік төртбұрыштан құралған үйге жаңбыр суы төрт қабырғасынан ағатын шатыр орнатылуы керек (14-сурет). $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Шатырдың барлық жақтары табан жазықтығымен α бұрышты құрайды. Осы шатырды жабу үшін қанша қаңылтыр қажет болады. Мұнда шатыр беті ауданының k пайызы мөлшеріндегі қаңылтыр шығынға кететінін есепке алу қажет.

Жауабы: $4ab\,(1 + 0{,}01k\,) / \cos\alpha$.

21. Желсіз ауада жаңбыр "қиялап" жаууда. Тік төртбұрыш пішіндегі фанера бөлігінің көмегімен жаңбырдың горизонталь жазықтыққа салыстырмалы қиялығын қалай анықтауға болады? Тиісті сызбаны сыз.

Нұсқау: Фанера бөлігін солай орналастыру қажет, оның жазықтығы *жаңбыр тамшыларының қозғалыс траекториясы және олардың горизонталь жазықтыққа проекциясы анықталған жазықтыққа шамамен перпендикуляр болсын. Сонда горизонталь жазықтыққа жаңбыр түспейтін тік төртбұрыш пайда болады. Сосын тиісті кесінділердің ұзындықтары өлшенеді және олардың арасындағы бұрыштың тангенсі есептелінеді*

22. Ауданы S_1-ге, ұзындығы n-ға тең болған балалар кереуетінің бағанын екі бірдей тік төртбұрыш пішіндегі перделермен жабу қажет. Әрбір перденің ауданы S_2-ге, ал ұзындығы кереуеттің ұзындығына тең. Әр екі перденің жоғарғы шеті кереуеттің үстіне параллель орнатылған және кереуеттің ұзындығына тең сымтемірге бекітілген. Сымтемірдің кереуеттен қандай биіктікте орнатылғанын тап. Есепті төмендегі цифрлы шарттармен шеш: n = 1 м 20 см, S_1= 6000 см^2, S_2=7800 см^2. Тиісті сызбаны сыз.

Нұсқау: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$. *Жауабы:* 0,5 м.

23. Табаны $ABCD$ тік төртбұрыштан құралған үйге жаңбыр суы төрт қабырғадан ағып түстін шатыр орнатылуы қажет (14-сурет). AB = 18 м, BC = = 12 м. Шатырдың барлық жақтары табан жазықтығымен 40°-тық бұрышты құрайды. Егер 1 м^2 ауданды жабу үшін 15 дана черепица жұмсалса, осы шатырды жабу үшін қанша дана черепица қажет болады?

24. Алтыжақты қалам және ашылған кітаптың көмегімен түзулердің арасындағы, түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштардың рәміздерін көрсетіңдер.

25. Екі симметрия осіне ие, 14-суретте көрсетілген шатырдан жаңбыр суының қайсы бағыттарда ағып түсетінін анықта.

26. Табанына барып болмайтын мұнараның биіктігін анықтау үшін қандай өлшеулерді жүзеге асыруға болады?

27. Биіктігі белгілі, бірақ жақындауға болмайтын ғимаратқа дейінгі қашықтықты табу үшін қандай өлшеулерді жүзеге асыруға болады?

28. Көлеңке неге түс кезінде жоғалады?

29. Ағаштың төбесіне шықпай-ақ оның биіктігін қалай өлшеуге болады?

Жауаптар

4.5. a) 7 см; b) 30 см; **4.6.** b) 200 мм; **4.13.** 50 см; **4.14.** 40 мм; **4.21.** $a + b$; **4.22.** a) 40°; b) 45°; c) 90°; **4.23.** a)58°; b) 47°; **4.40.** 32 см; **4.41.** 6 см; **4.42.** 20 см; **5.11.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 м; **5.17.** 15 см және 41 см; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 м; **5.22.** 9 м; **5.23.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{(5 + 3\cos b)/2}$; **5.24.** 3 см; 7,5 см; **5.25.** 20 см; **5.34.** $3d$; **5.37.** 45°; **5.38.** $\arccos\sqrt{3}/3$; **5.44.** 90°; **5.46.** 60°;

М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.Қ. Аманов, Б.Қ. Хайдаров

МАТЕМАТИКА 10
АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ
ГЕОМЕТРИЯ
II БӨЛІМ

Орта білім беретін мекемелердің 10-сынып
оқушыларына арналған оқулық
1-басылымы

Редакторы:	Т. Ахмедов
Техникалық редактор:	К. Мадияров
Қазақшаға аударған:	Т. Сапарәліұлы
Компьютерде терген:	А. Абдусаломов

Баспа лицензиясы AI № 296. 22.05.2017
Басуға рұқсат етілді **.**.2017. Пішімі $70\times100^{1}/_{16}$
“TimesNewRoman” гарнитурасы.
Көлемі: шартты баспа таб. 9,0. Есептік баспа таб. 9,0.
Таралымы ***** дана

Оригинал-макет «Extremum-press» ЖШҚ-да
дайындалды. 100053, Ташкент қ.
Боғишамол көшесі, 3. Тел: 234-44-05

Өзбекстан Баспасөз және ақпарат агенттігінің “O‘qituvchi”
баспа-полиграфия шығармашылық үйінің баспаханасында басылды.
100206, Ташкент қ. Юнусабад ауданы,
Янгишахар көшесі, 1-үй.
Тапсырыс № 232-17.