МАТЕМАТИКА 11

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ
ГЕОМЕТРИЯ
І БӨЛҮК

Жалпы орто билим берүүчү мекемелеринин 11-класс окуучулары
үчүн окуу китеби

Өзбекстан Республикасанын Элге билим берүү министрлиги
тарабынан бекитилген.

1-басылышы

ТАШКЕНТ
2018

УЎК: 51(075.32)
КБК: 22.1ya72
М 56

Алгебра жана анализдин негиздери бөлүмүнүн авторлору:

М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.К. Аманов

Геометрия бөлүмүнүн авторлору:

Б.К. Хайдаров

Рецензенттер:

Р. Б. Бешимов – Мырза Улугбек атындагы Өзбекстан Улуттук Университети “Геометрия жана топология” кафедрасынын башчысы, физика-математика илимдеринин доктору.

К. С. Жуманиязов – Низамий атындагы ТМПУнин Физика-математика факультети “Математиканы окутуу методикасы” кафедрасынын доценти, педагогика илимдеринин кандидаты.

Р. О. Розимов – Сергели районундагы 237-жалпы билим берүүчү мектебинин математика предмети мугалими.

С. Б. Жуманиязова – РББ методисти.

С.Р.Сумбердиева – Сергели районудагы 6- адистештирилген мектебинин математика предмети мугалими.

Окуу китебинин “Алгебра жана анализ негиздери”бөлүмүндө иштетилген шарттуу белгилер:

△ – маселени чыгаруу (далилдөө башталды)
▲ – маселени чыгаруу (далилдөө) аяктады
(!) – текшерүү иштери жана тест (сыноо) мисалдары
(?) – суроо жана тапшырмалар
🟦 – негизги маалымат
* – татаал маселелер

ISBN: 978-9943-5128-1-8

Алгебра жана анализдин негиздери

I ГЛАВА. ТУУНДУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

1–2

ӨЗГӨРҮҮЧҮ ЧОҢДУКТАРДЫН ӨСҮНДҮСҮНҮН КАТЫШЫ ЖАНА АНЫН МААНИСИ. ЖАНЫМАНЫН АНЫКТАМАСЫ. ФУНКЦИЯНЫН ӨСҮНДҮСҮ

Өзгөрүүчү чоңдуктар өсүндүсүнүн катышы

Түрдүү өлчөө бирдиктерине ээ болгон эки өзгөрүүчү чоңдуктардын катышын эсептөө турмушта көп учурайт.

Мисалы, автомашинанын **ылдамдыгы** басып өткөн жолдун убакытка болгон катышы км/саат же м/с да өлчөнөт, күйүүчү майдын сарпталышы болсо км/литр же 100 км/литрлерде өлчөнөт.

Куду ушундай, баскетболчунун чебердиги бир оюнда топтогон упайларынын саны менен белгиленет.

Мисал. Окуу иштеп чыгаруу комплексинде 11-класс окуучулары ортосунда текст жазуунун сапаты жана ылдамдыгы боюнча сынак өткөрүлүп жатат.

Карим 3 минут ичинде 213 сөздү терип, 6 орфографиялык катага, Наргиза болсо 4 минута ичинде 260 сөздү терип,7 орфографиялык ката кетиргени маалым болду. Алардын натыйжаларын салыштыргыла.

△ Ар бир окуучу үчүн тиешелүү катыштарды түзөбүз:

Карим:

$$\text{текст терүүнүн ылдамдыгы } \frac{213 \text{ сөз}}{3 \text{ мин}} = 71 \ \frac{\text{сөз}}{\text{мин}};$$

$$\text{текст терүүнүн сапаты } \frac{6 \text{ ката}}{213 \text{ сөз}} \approx 0{,}0282 \ \frac{\text{ката}}{\text{сөз}}.$$

Наргиза:

$$\text{текст терүүнүн ылдамдыгы } \frac{260 \text{ ката}}{4 \text{ мин}} = 65 \ \frac{\text{ката}}{\text{мин}};$$

$$\text{текст терүүнүн сапаты } \frac{7 \text{ ката}}{4 \text{ сөз}} \approx 0{,}0269 \ \frac{\text{ката}}{\text{сөз}}.$$

Демек, Карим текстти Наргизага караганда ылдам терген болсо да, Наргиза бул ишти сапаттуу аткарган. ▲

Көнүгүүлөр

1. Пульс частотасын текшерүү үчүн бармактар учу артерия тамыры өтө турган жайга коюлат жана соккуларын сезүү үчүн ушул жай басылат.

Мадина пульсту өлчөгөндө бир минутада 67 соккуну сезди.

а) Пульс частотасынын маанисин түшүндүргүлө. Ал кандай чоңдук (белги) ?

б) Ар саатта Мадинанын жүрөгү канча жолу согот?

2. Карим үйдө 14 бет текст терип, 8 орфографиялык катага жол койду. Эгерде 1 бетте орточо 380 сөз болсо:

а) Каримдин текст терүү сапатын аныктагыла жана жогорудагы мисалда алынган натыйжа менен салыштыргыла.Каримдин текст терүү сапаты өзгөрөбү?

б) Карим 100 сөз тергенде орточо канча ката кетирет?

3. Маруф 12 саат иштеп 148 м 20 см, Мурат болсо 13 саат иштеп 157 м 95 см арык тазалашты. Алардын эмгек өндүрүмдүүлүгүн салыштыргыла.

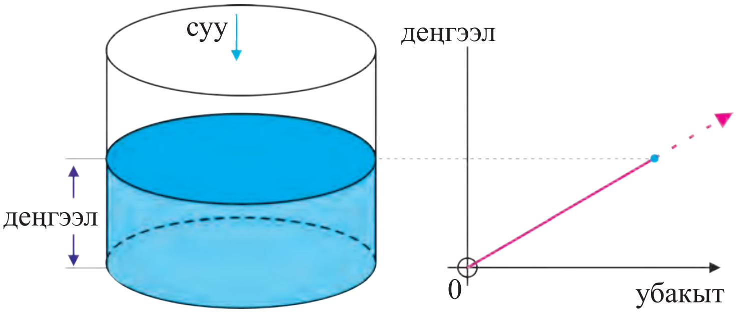
4. Автомашинанын жаңы шина протекторунун тереңдиги 8 мм ди түзөт. 32178 км жүргөндөн кийин шина протекторунун тереңдиги 2,3 мм калганы белгилүү болду.

а) 1 км аралык жүргөндө шина протекторунун тереңдиги кандай өзгөрөт?

б) 10000 км аралыкты басып өткөндөчү?

5. Мадина Каршы шаарынан саат 11:43 тө чыгып саат 3:49 да Гулстан шаарына жетип келди. Эгерде ал 350 км аралык жүргөн болсо, анын орточо ылдамдыгы канча $\frac{\text{км}}{\text{саат}}$ болот?

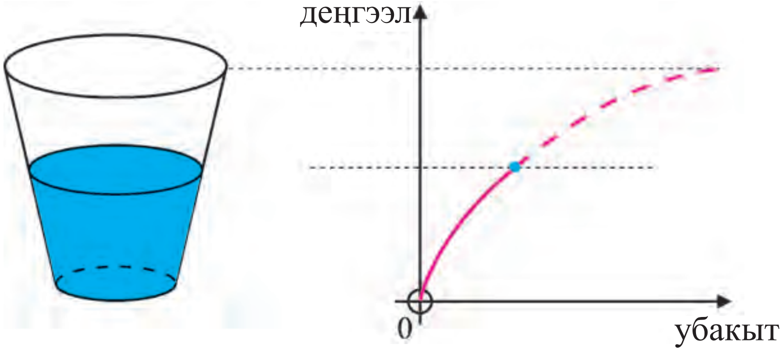
Мисал. Цилиндр формасындагы идиш суу менен бирдей ылдамдыкта толтурулууда. Мында идиш ичине убакытка пропорциялаш болгон суу (көлөмү) куюлуп жаткандыгы себептүү суунун деңгээлинин убакытка салыштырмалуу байланышы сызыктуу функция болот (1-сүрөткө карагыла).



1-сүрөт.

Бул учурда идиштеги суунун деңгээлинин (бийиктигинин) убакытка болгон катышы (же болбосо деңгээлдин өзгөрүү ылдамдыгы) туруктуу сан боюнча калат.

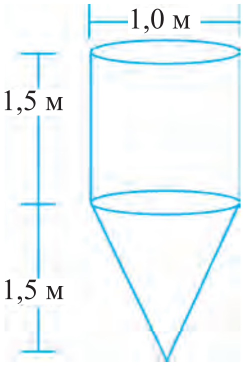
Эми башка формадагы идишти көрүп чыгабыз (2-сүрөт):



2-сүрөт.

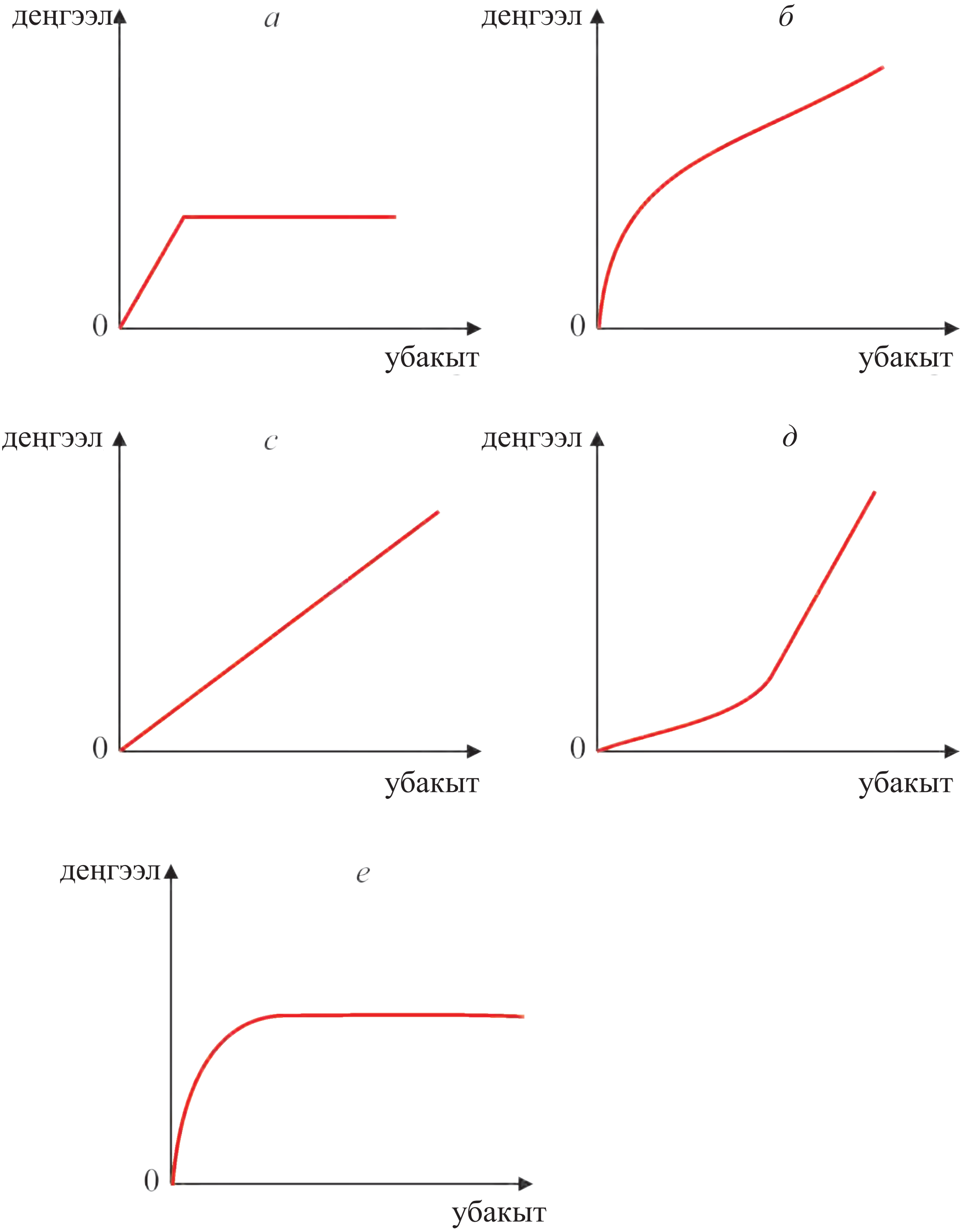
Бул абалда суунун деңгээлинин өзгөрүү ылдамдыгынын убакытка салыштырмалуу байланышы сүрөттөлгөн.

1-суроо. 3-сүрөттө суу куюуга ылайыкташтырылган идиш сүрөттөлгөн.



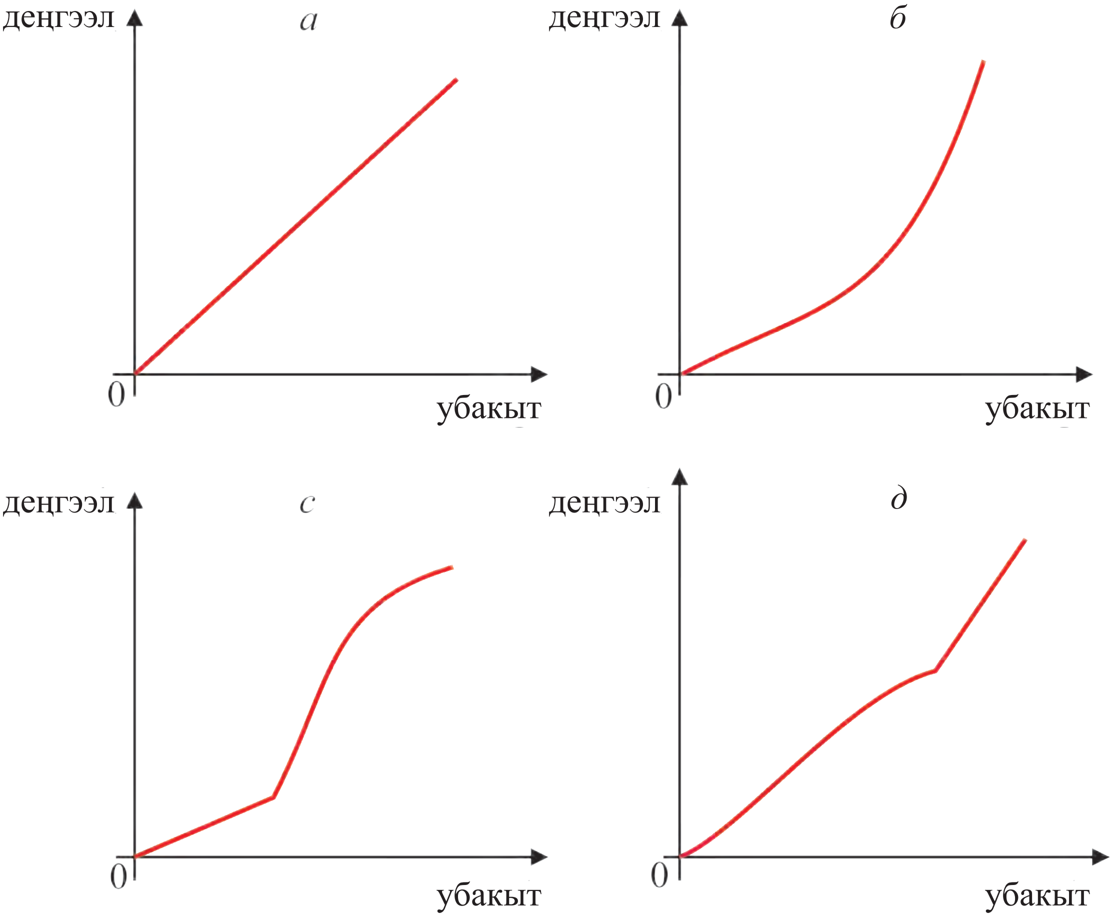
3-сүрөт.

Баштап анын ичинде суу жок болчу. Кийин ал «бир секундда бир литр» ылдамдыкта толо баштады. Суунун деңгээлинин убакытка салыштырмалуу өзгөрүүсү 4- сүрөттөгү кайсы графикте көрсөтүлгөн?



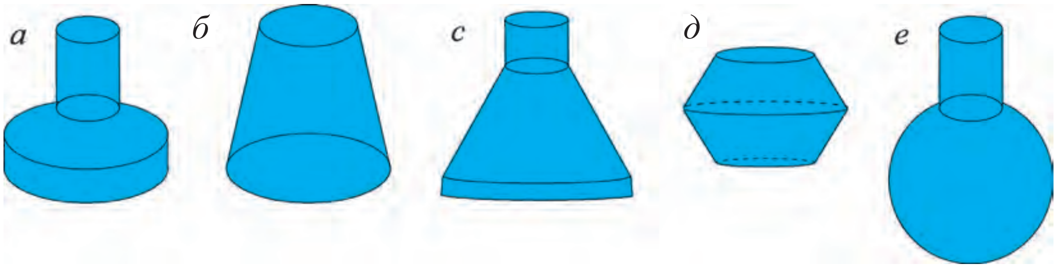
4-сүрөт.

2-суроо. Суунун деңгээлинин убакытка салыштырмалуу өзгөрүшү 5- сүрөттөгү графиктерде берилген:



5-сүрөт.

Алар 6-сүрөттөгү кайсы идиштерге туура келет?



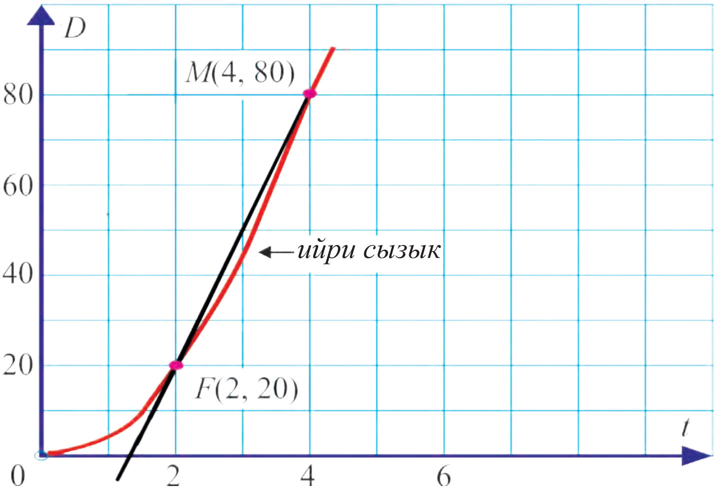
6-сүрөт.

Өзгөрүүнүн орточо ылдамдыгы

Эки өзгөрүүчү чоңдуктардын бири–бирине болгон байланышы сызыктуу функция көрүнүшүндө болсо,бул чоңдуктардын катышы туруктуу сан болот.

Эки өзгөрүүчү чоңдуктардын бири-бирине болгон байланышы сызыктуу функция көрүнүшүндө болбосо, биз бул өзгөрүүчү чоңдуктардын берилген аралыктагы орточо катышын таба алабыз. Эгерде аралык ар түрдүү алынса, эсептелген орточо катыштар да ар түрдүү болот.

1-мисал. Бийик имараттын жогору жагынан ылдыйга карап топ ыргытылды. Топтун t убакыт учурундагы алыстоосу (ылдый түшүшү) 7-сүрөттөгү графикте сүрөттөлгөн:



7-сүрөт.

△ Графикте t=2 секундга туура келген F чекитти жана андан айырмалуу болгон (мисалы, t=4 секундга тура келген) M чекитти белгилейбиз. $2 \le t \le 4$ убакыт аралыгында орточо ылдамдык $\frac{(80-20)\,м}{(4-2)\,с} = 30\frac{м}{с}$ барабар экендигин табабыз.

Көрүнүп тургандай, FM хорданын бурчтук коэффициенти 30 га барабар. ▲

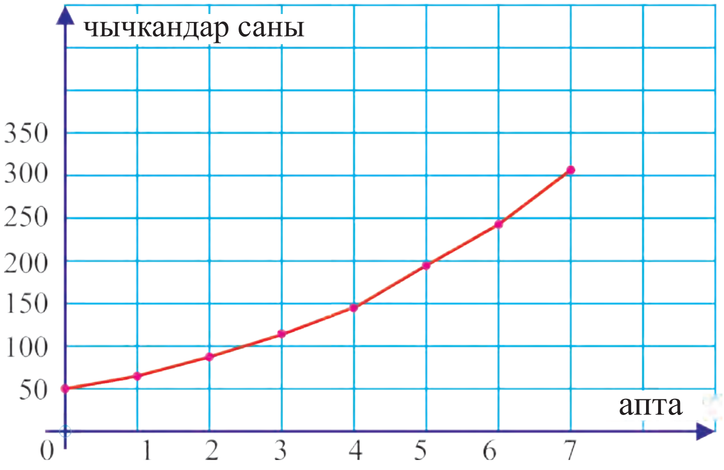
Суроо. F чикетти козголбос эсептеп, t нын башка маанилерине туура келген M чекиттер үчүн FM хорданын бурчтук коэффициенттерин эсептеп, жадыбалды толтургула:

t	Бурчтук коэффициенти
0	
1,5	
1,9	
1,99	

t	Бурчтук коэффициенти
3	
2,5	
2,1	
2,01	

Кандай жыйынтыкка келдиңер?

2-мисал. Популяциядагы чычкандардын саны апта күндөрү өтүшү менен төмөнкүдөй өзгөрөт (8-сүрөт):



8-сүрөт.

3-жана 6-апта аралыгында чычкандар саны орточо кандай өзгөргөн? 7 апталык убакыт аралыгындачы?

△ Чычкандар популяциясынын өсүү ылдамдыгы

$\frac{(240–110) \text{ чычкан}}{(6–3) \text{ апта}} \approx 43 \frac{\text{чычкан}}{\text{апта}}$, болбосо 3- жана 6- апта аралыгында

Чычкандар саны аптасына орточо 43 кө көбөйгөн.

Куду ушундай 7 аптада $\frac{(315-50) \text{ чычкан}}{(7-3) \text{ апта}} \approx 38 \frac{\text{чычкан}}{\text{апта}}$.

7 апта аралыгында чычкандар саны аптасына 38 ге көбөйгөн. ▲

Жалпы учурда x чоңдук а дан в га чейин өзгөргөндө $y=f(x)$ чоңдуктун өзгөрүүсүнүн **орточо ылдамдыгы**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

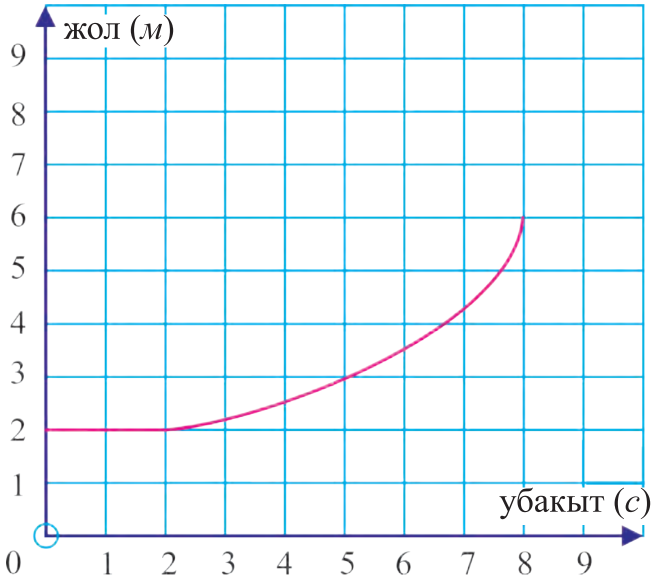
өсүндүлөр катышына барабар, бул жерде $f(b) - f(a)$ – функция өсүндүсү, $b - a$ болсо аргумент өсүндүсү.

$h=b - a$ деп белгилесек, орточо ылдамдык $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ көрүнүшүндө болот

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ бөлчөктүн алымы $y = f(x)$ функциясынын аргументи x нын h өсүндүсүнө дал келүүчү өсүндүсү деп атоо кабыл кылынган. Бөлчөктүн өзүн болсо айырмалуу катыш деп аташат.

Көнүгүүлөр

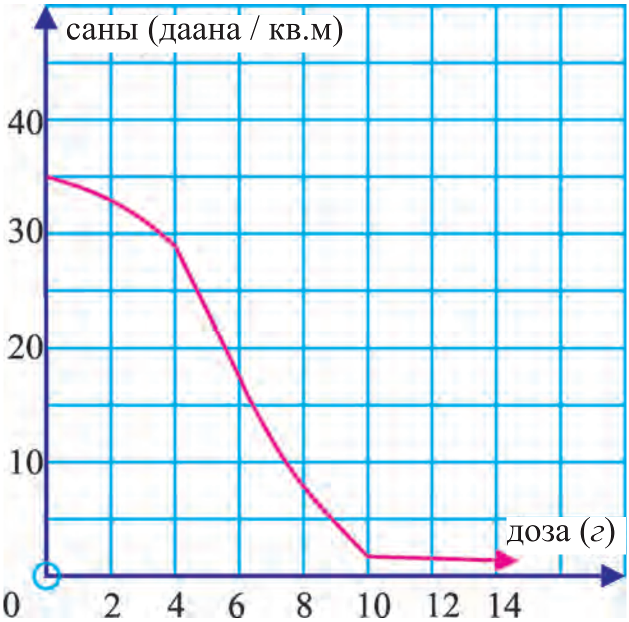
6. Чекиттин түз сызык боюнча басып өткөн жолу убакытка кандай байланышта экендиги 9-сүрөттөгү графикте сүрөттөлгөн.



9-сүрөт.

Чекиттин
а) алгачкы 4 секунд;
б) акыркы 4 секунд;
с) 8 секунд ичиндеги орточо ылдамдыгын тапкыла.

7. Талааны түрдүү өлчөмдөгү (дозадагы) дары менен иштөө берилгенде 1 $м^2$ та болгон зыянкечтердин санынын өзгөрүүсү 10-сүрөттөгү графикте көрсөтүлгөн.



10-сүрөт.

а) 1) доза 0 граммдан 10 граммга чейин ашырылса 1 м^2 та бар болгон зыянкечтердин санынын өзгөрүүсүн тапкыла.

б) доза 0 граммдан 14 граммга чейин ашырылса кандай кубулуш байкалат?

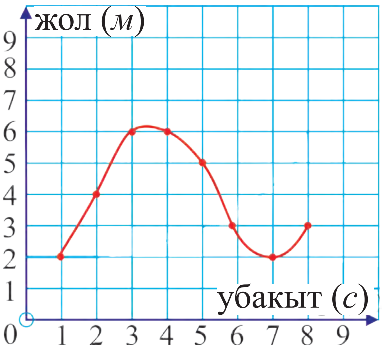
2) Материалдык чекиттин түз сызык боюнча аракет закону $s(t)$ нын графикте сүрөтү берилген.

а) $s(2)$, $s(3)$, $s(5)$, $s(7)$ сандары канчага тең?

б) Кайсы аралыкта функция өсүүчү?

с) Кайсы аралыкта функция кемүүчү?

д) $s(3) - s(1)$, $s(5) - s(4)$, $s(7) - s(6)$, $s(8) - s(6)$ арттырмаларды эсептегиле.



3–4 ЛИМИТ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

x тин маанилери 2 ден кичине жана 2 ге жакындашканда $f(x)=x^2$ функциясынын маанилеринин жадыбалын карап чыгабыз:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Жадыбалдан көрүнүп тургандай , х тин маанилери 2 ге канча жакын болгон сайын (жакындашса), $f(x)$ функциянын маанилери 4 санына жакындашат.

Мындай учурда x аргумент (өзгөрүүсү) 2 ге *солдон жакындашканда* $f(x)$ тин маанилери 4 санына *жакындашат* дейбиз.

x тин маанилери 2 ден чоң болсо, 2 ге жакындашып барганда $f(x)=x2$ функциясынын маанилеринин жадыбалын көрүп чыгабыз.

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

Мындай учурда х аргумент 2 ге оң жактан жакындашканда, $f(x)$тин маанилери 4 санына *жакындашат* дейбиз.

Жогорудагы эки абалды жалпылаштырып, x аргумент 2 ге *жакындашканда*, $f(x)$ тин маанилери 4 санына *жакындашат* дейбиз жана кыскача төмөнкүдөй жазабыз:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Бул жазуу мындайча окулат: x аргумент 2 ге жакындашканда, $f(x)$ функциясынын *лимити* 4 кө барабар.

Жалпы түрдө *функциянын лимити* түшүнүгүн төмөнкүдөй келтиребиз:

$x \neq a$ болуп анын маанилери а санына жакындашса, $f(x)$ тин маанилери A санына жакындашсын. Бул учурда A санды x а га жакындашканда $f(x)$ функциясынын лимити дейилет жана төмөнкүдөй белгиленет:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Кээ бир учурларда мындай абалды x тин маанилери а га умтулганда $f(x)$ функция A га *умтулат*, дейбиз.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ жазуусунун ордуна $x \to a$ да $f(x) \to A$ жазуу да колдонулат.

Эскертүү. x тин мааниси a га *умтулганда* $x \neq a$ аткарылышын айтууга болот.

Мисал. $x \to 0$ болгондо $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x}$ функциясынын лимитин табкыла.

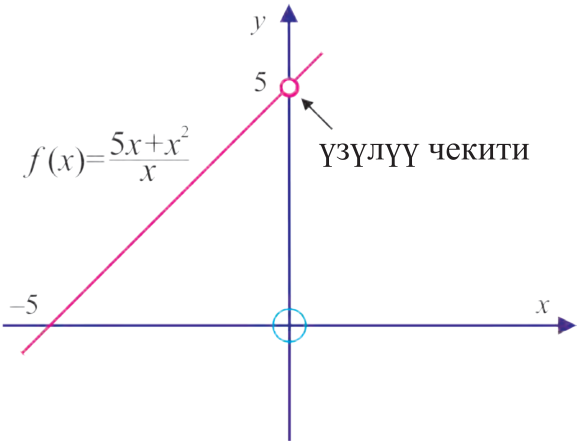
△ $x \neq 0$ шарты аткарылбасын, же $x=0$ болсун. $x=0$ маанини $f(x)$ ге туура коюп чыксак , $\dfrac{0}{0}$ көрүнүшүндөгү анык эмес мааниге ээ болобуз.

Башка тараптан, $f(x) = \dfrac{x(5+x)}{x}$ болгону үчүн бул функция ушул

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, \text{ эгер } x \neq 0 \text{ болсо} \\ \text{аныкталбаган, эгер } x = 0 \text{ болсо,} \end{cases}$$

көрүнүшкө ээ болот.

$y=f(x)$ функциясынын графиги (0; 5) координаталуу чекити «алып салынган» $y=x+5$ түз сызык көрүнүшүндө болот. (11-сүрөт):



11-сүрөт.

(0; 5) координаталуу чекит $y = f(x)$ функциясынын *үзүлүү чекити* деп аталат.

Көрүнүп тургандай, бул чекиттен айырмалуу болгон чекиттерде х тин маанилери 0 гө *жакындашканда* $f(x)$ функциянын тиешелүү маанилери 5 ке жакындашат, же болбосо анын *лимити* бар:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x + x^2}{x} = 5 \cdot$ ▲

Иш жүзүндө,функциянын лимитин табуу үчүн керек болсо тиешелүү жөнөкөйлөштүрүүлөрдү аткарууга болот.

1-мисал. Лимиттерди эсептегиле:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

△ а) x тин маанилари 2 ге *жакындашканда* x^2 тин маанилери 4 кө жакындашат, же $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

б) $x \neq 0$ болгону үчүн

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}(\mathrm{x}+3)=3\cdot$$

с) $x \neq 3$ болгону үчүн

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6. \ ▲$$

Көнүгүүлөр

Лимитти эсептегиле (**8–11**):

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(5-2x)$; с) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-1)$

д) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+2)$; е) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$; ф) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 5} 5$; б) $\lim\limits_{h\to 2} 7$; с) $\lim\limits_{x\to 0} c$, c – туруктуу сан.

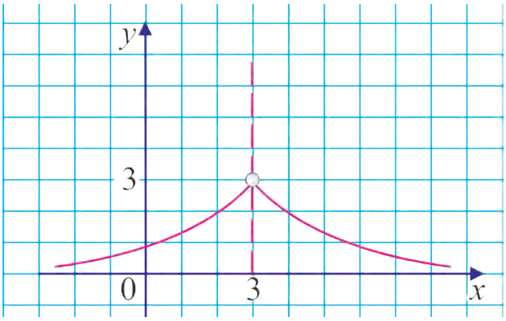
10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{h^2+5h}{h}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}$.

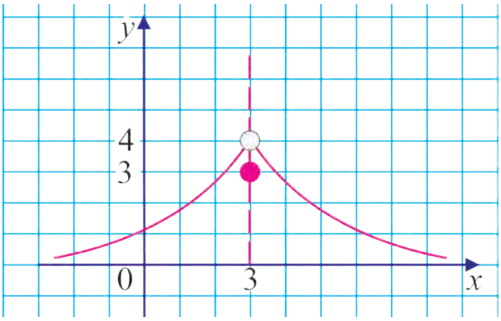
11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{x}$.

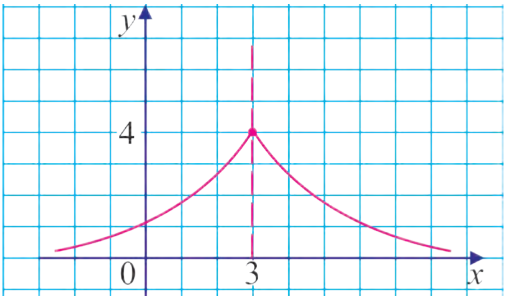
д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+6h}{h}$; е) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2-4h}{h}$; ф) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-8h}{h}$;

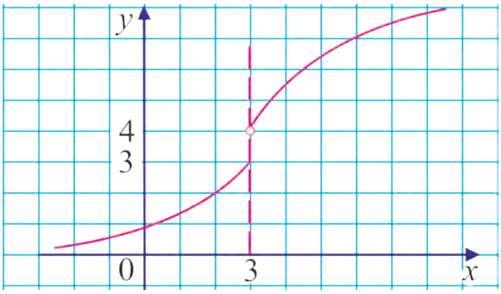
г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}$; х) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$; и) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$.

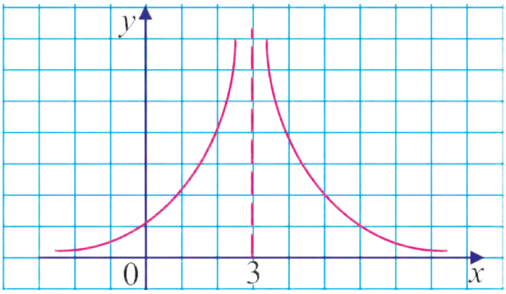
12. Төмөнкү функциялардан кайсы бири $x \to 3$ тө лимитке ээ? Ошол лимитти тапкыла.

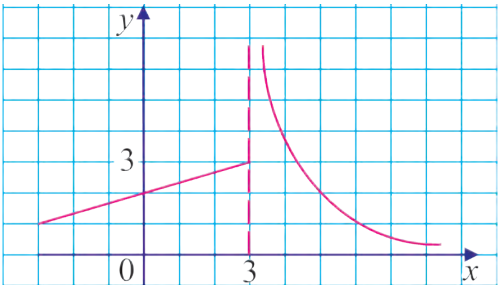


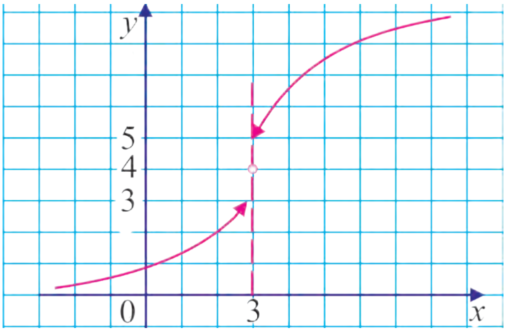


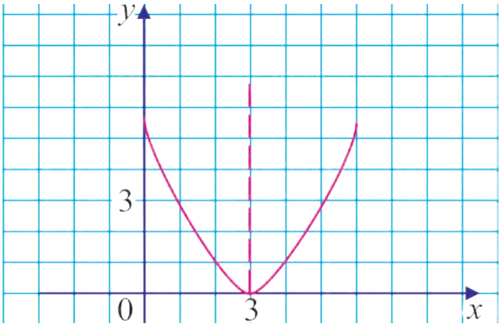








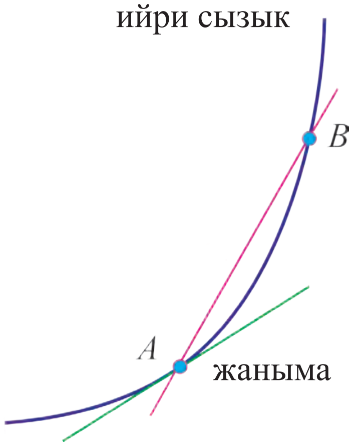




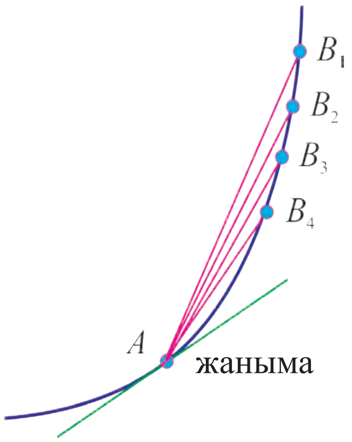
5–6

ТУУНДУ,АНЫН ГЕОМЕТРИЯЛЫК ЖАНА ФИЗИКАЛЫК МААНИСИ

12-сүрөттө ийри сызык, кесүүчү жана жаныма сүрөттөлгөн.



12-сүрөт.

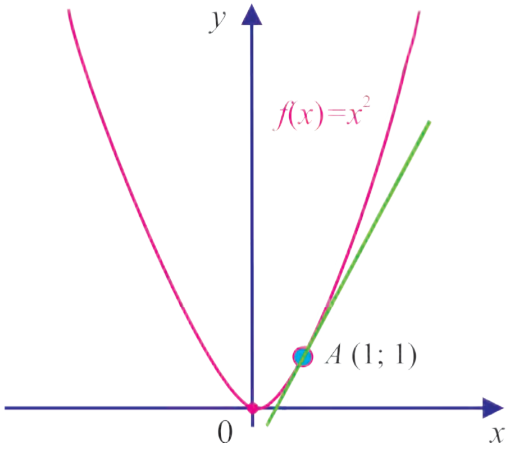


13-сүрөт.

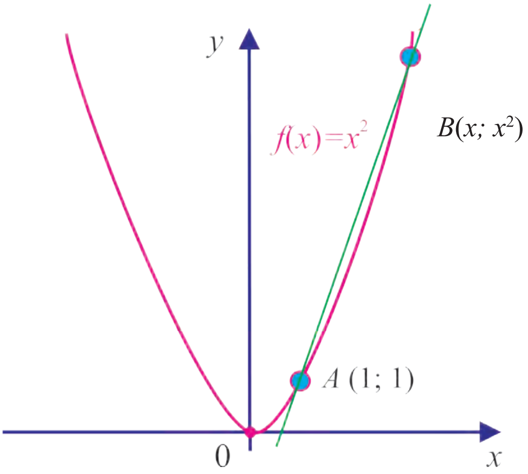
B чекит B_1, B_2, ... учурларды удаалаш кабыл кылып,А чекитке ийри сызык боюнча жакындашса, (13-сүрөт) дал кесүүчүүлөрдүн ийри сызыкка А чекитке өткөрүлгөн жанымага умтулуусу интуитив (*intuitive*) түрдө кабыл кылабыз:

Бул абалда, көрүнүп тургандай, *AB* түз сызыктын бурчтук коэффициенти жаныманын бурчтук коэффициентине жакындашат.

1-мисал. $f(x) = x^2$ функциясынын графигине $A(1;\ 1)$ чекитте жануучу түз сызыктын бурчтук коэффициентин тапкыла (14- сүрөт).



14-сүрөт.



15-сүрөт.

△ $f(x) = x^2$ функциясынын графигине тиешелүү каалагандай $B(x, x^2)$ чекитти карап чыгабыз (15- сүрөт).

AB түз сызыктын бурчтук коэффициенти

$\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ же $\frac{x^2-1}{x-1}$ ге барабар .

B чекит A чекитке ийри сызык боюнча жакындашканда, x тин мааниси 1 ге жакындашат,мында $x \neq 1$.

Демек, AB түз сызыктын бурчтук коэффициенти жанымaнын бурчтук коэффициентине жакындашат:

$$k = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2\cdot$$

демек, $k = 2$. ▲

$y = f(x)$ функция берилген болсун. Анын графигине таандык болгон $A(x; f(x))$ жана $B(x+h; f(x+h))$ чекиттерин алалы(16-сүрөт).

AB түз сызыктын бурчтук коэффициенти

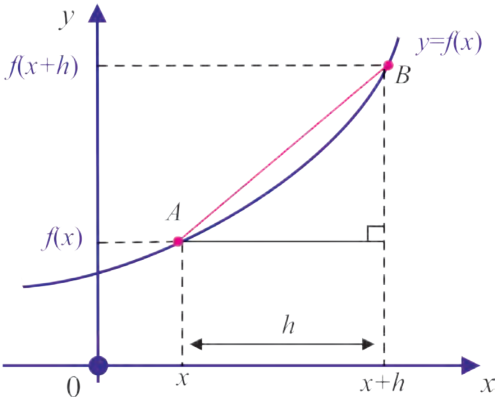
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

айырмаларынын катышына барабар.

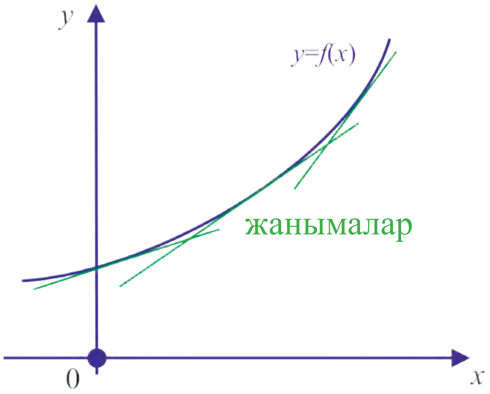
B чекит A чекитке ийри сызык бойлоп жакындашканда $h\to0$, болот, мында AB хордалар функция графигине A чекитте өткөрүлгөн жанымага умтулат.

Ошону менен бирге, AB түз сызыктын бурчтук коэффициенти жанымaнын бурчтук коэффициентине жакындашат.

Башкача айтканда, каалагандай $(x, f(x))$ чекитке жүргүзүлгөн жанымaнын бурчтук коэффициенти $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ h тын мааниси 0 гө умтулганда айырмаларынын катышынын лимит маанисине, же болбосо $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ маанисине барабар болот.



16-сүрөт.



17-сүрөт.

x тин каалагандай лимити бар болгон мааниси үчүн функция графигине $(x, f(x))$ чекитте жануучу жаныманын бурчтук коэффициентинин бир гана маанисин дал коюуга болот (17-сүрөт).

Демек , $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ формула жаңы функцияны туюнтат.

Мына ушул функция $y=f(x)$ функциясынын **туундунун функциясын** жөнөкөй түрдө **туундусу** деп аталат.

Аныктама. $y=f(x)$ функциясынын **туундусу** деп төмөнкүдөй лимитке айтылат:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

Адатта $y=f(x)$ функциясынын туундусу $f'(x)$ түрүндө белгиленет. Туундуну табуу амалы *дифференциялоо* деп аталат.

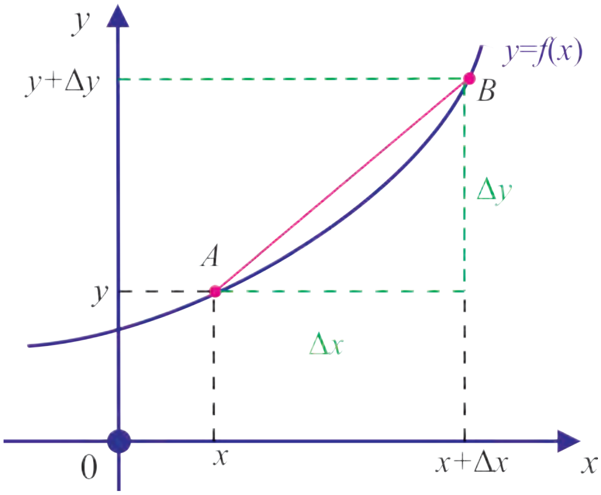
$f'(x)$ деп белгилөөнүн ордуна $\dfrac{dy}{dx}$ сыяктуу белгилөө да кабыл кылынган.

Бул белгилөөнүн «бөлчөк» көрүнүшүндө экендигин төмөнкүдөй түшүндүрүү мүмкүн.

Эгерде өсүндүлөрдү $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ деп белгилесек,

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ дан төмөнкүгө ээ болобуз. (18-сүрөт):

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}.$$



18-сүрөт.

Жогорудагы пикирлерден төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз: $y=f(x)$ функциянын туундусунун x_0 чекиттеги мааниси функция графигине ошол чекитке жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентине барабар .Туундунун *геометриялык мааниси* ушундайча.

2-мисал. Материалдык чекит $s=s(t)$ (s – метрлерде, t – секунддарда өлчөнөт) мыйзам боюнча түз сызык бойлоп аракеттенүүдө. Ушул материалдык чекиттин убакыттын t моментиндеги (учурдагы) ылдамдыгы $v(t)$ ны тап.

△ Бизге белгилүү болгондой кирпик каккычактагы ылдамдык чекиттин кичине убакыт аралыгы Δt дагы орточо ылдамдыгы $v(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ га жакын. Δt нөлгө умтулганда кирпик каккычактагы ылдамдык жана орточо ылдамдык ортосундагы айырма да нөлгө умтулат. Демек, материалдык чекиттин t моменттеги кирпик каккычактагы ылдамдыгы

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t).\ \blacktriangle$$

Ошентип, t моменттеги кирпик каккычалыктагы тездык чекити аракет мыйзамы $s(t)$ функциядан алынган туундуга тең болот.

Туундунун физикалык мааниси ушундайча. Жалпылап айтканда, туунду функциянын өзгөрүү ылдамдыгы болуп эсептелет.

Көнүгүүлөр

Туундунун аныктамасынан пайдаланып, функциянын туундусун тапкыла.

1. $f(x)=x^2$; 2. $f(x)=5$; 3. $f(x)=x^3-7x+5$;
4. $f(x)=x^4$; 5. $f(x)=\frac{1}{x}$; 6. $f(x)=\sqrt{x}$; 7. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

△ **1.** $h \neq 0$ болгону үчүн

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

2. $h \neq 0$ болгону үчүн $f(x+h)=5, f(x+h)-f(x)=5-5=0,$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0 \text{ Демек, } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

3. $h \neq 0$ болгону үчүн

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5;$

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$

$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

$h \to 0$ da $3xh+h^2 \to 0$ болгону үчүн

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

4. Кыска көбөйтүүнүн формуласы боюнча $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Демек , $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h \to 0$ болсо,

$2h^2x(3x+h) \to 0$ жана $h^3(2x+h) \to 0$ болгону үчүн

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Демек , $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ болсун,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

$h \longrightarrow 0$ дө $x+h \to x$ болгону үчүн $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ болот.

6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$ болсун, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ айырмалуу катыш түзөбүз жана аны жөнөкөйлөштүрөбүз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

$h \longrightarrow 0$ дө $\sqrt{x+h} \to \sqrt{x}$ болгону үчүн $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ болот.

7. Айырмалуу катышты түзөбүз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

$h \to 0$ da $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}} \to \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Демек, $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Жообу: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

Эскерте кетчү нерсе, x өлчөм x тен $x+h$ ке чейин өзгөргөндө $y=f(x)$ чоңдук өзгөрүүсүнүн **орточо ылдамдыгы**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

айырмалуу катышка барабар.

Мындан $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ туюнтма $y=f(x)$ чоңдуктун өзгөрүүсүнүн кирпик **каккычактагы ылдамдыгын** билдирет.

Көнүгүүлөр

13. Төмөнкү функциялардын туундусу эмнеге барабар?

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=x^{-1}$; с) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$; д) $f(x)=c$.

14. Жадыбалды дептериңерге көчүргүлө жана аны толтургула:

а)

$f(x)$	$f'(x)$
x^1 x^2 x^3 x^{-1} $x^{\frac{1}{2}}$	

б) Пикиринерче, $y=x^n$ функциясынын туундусу эмнеге барабар (бул жерде n – рационалдык сан) ?

15. Аныктамадан пайдаланып, функциянын туундусун тапкыла.

а) $f(x)=2x+3$; б) $f(x)=3x^2+5x+1$; с) $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Дептериңерге көчүргүлө жана толтургула:

а) $f(x)=ax+b$ үчүн $f'(x)=\ldots$;

б) $f(x)=ax^2+bx+c$ үчүн $f'(x)=\ldots$;

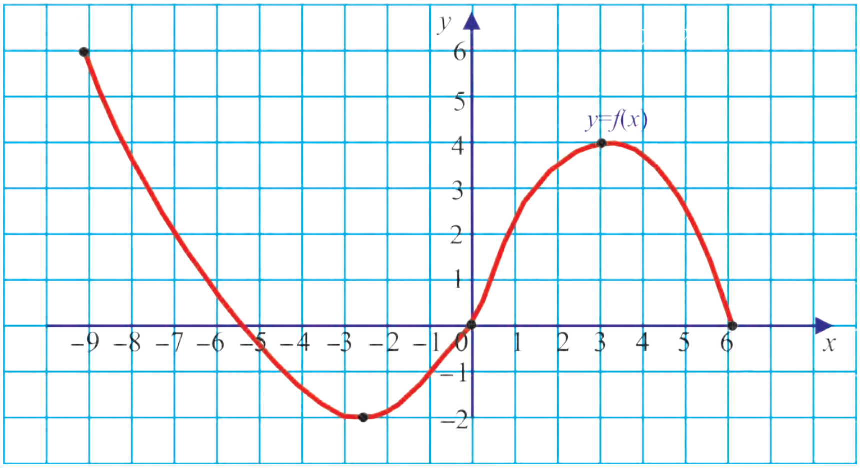
с) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ үчүн $f'(x)=\ldots$

17*. Төмөнкү ырастоолорду далилдегиле:

а) $f(x)=cg(x)$ болсо анда $f'(x)=cg'(x)$;

б) $f(x)=g(x)+h(x)$ болсо анда $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Функциянын графигине карап туундулардын маанилерин салыштыргыла:



а) $f'(-7)$ жана $f'(-2)$;

б) $f'(-4)$ жана $f'(2)$;

с) $f'(-9)$ жана $f'(0)$;

д) $f'(-1)$ жана $f'(5)$.

19. Жогорудагы функциянын графигине карап төмөнкү шарттарды канаатандырган x_1, x_2 чекиттерди тапкыла: (x_1, x_2 – Ox огундагы чекиттер: –9, –8, ..., 5, 6,):

а) $f'(x_1) > 0, f'(x_2) > 0$;

б) $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$;

с) $f'(x_1) < 0, f'(x_2) < 0$;

д) $f'(x_1) > 0, f'(x_2) < 0$.

2) Графикке карап ушул суроолорго жооп бергиле:

а) функция кайсы аралыкта өсүүчү? Кайсы аралыкта кемүүчү?

б) функциянын [0; 3], [3; 6], [–9; –6] аралыктарындагы арттырмаларды эсептегиле.

3) Функция кайсы чекитте эң чоң, кайсы чекитте эң кичүү маанини кабыл кылат?

4) Функция кайсы чекиттерде нөлгө айланат?

5) Кайсы аралыкта функция оң маанилерди кабыл кылат?

6) Кайсы аралыкта функция терс маанилерди кабыл кылат?

7–9 ТУУНДУНУ ЭСЕПТӨӨ ЭРЕЖЕЛЕРИ

Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларынын ар бири туундуга ээ болсо, анда төмөнкү дифференциялоо эрежелери орундуу болот:

1. Сумманын туундусу туундулардын суммасына барабар:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

2. Айырманын туундусу туундулардын айырмасына барабар:

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x). \qquad (2)$$

1-мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

△ ΔТуундуну табууда 1, 2-эрежелерден жана туундулар жадыбалынын 1, 3- тиркемелеринен пайдаланабыз,же болбосо:

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1;$

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$

Жообу: 1) $3x^2+2x-1$; 2) $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

3. Туруктуу көбөйтүүчүнү туундунун белгисинен сыртка чыгарууга болот.

$$(cf(x))'=c\cdot f'(x), \quad c \text{ – туруктуу сан.} \qquad (3)$$

2-мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $f(x)=7x^3-5x^2+4$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3$.

△ Туундуну табууда 1, 2, 3-эрежелеринен жана туундунун жадыбалынын 1, 3- тиркемелеринен пайдаланабыз же болбосо:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x;$

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2.$

Жообу: 1) $21x^2-10x$; 2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2$. ▲

4. Көбөйтүндүнүн туундусу:

$$(f(x)g(x))'=f\,'(x)g(x)+f(x)g'(x). \qquad (4)$$

3- мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; 2) $f(x) = (3x^2+4x+1)(2x+6)$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot(x^2-5x)$.

△ Туундуну табууда 1, 3, 4-эрежелерден жана туундунун жадыбалынын 1,3 тиркемелеринен пайдаланабыз же болбосо:

$$1)\ f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$$
$$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$$

$$2)\ f\,'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$$
$$+(3x^2+4x+1)(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26;$$

$$3)\ f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(2x-5\right)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$
$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\left(7x-20\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\left(7x-20\right).$$

Жообу: 1) $12x+14$;; 2) $18x^2+52x+26$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\left(7x-20\right)$. ▲

5. Тийиндинин туундусу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \qquad \text{мында} \quad g(x)\neq 0. \qquad (5)$$

4- мисал. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

△ Туундуну табууда 1, 3, 5-эрежеринен жана туундулар жадыбалынын 1, 3- тиркемесинен пайдаланабыз, же болбосо:

$$1)\ f\,'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2};$$

$$2)\ f\,'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$$
$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2};$$

$$3)\ f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Жообу: 1) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{22}{(x-5)^2}$; 3) $-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

5- мисал. Төмөнкү функциялардын туундусун тапкыла:

1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=\operatorname{tg}x$.

△ 1) Айырманын катышын табууда синустар айырмасын көбөйтүндүгө келтирүү формуласынан пайдаланабыз:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

$h\to 0$ da $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\frac{2x+h}{2}\to\cos x$ экендигин далилдөө мүмкүн.

Демек, $(\sin x)'=\cos x$.

2) Айырманын катышын табууда косинустар айырмасынын көбөйтүндүгө келтирүү формуласынан пайдаланабыз:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}).$$

$h\to 0$ гө; $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$ экендигин далилдөө мүмкүн.

Демек, $(\cos x)'=-\sin x$.

3) Туундуну табуунун 5-эрежеси, дагы ушул мисалдын 1-, 2-бөлүк жоопторунан пайдаланып, $f(x)=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ функциянын туундусун табабыз:

$$f'(x)=(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Жообу: 1) $(\sin x)'=\cos x$; 2) $(\cos x)' = -\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Туундуну эсептөөдө дифференциялоо эрежелери жана төмөнкү жадыбалдан пайдалануу максатка ылайыктуу болот.

Туундулар жадыбалы

№	***Функциялар***	***Туундулар***
1	c – туруктуу сан	0
2	$kx+b$, k, b – туруктуулар	k
3	x^p, p – туруктуу	px^{p-1}
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9	e^x	e^x
10	$\ln x$	$1/x$
11	$\lg x$	$\frac{1}{x \cdot \ln 10}$
12	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

Суроо жана тапшырмалар

1. Туундуну эсептөө эрежелерин айткыла.Ар бир эрежеге мисал келтиргиле.

2. Туундулар жадыбалынан 4-, 5- тиркемелерин далилдегиле.

3. Функциялардын $x=x_0$ чекиттеги туундусу эмне, туунду функция деген эмне? Алардын кандай айырмасы бар? Мисалдар менен түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

Туундуну тапкыла (**20–22**):

20. 1) $y = x^4$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

21. 1) $y = x^4 - x^2 + x$; 2) $y = \dfrac{1}{x} + x$; 3) $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$;

4) $y = x^4 + x^3 + x^2 - x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

22. 1) $y = (x-1)(x^2-5)$; 2) $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y = (x^4 - \sqrt{x})(x^2 + x)$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Материалдык чекиттин берилген t_0 убакыттагы ылдамдыгын тапкыла:

1) $s(t) = t^3 - 2t^2 + t$; $t_0 = 5$; 2) $s(t) = 5t + t^3 + \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

24. Функциянын абциссасы берилген чекиттеги туундусун тапкыла:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$; 3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -2$; 4) $f(x) = x^2 + \lg 2$, $x_0 = 1$.

Туундуларды тапкыла (**25–29**):

25. 1) $y = 2x^3 - 4x^2 + 5$; 3) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{4}$;

2) $y = 7x^2 - 2x + \sqrt{7}$; 4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

26. 1) $y = (x-2)(x+2)$; 3) $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^2 + \lg 7 + \sin\dfrac{\pi}{9}$.

27. 1) $y = x^8 + 7x^2 + 5x$; 2) $y = 2x^8 + x^6$;

3) $y = \dfrac{x^4}{x^6-1}$; 4) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

5) $y = x^{-2} + \dfrac{1}{x}$; 6) $y = x^4 - 4x$;

7) $y = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$; 8) $y = (x^5 + x^{-5})(x^2 + x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\frac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\text{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\frac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\text{tg}x$;

4) $y=\frac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Материалдык чекиттин берилген t_0 убакыттагы ылдамдыгын тапкыла:

1) $s(t)=t^2+5t+1$, $t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\frac{1}{t}+1$, $t_0=1$.

31. Функциянын берилген чекиттеги туундусун тапкыла:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

32. Туундуну тапкыла:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\text{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\text{tg}x-\text{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\frac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Функциянын x_0 чекиттеги туундусун эсептегиле:

1) $f(x)=\frac{2x+1}{3x-5}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\text{tg}x-x+2$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1)$, $x_0=10$; 4) $f(x)=\text{tg}x-\frac{1}{2}\ln x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

34. Туундуну нөлгө айландыруучу чекитин тапкыла:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\text{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\frac{x}{\ln 2}$.

10–12

ТАТААЛ ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

Татаал функция. $y=(x^2+3x)^4$ функциясын карап чыгалы. Эгер биз $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ белгилөөлөрдү киритсек, $y=(x^2+3x)^4$ функция $y=f(g(x))$ көрүнүшүнө келет. Биз $y=f(g(x))$ функциясын *татаал функция* дейбиз.

1-мисал. Эгерде $f(x)=x^2$ жана $g(x)=\frac{x-2}{x+3}$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;

4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$ 6) $g(g(-1))$.

△ Берилген функциялардан пайдаланып, эсептөөлөрдү аткарабыз:

1) $f(g(x))=f\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$, мындан $f(g(2))=f\left(\frac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\frac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\frac{16-2}{16+3}=\frac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\frac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-\frac{3}{2}-2}{-\frac{3}{2}+3}=\frac{-3{,}5}{1{,}5}=-\frac{7}{3}$.

Жообу: 1) 0; | 2) 36; | 3) $-\frac{1}{4}$; | 4) $\frac{14}{19}$; | 5) 1; | 6) $-\frac{7}{3}$. ▲

Татаал функциянын туундусу үчүн ушул формула орундуу:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (1)$$

2-мисал. Функциянын туундусун тапкыла (k, b – туруктуу сандар):

1) $f(x) = (kx + b)^n$; 2) $f(x) = \sin(kx + b)$;
3) $f(x) = \cos(kx + b)$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}(kx + b)$.

△ 1) $f(t) = t^n$ жана $t(x) = kx + b$ функцияларга (1) формуланы колдойбуз:

$$((kx+b)^n)' = (t^n)' \cdot (kx+b)' = nt^{n-1} \cdot k = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}.$$

2) $f(t)=\sin t$ жана $t(x) = kx+b$ функцияларга (1) формуланы колдойбуз:

$$(\sin(kx+b))' = (\sin t)' \cdot (kx+b)' = k \cdot \cos t = k \cdot \cos(kx + b).$$

3) $f(t) = \cos t$ жана $t(x) = kx + b$ функцияларга (1) формуланы колдойбуз:

$$(\cos(kx + b))' = (\cos t)' \cdot (kx+b)' = -k \cdot \sin t = -k \cdot \sin(kx + b).$$

4) $f(t) = \operatorname{tg}t$ va $t(x) = kx+b$ функцияларга (1) формуланы колдойбуз:

$$(\operatorname{tg}(kx + b))' = (\operatorname{tg}t)' \cdot (kx + b)' = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot k = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Жообу: 1) $((kx + b)^n)' = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx+b)$;
3) $(\cos(kx+b)'=-k \cdot \sin(kx+b)$; 4) $(\operatorname{tg}(kx+b)'= \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

3-мисал. $f(x) = \sin 8x \cdot e^{(3x+2)}$ функциясынын туундусун тапкыла.

△ Туундуну табуунун 4-эрежеси жана (1) формуланы колдонуп туундуну табабыз:

$$f'(x) = (\sin 8x e^{(3x+2)})' = (\sin 8x)' e^{3x+2} + \sin 8x \cdot (e^{3x+2})' = \cos 8x e^{3x+2} \cdot (8x)' +$$
$$+ \sin 8x e^{3x+2} \cdot (3x+2)' = e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x).$$

Жообу: $e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x)$. ▲

4-мисал. $h(x) = (x^3 + 1)^5$ функциясынын $x_0 = 1$ чекиттеги туундусун тапкыла.

△ (1) формуладан пайдаланып туундуну эсептейбиз:

$$h'(x) = 5(x^3+1)^4(x^3+1)' = 5(x^3+1)^4 3x^2 = 15x^2(x^3+1)^4.$$

Демек, $h'(1) = 15(1^3+1)^4 \cdot 1^2 = 15 \cdot 16 = 240$. *Жообу*: 240. ▲

5-мисал. $f(x) = 2^{\cos x}$ функциянын туундусун тапкыла

△ (1) формуладан пайдаланып туундуну эсептейбиз:

$f'(x)=2^{\cos x}\ln 2\,(\cos x)' = -\sin x\, 2^{\cos x}\ln 2$. *Жообу*: $-\sin x\, 2^{\cos x}\ln 2$. ▲

6-мисал. $f(x) = \mathrm{tg}^5 x$ функциянын туундусун тапкыла.

△ (1) формуладан пайдаланып туундуну эсептейбиз:

$f'(x) = 5\,\mathrm{tg}^4 x(\mathrm{tg}\,x)' = 5\mathrm{tg}^4 x\dfrac{1}{\cos^2 x}$.   *Жообу*: $\dfrac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. ▲

7-мисал. $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$ функциянын туундусун тапкыла.

△ $f(x)=3^{\cos x}$ жана $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ белгилөөлөрдү киритип,татаал функциянын туундусун табуунун формуласын колдойбуз:

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}$$

жана $h(x)$ функцияны эки функциянын көбөйтүндүсү иретинде карайбыз:

$$h'(x) = (3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))' = (3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x) +$$
$$+ 3^{\cos x}\cdot(\log_7(x^3+2x))' = -3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Жообу: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Суроо жана тапшырмалар.

1. Татаал функция деп эмнеге айтылат? Мисалдар келтир.
2. Татаал функциянын аныкталуу областы кандай табылат?
3. Татаал функциянын туундусун табуунун формуласын жаза аласыңарбы?
4. Татаал функциянын туундусун табууну 1-2 мисалда көрсөткүлө.

Көнүгүүлөр

35. Эгерде $f(x)=x^2-1$ болсо, көрсөтүлгөн функцияларды тапкыла:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Эгерде $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ болсо, көрсөтүлгөн функцияларды тапкыла:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Эгерде $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Эгерде $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Барабардыктан пайдаланып, $f(x)$ ти тапкыла (**39–42**):

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Туундуну тапкыла (**43–44**):

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;

4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;

7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;

4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;

7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14

ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНЕ ЖҮРГҮЗҮЛГӨН ЖАНЫМА ЖАНА НОРМАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

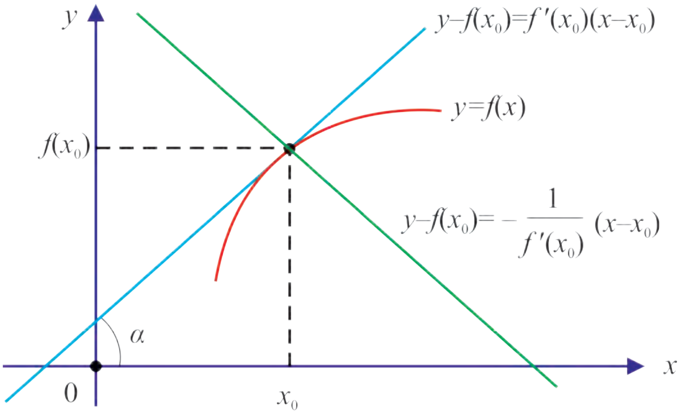
Жаныма теңдемеси. $y=f(x)$ функцияга графигинин $(x_0;\ fx_0))$ чекитинен өтүүчү жаныма теңдемесин табабыз (19- сүрөт). Жаныма түз сызык болгону үчүн анын жалпы көрүнүшү $y=kx+b$ болот. Туундунун геометриялык мааниси боюнча, $k=\text{tg}\alpha=f'(x_0)$, мындайча айтганда жаныма теңдемеси $y=f\ '(x_0)x+b$ көрүнүшүндө болот. Бул жаныма $(x_0;\ fx_0))$ чекитти жанып өткөндүктөн $fx_0)=f(x_0)x_0+b$ болот, мындан $b=fx_0)-f\,f(x_0)x_0$. Табылган b ны жаныма теңдемесине коюп,

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0 \quad \text{же}$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

теңдемени пайда кылабыз:

> $y-f(x_0)=f'\ (x_0)(x-x_0)$ теңдеме $(x_0; f(x_0))$ чекитте $y=f(x)$ функцияга жүргүзүлгөн жаныма теңдемеси болот.



19-сүрөт.

1-мисал. $f(x)=x^2-5x$ функциясына $x_0=2$ чекитке жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

△ Алгач функциянын жана ошол функциядан алынган туундунун $x_0=2$ чекиттеги маанисин табабыз:

$$f(x_0)=f(2)=2^2-5\cdot2=-6, \quad f'(x)=2x-5, \quad f'(2)=2\cdot2-5=-1.$$

Табылган маанилерди (1) теңдемеге коюп, жаныма теңдемесин пайда кылабыз.

$y-(-6)=-1\cdot(x-2)$ же $y=-x-4$. *Жообу:* $y=-x-4$. ▲

2-мисал. $f(x)=x^3-2x^2$ функциясына $x_0=1$ чекитке жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

△ Алгач функциянын жана функциядан алынган туундунун $x_0=1$ чекиттеги маанисин табабыз:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot 1^2=-1, \qquad f'(x)=3x^2-4x, \qquad f'(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1=-1.$$

Табылгандарды (1) теңдемеге коюп, жаныма теңдемесин пайда кылабыз:

$y-(-1)=-1(x-1)$ же $y=-x$. *Жообу:* $y=-x$. ▲

Эгерде $y=f(x)$ функциясынын x_0 чекитине жүргүзүлгөн жаныма $y=kx+b$ түз сызыкка параллель болсо, $f'(x_0)=k$ болот. Бул шарт аркылуу берилген функциянын көрсөтүлгөн түз сызыкка параллель болгон жанымасы табылат.

3-мисал. $f(x)=x^2-3x+4$ функцияи үчүн $y=2x-1$ түз сызыкка параллель болгон жаныма теңдемесин тапкыла.

△ Жаныманын берилген түз сызыкка параллелдүүлүк шарты боюнча, $f'(x_0)=2$ же болбосо $2x_0-3=2$ теңдемени пайда кылабыз. Бул теңдемеде $x_0=2,5$ болгондуктан жаныма теңдемеси абциссасы $x_0=2,5$ болгон чекиттен өтөт. Эсептөөлөрдү аткарабыз:

$$f(x_0)=f(2,5)=2,5^2-3\cdot 2,5+4=6,25-7,5+4=2,75$$

$$f'(x_0)=f(2,5)=2.$$

Бул жерден жаныма теңдемесин табабыз:

$$y-2,75=2(x-2,5) \text{ же } y=2x-2,25.$$

Жообу: $y=2x-2,25$. ▲

4-мисал. $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ функция графигине $x_0=4$ чекитке жүргүзүлгөн жаныма менен Ox огунун оң багыты пайда кылган бурчтун синусун тапкыла .

△ Алгач функциянын жана функциядан алынган туундунун $x_0=4$ чекиттеги маанисин табабыз:

$$f(x_0)=f(4)=3\cdot 4^3-2\cdot 4^2+3\cdot 4-2=170, \quad f'(x)=3x^2-4x+3,$$

$$f'(4)=3\cdot 4^2-4\cdot 4+3=35.$$

Табылгандарды (1) теңдемеге коюп, жаныма теңдемесин пайда кылабыз:

$y-170=35(x-4)$ же $y=35x+30$.

Туундунун геометриялык мааниси боюнча $\mathrm{tg}\alpha=35$, мындан

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}}}=\frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}=\frac{35}{\sqrt{1+35^2}}=\frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Жообу: $y=35x+30$; $\sin\alpha=\frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

5*-мисал. $f(x)=x^2$ параболага абциссаси x_0 болгон A чекиттен жүргүзүлгөн жаныма Ox огун $\frac{1}{2}x_0$ чекитте кесип өтөт. Ушул теореманы далилдегиле.

△ $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Жаныма теңдемеси (1) боюнча $y=2x_0\cdot x-x_0^2$ болот. Анын Ox менен кесилишүү чекити $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ экендиги белгилүү. Мындан $y=x^2$ парабола абциссаси x_0 болгон A чекитте жүргүзүлгөн жаныманы жасоо усулу келип чыгат: A чекит жана $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ чекит аркылуу өтүүчү түз сызык $y=x^2$ пароболага A чекитке жанынма өтөт.

Нормалдык теңдемеси. $y=f(x)$ функциясы графигине $x=x_0$ абциссалуу чекитте жүргүзүлгөн жаныма $x=x_0$ чекитте перпендикуляр болгон

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

түз сызыкка $y=f(x)$ функция графигинин x_0 абссиссалуу чекитте жүргүзүлгөн нормалдык деп аталат (19- сүрөт).

6-мисал. $f(x)=x^5$ функция графигине $x_0=1$ абссиссалары чекитте жүргүзүлгөн нормалдык теңдемесин түзгүлө.

△ Туундунун формуласы боюнча $f'(x)=5x^4$ болот. Функция жана анын туундусунун $x_0=1$ чекиттеги маанисин эсептейбиз: $f(1)=1^5=1$ жана $f'(1)=5\cdot 1^4=5$. Бул маанилерди нормалдык теңдемесине коёбуз жана $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ же $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ теңдемени пайда кылабыз.

Жообу: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Эскертүү: $f(x)=x^5$ функция графигине $x_0=1$ чекитке жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси $y=5x-4$ болот (далилдегиле!). Жаныма жана нормалдык бурчтук коэффициентинин көбөйтүндүсү $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$ экендигине көңүл бургула.

? Суроо жана тапшырмалар

1. $y=f(x)$ функция графигине x_0 жүргүзүлгөн жаныма теңдемесин жазгыла.

2. $y=f(x)$ функция графигине x_0 жүргүзүлгөн нормалдык теңдемесин жазгыла.

3. Берилген функциянын кандайдыр бир түз сызыкка параллель болгон жанымасы кандай табылат? Мисалдарда түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

45. Берилген функциянын абциссасы $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$ болгон чекитте жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин тапкыла:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-4$; 3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$; 8) $f(x)=\sin x$; 9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$; 11) $f(x)=e^x x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Берилген функциялардын $y=7x-1$ 1 түз сызыкка параллель болгон жаныма теңдемесин жазгыла:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Берилген $f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын жанымалары параллель боло турган чекиттерд тапкыла:

1) $f(x)=3x^2-5x+4$, $g(x)=4x-5$;
2) $f(x)=8x+9$, $g(x)=-5x+8$;
3) $f(x)=7x+11$, $g(x)=7x-9$;
4) $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x^2+5$;
5) $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=5x-7$;
6) $f(x)=x^4+11$, $g(x)=x^3+10$.

48. Берилген функцияга абциссасы a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = -2$; d) $x_0 = 0$ болгон чекитке жүргүзүлгөн нормалдык теңдемесин тапкыла:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$;
2) $f(x)=3x-40$;
3) $f(x)=7$;
4) $f(x)=x^3-10x$;
5) $f(x)=e^x$;
6) $f(x)=12^x$;
7) $f(x)=\sin x$;
8) $f(x)=\cos x$;
9) $f(x)=\cos x-\sin x$;
10) $f(x)=e^{\pi x}$;
11) $f(x)=x\cdot\cos x$;
12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

Текшерүү ишинин үлгүсү

I вариант

1) $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ функциясы үчүн $x_0=2$ жана $\Delta x=0{,}1$ болгондо функциянын өсүндүсүнүн аргумент өсүндүсүнө болгон катышын тапкыла.

2) $f(x)=-8x^2+4x+1$ функциясынын $x_0=-3$ чекиттеги туундусун тапкыла.

3) $f(x)=x^3-7x^2+8x-5$ 5функцияга $x_0=-4$ чекитке жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

4) Материалдык чекит $s(t)=8t^2-5t+6$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө. Эгерде t – секунд, s – метрлерде өлчөнө турган болсо, чекитте $t_0=8$ секунддагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты тапкыла.

5) Көбөйтүндүнүн туундусун тапкыла: $(3x^2-5x+4)\cdot e^x$.

II вариант

1) Тийиндинин туундусун тапкыла: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2) Татаал функциянын туундусун тапкыла: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3. $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ функциянын $x_0=\dfrac{1}{16}$ чекиттеги маанисини эсептегиле.

4. $f(x)=\ln(x+1)$ функция графигине $x=0$ чекитте өткөрүлгөн жаныма теңдемесин жазгыла.

5. $s(t)=0{,}5t^2-6t+1$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенип жаткан материалдык чекиттен $t=16$ секунддагы ылдамдыгын тапкыла. (t – секундда, s – метрлерде өлчөнөт).

15–17

МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУ

49. $y=f(x)$ функциянын берилген, x_0 жана x чекиттери үчүн h жана Δy терди эсептегиле:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; | 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Эгерде $x_0 = 3$ жана $\Delta x = 0{,}03$ болсо, берилген функциялар үчүн: a) функция өсүндүсүн; b) функция өсүндүсүнүн аргумент өсүндүсүнө болгон катышын тапкыла:

1) $f(x)=7x-5$; 2) $f(x)=2x^2-3x$; | 3) $f(x)=x^3+2$; | 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Эгерде $x_0=2$ жана $\Delta x=0{,}01$ болсо, берилген функциялар үчүн: а) функция өсүндүсүн; б) функция өсүндүсүнүн аргумент өсүндүсүнө болгон катышын тапкыла:

1) $f(x)=-4x+3$; | 2) $f(x)=-8$; | 3) $f(x)=x^2+10x$; | 4) $f(x)=x^3-10$.

52. $x\to0$ болсо, функция кайсы санга умтулат

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;

5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;

8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Функциянын туундусун: а) $x = -3$; б) $x = 1{,}1$; с) $x = 0{,}4$; д) $x = -0{,}2$ чекиттерде эсептегиле:

1) $y=15x$; | 2) $y=9x+3$; | 3) $y=-20$; | 4) $y=5x^2+x$;

5) $y=-8x+4$; | 6) $y=8x-x^2$; | 7) $y=x^2+25x$; | 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. $y=f(x)$ функция туундусунун аныктамасы боюнча тапкыла:

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. $y=f(x)$ функциянын x_0 чекиттеги туундусун тапкыла:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ x_0=1;$ 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°,\ x_0=-1;$

3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1),\ x_0=4;$ 4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1},\ x_0=-3.$

57. Материалдык чекит $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө (s метрде, t – секундда). Материалдык чекиттин 2-секунддагы ылдамдыгын тапкыла.

58. Функциянын туундусун тапкыла:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x};$ 2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3;$

3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot\mathrm{tg}x-\log_3 x;$ 4) $y=(2x+3)^3;$

5*) $y=x\cdot\ln x\cdot(x+1);$ 6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2);$

7) $y=\frac{x+2}{\sin x};$ 8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°;$

9) $y=3^{-x}\cdot\sin x;$ 10*) $y=\mathrm{tg}x\cdot\cos x+7^x\cdot x^7;$

11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3;$ 12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5;$

13) $f(x)=x^{10}-80x;$ 14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}.$

59. Функция туундусунун x_0 чекиттеги маанисин эсептегиле:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x},\ x_0=0;$ 2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x,\ x_0=1;$

3) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2},\ x_0=1;$ 4) $f(x)=e^x(x-\ln 2),\ x_0=\ln 2.$

60*. $f'(x)>0$ барабарсыздыкты чыгаргыла:

1) $f(x)=x\cdot\ln 27-3^x;$ 2) $f(x)=\sin x-2x;$

61. Материалдык чекит $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө.

Материалдык чекиттин ылдамдыгы качан нөлгө барабар болот? Мунун мааниси эмне?

62. Туундуну тапкыла: 1) $y=x^5-x^4+x$; 2) $y=\frac{1}{x^2}-x$; 3) $y=x^4+\sqrt[5]{x}$.

63. Материалдык чекиттин t_0 убакыттагы ылдамдыгын тапкыла:

1) $x(t)=t^4-2t^3+t$, $t_0=-5$; 2) $x(t)=-5t+t^2-\sqrt{t}$, $t_0=4$.

Туундуну тапкыла (**64–66**):

64. 1) $y=(x+2)(x^2-5x)$; 2) $y=\frac{x^2-3x}{x+8}$; 3) $y=(x^4+\sqrt{x})(x^3-5x)$;

4) $y=2x^3+4x^2+5x$; 5) $y=\frac{14}{x}-\frac{x}{14}$; 6) $y=7x^2+12x+\sqrt{2019}$.

65*. 1) $y=\frac{x^8}{\mathrm{x}^{10}-1}$; 2) $y=\frac{x^3+x+1}{x^5+7}$; 3) $y=(x^{10}+x^{-10})(x^8+x^{-8})$.

66*. 1) $y=\frac{3^x\cdot\sin x}{\cos x}$; 2) $y=e^{5x}(\cos x-\sin x)$;

3) $y=x\mathrm{ctg}x$; 4) $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Туундуну x_0 чекитте эсептегиле:

1) $f(x)=\frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=\mathrm{ctg}x-2x+2$, $x_0=\frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x)=x^2(\lg x-1)$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{20}\ln x$, $x_0=1$.

68*. Татаал функциянын туундусун тапкыла:

1) $x^2\cdot\sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\mathrm{ctg}x$;

4) $\mathrm{tg}^{35}x$; 5) $e^{\mathrm{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5-6x+4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\mathrm{tg}x$;

12) $\frac{x^3+7x+1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

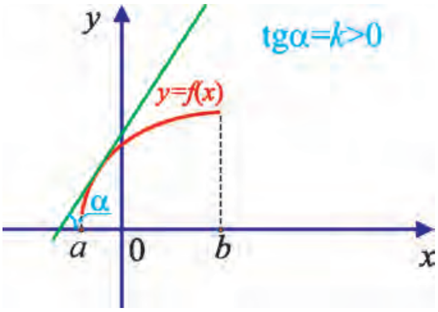
18–21

ТУУНДУ ЖАРДАМЫНДА ФУНКЦИЯНЫ ТЕКШЕРҮҮ ЖАНА ГРАФИКТЕРДИ ТҮЗҮҮ

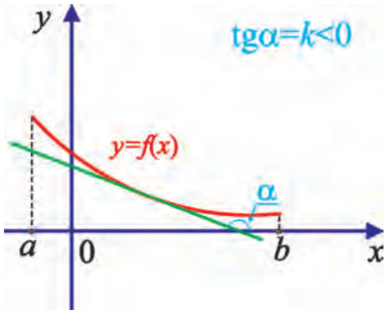
Функциянын өсүшү жана кемүүсү. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар менен таанышсыңар.Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын аныктоо үчүн туунду түшүнүгүнөн пайдаланабыз.

1-теорема. $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта аныкталган жана туундуга ээ болсун. Эгерде $x \in (a; b)$ үчүн $f'(x) > 0$ болсо, $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта өсүүчү функция болот (20- сүрөт).

2-теорема. $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта аныкталган жана туундуга ээ болсун. Эгерде $x \in (a; b)$ үчүн $f'(x) < 0$ болсо, $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта кемүүчү функция болот (21- сүрөт).



20-сүрөт.



21-сүрөт.

1-2-теоремаларды далилдөөсүз кабыл кылабыз.

1-мисал. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

△ Бул функция $(-\infty; +\infty)$ аралыкта аныкталган. Анын туундусу:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1).$$

$f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгарып , $(-\infty; -1)$ жана $(2; +\infty)$ аралыктарда функциянын өсүшү жана $(-1; 2)$ аралыкта функциянын кемүүсүн билип алабыз.

Жообу: $(-\infty; -1)$ жана $(2; +\infty)$ аралыктарда функция өсөт; $(-1; 2)$ аралыкта болсо функция кемүүчү болот. ▲

2-мисал. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

△ Бул функция $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ аралыкта аныкталган. Анын туундусу: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x) > 0$, же $1-\frac{1}{x^2}>0$ барабарсыздыктарды интервалдар усулу менен чыгарып туундунун $(-\infty; -1)$ жана $(1; +\infty)$ аралыктарда оң экендигин табабыз. Ушуга окшош, $f'(x)<0$, же $1-\frac{1}{x^2}<0$ барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгарып, бул барабарсыздык $(-1; 0)$ жана $(0; 1)$ аралыктарда аткарылышын билип алабыз.

Жообу : функция $(-\infty; -1)$ жана $(1; +\infty)$ аралыктарда өсөт; функция $(-1; 0)$ жана $(0; 1)$ аралыктарда кемийт. ▲

Функциянын стационардык чекиттери. $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралыпта аныкталган болсун.

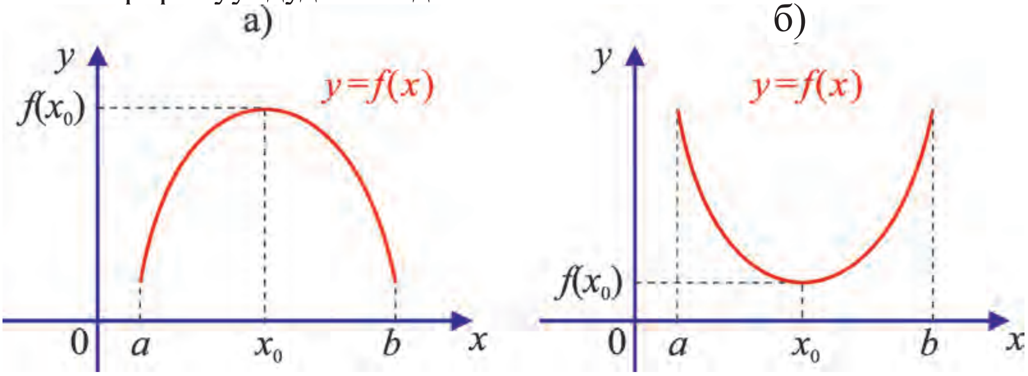
1-аныктама. $y = f(x)$ функциянын туундусу 0 гө тең боло турган чекиттер *стационар чекиттер* деп аталат.

3-мисал. Функциянын стационардык чекиттерин тапкыла: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$.

△ Функциянын туундусун таап,аны нөлгө барабарлайбыз: $f'(x) = 6x^2- 6x - 12 = 0$. Бул теңдемени чыгарып функциянын стационардык чекиттери $x_1=-1$, $x_2=2$ экендигин табабыз.

Жообу: функциянын стационардык чекиттери $x_1= -1, x_2= 2$. ▲

Функциянын локалдык максимум жана минимумдары. Функциянын локалдык максимум жана локалдык минимумдарын аныктоо үчүн туундудан пайдаланабыз.



22- сүрөт.

3-теорема. $f(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта аныкталган жана $f'(x)$ ошол; $(a; x_0)$ аралыктагы $f'(x)>0$ жана $(x_0; b)$ аралыкта $f'(x)<0$ болсун, $x_0\in(a; b)$.

Анда x_0 чекит $f(x)$ функциясынын локалдык максимуму болот. (22-а сүрөт)

4-теорема. $f(x)$ функция (a; b) аралыкта аныкталган жана $f'(x)$ ушул; $(a;x_0)$ аралыктагы $f'(x)<0$ жана $(x_0;b)$ аралыктагы $f'(x)>0$ болсун, $x_0 \in (a, b)$.

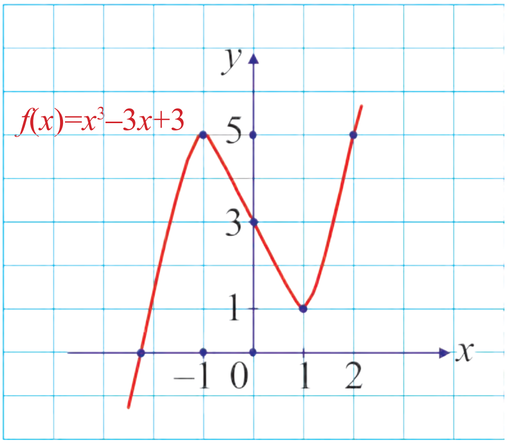
Анда x_0 чекит $f(x)$функциясынын локалдык минимуму болот. (22-б сүрөт)

3, 4-теоремаларды далилдөөсүз кабыл кылабыз.

2-аныктама. Функциянын локалдык максимум жана минимумдары *анын экстремумдары* деп аталат.

4-мисал. Функциянын локалдык максимум жана минимум чекиттерин тапкыла: $f(x)=x^3-3x+3$.

△ Функциянын туундусун табабыз: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Туунду бардык чекиттерде аныкталган жана $x=\pm1$ чекиттерде нөлгө айланат. Ошону үчүн $x=\pm1$ чекиттер функциянын критикалык чекиттери. Интервалдар усулунан пайдаланып (–∞; –1) жана (1; +∞) аралыктарда $f'(x)>0$, (–1; 1) аралыкта болсо $f'(x)<0$ экендигин аныктайбыз. Демек, $x=-1$ локалдык максимум жана $x=1$ локалдык минимум чекиттери экен (23-сүрөт).



23-сүрөт.

Жообу: $x=-1$ локалдык максимум жана $x=1$ локалдык минимум чекит. ▲

Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери менен 10-класстан таанышат.

$f(x)$ функция [a; b] кесиндиде аныкталган жана (a; b) бар болсун. Анын эң чоң маанисин табуу эрежеси ушундай:

1) функциянын ушул аралыктагы бардык стационардык чекиттери табылат;

2) функциянын стационардык, чек аралык a жана b чекиттеги маанилери эсептелет;

3) бул маанилердин эң чоңу функциянын ошол аралыктагы эң чоң мааниси дейилит.

Функциянын эң кичине мааниси да ушундай жол менен табылат.

5-мисал. $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 9$ функциянын $[-4; 2]$ аралыгындагы эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

△ Функциянын туундусун табабыз: $f'(x) = 3x^2 + 9x$. Туундуну нөлгө барабар кылып, функциянын стационардык чекиттерин табабыз: $f'(x) = 3x(x+3) = 0$,

$x_1 = 0$ жана $x_2 = -3$. Функциянын табылган $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ жана $a = -4$, $b = 2$ чекиттердеги маанилерин табабыз:

$f(0) = 0^3 + 4{,}5 \cdot 0^2 - 9 = -9$, $\quad f(-3) = (-3)^3 + 4{,}5 \cdot (-3)^2 - 9 = 4{,}5$,

$f(-4) = (-4)^3 + 4{,}5 \cdot 4^2 - 9 = -1$, $\quad f(2) = 2^3 + 4{,}5 \cdot 2^2 - 9 = 17$.

Демек,функциянын эң чоң мааниси 17 жана эң кичине мааниси –9 экен.

Жообу: функциянын эң чоң мааниси 17 жана эң кичине мааниси –9. ▲

Туунду жардамында функциянын графигин жасоо. Функциянын графигин жасоону төмөнкүдөй удаалаштыкта аткарабыз.

Функциянын:

1) аныкталуу областын;

2) стационардык чекиттерин;

3) өсүү жана кемүү аралыктарын;

4) локалдык максимум жана минимумдарын дагы функциянын ушул чекиттеги маанилерин табабыз;

5) Табылган маалыматтар боюнча функциянын графигин жасайбыз;

Графикти жасоодо функция графигин координата октору менен кесүү жана башка кээ бир чекиттерин табуу максатка ылайыктуу болот.

6-мисал. $f(x) = x^3 - 3x$ функцияны туунду жардамында текшергиле жана анын графигин жасагыла.

1. функция $(-\infty; +\infty)$ аралыкта аныкталган.

2. Стационардык чекиттерин табабыз:

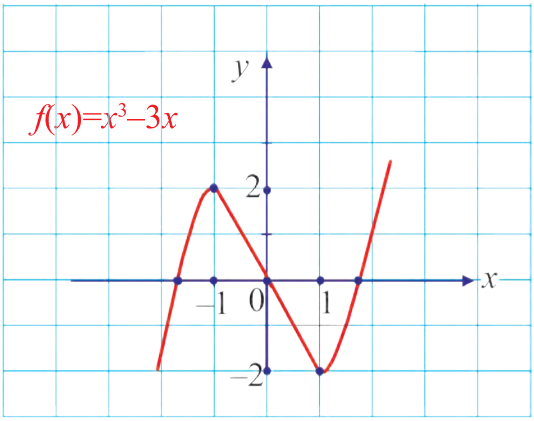
$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0$. $x_1 = 1$ va $x_2 = -1$ стационардык чекиттер.

3. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын табабыз:

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ аралыктарда $f'(x) > 0$ болгону үчүн $f(x)$ функция ушул аралыктарда өсөт жана $(-1; 1)$ аралыкта $f'(x) < 0$ болгону үчүн $f(x) = x^3 - 3x$ функция $(-1; 1)$ аралыкта кемийт.

4. $x=-1$ болгондо функция локалдык максимумга $f(-1)=(-1)^3-3\cdot$ $\cdot(-1)=2$ ге жана $x=1$ болгондо функция локалдык минимум $f(1)=1^3-3\cdot1=-2$ ге ээ.

5. Функциянын Ox огу менен кесилишкен чекиттерин табабыз: $x^3-3x=x(x^2-3)=0$. Мындан $x=0$ же $x^2-3=0$ теңдемелерди пайда кылабыз. Теңдемени чыгарып $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ функция графигинин Ox огу менен кесилишкен чекиттерин табабыз. Натыйжада 24-сүрөттөгү графикти пайда кылабыз.



24-сүрөт.

? Суроо жана тапшырмалар

1. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктары кандай табылат?

2. Функциянын стационардык чекитине аныктама бергиле.

3. Туунду жардамында функциянын локалдык максимум жана минимум аралыктары кандай табылат?

4. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери кандай табылат?

5. Туунду жардамында функциянын графигин түзүү баскычтарын айткыла жана мисалда түшүндүргүлө.

6. Функциянын стационардык чекиттери анын экстремум чекиттери болуусу шартпы, мисалдар келтиргиле.

7. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ функцияны туунду жардамында текшергиле жана графигин жасагыла.

Көнүгүүлөр

69. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла:

1) $f(x)=2-9x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$; 3) $f(x)=x^3-27x$;

4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$; 5) $f(x)=x^2-2x+4$; 6) $f(x)=x(x^2-6)$;

7) $f(x)=-x^2+2x-3$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 9) $f(x)=x^4-2x^2$;

10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$; 11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $f(x)=\sin x$;

13) $f(x)=\cos x$; 14) $f(x)=\mathrm{tg}\,x$; 15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Функциянын стационардык чекиттерин тапкыла:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$; 2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$; 3*) $f(x)=|x-1|$;

4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=8x^3+5x$; 6) $f(x)=3x-4$;

7*) $f(x)=|x|+1$; 8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$; 9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Функциянын локалдык максимум жана минимумдарын тапкыла:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=(x-4)^8$; 3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;

4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$; 5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$; 6) $f(x)=3\,\mathrm{tg}\,x$;

7) $f(x) = 2\sin x + 3$; 8) $f(x) = -5\cos x - 7$; 9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Функциянын өсүү, жана кемүү аралыктарын тапкыла:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$; 3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;

4) $f(x)=5\sin x+13$; 5) $f(x)=15\cos x-7$; 6) $f(x)=-3\mathrm{tg}\,x$.

73. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

1) $f(x)=x^4-8x^2+3,\ x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=3x^5-5x^3+1,\ x\in[-2;2]$;

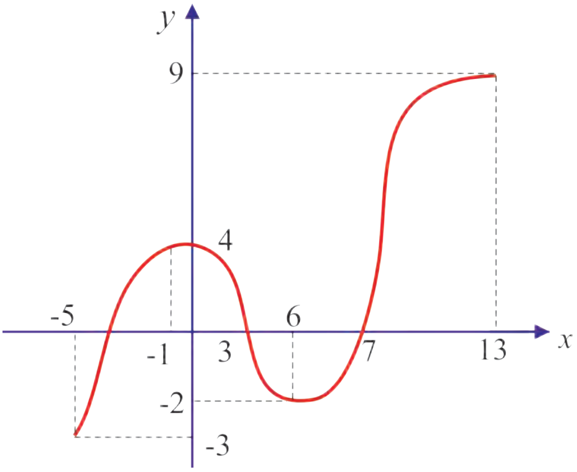
3) $f(x)=\frac{x}{x+1},\ x\in[1;2]$; 4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8,\ x\in[-1;4]$.

74. Функцияны текшергиле жана графигин түзгүлө:

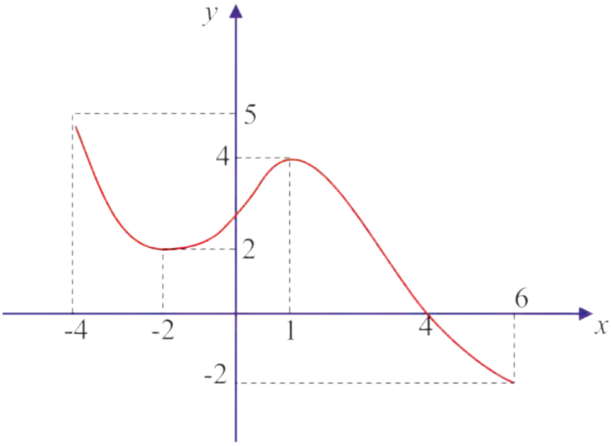
1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2;$ | 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1;$ | 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15.$

75*. Функция туундусунун графигине карап (25, 26- сүрөттөр), төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) стационардык чекиттерди;
2) өсүү аралыктарын;
3) кемүү аралыктарын;
4) локалдык максимумдарын;
5) локалдык минимумдарын.



25-сүрөт.



26-сүрөт.

Текшерүү ишинин үлгүсү

I вариант

1. Туундуну эсептегиле: $f(x) = 20x^3 + 6x^2 - 7x + 3$.

2. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ жана $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ болсо, $f(g(3))$ ди эсептегиле.

3. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ функция үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:
  1) стационардык чекиттерди;
  2) өсүү аралыктарын;
  3) кемүү аралыктарын;
  4) локалдык максимумдарын;
  5) локалдык минимумдарын.

4. Туундуну тапкыла: $(3x + 5)^3 + \sin^2 x$.

5. $f(x) = \sqrt{1-3x}$ болсо $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ ди эсептегиле.

II вариант

1. Туундуну эсептегиле: $f(x) = 10x^3 + 16x^2 + 7x - 3$.

2. $f(x) = x^2 + 6x - 3$ жана $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ болсо, $f(g(3))$ ди эсептегиле.

3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ функция үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:
  1) стационардык чекиттерди;
  2) өсүү аралыктарын;
  3) кемүү аралыктарын;
  4) локалдык максимумдарын;
  5) локалдык минимумдарын.

4. Туундуну тапкыла: $(2x - 6)^3 + \cos^2 x$.

5. $f(x) = \sqrt{1-2x}$ болсо, $f'\left(\frac{3}{8}\right)$ ди эсептегиле.

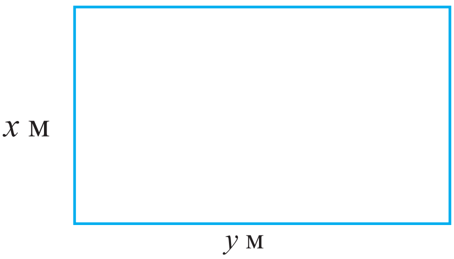
22–25

ГЕОМЕТРИЯЛЫК, ФИЗИКАЛЫК, ЭКОНОМИКАЛЫК МАЗМУНДАГЫ ЭКСТРЕМАЛДЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨ УСУЛДАРЫ

Геометриялык мазмундагы маселелер

1-маселе. Тик бурчтук формасындагы аянтчанын айланасын 100 метр торчо менен курчамакчы болушту. Бул торчо көбү менен канча квадрат метр аянтчаны курчоого жетет?

△ Аянтчанын туурасын x м жана узунун y м болсун (27-сүрөт).

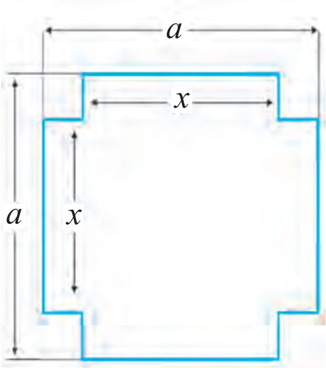


27-сүрөт.

Маселенин шартына ылайык аянтчанын периметри $2x+2y=100$. Бул жерден $y=50–x$. Аянтчанын аянты $S(x)=xy=x(50–x)=50x–x^2$. Маселе $S(x)$ функцияны эң чоң маанисин табууга келтирилет. Алгач $S(x)$ функциянын статционардык чекитин табабыз: $S'(x)=50–2x=0$, мындан $x=25$. $(–\infty; 25)$ аралыкта $S'(x)>0$ жана $(25; +\infty)$ аралыкта $S'(x)<0$ болгон үчүн $S(x)$ функция $x=25$ те эң чоң мааниге ээ болот жана $S(25)=625$. Демек, 100 м торчо жардамында эң көбү менен 625 м^2 жер аянтчаны курчоого болот. *Жообу:* 625 м^2. ▲

Жалпы, периметри берилген бардык төрт бурчтуктар ичинен аянты эң чоңу квадрат болот.

2-маселе. Жагы a см болгон квадрат формасындагы картондон үстү ачык куту даярдалды. Мында картондун чокуларынан бирдей квадраттар кыркып алынды. Кутунун көлөмү эң чоң болушу үчүн анын негизи канча сантиметр болуусу керек?



28-сүрөт.

△ Картондун чокуларынан бирдей квадратчалар кыркып алынып,негизи x см болгон ачык куту жасалган десек (28-сүрөт), Кыркып алынган квадратчанын жагы $\frac{a-x}{2}$ см болот. Ошондуктан ачык кутунун көлөмү $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ см^3. Демек, берилген маселе $V(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ функциянын [0; *a*] кесиндидеги эң чоң маанисин табууга туура келет. *V*(*x*) функциянын стационардык чекиттерин табабыз: $V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax=0$.

Бул жерден $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ стационардык чекиттер табылат. Чындыгында, $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$ жана $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$. Демек, $V(x)$ нын $[0;\,a]$ кесиндидеги эң чоң мааниси $\frac{2}{27}a^3$ болот.

Жообу: Ачык кутунун негиз жагынын узундугу $x=\frac{2}{3}a$ см. ▲

Физикалык мазмундагы маселелер

3-маселе. Материалдык чекит $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө (*s*(*t*) м де*, t s* да өлчөнөт). Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эң чоң ылдамданууга ээ болгон убакытты (t_0);

2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;

3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

△ Материалдык чекиттин ылдамдыгын жана ылдамдануусун табабыз:

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{t^4}{12}+t^3\right)'=-\frac{t^3}{3}+3t^2.$$

Физикадан белгилүү, ылдамдыктан алынган туундунун ылдамдуусун берет, же болбосо:

$$a(t)=v'(t)=-t^2+6t.$$

1) Эң чоң ылдамданууга ээ боло турган t_0 убакытты аныктоо үчүн $a(t)=v'(t)=-t^2+6t$ функциясын максимумга текшеребиз, же болбосо:

$a'(t)=-2t+6=0$ теңдемени чыгарабыз. мындан $t_0=3$. (0; 3) аралыкта $a'(t)>0$ жана $(3;+\infty)$ аралыкта $a'(t)<0$ болгондуктан $t=3$ да $a(t)$ эң чоң мааниге ээ болот.

2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты төмөнкүдөй эсептейбиз: $v(3)=-\frac{3^3}{3}+3\cdot3^2=18\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жол $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ формулага t_0=3 тү коюп эсептелет: $c(3)=-\frac{3^4}{12}+3^3=-\frac{27}{4}+27=\frac{81}{4}=20,25$ м

Жообу: 1) 3 с; 2) $18\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 20,25 м. ▲

4-маселе. Материалдык чекит $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө (s(t) аралык м де, убакыт t сек да өлчөнөт). Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эң кичине ылдамдыкка ээ боло турган убакытты (t_0);

2) t_0 убакыттагы ылдамданууну;

3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

△ Материалдык чекиттин ылдамдыгы жана ылдамдануусун табабыз:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50\right)'=t^2-2t+4,$$

$$a(t)=v'(t)=\left(t^2-2t+4\right)'=2t-2.$$

1) Эң кичине ылдамдыкка ээ боло турган t_0 убакытты аныктайбыз:

$$v'(t)=(t^2-2t+4)'=2t-2=0, \text{ мында } t_0=1.$$

(0; 1) аралыкта $v'(t)<0$ жана $(1;+\infty)$ аралыкта $v'(t)>0$ болгондуктан t_0=1 де $v(t)$ эң кичине мааниге ээ болот.

2) t_0 убакыттагы ылдамданууну эсептейбиз: $a(1)=2\cdot1-2=0$ м/с^2.

3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ формулада t_0=1 ди коюп эсептелет, же $s(1)=\frac{1^3}{3}-1^2+4\cdot1+50=53\frac{1}{3}$ m.

Жообу: 1) 1 s; 2) 0 м/с^2; 3) $53\frac{1}{3}$ м. ▲

5-маселе. Аба шарына $t\in[0;\ 8]$ минута аралыгында $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ (м^3) аба толтурулууда. Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) баштагыч убакыттагы абанын көлөмүн;

2) $t=8$ минутдагы аба көлөмүн;

3) $t=4$ минутдагы аба бүркүч ылдамдагын;

△ 1) Башталгыч убакыттагы абанын көлөмүн табуу үчүн $V(t)=2t^3-\,-3t^2+10t+2$ м³ формулага $t=0$ коюлат,же болбосо $V(0)=2$ м³.

2) $t=8$ минутта убакыттагы абанын көлөмүн табуу үчүн $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ м³ формуласына $t=8$ коюлат, же болбосо:

$$V(8)=2\cdot 8^3-3\cdot 8^2+10\cdot 8+2=1024-192+80+2=914\text{ м}^3;$$

3) аба бүркүч ылдамдыгын табабыз:

$$v\,'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин.}}\right).$$

Демек, $v'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин.}}\right).$

Демек, $a(3)=12\cdot 3-6=30\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин}^2}\right).$

Жообу : 1) 2 м³; 2) 914 м³; 3) $82\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}$. ▲

Экономиклык мазмундагы маселелер

6-маселе. Карима көйнөк тигүү үчүн буюртма алды. Бир айда x көйнөк тиксе, $p(x)=-x^2+100x$ киреше кылат. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1) эң чоң киреше алуу үчүн канча көйнөк тигүүсү керек?

2) эң чоң киреше канча болот?

△ 1) $p(x)=-x^2+100x$ функциясын максимумга текшеребиз:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, мындан $x_0=50$. (0; 50) кесиндиде $p'(x)>0$ жана $(50;+\infty)$ аралыкта $p'(x)<0$ болгондуктан $x_0=50$ болгондо функция эң чоң мааниге ээ болот. Демек, эң чоң киреше алуу үчүн 50 көйнөк тигүү керек болот.

2) Эң чоң киреше канчалыгын табуу үчүн $p(x)=-x^2+100x$ туюнтмага $x_0=50$ нү коёбуз:

$$p(50)=-50^2+100\cdot 50=-2500+5000=2500(\text{миң сум})=2500000\text{ сум.}$$

Жообу: 1) 50 көйнөк; 2) 2 500 000 сум. ▲

? Суроо жана тапшырмалар.

Туундуну колдонуп чыгарыла турган

1) геометриялык; 2) физикалык; 3) экономикалык мазмундагы маселеге мисал келтиргиле.

Көнүгүүлөр

76. Тик бурчтук формасындагы аянтчанын айланасын курчоо керек. 300 м торчонун жардамында эң көбү менен канча квадрат метр аянтты курчоого болот?

77. Тик бурчтук формасындагы аянтчаны айланасын курчоо керек. 470 м торчонун жардамында эң көбү менен канча квадрат метр аянтты курчоого болот?

78*. Жагы 120 см болгон квадрат формасындагы картондон үстү ачык куту даярдалды. Мында картондун чокуларынан бирдей квадратчалар кыркып алынды.Кутунун көлөмү эң чоң болуусу үчүн кыркып алынган квадратчалардын жагы канча сантиметр болууга тийиш?

79*. Консерва банка цилиндр формасында болуп, анын толук бети 216 см^{2}ге барабар. Банкага эң көбү менен суу батышы үчүн банканын негизинин радиусу жана бийиктиги кандай болуусу керек?

80. Тик бурчтук формасындагы жердин аянты 6400 м^2. Жердин жактары кандай болгондо аны курчоо үчүн эң азы менен канча метр торчо керек болот?

81*. Радиусу 5 м болгон шарга эң кичине көлөмдүү конус бетине сызылган.Конустун бийиктигин тапкыла?

82*. Металлдан сыйымдуулугу 13,5 л, негизи квадрат болгон тик бурчтуу параллелепипед жасалууда. Идиштин өлчөмдөрү кандай болгондо аны жасоо үчүн эң аз металл керек болот?

83. Материалдык чекит $s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t^3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, убакыт t сек да өлчөнөт). Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган t_0 убакытты;

2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;

3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

84. Материалдык чекит $s(t)=-\frac{t^4}{2}+12t^3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, убакыт t сек да өлчөнөт).

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган t_0 убакытты;
2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;
3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

85. Материалдык чекит $s(t)=\frac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, убакыт t сек да өлчөнөт).

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган t_0 убакытты;
2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;
3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

86. Материалдык чекит $s(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, убакыт t сек да өлчөнөт). Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган t_0 убакытты;
2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;
3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

87. 87.Аба шарына $t \in [0; 10]$ минута аралыгында $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (м^3) аба толтурулууда.

1) баштапкы убакыттагы абанын көлөмүн;
2) $t=10$ минутадагы абанын көлөмүн;
3) $t=5$ минутадагы аба толдуруу ылдамдыгын;

88. Аба шарына $t \in [0; 15]$ минута аралыгында $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (м^3) аба толтурулууда.

1) баштапкы убакыттагы абанын көлөмүн;
2) $t=15$ минутадагы аба көлөмүн;
3) $t=10$ минутадагы аба толтуруу ылдамдыгын;

89. Муслима шым тигүү үчүн буюртма алды. Ал бир айда x шым тиксе, $p(x)=-2x^2+120x$ миң сум киреше кылат. Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эң чоң киреше калуусу үчүн канча шым тигүүсү керек?
2) эң чоң киреше канча болот?

90. Мухлиса юбка тигүү үчүн буюртма алды. Бир айда x юбка тиксе, $p(x)=-3x^2+96x$ (миң сум) пайда кылат. Төмөнкүлөрдү тапкыла:

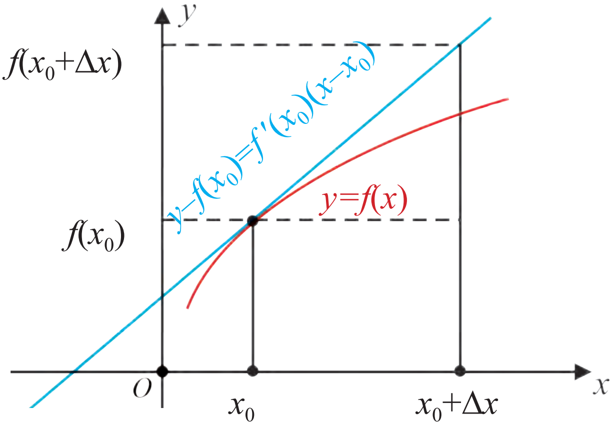
1) эң чоң киреше калуусу үчүн канча юбка тигүүсү керек?
2) эң чоң киреше канча болот?

26–28 ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЭСЕПТӨӨЛӨР

$y=f(x)$ функция x_0 чекитте чектүү $f'(x_0)$ туундуга ээ болсун.

x_0 абсциалуу чекиттен $y=f(x)$ функция графигине жүргүзүлгөн жаныма теңдемеси $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ сыяктуу жазылышын билебиз.

x_0 чекит жанында $y=f(x)$ функция графигин жанымага тиешелүү болгон кесинди менен алмаштырууга болот (29-сүрөткө кара):



29-сүрөт.

$x-x_0$ өсүндүнү Δx деп белгилеп алсак (же болбосо $x=x_0+\Delta x$ деп алсак) төмөнкү жакындаштырылган байланышка ээ болобуз:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ же}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

(1) Жакындаштырылган формула кичине өсүндүлөр *формуласы* деп аталат.

Эскертме. x_0 чекит иретинде $f(x_0), f'(x_0)$ маанилер оңой эсептеле турган чекитти тандап алуу сунушталат.Ошону менен бирге x чекит x_0 ге канчалык жакын болсо, мындай алмаштыруу анык болот.

Эми биз өсүндүлөр формуласына таянып жакындаштырылган эсептөөлөрдү аткарабыз.

1-мисал. $f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$ функциясынын $x=2{,}02$ чекитиндеги маанисин жакындаштырып эсептегиле.

△ $x = 2{,}02$ чекитке жакын болгон $x_0 = 2$ чекитти алсак, бул чекитте $f(x)$ функциянын мааниси оңой эле табылат: $f(x_0) = f(2) = 13$.

Функциянын туундусун табабыз: $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$.

Анда $f'(x_0) = f'(2) = 75$, $\Delta x = x - x_0 = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$ болот.

Демек , (1) формула боюнча $f(2{,}02) = f(2+0{,}02) \approx 13 + 75 \cdot 0{,}02 = 14{,}5$.

Калкульятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $f(2{,}02) \approx 14{,}57995$ маанини пайда кылышыбыз мүмкүн. ▲

2-мисал. $\sqrt{1{,}02}$ тамырдын маанисин жакындаштырып эсептегиле.

△ $f(x) = \sqrt{x}$ функциясын карайбыз.Анын туундусун табабыз:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$x_0 = 1$ деп алсак, $f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1$,

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$ болот.

Демек, (1) формула боюнча

$$\sqrt{1{,}02} = \sqrt{1 + 0{,}02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 1{,}01.$$

Калкульятордун же башка эсептөө каражатынын жардамында $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}0099504938...$ маанисин пайда кылышыбыз мүмкүн. ▲

3-мисал. $\sqrt[3]{7.997}$ нин маанисин жакындаштырып эсептегиле.

△ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясын карайбыз. Анын туундусун табабыз:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$x_0 = 8$ деп алсак, $f(x_0) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$,

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12},$$

$\Delta x = 7{,}997 - 8 = -0{,}003$ болот.

Демек, (1) формула боюнча

$$\sqrt[3]{7,997} = \sqrt[3]{8+(-0,003)} \approx 2 - \frac{0,003}{12} = 1,9997 .$$

Калкульятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $\sqrt[3]{7.997} \approx 1,9997499687...$ маанини пайда кылуу мүмкүн. ▲

4-мисал. sin 29° тун маанисин жакындаштырып эсептегиле.

△ $f(x)=\sin x$ функциясын карайбыз.Анын туундусун табабыз: $f'(x)=\cos x$.

$x_0=\frac{\pi}{6}$ деп алсак, $f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180}$ болот.

Демек, (1) формула боюнча

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{180}\right)\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{180} \approx 0,484... .$$

Калкульятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $\sin 29^{\circ} \approx 0,4848096202...$ маанини пайда кылабыз. ▲

5-мисал. Логарифмдерди эсептөө үчүн кичине өсүндү формуласын келтиребиз.

△ $f(x)=\ln x$; $f'(x)=\frac{1}{x}$. (1) ге боюнча, $\ln(x_0+\Delta x)\approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$ — кичине өсүндүлөр формуласын пайда кылабыз.

Эгерде $x_0=1$ жана $\Delta x=t$ болсо , $\ln(1+t)\approx t$ болот.
Мындан, мисалы, $\ln 1,3907=\ln(1+0,3907)\approx 0,3907$ маанисин алабыз.

Эгерде $x_0=0$, же болбосо $\Delta x = x - x_0 = x$ болсо, (1) кичине өсүндүлөр формуласы

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \tag{2}$$

көрүнүшүнө келет. ▲

Класста аткарылуучу тапшырма. (2) формулага негизделип, x жетишерлүү кичине болгондо

$\sin x\approx x$, $\mathrm{tg}\,x\approx x$, $e^x\approx 1+x$, $(1+x)^m\approx 1+mx$, ошондой эле, $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$ жакындаштырылган формулаларды пайда кылгыла.

6-мисал. $\dfrac{1}{0{,}997^{30}}$ туюнтманы жакындаштырып эсептегиле.

△ $(1+x)^m \approx 1+mx$ формуласынан пайдаланабыз:

$$\frac{1}{0{,}997^{30}}=(1-0{,}003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0{,}003)=1+0{,}09=1{,}09.$$

Калкульятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $\dfrac{1}{0{,}997^{30}}\approx 1{,}0943223033...$ маанини пайда кылуу мүмкүн. ▲

$(1+x)^m \approx 1+mx$ жакындаштырылган формуладан пайдаланып тамырларды бат эсептөө усулун сунуш кылууга болот.

Чындыгында эле, n – натуралдык сан болуп, $|B|$ саны $|A^n|$ ге салыштырмалуу жетишерлүү кичине болсун.

Анда

$$\sqrt[n]{A^n+B}=A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right) \text{ же}$$

$$\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Мисалы, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\dfrac{6}{3\cdot 5^2}=5{,}08.$

Калкульятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $\sqrt[3]{125}=5{,}0788...$ маанини пайда кылуу мүмкүн.

(2) Формулага негизделип, x жетишерлүү кичине болгондо $cosx$ тин маанисин жакындаштырып эсептейли. $(\cos x)'=-\sin x$ болгондуктан $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ формула $\cos x\approx \cos 0-(\sin 0)x=1$, же болбосо $\cos x\approx 1$ көрүнүшүнө келет. Көрүнүп турган, мындай “жакындаштырылган” формула бизди канааттандырбайт. Ошону үчүн, башкача иш тутабыз. Негизги тригонометриялык теңдештиктен $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ барабардыкты пайда кылабыз

Жогоруда айтылгандай, x жетишерлүү кичине болгондо $\sin x\approx x$ болот. Демек, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\approx\sqrt{1-x^2}$.

Белгилүү, x жетишерлүү кичине болгондо x^2 да кичине болот.

Демек, $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ формуладан $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$ формула келип чыгат, же болбос $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ формула орундуу болот.

7-мисал. cos44° ту жакындаштырып эсептегиле.

△ $\cos(x–y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ болгондуктан

$$\cos 44° = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}). \quad \cos\frac{\pi}{180} \approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{180})^2 = 0{,}9998476...,$$

$$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0{,}0174532....$$

Демек, $\cos 44° \approx 0{,}7193403...$.

Калькулятор же башка эсептөө каражатынын жардамында $\cos 44° \approx 0{,}7193339...$ маанини пайда кылуу мүмкүн.

? Суроо жана тапшырмалар

1. Кичине өсүндүлөр формуласын жазгыла.
2. Кичине өсүндүлөр формуласына мисалдар келтиргиле.

Көнүгүүлөр

91. $f(x)$ функциясынын x_1 жана x_2 чекиттердеги маанисин жакындаштырып эсептегиле:

а) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2{,}016$, $x_2=0{,}97$;
b) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1{,}995$, $x_2=0{,}96$;
d) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3{,}02$, $x_2=0{,}92$;
e) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5{,}04$, $x_2=1{,}98$.

$(1+x)^m \approx 1+mx$ жакындаштырылган формуладан пайдаланып,сандуу туюнтманын маанисин эсептегиле (**92–93**):

92. а) $1{,}002^{100}$; б) $0{,}995^6$; д) $1{,}03^{200}$; е) $0{,}998^{20}$.

93. а) $\sqrt{1{,}004}$; б) $\sqrt{25{,}012}$; д) $\sqrt{0{,}997}$; е) $\sqrt{4{,}0016}$.

Жакындаштырылган формуладан пайдаланып эсептегиле (**94 – 97**):

94. а) tg 44°; б) cos 61°; д) sin 31°; е) ctg 47°.

95. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-0,02\right)$;

с) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-0,05\right)$.

96. а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; б) $\frac{1}{0,996^{40}}$; д) $\frac{1}{2,0016^{3}}$; е) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

97. а) ln0,9; б) $e^{0,015}$; д) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

$y=f(x)$ тин жакындаштырылган маанилерин эсептегиле

(**98 – 106**):

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$, $x=1,021$.

101. $y=x^4$, $x=0,998$.

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 ТУУНДУ ЖАРДАМЫНДА МОДЕЛДЕШТИРҮҮ

10-класста (79-81- тема) бактериялар санынын көбөйүү процессин үйрөнгөнсүнөр. Эми бул кубулушка башкача жандашабыз.

1-маселе. Ар бир бактерия белгилүү убакыттан (бир нече саат, же болбосо секунддардан) кийин экиге бөлүнөт жана бактериялар саны эки эсе көбөйөт. Кийинки убакыттан соң эки бактерия дагы эки бөлүккө ажырайт жана популяция өлчөмү (бактериялар жалпы саны) дагы эки эсе көбөйөт… Мындай көбөйүү процесси ыңгайлуу шарттарда (популяция үчүн зарыл ресурстар, жай, суу, азык, энергия ж б) улана берет дейли.

Бактериялардын ***көбөйүү ылдамдыгы*** бактериялардын жалпы санына пропорциялаш деп элестетебиз.

Бактериялар популяциясынын саны каалагандай t убакытка салыштырмалуу кандай өзгөрөт?

△ $b(t)$ деп t убакыт аралыгында бактериялар популяциясынын жалпы санын белгилейбиз.

Туундунун маанисине ылайык, бактериялардын көбөйүү ылдамдыгы $b'(t)$ га барабар

Элестеткендей, каалагандай t убакытта $b'(t)$ чоңдук $b(t)$ чоңдукка пропорциялаш, же болбосо

$$b'(t)=kb(t) \tag{1}$$

байланыш орундуу. Бул жерде k – пропорционалдуулук коэффициенти.

$b_0=b(0)$ – башталгыч $t=0$ убакыттагы популяция саны болсун.

Көрүнүп тургандай, $b(t)=b_0e^{kt}$ функция (1) ди канааттандырат.

Чындыгында, $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Алгач 10 миллион бактерия болсо (b_0=10 млн), мындай бактериялар саны бир сааттан кийин $b(1)=10e^k=20$ (млн) го барабар болот, же болбосо $e^k=2$. Мындан $k=\ln 2$ ге ээ болобуз.

t убакыт аралыгында бактериялар популяциясынын санын табалы:

$$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^t \text{ (млн)}.$$

Бул натыйжа 10- класста алынган натыйжа менен бирдей болуп жатат. ▲

Тарыхый маалымат. 18-кылымда англис окумуштуусу Томас Малтус жогорудагы пикирлерге окшош пикир жүргүзүп,жер жүзүндөгү калктын санын өсүүсү үчүн

$$N'(t)=kN(t) \tag{2}$$

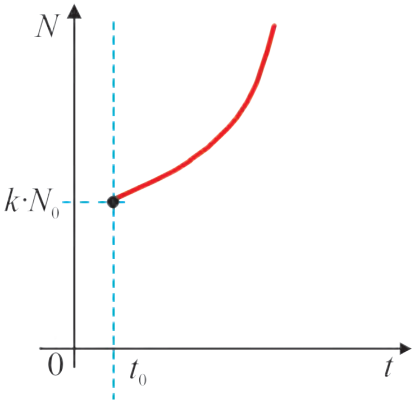
Байланышты пайда кылган,бул жерде $N(t)$ – убакыттын t моментиндеги калктын саны.

$N_0=N(t_0)$ – баштапкы t_0 убакыттагы калктын саны болсун.

Бул учурда $N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ функция (2) теңдемени канааттандырат.

Чындыгында, $N'(t)=\ N_0(e^{k(t-t0)})'=kN_0e^{k(t-t0)}=kN(t)$.

$N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ мыйзам ченемдүүлүк калктын **экспоненциалдык өсүшү**, же болбосо токтоосуз өсүү процессин туюнтууну эсепке алып, Томас Малтус убакыт өтүшү менен адамзатка азык ресурстарынын жетишсиздигин «төлгө» кылгандыгын белгилеп кетебиз (30-сүрөткө карагыла).



30-сүрөт.

2-маселе. Экология тирүү организмдердин сырткы чөйрө менен өз ара байланышын үйрөтөт. Көбөйүү же болбосо түрдүү себептер менен жок болууга байланыштуу популяциялар санынын өзгөрүү ылдамдыгы убакытка кандай байланышта экендигин үйрөнгүлө.

△ $N(t)$ – убакыттын t моментиндеги популяция саны болсун,анда убакыттын бир бирдигине популяцияда пайда боло турган тирүү организмдердин санын A, жок болгондорун B десек, жетиштүү негиз менен N дин убакытка салыштырмалуу өзгөрүшүнүн ылдамдыгы

$$N\ '(t)\ =A-B \tag{3}$$

байланышты канааттандырат.

Изилдөөчүлөр A жана B ны N ге байланышын төмөнкүчө мүнөздөшөт:

а) Эң жөнөкөй учур: $A=aN(t), B=bN(t)$. Бул жерде a жана b – убакыттын бир бирдигине пайда болуу жана жок болуу коэффициенттери.

Бул абалда (3) байланышты

$$N'(t) = (a-b)N(t) \tag{4}$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

$N_0=N(t_0)$ – баштапкы t_0 убакыттагы популяция саны болсун.

Бул абалда $N(t)=N_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$ функция (4) канааттандырат (текшергиле).

b) $A=aN(t)$, $B=bN^2(t)$ абал да учурайт.

Мында

$$N'(t)=aN(t) - bN^2(t) \tag{5}$$

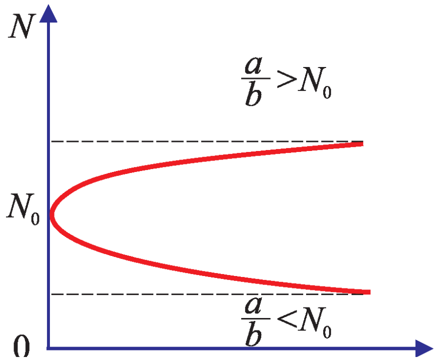
байланыш пайда болот.

Текшерүү мүмкүн, $N(t)=\dfrac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ функция (5) теңдемени канааттандырат. ▲

(4) байланышты 1845-жылы бельгиялык демограф-окумуштуу Ферхюлст популяциядагы ички күрөштү эсепке алып ойлоп табат. Бул натыйжа Малтустун (2) байланышына салыштырмалуу өнүгүүнү анык мүнөздөйт.

Популяциянын өсүү-кемүүсү a жана b сандарга кандай байланыштуу болот деген суроо туулат.

31-сүрөттө $\dfrac{a}{b}>N_0$ жана $\dfrac{a}{b}<N_0$ абалдар үчүн $N(t)=\dfrac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ көрүнүшүндөгү функция графиктери сүрөттөлгөн:



31-сүрөт.

Көрүнүп тургандай ,убакыттын өтүшү менен популяция саны $\frac{a}{b}$ санына жакындашат экен. Бул учур *тоюнуу* деп аталган кубулушту билдирет.

Чиймеде сүрөттөлгөн ийри сызык Малтус тарабынан *логистикалык* ийри сызык деп аталып ,ал адамзат турмушунун түрдүү тармактарында учурап турат.

Функциянын туундусун ошол функция менен байланыштыруучу $y'(x)=F(x;\ y)$ көрүнүшүндөгү байланыш *дифференциалдык теңдеме* деп аталат.

Жогоруда келтирилген (1) – (5) байланыштар дифференциалдык теңдемелерге мисалдар болуп эсептелет.

Дифференциалдык теңдемени канааттандыруучу ар кандай функция анын чечими деп аталат. Жогорку математикада белгилүү шарттарда $y'(x)=F(x,\ y)$ көрүнүшүндөгү дифференциалдык теңдеменин $y(x_0)=y_0$ баштапкы шартын канааттандыруучу жалгыз y(x) чечим бар экендиги далилденген.

3-маселе. Убакыттын t моментинде сатылып жаткан продукция жөнүндө кабардар болгон кардарлар саны $x(t)$ нын убакытка байланыштуу экендигин үйрөнгүлө. (Бул маселе рекламанын натыйжалуулугун аныктоодо керек болот.)

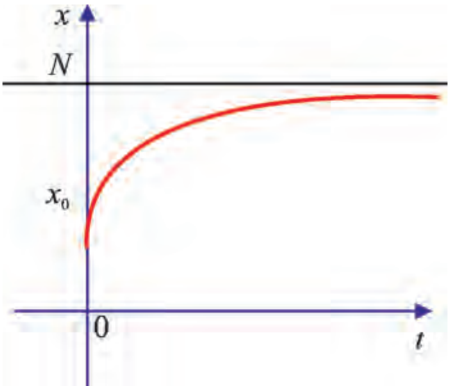
△ Бардык кардарлар санын N деп белгилесек, сатылып жаткан продукциядан кабары жок калгандар саны $N-x(t)$ болот.

Продукция жөнүндө кабардар болгон кардарлар санынын өсүү ылдамдыгы $x(t)$ га жана $N–x(t)$ га пропорционалдуу деп эсептесек, төмөнкү теңдемеге ээ болобуз.

$x'(t)=kx(t)(N–x(t))$, бул жерде $k > 0$ – пропорционалдуулук коэффициенти.

Бул теңдеменин чыгарылышы $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ дан турат, мында $P=\frac{1}{e^{NC}}$, C – туруктуу сан.

Көрүнүп тургандай, ар кандай абалда t убакыт өтүшү менен $Pe^{–Nkt}$ мүчө кичирейип барат жана мындан $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ туюнтманын мааниси N ге жакындашат (32-сүрөткө карагыла). ▲



32-сүрөт.

4-маселе. Массасы *м*, жылуулук сыйымдуулугу с көз карандысыз болгон тело баштапкы моментте T_0 температурага ээ болсун. Абанын температурасы туруктуу жана $(T > \tau)$ га барабар. Телонун чексиз кичине убакыт ичинде берген жылуулугу тело жана аба температуралары арасындагы айырмага, ошондой эле, убакытка пропорционалдуу экендигин эсепке алып, телонун төмөндөө (муздоо) мыйзамын тапкыла.

△ Төмөндөө учурунда телонун температурасы T_0 дөн τ ге чейин төмөндөйт. Убакыттын t моментинде телонун температурасы $T(t)$ га барабар болсун. Чексиз кичине убакыт аралыгында тело берген жылуулук өлчөмү жогоруда айтылгандар боюнча

$$Q'(t) = -k(T-\tau)$$

га барабар, бул жерде k – туруктуу пропорционалдуулук коэффициенти.

Экинчи жактан, физикадан белгилүү болгондой, тело T температурадан τ температурага чейин төмөндөгөндө (муздаганда) бере турган жылуулук өлчөмү $Q = mc(T(t) - \tau)$ га барабар. Туундуну эсептейбиз:

$$Q'(t) = mcT'(t). \tag{6}$$

$Q'(t)$ үчүн табылган эки туюнтманы салыштырып, $mcT'(t) = -k(T-\tau)$ дифференциалдык теңдемени пайда кылабыз.

$$T(t) = \tau + Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

функция (6) дифференциалдык теңдемени канааттандырат(өзүңөр текшергиле), бул жерде C – каалагандай туруктуу сан.

Баштапкы шарт ($t = 0$ da $T = T_0$) C ны табууга мүмкүндүк берет:

$$C = T_0 - \tau.$$

Телонун төмөндөө (муздоо) мыйзамы төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Жообу : $T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

5-маселе. Тандырдан алынган (үзүлгөн) нандын температурасы 20 минута ичинде 100° тан 60° ка чейин төмөндөдү. Сырткы чөйрөнүн температурасы 25°. Нандын температурасы канча убакытта 30° ка чейин төмөндөйт?

△ Жогорудагы маселенин чыгарылышынан пайдаланып, нандын төмөндөө (сууш) законун төмөнкүдөй көрүнүштө жаза алабыз:

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}} = 25 + \left(100 - 25\right) e^{at} = 25 + 75e^{at},$$

бул жерде a – белгисиз коэффициент.

a ны табу үчүн $t = 20$ да $T(20) = 60$ барабардыктан пайдаланабыз:

$$T(20) = 25 + 75e^{20a} = 60,$$

$$75e^{20a} = 35, \quad (e^a)^{20} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}, \quad e^a = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Демек, нандын суушу $T = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ мыйзам ченемдүүлүккө моюн сунат.

Нандын температурасы 30° ка чейин төмөндөө убактысын табабыз:

$$30 = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}, \quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15},$$

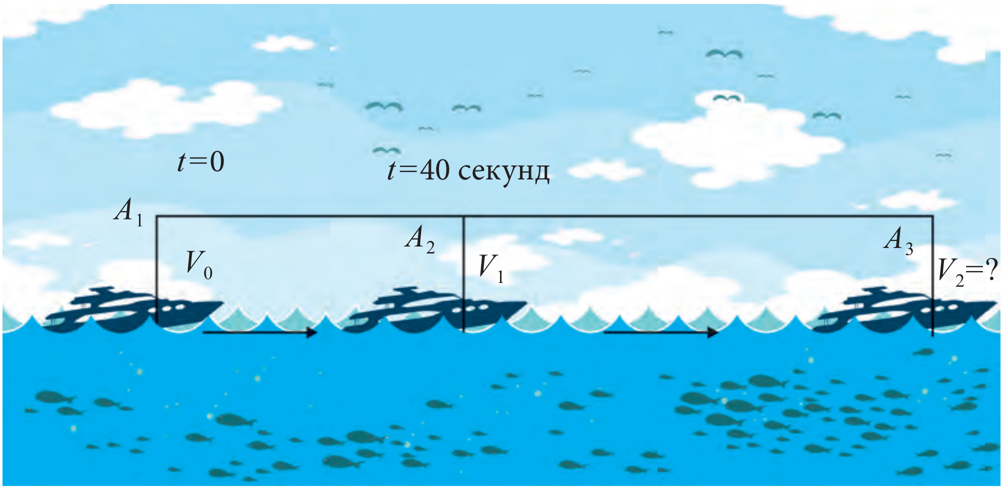
$$\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{t}{20}(\ln(7) - \ln(15))$$

болгондуктан $t^* = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \dfrac{-20 \cdot 2{,}7081}{-0{,}762} \approx 71$.

Жообу: 1 саат 11 минутада нандын температурасы 30° ка төмөндөдү.▲

6-маселе. Моторлуу кайык сууда 20 км/саат ылдамдык менен аракеттенүүдө. Кандайдыр бир убакыттан кийин мотор иштен чыкты. Мотор токтогондон 40 секунда убакыт өткөндөн кийин кайыктын ылдамдыгы 8 км/саат болду.

Суунун каршылыгы ылдамдыкка пропорциялаш болсо, мотор токтогондон 2 минута убакыт өткөндөн кийинки кайыктын ылдамдыгын тапкыла.



33-сүрөт.

△ Кайыкка $F = -kv$ *күч таасир этет.* Ньютон мыйзамы боюнча $F=mv'(t)$ мындан $mv'(t) = -kv$.

Бул теңдемени $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ көрүнүшүндөгү функция канааттандырат.

$t = 0$ дө $v = 20$ шартынан $C = 20$ келип чыгат.

Мындан $v(t) = 20e^{-\frac{r}{m}t}$. $t = 40$ с $= \frac{1}{90}$ саат болгондо кайыктын ылдамдыгы 8 км/саатка барабар, мындан $8 = 20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ же $e^{\frac{r}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}$ дагы

$$t = 2\,\text{мин} = \frac{1}{30} \text{ саат болгондон } v = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28$$

км/с экендигин табабыз.

Жообу: Мотор токтогондон кийин 2 минута өткөндөн кийин, кайыктын ылдамдыгы болжол менен 1,28 км/саат ка барабар. ▲

7-маселе. Реактивдүү жемирилүү натыйжасында радиоактивдүү заттын массасы $m(t)$ нын убакытка салыштырмалуу өзгөрүшүнүн мыйзам ченемдүүлүгүн тапкыла. Бул жерде $m(t)$ грамм, t – жылдарда өлчөнөт.

△ Жемирилүү ылдамдыгы массага пропорционалдуу деп элестетсек

$$m'(t) = -\alpha\, m(t) \qquad (7)$$

дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз. $m(t)=Ce^{-\alpha t}$ функция бул теңдеменин чыгарылышы экендигин текшерүүгө болот.

$m(t_0) = m_0$ баштапкы шарттан $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$ мыйзам ченемдүүлүккө ээ болобуз. Жообу: $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$. ▲

Экономикалык моделдер. Талап жана сунуш экономиканын фундаменталдык негизги түшүнүктөрүнөн бири болуп эсептелет.

Талап (товарлар жана кызматтарга талап) — кардар, керектөөчүнүн базардагы белгилүү товарларды, азыктарды сатып алуу каалосу; базарга чыккан жана акча мүмкүнчүлүктөрү менен камсыздалган каражаттар.

Талап өлчөмүнүн өзгөрүшүнө бир нече факторлор таасир кылат. Алардын арасында эң белгилүүсү нарк фактору болуп эсептелет. Товардын наркынын төмөндөшү сатып алына турган товардын өлчөмүнүн өсүшү жана тескерисинче ,нарктын жогорулушы сатып алуу өлчөмүнүн азайышына алып келет.

Сунуш — белгилүү убакытта жана белгилүү нарктар менен базарга чыгарылган жана чыгарылышы мүмкүн болгон товарлар жана кызматтар өлчөмү менен туюнтулат; сунуш – иштеп чыгаруучу (сатуучу)лардын өз товарларын базарга сатууга болгон тилеги. Базарда товар наркы менен анын сунуш өлчөмү ортосунда өз ара байланыш бар: нарк канчалык жогору болсо, башка шарттар өзгөрбөгөн учурда, сатуу үчүн көбүрөөк товар сунушталат, же болбосо тескерисинче, нарк төмөндөшү менен сунуш көлөмү кыскарат.

Талап жана сунуштун түп мазмуну алардын нарк аркылуу өз ара мамилелеринин пайда болушу. Бул байланыш — талап жана сунуштун мыйзамы базар экономикасынын объективдүү мыйзамы болуп эсептелет. Талап жана сунуш мыйзамы боюнча, базардагы талап жана сунуш бир гана өлчөмдөн эмес, балким өзүнүн составы жагынан бири-бирине дал келүүсү керек, ошондо гана базардын тең салмактуу абалына жетишет Бул мыйзам айырбаштоо мыйзам болуп, базарды башкаруучу жана тартипке салуучу күч даражасына көтөрүлөт. Ага ылайык базардагы талаптын өзгөрүүсү тезинен иштеп чыгарууга жеткирилиши керек. Базардагы талап жана сунуштун катышына карап иштеп чыгаруу темптери системасы пайда болот.

Төмөнкү маселени карап чыгалы.

Фермер узак мөөнөттөн бери мөмөлөрдү базарда сатууга чыгарып келет. Ар аптанын аягында ал нарктын өзгөрүү ылдамдыгын күзөтүп, кийинки аптага чыгарыла турган мөмөлөрдүн жаңы наркын чамалайт.

Куду ушундай керектөөчүлөр да нарктын өзгөрүү ылдамдыгын күзөтүп, кийинки аптада сатып алынып жаткан мөмөлөрдүн өлчөмүн белгилешет.

Кийинки аптада мөмөлөрдүн наркын p аркылуу, нарктын өзгөрүү ылдамдыгын болсо p' аркылуу белгилейли.

Талап да, сунуш да товардын наркы менен анын өзгөрүү ылдамдыгына байланыштуу экендигин ишеним менен айтууга болот. Бул байланыш кандай болот?

△ Мындай байланыштардын эң жөнөкөй көрүнүшү төмөнкүдөй болот: $y=ap'+bp+c$, булл жерде a, b, c – чыныгы сандар.

Мисалы, q аркылуу талапты, s аркылуу болсо сунушту белгилесек алар үчүн жогорудагы байланыштар $q=4p'-2p+39$, $s=44p'+2p-1$ теңдемелер жардамында туюнтулушу мүмкүн.

Талап жана сунуштун өз ара барабардыгы $4p'-2p+39=44p'+2p-1$ байланыш жардамында туюнтулат.

Бул барабардыктан $p'=-\dfrac{p-10}{10}$ көрүнүшүндөгү дифференциалдык теңдемени пайда кылабыз.

Эгерде баштапкы наркты $p(0)=p_0$ деп белгилесек, нарк $p=(p_0-10)e^{-\frac{t}{10}}+10$ мыйзам ченемдүүлүк менен өзгөрүүсүн пайда кылабыз. ▲

Инвестиция. Элестетип көрөлү, кандайдыр бир продукция р нарк менен сатылат, $Q(t)$ функция t убакыт ичинде иштеп чыгарылган продукция өлчөмү өзгөрүүсүн билдирет деп алсак, анда t убакыт ичинде $pQ(t)$ га барабар пайда алынат. Алынган пайданын бир бөлүгү продукция иштеп чыгаруу инвестициясына сарпталган болсо, же болбосо

$$I(t)=mpQ(t)\,, \tag{8}$$

m – инвестиция нормасы, туруктуу сан жана $0<m<1$.

Эгер базар жетиштүү камсыздалган жана иштеп чыгарылган продукция толук сатылган деген элестөөдөн келип чыкса, бул абал иштеп чыгаруу ылдамдыгынын дагы өсүшүнө (акселоторго) алып келет.

Иштеп чыгаруу ылдамдыгы болсо инвестициянын өсүшүнө пропорционалдуу, же болбосо

$$Q'=l\cdot I(t), \tag{9}$$

Бул жерде l – пропорционалдык коэффициенти.

(8) формуланы (9) га коюп

$$Q' = kQ, \quad k = lmp \tag{10}$$

дифференциалдык теңдемени пайда кылабыз.

C – каалагандай туруктуу сан болгондо $Q = Ce^{kt}$ көрүнүштөгү функция (10) дифференциалдык теңдемени канааттандырат.

Элестетип көрөлү, баштапкы момент $t = t_0$ дө продукция иштеп чыгаруу көлөмү Q_0 берилген. Бул шарттан туруктуу C ны табуу мүмкүн:

$$Q_0 = Ce^{kt_0}, \text{ мындан } C = Q_0 e^{-kt_0}.$$

Натыйжада иштеп чыгаруу көлөмү $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ мыйзам ченемдүүлүк менен өзгөрүүсүн пайда кылабыз.

? Суроо жана тапшырмалар

1. Бактериялардын белгилүү убакыттан кийин экиге бөлүнүү процессин туунду жардамында моделдештиргиле.

2. Томас Малтустун жер жүзүндөгү калктын өсүүсүнө карата маселесин түшүндүргүлө.

3. Томас Малтустун логистикалык ийри сызыгын түшүндүргүлө.

4. Реклама натыйжалуулугуна карата берилген маселени туундунун жардамында моделдештиргиле.

Көнүгүүлөр

Тексттеги 4-маселенин чыгарылышынан пайдаланып, төмөнкү маселелерди чыгаргыла. **(107–108)**:

107. Температурасы 25°С болгон металл бөлүгү отко коюлду. Оттун температурасы 25°С тан баштап минутасына 20°С t ылдамдык менен бир калыпта жогорулай баштады. От жана металл температурасынын айырмасы T°С болгондо, металл минутасына 10·T°С ылдамдык менен ысый баштайт. Металл бөлүгүнүн 30 минутадан кийинки температурасын тапкыла.

108. Телонун баштапкы температурасы 5°С. Тело N минута ичинде тело 10°С ге чейин ысыйт. Айлана-чөйрөнүн температурасы 25°С. Тело качан 20°С ге чейин ысыйт?

Тексттеги 7-маселеде чыгарылышынан пайдаланып, төмөнкү маселени чыгаргыла:

109. Тажрыйба боюнча бир жыл ичинде радийдин ар бир граммынан 0,44 мг зат жемирилет

а) канча жылдан кийин радийдин 20% ы жемирилет.

б) радийдин 400 жылдан кийин канча пайызы калат?

Тексттеги 6-маселенин чыгаруудагы ой жүгүртүүлөрдөн пайдаланып **(110 – 111):**

110. Кайык суунун каршылыгынын таасири астында өзүнүн аракетин төмөндөтөт. Суунун каршылыгы кайыктын ылдамдыгына пропорционалдуу. Кайыктын баштапкы ылдамдыгы 1,5 м/с, 4 секундадан кийин анын ылдамдыгы 1 м/с түзөт. Канча секундадан кийин кайыктын ылдамдыгы 2 эсе төмөндөйт?

111. 10 л көлөмдүү идиш аба менен толтурулган (80% азот, 20% кычкылтек). Ушул идиштен бир секундада бир литр ылдамдыкта идиштен чыгууда. Ал үзгүлтүксүз түрдө аралашып, ушул ылдамдык менен идиштен чыгат. Канча убакыттан кийин идиште 95% азоттуу аралашма пайда болот?

Көрсөтмө: $y(t)$ менен t убакыттагы азоттун үлүшүн белгилесек, $y(t)$ функция $y'\cdot V=a(1-y)$ барабардыкты канааттандырат дейбиз. Бул жерде V – ысытуу көлөмү, a – толтуруу ылдамдыгы.

Текшерүү ишинин үлгүсү

1. Негизи квадрат формасында болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы үстү ачык абалда металл идиш жасашууда. Идиштин көлөмү 270 литр болууга тийиш. Идиштин өлчөмдөрү кандай болгондо аны жасоого эң аз металл керек болот?

2. Материалдык чекит $s(t)=-\dfrac{t^4}{4}+72t^3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, t убакыт s те өлчөнөт).

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган убакытты (t_0);
2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамадыкты;
3) t_0 убакыт ичинде басып өтүлгөн жолду.

3. Жакындаштыры эсептөө формуласынан пайдаланып ln 0,92 тапкыла.

4. Жакындаштыр эсептөө формуласынан пайдаланып sin(-1, 2) ни тапкыла.

5. Продукция иштеп чыгаруучу ишкердин күнүмдүк кирешеси төмөнкү формула менен эсептелет:

$P(x)=-3x^2+42x-6$ (миң сум), бул жерде x – продукциялар саны. Төмөнкүлөрдү аныктагыла:

1) эң чоң киреше алуу үчүн ишкер канча продукция чыгаруусу керек?

2) Ишкердин эң чоң кирешеси канча сумду түзөт?

33–36

МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУ

112. Материалдык чекит аракетинин мыйзамы $s=s(t)$ үчүн анын эң чоң жана эң кичине ылдамдыгын тапкыла (эгерде ал бар болсо):

1) $s=13t$; | 2) $s=17t-5$; | 3) $s=t^2+5t+18$; | 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$;
5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; | 6) $s=13t^3+2t^2$; | 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Берилген функция графигине: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2,2$; 3) $x_0=0$ абциссалуу чекиттерде жүргүзүлгөн жаныманы тапкыла:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; | 2) $f(x)=13x+4$; | 3) $f(x)=60$; | 4) $f(x)=x^3+4x$.

114. Берилген функциялардын $y=-7x+2$ түз сызыкка параллель болгон жаныманын теңдемесин жазгыла:

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; | 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; | 3) $f(x)=-8x+5$.

115. Берилген $f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын жанымалары параллель боло турган x_0 чекитти тапкыла:

1) $f(x)=2x^2-3x+4,$ $g(x)=12x-8;$
2) $f(x) = 18x+19,$ $g(x)=-15x+18;$
3) $f(x) = 2x+13,$ $g(x)=4x-19;$
4) $f(x) = 2x^3,$ $g(x)=4x^2;$
5) $f(x) = 2x^3+3x^2,$ $g(x)=15x-17;$
6) $f(x) = 2x^4,$ $g(x)=4x^3.$

116. 1) $y=\dfrac{1}{x}$ функциянын графигинин $x=-\dfrac{1}{2}$ чекитинен өтүүчү жаныма теңдемесин түзгүлө.

2) $y=x^2$ параболанын $x=1$ жана $x=3$ абциссаларына дал келүүчү чекиттер туташтырылган. Функциянын ушул 2 чекитти туташтыруучу кесиндиге параллель болгон жанымасы кайсы чекиттен өтөт?

3) Материалдык чекит $s(t)=\dfrac{2}{9}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{2}+3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө (s – сантиметрде, t – секундда). Материалдык чекиттин 1-секундадагы тездигин тапкыла.

117. Функциялардын көрсөтүлгөн чекиттердеги туундусун тапкыла:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$; 6) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-2$; 8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=-\frac{\pi}{8}$.

118. Берилген убакыттагы ылдамдык жана ылдамдануууну тапкыла:

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$; 2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$; 4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

119. Функциянын абциссасынын көрсөтүлгөн чекиттеги туундусун эсептегиле:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=2$; 4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$; 6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=2$; 8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$; 10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Берилген убакыттагы ылдамдык жана ылдамданууну тапкыла:

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$; 2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$; 4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Берилген функциялардын туундуларын тапкыла (**121–122**):

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; | 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; | 3) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;
4) $f(x)=4^x-\sin x$; | 5) $f(x)=8\cos x$; | 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y=x^4$; 2) $y=\frac{x-1}{x+2}$; 3) $y=x-\frac{20}{x}$; 4) $y=x^2\ln x$;

5) $y=x^3\sin x$; 6) $y=e^x\sin x$; 7) $y=\frac{x+1}{4x^2}$; 8) $y=2(10x-1)\sin x$.

123. Берилген функциялар үчүн $f'(-\frac{\pi}{2})$, $f'(\frac{\pi}{4})$ сандарды эсептегиле:

1) $f(x)=e^x\cos x$; 2) $f(x)=3x+1$; 3) $f(x)=2x^2+x+3$;

4) $f(x)=\sin x+x^2$; 5) $f(x)=\sin x+\cos x$; 6) $f(x)=\sin x$;

7) $f(x)=\cos x+x^4$; 8) $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$.

124. Материалдык чекит $x(t)=-\frac{t^3}{6}+6t^2+15$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө.

1) ылдамдануу нөл болгон t_0 убакытты; 2) ушул t_0 убакыттагы ылдамдыкты тапкыла:.

125*. $f(x)=x^2-13x+2$ функция *Ox* огу менен кандай бурчту пайда кылат?

126. $f'(0)$ санды тапкыла: 1) $f(x)=x^6-4x^3+4$; 2) $f(x)=(x+10)^6$.

127. $y'(x)$ ну тапкыла: 1) $y(x)=\sin^2 x$; 2) $y(x)=\cos^2 x$; 3) $y(x)=\mathrm{tg}^2 x$.

128. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла:

1) $f(x)=3+7x$; 2) $f(x)=x^3+17x$; 3) $f(x)=\frac{1}{4}x+18$;

4) $f(x)=\frac{x+21}{x}$; 5) $f(x)=x^2+5x-14$; 6) $f(x)=x(x^2+8)$;

7) $f(x)=-x^2-4x+6$; 8) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$;

9) $f(x)=x^3-12x^2-17x-23$; 10) $f(x)=3x^4+18x^3-6$;

11) $f(x)=x^3-5x^2+19x+22$; 12) $f(x)=x^4+7x^2$.

129. Функциянын стационардык чекиттерин тапкыла:

1) $f(x)=3x^2-7x+9$; 2) $f(x)=19x-\frac{1}{7}x^3$; 3) $f(x)=5x^3$;

4) $f(x)=8x^2$; 5) $f(x)=7x-14$; 6) $f(x)=27-x^3$;

7) $f(x)=12x^3+13x^2-16$; 8) $f(x)=x^3-6x^2+9$.

130. Функциянын локалдык максимум жана минимумдарын тапкыла:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$; 2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$; 4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Функциянын өсүү ,кемүү аралыктарын жана локалдык максимум жана минимумдарын тапкыла:

1) $f(x)=x^3-64x$; 2) $f(x)=2x^3-24$; 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Функциянын эң чоң жана эң кичине мааниларин тапкыла:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4;\ 1]$; 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1;\ 2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1;\ 5]$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3;\ 4]$.

133. Функциянын графигин жасагыла:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Тик бурчтук формасындагы эгин аянтынын айланасын курчоо үчүн 1000 метр торчо сатып алынды.Бул торчонун жардамында көбү менен канча кв.м аянтты курчоого мүмкүн болот?

135. Жагы 16 дм болгон квадрат формасындагы картондон үстү ачык куту даярдалды. Картондун учтарынан бирдей квадратчалар кыркып алынды.Кутунун көлөмү эң чоң болуусу үчүн анын негизи канча см болуусу керек?

136*. Консерва банка цилиндр формасында болуп, анын толук бети 512π см^2 ка барабар. Банкага эң көп суу батышы үчүн банканын негизинин радиусу жана бийиктиги кандай болушу керек?

137. Тик бурчтук формасындагы жердин аянты 3600 м^2. Жердин жактары кандай болгондо аны курчоо үчүн эң аз торчо зарыл болот?

138*. Радиусу 8 м болгон шарга эң кичине көлөмдүү конус сырттан сызылган .Конустун бийиктигин тапкыла.

139*. Негизи квадрат болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы ачык металл идишке 32 литр суюктук батат. Идиштин өлчөмдөрү кандай болгондо аны жасоо үчүн эң аз металл сарпталат?

140. Материалдык чекит $s(t)=-\frac{t^4}{4}+10t^3$ мыйзам ченемдүүлүк менен аракеттенүүдө ($s(t)$ м де, t сек да өлчөнөт).

1) эң чоң ылдамданууга ээ боло турган убакытты (t_0);
2) t_0 убакыттагы кирпик каккычактагы ылдамдыкты;
3) t_0 убакытта басып өтүлгөн жолду тапкыла.

141. Аба шарына $t\in[0;10]$ минут аралыгында $V(t)=t^3+3t^2+2t+4$ м^3 аба толтурулууда.

1) баштапкы убакыттагы абанын көлөмүн;
2) $t=10$ минутадагы абанын көлөмүн;
3) $t=5$ минутадагы аба толтуруу ылдамдыгын тапкыла.

142. Акрам шым тигүү үчүн буюртма алды.Бир айда x шым тиксе $p(x)=-2x^2+240x$ (миң сум) киреше кылат.

1) кирешенин эң чоң кылуу үчүн канча шым тигүүсү керек?
2) эң чоң киреше канча сум болот?

143. Берилген функциянын туундусун тапкыла:

1) $y=e^{3x}$; 2) $y=e^{\sin x}$; 3) $y=\sin(3x+2)$; 4) $y=(2x+1)^4$;
5) $y=\frac{x-2}{x^2+1}$; 6) $y=\frac{\ln x}{x}$; 7) $y=\operatorname{arctg}2x$; 8) $y=x^2\cdot\cos x$.

144. $f(x)=e^{2x}$ жана $g(x)=4x+2$ функциялар үчүн $F(x)$ татаал функцияны түзгүлө:

1) $F(x)=f(g(x))$; 2) $F(x)=f(x)^{g(x)}$;
3) $F(x)=g(f(x))$; 4) $F(x)=\sqrt{g(g(x))}$.

145. Татаал функциянын туундусун тапкыла:

1) $y=(x^2+1)^5$; 2) $y=\ln\cos x$;
3) $y=\sqrt{5x-7}$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-3)}$;
5) $y=\operatorname{arctg}(3x-4)$; 6*) $y=\sin(\operatorname{arctg}2x)$;
7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла:

1) $y = 2 + x - x^2$;
2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0)$;
3) $y = 3x - x^3$;
4) $y = 2x - \sin x$;
5) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$;
6) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$;
7) $y = (x-1)^3$;
8) $y = (x-1)^4$.

147. Функциянын стационардык чекиттерин ,локалдык максимум жана минимумдарын тапкыла:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;
2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$;
3) $y = x + \dfrac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

148. Функциянын берилген аралыктагы эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

1) $f(x) = 2^x$, $[-1;\ 5]$;
2) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $[-3;\ 10]$;
3) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0{,}01;\ 100]$;
4) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $[-1;\ 1]$;
5) $f(x) = \cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;
6) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $[-10;\ 10]$;
7) $f(x) = \sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;
8) $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$, $[-15;\ 10]$.

149. Функцияны текшергиле жана графигин жасагыла:

1) $y = 3x - x^3$;
2) $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$;
3) $y = (x+1)(x-2)^2$;
4) $y = x + \dfrac{1}{x}$;
5) $y = \sqrt{16 - x^2}$;
6) $y = \sqrt{x^2 - 9}$;
7) $y = x^2 - 5|x| + 6$;
8) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$.

II ГЛАВА. ИНТЕГРАЛ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

37–39 БАШТАПКЫ ФУНКЦИЯ ЖАНА АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛ ТҮШҮНҮКТӨРҮ

Эгерде чекит аракет башталганынан баштап t убакыт ичинде $s(t)$ аралыкты басып өткөн болсо, анын кирпик каккычактагы ылдамдыгы $s(t)$ функциясынын туундусуна барабар экендигин билесиңер: $v(t)=s'(t)$. Практикада тескери маселе чекиттин берилген аракет ылдамдыгы $v(t)$ боюнча анын басып өткөн жолу $s(t)$ ны табуу маселеси да учурайт. Ушундай $s(t)$ функция табуу керек, анын туундусу $v(t)$ болсун. Эгерде $s'(t) = v(t)$ болсо, $s(t)$ функция $v(t)$ функциянын баштапкы функциясы деп аталат. Жалпысынан, ушундай аныктама берүү мүмкүн:

Эгерде $(a; b)$ га тиешелүү каалагандай x үчүн $F'(x)=f(x)$ болсо, $F(x)$ функция $(a; b)$ аралыкта $f(x)$ тин баштапкы функциясы деп аталат.

1-мисал. a – берилген кандайдыр бир сан жана $v(t)=at$ болсо,

$s(t)=\frac{1}{2}at^2$ функция $v(t)$ функциянын баштапкысы, себеби

$$s'(t)=(\frac{at^2}{2})'=at=v(t).$$

2-мисал. $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty; \infty)$, болсо, $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ функция $f(x)$ нын $(-\infty; \infty)$ дагы баштапкы функциясы болот, себеби

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

3-мисал. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, мында $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, функция үчүн $F(x)=\mathrm{tg}x$ баштапкы функция болот, себеби $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

4-мисал. $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$, болсо, $F(x)=\ln x$ функция $\frac{1}{x}$ дин баштапкы функцияси болот, себеби $F'(x)=(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

1-маселе. $F_1(x)=\frac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\frac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\frac{x^4}{4}-25$ функциялар кээ бир $f(x)=x^3$ функциянын баштапкы функциясы экендигин далилдегиле.

△ Туундунун жадыбалы боюнча жазабыз:

1) $F_1'(x)=(\frac{x^4}{4})'=4\cdot\frac{x^3}{4}=x^3=f(x);$

2) $F_2'(x)=(\frac{x^4}{4}+17)'=(\frac{x^4}{4})'+(17)'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x);$

3) $F_3'(x)=(\frac{x^4}{4}-25)'=(\frac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-0=x^3=f(x).$

Бул маселеден ушундай жыйынтыкка келебиз: каалагандай $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ функция (C – кандайдыр бир туруктуу сан) дагы $f(x)=x^3$ үчүн баштапкы функция боло алат. Чындыгында,

$$F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)\ .$$ ▲

Бул маселеден дагы төмөнкүдөй жыйынтыкка келүүгө болот: берилген $f(x)$ функция үчүн анын баштапкы функциясы бир маанилүү аныкталбайт.

Эгерде $F(x)$ функция $f(x)$ тин кандайдыр бир аралыктары баштапкы функциясы болсо, $f(x)$ функциясынын бардык баштапкылары $F(x)+C$ (C – каалагандай туруктуу сан) көрүнүшүндө жазылат. $F(x)+C$ көрүнүшүндөгү бардык функциялар тобу $f(x)$ дин *анык эмес интегралы* деп аталат жана $\int f(x)dx$ сыяктуу белгиленет.

Демек, $\int f(x)dx=F(x)+C.$

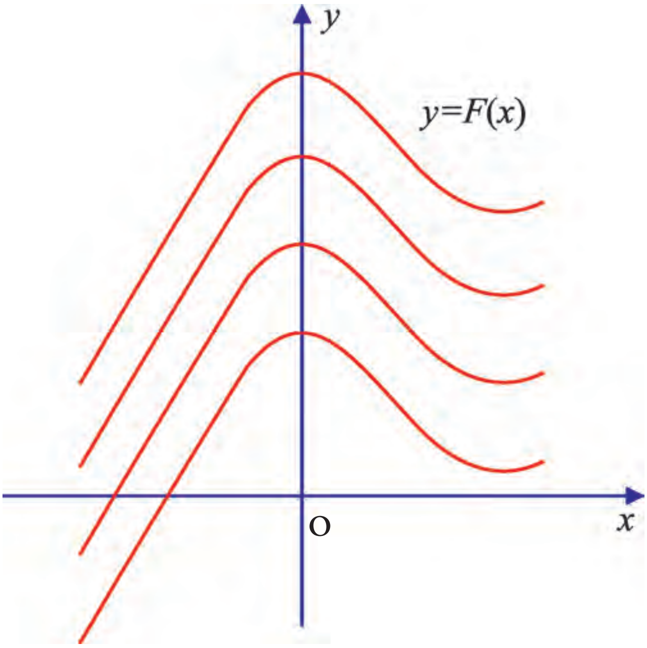
$\int$ – интеграл белгиси, $f(x)$ – интеграл астындагы функция, $f(x)dx$ болсо интеграл астындагы туюнтма деп аталат.

5-мисал. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, себеби туундунун жадыбалы боюнча,

$$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x.$$

6-мисал. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$ себеби $(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' =$ $= \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k$. $k = -1$ болсо, $x > 0$ до 4-4-мисал боюнча, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

$y=F(x)+C$ функциясынын графиги $y=F(x)$ функция графигин Oy огу бойлоп жылдыруудан пайда кылынат (1-сүрөт). Туруктуу сан C ны тандоо эсебинен баштапкы функция графигин берилген чекит аркылуу өтүшүнө жетишебиз.



1-сүрөт.

2-маселе. $f(x)=x^2$ функциянын графигинин $A(3;\ 10)$ чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла.

△ $f(x)=x^2$ функциянын бардык баштапкы функциялары $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ көрүнүшүндө болот, себеби $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2$.

Туруктуу сан С ны $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ функциянын графиги (3; 10) чекиттен өтө турган кылып тандайбыз: $x=3$ тө $F(3)=10$ болуусу керек.

Мындан $10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$.Демек, изделип жаткан баштапкы функция $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ болот. *Жообу :* $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

3-маселе. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функциясынын графиги $A(8;15)$ чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла.

△ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ тин бардык баштапкы функциялары $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+\mathrm{C}$ көрүнүшүндө болот,себеби

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Туруктуу сан C ны тандайбыз, $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ функциянын графиги A(8, 15) чекиттен өтсүн, же болбосо F(8)=15 барабардык аткарылсын. $x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ экендигинен $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, мындан C=3. Демек, изделип жаткан баштапкы функция $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$ болот. *Жообу:* $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

4*-маселе. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ экендигин көрсөткүлө.

△ $x>0$ da $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, себеби $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

$x<0$ da $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, себеби $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Суроо жана тапшырмалар.

1. Баштапкы функция деген эмне? Мисалдар келтиргиле.

2. Берилген $f(x)$ функция үчүн баштапкы функция бир маанилүү табылабы? Эмне үчүн?

3. Баштапкы функция $F(x)$ тин графигин берилген чекиттен өтүүсүнө кандай кылып жетишүү мүмкүн? Мисалдарда түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

1. Чыныгы сандар көптүгү $R=(-\infty;\ \infty)$ да $f(x)$ функция үчүн $F(x)$ функциянын баштапкы функция экендигин далилдегиле:

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $\quad f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2 x+3x$, $\quad f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2 x-7x$, $\quad f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Төмөнкү функциялардын бардык баштапкы функцияларын,туундунун жадыбалынан пайдаланып,тапкыла **(2-6):**

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; | 2) $f(x)=6x^5$; | 3) $f(x)=x^{10}$; | 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sin x$; | 6) $f(x)=\cos x$; | 7) $f(x)=\sin 2x$; | 8) $f(x)=\cos 2x$;

3. 1) $f(x)=4^x$; | 2) $f(x)=\pi^x$; | 3) $f(x)=e^x$; | 4) $f(x)=a^x$;

5) $f(x)=a^{2x}$; | 6) $f(x)=e^{\pi x}$; | 7) $f(x)=10^{3x}$; | 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;

4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; | 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; | 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;

4) $f(x)=\cos 5x$; | 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; | 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; | 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; | 3) $f(x)=(3x+2)^2$; 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Берилген $f(x)$ функция үчүн берилген A чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла:

1) $f(x)=2x+3$, $\quad A(1;\ 5)$; $\quad$ 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $\quad A(0;\ 2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $\quad A(0;\ 3)$; $\quad$ 4) $f(x)=\cos x$, $\quad A(\frac{\pi}{2};\ 5)$.

Берилген $f(x)$ функция үчүн анын баштапкы функциясын тапкыла, бул баштапкы функциянын графиги y түз сызык менен бир гана жалпы чекитке ээ болсун **(8-9):**

8. 1) $f(x)=4x+8$, $y=3$; 2) $f(x)=3-x$, $y=7$,

3) $f(x)=4,5x+9$, $y=6,8$; 4) $f(x)=2x-6$, $y=1$.

9*. $f(x)=ax+b$, $y=k$.

Көрсөтмө: $F(x)=\dfrac{ax^2}{2}+bx+C$, маселенин шартынан жана

$\dfrac{ax^2}{2}+bx+C=k$ квадраттык теңдемеден C ны тапкыла.

$C=\dfrac{2ak+b^2}{2a}=k+\dfrac{b^2}{2a}$ болот.

10*. $f(x)$ үчүн анын баштапкы функциясын тапкыла,бул баштапкы функциянын графиги берилген чекиттерден өтсүн:

1) $f'(x)=\dfrac{16}{x^3}$, $A(1;10)$ va $B(4;-2)$;

2) $f'(x)=\dfrac{54}{x^4}$, $A(-1;4)$ va $B(3;4)$;

3) $f'(x)=6x$, $A(1;6)$ va $B(3;30)$;

4) $f'(x)=20x^3$; $A(1;9)$ va $B(-1;7)$.

Көрсөтмө: Берилген $f'(x)$ боюнча $f(x)+C_1$ табылат. Андан соң $f(x)+C_1$ үчүн баштапкы функциясы $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$ табылат. Берилген чекиттердин координаталарын акыркы барабардыкка коюп, C_1 жана C_2 сандарды табуу үчүн сызыктуу теңдемелер системасына келтирилет.

11*. Берилген $f(x)$ функция үчүн анын ушундай баштапкы функциясын тапкыла жана бул баштапкы функциянын графиги менен $f(x)$ туундусунун графиги абциссасы көрсөтүлгөн чекитте кесилишсин:

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}}$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}}$, $x_0=1$; 4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}}$, $x_0=\dfrac{1-b}{k}$.

12. Берилген $f(x)$ функция үчүн берилген чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла:

1) $f(x)=\frac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$; 2) $f(x)=\frac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;

3) $f(x)=\cos x$, $A(\frac{\pi}{2};\ 8)$; 4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;\ 10)$.

13. $F(x)$ функция сан огунда $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы экендигин көрсөткүлө:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;

2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – o‘zgarmas son;

3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – o‘zgarmas son;

4) $F(x)=\frac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. $f(x)$ функциясынын берилген чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла:

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{3})$; 2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\frac{\pi}{2};\ \frac{4}{5})$;

3) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};\ 1)$; 4) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$, $A(\pi;\ \frac{9}{2})$.

15. $f(x)$ функция үчүн анын берилген теңдемелер системасынын чыгарылышы $(x_о;\ y_о)$ чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла:

1) $f(x) = 3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15;\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\frac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi;\end{cases}$

4) $f(x)=\frac{1}{5x+e;}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43

ИНТЕГРАЛДАР ЖАДЫБАЛЫ. ИНТЕГРАЛДООНУН ЭҢ ЖӨНӨКӨЙ ЭРЕЖЕЛЕРИ

Интегралдар жадыбалын туундулар жадыбалы жардамында түзүү мүмкүн.

№	**Функция** $f(x)$	**Баштапкы функция** $F(x)+C$
1	$x^p, \quad p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p, \quad p \neq -1, \quad k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\dfrac{1}{kx+b}, \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b}, \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b), \ k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b), \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Кандайдыр бир X аралыкта аныкталган $F(x)$ функция $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы болуусу үчүн эки функция тең $F(x)$ жана $f(x)$ ошол X аралыкта аныкталган болуусу керек.

Мисалы, $\frac{1}{5x-8}$ функциянын $5x–8>0$, же $x>1{,}6$ аралыктагы интегралы,жадыбалга ылайык, $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$ га барабар

Дифференциялоо эрежелеринен пайдаланып, интегралдоо эрежелерин баяндоо мүмкүн.

$F(x)$ жана $G(x)$ функциялар кандайдыр бир аралыкта, ылайыктуу түрдө $f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын баштапкы функциялары болсун. Ошол эрежелер орундуу:

1-эреже: $a{\cdot}F(x)$ функция $a{\cdot}f(x)$ функциянын баштапкы функциясы болот, же болбосо

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

2-эреже: $F(x)\pm G(x)$ функция $f(x)\pm g(x)$ функциянын баштапкы функциясы болот, же болбосо:

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=F(x)\pm G(x)+C.$$

1-мисал. $f(x)=5\sin(3x+2)$ функциясынын интегралын тапкыла.

△ Бул функциянын интегралын 1- эреже жана интегралдар жадыбалынын 9-тиркемесине ылайык табабыз:

$$\int f(x)dx = \int 5\sin(3x+2)dx = 5\int\sin(3x+2)dx =$$

$$= 5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C = -\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

Интегралдар жадыбалына ылайык

$$\int\sin(3x+2)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

Жообу: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

2-мисал. $f(x)=8x^7+2\cos 2x$ функциясынын интегралын тапкыла.

△ Бул функциянын интегралын 1- жана 2- эрежелер жана интегралдар жадыбалынын 1- жана 10- тиркемесине ылайык табабыз:

$$\int f(x)dx=\int(8x^7+2\cos 2x)dx=8\int x^7dx+2\int\cos 2xdx$$

$$=8\cdot\frac{1}{8}x^8+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=x^8+\sin 2x+C.$$

Жообу: $x^8+\sin 2x+C.$ ▲

3-мисал. $\int\frac{xdx}{x^2+8}$ интегралын эсептегиле.

△ Ушул сыяктуу мисалдарды чыгарууда өзгөрүүчүнү алмаштыруу ыңгайлуу. Эгерде $x^2+8=u$ деп аталса, $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$ болот. Ушул абалда

$$\int\frac{xdx}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C.$$

Текшерүү: Табылган баштапкы функциядан туунду алынса, интеграл астындагы функция $\frac{x}{x^2+8}$ пайда болуусу керек. Чындыгында эле

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C\right)'=\frac{1}{2}(\ln(x^2+8))'+C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8}=\frac{x}{x^2+8}.$$

Жообу: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8)+C.$ ▲

4-мисал. $\int e^{\sin x}\cos xdx$ интегралын эсептегиле.

△ $\sin x=t$ алмаштырууну аткарбыз. Бул учурда $dt=\cos xdx$ жана берилген интеграл $\int e^t dt$ көрүнүшүнө келет. Интегралдар жадыбалынан 3-тиркемесине ылайык $\int e^t dt=e^t+C$ болот. Демек, $\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+C.$

Текшерүү. $(e^{\sin x}+C)'=(e^{\sin x})'+C'=e^{\sin x}(\sin x)'+0=e^{\sin x}\cos x$ – берилген интеграл астындагы функцияны пайда кылдык.

Жообу: $e^{\sin x}+C.$ ▲

5-мисал. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Мында $2\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$ теңдештик жардам берет. Анда

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Жообу : $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ ▲

6*-мисал. $\int \cos mx \cos nx dx$ интегралды эсептегиле.

△ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ теңдештикке жана интегралдоо жадыбалынын10-тиркемесине ылайык:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Жообу: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$ ▲

7-мисал. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ интегралын эсептегиле.

△ Интеграл астындагы функция үчүн төмөнкү теңдештиктер орундуу

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Мындан

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int (\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2})dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Жообу: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$ ▲

8-мисал. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$ интегралын эсептегиле.

△ Бул интегралды эсептөө үчүн $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ жана $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$ экендигинен пайдаланабыз. Анда

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Текшерүү: $(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\mathrm{tg}\frac{x}{2})'+C'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$ интеграл астындагы функция пайда болот.

Жообу: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$ ▲

9-мисал. $\int\sin^2 2xdx$ интегралын эсептегиле

△ Интегралды эсептөө үчүн $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$ теңдештиктен пайдаланабыз.

$$\int\sin^2 2xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Жообу: $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$ ▲

Суроо жана тапшырмалар.

1. Интегралдар жадыбалынан өзүңөр каалаган төрт мисалды тандагыла жана аны далилдегиле.
2. Интегралдоонун жөнөкөй эрежелерин чечмелеп бергиле. Мисалдарда түшүндүргүлө.
3. Өзгөрүүчү алмаштыруу усулу эмне? $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ интегралын эсептөөдө ушул усулду колдогула жана мисалды чечүү процессин түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

Берилген функциянын баштапкы функцияларынан бирин тапкыла **(16 – 18)**:

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Берилген функциянын баштапкы функцияларын тапкыла **(19 – 20)**:

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^5}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Берилген $f(x)$ функция үчүн графиги $A(x;\ y)$ чекиттен өтүүчү баштапкы функциясын тапкыла:

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};\ 7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};\ 4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ \ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\dfrac{1}{4}\sin 4x,\ A(\dfrac{\pi}{8};\ \dfrac{\pi}{8})$;

6) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x-2\cos\dfrac{x}{2},\ A(2\pi;\ 2\pi)$;

7) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x,\ A(2;6)$; 8) $f(x)=6x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}},\ A(-2;\ 4)$.

Интегралдарды тапкыла (**22 – 28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx$; 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx$;

3) $\int(x^2-\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2})dx$; 4) $\int(4x^3+\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{3})dx$.

23*. 1) $\int(\dfrac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx$; 2) $\int(\dfrac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx$;

3) $\int\sin 2x\cos 2xdx$; 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx$;

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx$; 6) $\int\cos^2 5xdx$.

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3xdx$; 2) $\int\cos 2x\cos 3xdx$; 3) $\int\sin 7x\sin 3xdx$.

25*. 1) $\int\dfrac{x}{x+1}dx$; 2) $\int\dfrac{dx}{x^2-7x+12}$; 3) $\int\dfrac{(x-3)dx}{x^2-4x+3}$; 4) $\dfrac{(x+4)dx}{x^2-16}$.

26. 1) $\int\dfrac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx$; 2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 3) $\int\dfrac{dx}{1+\cos 2x}$;

4) $\dfrac{dx}{1-\cos 2x}$; 5) $\int\dfrac{dx}{4(x^2-4)}$; 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx$.

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx$; 2) $\int\dfrac{xdx}{(1+x^2)^3}$; 3) $\int\dfrac{\mathrm{tg}x}{\cos^3 x}dx$;

4) $\int\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}dx$; 5) $\int\sin^3 xdx$; 6) $\int\cos^3 xdx$.

28*. 1) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx$; 3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)dx$; 5) $\int(\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x)dx$.

Берилген $f(x)$ функция үчүн графиги $A(x; y)$ чекиттен өткөн баштапкы функцияны тапкыла **(29 – 30)**:

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi; 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2}; 3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3}; 0)$;

30. 1) $f(x)=3x^2–2x+8$, $A(1; 9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(–1; 4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(–2; 1)$.

31. Интегралды тапкыла:

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$; 2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$; 3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$; 5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$; 7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Интегралды эсептегиле:

1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Үлгү: $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ интегралды эсептегиле.

△ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; $x+2=u$ десек, $1+(x+2)^2=1+u^2$

$x'=u'$ жана интеграл жадыбалынын 14–15- бөлүмдөрү боюнча

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\mathrm{arctg}u+C=\mathrm{arctg}(x+2)+C.$$

Текшерүү:

$$(\mathrm{arctg}(x+2)+C)'=(\mathrm{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$$

$$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Жообу: $\mathrm{arctg}(x+2)+C$.▲

Интегралдоо эрежелеринен дагы бири бөлүктөп интегралдоо болуп эсептелет.

3-эреже*. Эгерде кандайдыр бир X аралыкта $f(x)$ жана $g(x)$ функциялар үзгүлтүксүз $f\,'(x)$ жана $g'(x)$ туундуга ээ болсо, анда

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f\,'(x)dx \qquad (1)$$

формула орундуу. Бул формула бөлүктөп *интегралдоо* деп аталат. Формуланын далилдөө $f\,(x)$ жана $g(x)$ функциялар көбөйтүндүсүнүн дифференциялоо эрежеси $(f(x)g(x))' = f\,'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ жана $\int f\,'(x)dx = f(x) + C$ экендигинен келип чыгат.

Формуладан пайдалануу үчүн: 1) интеграл астындагы туюнтма $f(x)$ жана $g'(x)$ тер көбөйтүндүсү көрүнүшүндө жазып алынат; 2) $g'(x)$ жана $g(x)f\,'(x)$ туюнтмалардын интегралдарын оңой (ыңгайлуу) эсептеле тургандай кылып алууга болот.

1-мисал. $\int x \cdot e^x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Бул $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ деп алуу ыңгайлуу,себеби

$g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$, $f\,'(x)=1$. Анда (1) ге негизделип,

$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$

Демек, $\int xe^x dx = e^x \cdot (x-1) + C.$

Жообу: $e^x(x-1)+C$. ▲

2-мисал. $\int \ln x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Интеграл астындагы $\ln x$ функциясын $f(x)=\ln x$ жана $g'(x)=1$ лердин көбөйтүндүсү деп эсептейбиз: $\ln x = f\,(x) \cdot g'(x)$.

Анда $f\,'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \int 1 \cdot dx = x + C.$

(1) Формула боюнча,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln\frac{x}{e} + C.$$

Демек, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Текшерүү:

$$(x\ln\frac{x}{e}+C)' = (x\ln\frac{x}{e})' + C' = x'\cdot\ln\frac{x}{e} + x(\ln\frac{x}{e})' + 0 =$$

$$= \ln\frac{x}{e} + x\cdot\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e} = \ln x - \ln e + 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Жообу: $x \cdot \ln\frac{x}{e} + C.$ ▲

3-мисал. $\int x\cos x dx$ интегралды эсептегиле.

△ интегралды эсептөө үчүн $f(x)=x,\ \ g'(x)=\cos x$ деп алуу ыңгайлуу. Анда $f'(x)=1,\ \ g(x)=\int \cos x dx = \sin x$ (бул жерде баштапкы функциялардан бирин алдык,ошону үчүн туруктуу сан-C ны жазбадык). Бөлүктөп интегралдоо формуласы боюнча,

$$\int x\cos x dx = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Жообу: $x \sin x + \cos x + C$. ▲

Интегралдарды эсептегиле (**33 – 35**):

33*. 1) $\int x\sin x dx$; | 2) $\int x^2\cos x dx$; | 3) $\int x\ln x dx$; | 4) $\int 2x\ln x dx$.

34*. 1) $\int x\cos 2x dx$; | 2) $\int x\sin 3x dx$; | 3) $\int x\sin\frac{x}{3} dx$; | 4) $\int x\cos\frac{x}{4} dx$.

35*. 1) $\int 2^x \cdot x dx$; | 2) $\int 3^x \cdot x dx$; | 3) $\int 5^x \cdot x dx$.

5) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$; 6) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$; 7) $\int (3^x + 4^x)^2 dx$;

8) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$; 9) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}-1} dx$; 10) $\int \frac{e^x dx}{\pi + e^x}$;

11) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; 12) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 13) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

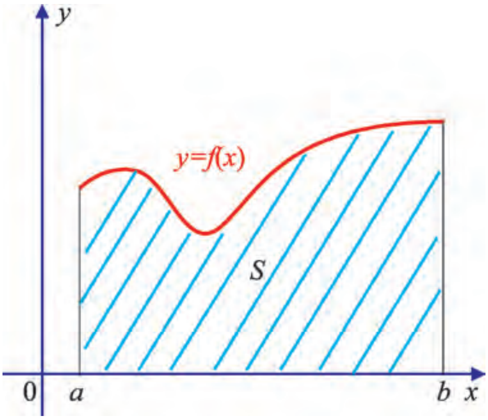
44–46

АНЫК ИНТЕГРАЛ. НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ.

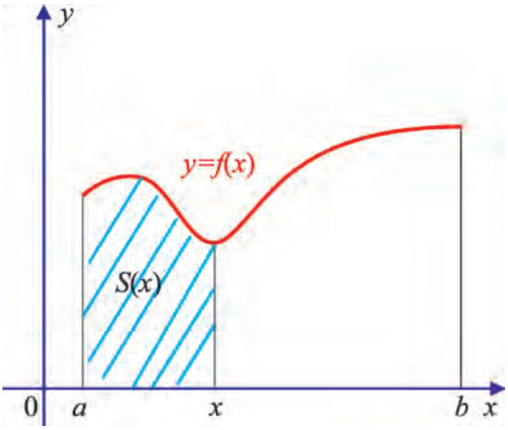
2- сүрөттө сүрөттөлгөн фигура ийри сызыктуу трапеция деп аталат. Бул фигура жогорудан оң маани кабыл ала турган $y = f(x)$ үзгүлтүксүз функциянын графиги менен, каптал тараптан болсо $x = a$ жана $x = b$ сызыктардын кесиндилери менен, төмөндөн $[a, b]$ кесинди менен, чектелген. $[a, b]$ кесинди ийри сызыктуу трапециянын негизи деп аталат.

Ийри сызыктуу трапециянын аянтын кайсы формуланын жардамында эсептейбиз деген суроо туулат.

Аянтты S деп белгилейбиз. S аянтты $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы жардамында эсептөө мүмкүн экен.Ушуга байланыштуу пикирлерди келтиребиз.



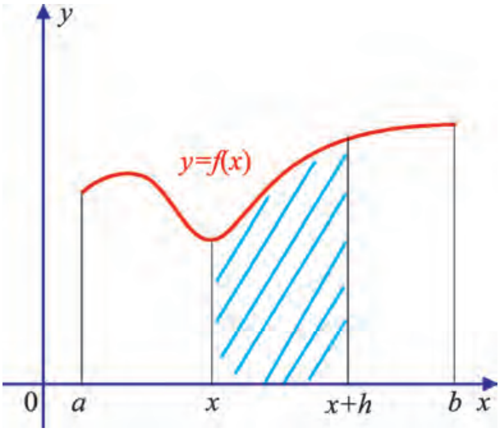
2-сүрөт.



3-сүрөт.

$[a;\ x]$ негиздүү ийри сызыктуу трапециянын аянтын $S(x)$ деп белгилейбиз (3- сүрөт), мында x ушул $[a;\ b]$ кесиндидеги каалаган чекит: $x=a$ болгондо $[a;\ x]$ кесинди чекитке айланат, ошондуктан $S(a)=0$; $x=b$ да $S(b) = S$.

$S(x)$ ти $f(x)$ функциянын баштапкы функциясы болуусун, же болбосо $S'(x) = f(x)$ экендинин көрсөтөбүз.



4-сүрөт.

△ $S(x+h) - S(x)$ айырманы көрөлү, мында $h>0$ ($h<0$ абал да куду ушундай көрүлөт). Бул айырма негизи $[x;\ x+h]$ болгон ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар (4-сүрөт). Эгерде h сан кичине болсо,анда бул аянт түзүлүшү боюнча $f(x)\cdot h$ га барабар, башкача айтканда $S(x+h)-S(x) \approx f(x)\cdot h$. Демек, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$.

Бул барабардыктын сол жагы $h \to 0$ да туундунун мүнөздөмөсү боюнча $S'(x)$ ке умтулат. Ошону үчүн $h \to 0$ da $S'(x)=f(x)$ барабардык пайда болот. Демек, $S(x)$ аянт $f(x)$ функция үчүн баштапкы функция экен. ▲

Баштапкы функция *S(x)* тен каалаган башка баштапкы *F(x)* функция туруктуу санга айырмаланат, башкача айтканда

$$F(x) = S(x) + C.$$

Бул барабардыктын $x=a$ да $F(a) = S(a)+C$ жана $S(a)=0$ болгондуктан $C=F(a)$. Анда (1) барабардыкты төмөнкүдөй жазуу мүмкүн:

$S(x)=F(x)–F(a)$. Мындан $x=b$ да $S(b)=F(b)–F(a)$ экендигин табабыз.

Демек, *ийри сызыктуу трапециянын аянтын* (2-сүрөт) төмөнкү формула жардамында эсептөө мүмкүн:

$$S=F(b)–F(a), \qquad (2)$$

мында $F(x)$ – берилген $f(x)$ функциянын каалаган баштапкы функциясы.

Ошентип, ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөө *f(x)* функциянын *F(x)* баштапкы функциясын табууга, же *f(x)* функцияны интегралдоого келтирилет.

$F(b)-F(a)$ айырма $f(x)$ функциясынын $[a;\, b]$ кесиндидеги *анык интегралы* деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет: $\int_a^b f(x)dx$

(окулушу: “*a* дан *b* га чейинки интеграл эф икс те икс“) же

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \qquad (3)$$

(3)формула *Ньютон-Лейбниц* формуласы деп аталат

(2) жана (3) формула боюнча:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Интегралды эсептөөдө, адатта, төмөнкүдөй белгилөө киритилет:

$F(b)–F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Анда (3) формуланы төмөнкүдөй жазууга мүмкүн:

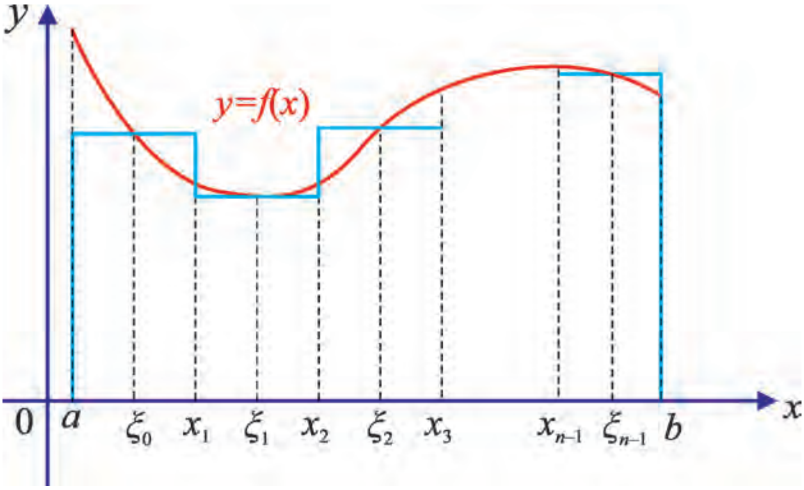
$$S=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (5)$$

Кыскача тарыхый маалымат.

Ийри сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептөө маселеси анык интеграл түшүнүгүнө алып келет. Үзгүлтүксүз $f(x)$ функция аныкталган $[a;\, b]$ кесинди $a=x_0$, x_1.., x_{n-1}, ... $x_n=b$ чекиттер жардамында өз ара барабар $[x_k;\, x_{k+1}]$ ($k=0$, 1, ... $n-1$) кесиндилерге бөлүнгөн жана ар бир $[x_k;\, x_{k+1}]$ кесиндиден каалагандай ξ_k чекит алынган. $[x_k;\, x_{k+1}]$ кесинди узундугу $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ ны берилген $f(x)$ функциянын ξ_k чекиттеги мааниси $f(\xi_k)$ га көбөйтүрүлгөн жана ушул

$$S_n=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\ldots+f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \qquad (6)$$

суммасы түзүлгөн, мында ар бир кошулуучу негизи Δx_k жана бийиктиги $f(\xi_k)$ болгон тик бурчтуктун аянты. S_n сумма ийри сызыктуу трапециянын аянты S ке барабар: $S_n \approx S$ (5-сүрөт).



5-сүрөт.

(6) сумма $f(x)$ функциянын $[a; b]$ кесиндидеги *интегралдык суммасы* деп аталат. Эгерде n чексизге умтулганда ($n \to \infty$), Δx_k нөлгө умтулса ($\Delta x_k \to 0$), анда S_n интегралдык суммасы кандайдыр бир санга умтулат. Ушул сан $f(x)$ функциянын $[a; b]$ кесиндидеги *интегралы* деп аталат .

1-мисал . 6-сүрөттө сүрөттөлгөн ийри сызыктуу трапециянын аянтын тапкыла.

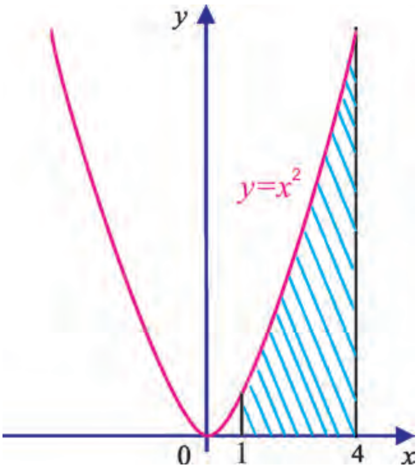
△ (4) формула боюнча $S = \int_1^4 x^2 dx$. Интегралды Ньютон-Лейбниц формуласы (3) жардамында эсептейбиз. $f(x)=x^2$ функциянын баштапкы функцияларынан бири $F(x) = \frac{x^3}{3}$ экендиги маалым. Демек,

$$S = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) = \frac{1}{3} \cdot 63 = 21 \text{ (кв. бирдик).}$$

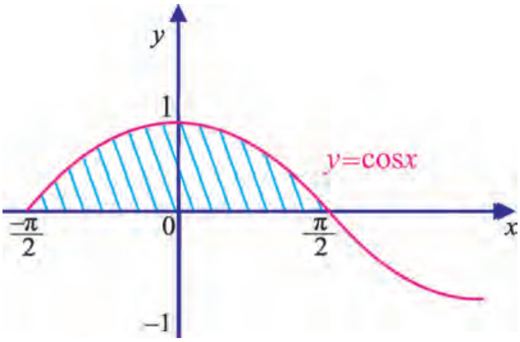
Жообу : $S = 21$ кв. бирдик. ▲

2-мисал. 7-сүрөттөгү штрихтелген бөлүктүн аянтын тапкыла.

△ Штрихтелген бөлүк ийри сызыктуу трапеция болуп, ал жогорудан $y=\cos x$ функциянын графиги, төмөндөн болсо $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесинди менен чектелген. $y=\cos x$ – кош функция, бөлүк Oy огуна карата симметриялуу. Ушул маалыматка карай, бөлүк бети $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ да бетинен эки эсе тең деп атоого мүмкүн.



6-сүрөт.



7-сүрөт.

△ Ньютон-Лейбниц формуласы жана (5) формула боюнча:

$$S=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{-\pi}{2})=1-(-1)=1+1=2\ \text{(kv. birlik).}$$

Жообу. 2 кв.бирдик. ▲

3-мисал. $\int_0^{\pi}\cos x dx$ анык интегралын эсептегиле.

△ Ньютон-Лейбництин формуласы жана (5) формула боюнча:

$$\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0.$$

Жообу: 0. ▲

4-мисал. $\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx$ анык интегралын эсептегиле.

△ Ньютон-Лейбництин формуласы жана (5) формуласы боюнча:

$$\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx=(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{22}{3}-(-\frac{37}{6})=\frac{81}{6}=13,5\text{(кв. бирдик).}$$

Жообу: 13,5 кв.бирдик. ▲

5-мисал. $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\ dx$ анык интегралын эсептегиле.

△ Алгач анык эмес интегралды табабыз:

$$\int \sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx=\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Анда $S=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3})=$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$

Жообу: $S=\frac{\pi}{6}$. ▲

6-мисал. $\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}\;dx$ анык интегралды эсептегиле.

△ Алгач анык эмес интегралды таап алабыз:

Интегралдар жадыбалы боюнча $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$ Анда

$$\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6=\frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot 6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot 2-3)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot(27-1)=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Жообу: $8\frac{2}{3}$. ▲

Анык интеграл төмөнкүдөй касиетке ээ:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0.$ Чындыгын да эле, $\int\limits_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$

Δ $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);\ \int\limits_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-\big(F(b)-F(a)\big).$

Демек, $-\int\limits_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$ ▲

3. a, b, c – чыныгы сандар болсо, $\int\limits_b^a f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$ (анык интегралдын аддитивдик касиети).

4. $f(x)$, $x\in R$, жуп функция болсо,анда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\cdot\int\limits_0^a f(x)dx$.

5. Эгерде $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$ болсо, $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$ болот.

6. $x\in[a,b]$да $f(x)<g(x)$ болсо, анда $\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b g(x)dx$ болот.

? Суроо жана тапшырмалар.

1. Анык интеграл деген эмне?

2. Ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөө маселесин айткыла. Мисалдарда түшүндүргүлө.

3. Ньютон-Лейбництин формуласы эмне жөнүндө? Анын маани-мазмунун айткыла.

4. Анык интегралдын касиеттерин айтып бергиле жана мисалдарда түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

Анык интегралдарды эсептегиле (**36 – 41**):

36. 1) $\int\limits_0^2 3x^2dx;$ 2) $\int\limits_0^2 2xdx;$ 3) $\int\limits_{-1}^4 5xdx;$ 4) $\int\limits_1^2 8\cdot x^3dx;$

5) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx;$ 6) $\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2}dx;$ 7) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^4}dx;$ 8) $\int\limits_0^1 \sqrt{2x}dx;$

9) $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx;$ 10) $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$ 11) $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}};$ 12) $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}dx.$

37. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx;$ 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx;$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cos 3xdx;$ 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx.$

38. 1) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^{2x}dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{2} e^{4x}dx;$ 3) $\int\limits_{1}^{3} (e^{2x}-e^{x})dx.$

39. 1) $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+3x))(x-1)dx;$ 2) $\int\limits_{-1}^{0} (x+2)(x^2-3)dx;$

3) $\int\limits_{1}^{3} (x+\frac{1}{x})^2 dx;$ 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx.$

40*. 1) $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{\sqrt{3x-2}};$ 2) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx.$

41*. 1) $\int\limits_{1}^{5} x^2\cdot\sqrt{x-1}dx;$ 2) $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx;$ 3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx.$

42*. 1) Ушундай a жана b сандарын тапкыла? $f(x)=a\cdot 2^x+b$ функция $f'(1)=2,$

$\int\limits_{0}^{3} f(x)dx=7$ шарттарын канааттандырсын.

2) $\int\limits_{1}^{b} (b-4x)dx\geq 6-5b$ барабарсыздык аткарыла турган бардык $b>1$ сандарды тапкыла.

43*. 1) $\int\limits_{1}^{2} (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx\leq 12$ барабарсыздык аткарыла турган бардык b сандарды тапкыла.

2) Кандай $a>0$ сандар үчүн $\int\limits_{-a}^{a} e^x dx>\frac{3}{2}$ барабарсыздык аткарылат.

44. $f(x)$ функцияны a нын каалаган маанисинде барабардыктар аткарыла тургандай кылып тандагыла:

1) $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx=2a^2-3a;$ 2) $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx=4a-a^2;$

3) $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2;$ 4) $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx=a^2+a+\sin a.$

Интегралдарды эсептегиле (**45 – 46**):

45. 1) $\int_{0}^{1}(e^{-x}+1)^2dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}10^x\cdot 2^{-x}dx$; 3) $\int_{0}^{1}(e^{-x}-1)^2dx$;

4) $\int_{-3}^{-1}3^{-x}6^xdx$; 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-3x}dx$; 6) $\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^{2x}dx.$

46*. 1) $\int_{0}^{1}\frac{2^x+3^x}{6^{x+1}}dx$; 2) $\int_{0}^{1}\frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x}dx$; 3) $\int_{0}^{\sqrt{e-1}}\frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}}\frac{2xdx}{x^2-2}$; 5) $\int_{0}^{1}\frac{3^x+4^x}{12^x}dx$; 6) $\int_{0}^{2}4^{-x}\cdot 8^xdx$.

47. $x=a,\ x=b$ түз сызыктар, Ox огу жана $y=f(x)$ функция графиги менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтын тапкыла. Тиешелүү сүрөтүн чийгиле:

1) $a=1,\quad b=2,\ f(x)=x^3$; 2) $a=2,\ b=4,\ f(x)=x^2$;

3) $a=-2,\ b=1,\ f(x)=x^2+2$; 4) $a=1,\ b=2,\ f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3},\ b=\frac{2\pi}{3},\quad f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{2},\ f(x)=\cos x.$

48. Ox огу жана берилген парабола менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла:

1) $y=9-x^2$; 2) $y=16-x^2$; 3) $y=-x^2+5x-6$;

4) $y=-x^2+7x-10$; 5) $y=-x^2+4x$; 6) $y=-x^2-3x.$

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла. Тиешелүү сүрөтүн чийгиле (**49 – 50**):

49. 1) $y=-x^2+2x,\ y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18,\ y=0$;

3) $y=2x^2+1,\ y=0,\ x=-1,\ x=1$; 4) $y=-x^2+2x,\ y=x.$

50. 1) $y=-2x^2+7x,\ y=3{,}5-x$; 2) $y=x^2,\ y=0,\ x=3$;

3) $y=x^2,\ y=0,\ y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4.$

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2,\ y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2^x, y=2, x=0$

7) $y=|\lg x|,\ y=0,\ e=2,\ x=0.$

Текшерүү ишинин үлгүсү
I вариант

1. $f(x)=\frac{x^3}{2}-\cos 3x$ функциянын бардык баштапкы функцияларын тапкыла.

2. Эгерде $F(\frac{3}{2})=1$ болсо, $f(x)=\frac{6}{(4-3x)^2}$ функциянын баштапкы функцияны $F(x)$ ти тапкыла

3. Эсептегиле: $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx.$

4. Эсептегиле: $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx.$

5. *Ox* огу, x=–1 жана x=2 түз сызыктар жана y=9–x^2 парабола менен чектелеген ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептегиле.

II вариант

1. $f(x)=\frac{x^4}{3}+\sin 4x$ функциянын бардык баштапкы функцияларын тапкыла.

2. Эгер $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$ болсо, $f(x)=\frac{3}{(2-5x)^3}$ функциянын баштапкы функцияси $F(x)$ ти тапкыла.

3. Эсептегиле: $\int_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$.

4. Эсептегиле: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$

5. *Ox* огу, $x=-2$ жана $x=3$ түз сызыктар жана $y=x^2-1$ параболо менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын бетин эсептегиле.

ЖООПТОР
I ГЛАВА

1. *а*) Пульс частотасы – бул жүрөктүн бир минутада канча согуусун көрсөтүүчү белги. Демек,бир минутада Мадинанын жүрөгү 67 жолу согот *b*) 4020. **2.** *а*) $\approx 0{,}00150\,\frac{\text{ката}}{\text{сөз}}$. Сапат артат; *б*) $\approx 0{,}15$. **3.** Маруф өндүрүмдүү иштеген. **4.** ***а)*** $\approx 0{,}000177\ \frac{\text{мм}}{\text{км}}$. **5.** $89\,\frac{\text{км}}{\text{саат}}$ же $89\frac{\text{м}}{\text{с}}$. **6.** а) $0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; *б*) $0{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; с) $0{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. **7.** а) $3{,}1$; $\frac{\text{даана}}{\text{г}}$ $4{,}22$ $\frac{\text{даана}}{\text{г}}$; *б*) доза 2 граммдан 8 граммга чейин ашырылганда кумурскалардын саны тез азаят, кийин болсо азайышы секин болот. **8.** а) 7; б) 7; с) 11; д) 16; е) 0; ф) 5. **9.** а) 5; б) 7; с) с. **10.** а) –2; б) 7; с) –1; д) 1. **11.** а) –3; б) –5; с) –1 д) 6; е) –4; ф) –8; г) 1; х) 2; и) 5. **13.** а) $3x^2$; б) $-\frac{1}{x^2}$; с) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) 0. **15.** а) 2; б) $6x+5$; с) $6x^2+8x+6$. **16*.** а) $f'(x)=a$; б) $f'(x)=2ax+b$; с) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$. **23.** 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}$; 4) $2x-\frac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$. **27.** 3) $-\frac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\frac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3-4$; 8) $7x^6+3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\frac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0. **32.** 2) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi,\ n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\frac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\frac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4 ; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) x^6+1. **39.** x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\frac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\mathrm{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\frac{5\mathrm{ctg}x}{x}-\frac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) жок; 4) 0 жана $\frac{2}{3}$; 6) 0 жана $\frac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$; $y=-x+21$; $y=-x+1$. **49.** 2) 0,1 ; 0,331 . **50.** 2) а) 0,2718; б) 9,06; 4) а)

0,938127; б) 31,2709. **51.** 2) а) 0; б) 0; 4) а) 0,119401; б) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x-3$; 6)$18-2x$; 8) $48x^2+10x-2$. **54.** 1) а) 15; б) 15; с) 15; д) 15; 4) а) –29; б) 12; с) 5; д) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1-x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15 м/с. **58.** 3) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\text{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln 7+7^x\cdot 7x^6$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ – $\cos x$;
14) $8-2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 жана 2 . **62.** 2) $-2x^{-3}-1$. **63.** 2) 2,75.
64. 2) $\frac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\frac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$.

66. 2) $e^{5x}(4\cos x-6\sin x)$; 4) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\frac{1}{\sin^2 1}-\frac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\frac{\text{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\frac{35\text{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x-10)\ln\cos x-(x^2-10x+7)\text{tg}x$.

69. 3) өсүү: $(-\infty; -3) \cup (3; -\infty)$ кемүү: $(-3;3)$.
4) өсүү: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; кемүү: Ø.
6) өсүү: $(-\infty; \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; кемүү: $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.
8) өсүү: $(-\infty; 0)$; кемүү: $(0; +\infty)$.
9) өсүү: $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; кемүү: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
10) өсүү: $(2; +\infty)$; кемүү: $(-\infty; 2)$.
14) өсүү: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$; кемүү: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.
71. 2) локадык минимум $x=4$; локалдык максимум жок.
4) локадык минимум $x=5$; локалдык максимум $x=-5$.
6) локадык минимум $x=0,75$; локалдык максимум жок.
8) локадык минимум $x=2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$; локалдык максимум $x=\pi+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

72. 2) өсөт $(-1; 1)$; кемийт: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
4) өсөт: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$; кемийт: $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$;
6) 6) өсөт: Ø ; кемийт: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$.

73. 2) эң чоң маани: 57; эң кичине маани: –55.
4) эң чоң маани: 84; эң кичине маани: $-\frac{28}{9}$.

76. 5625м^2. **80.** 80 м. **83.** 1) 5 с; 2) 250 м/с; 3) $\frac{1875}{4}$м.

87. 1) 4 м^3; 2) 5324 м^3; 3) 407 $\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}$;

89. 1) 30; 2) 1800000 сум.

91. д) 24,52, –0,1; е) 40,52, 9,86. **93.** г) 2,0004. **94.** е) 0,9302.

95. д) 0,526. **96.** д) 0,1247. **112.** 1) эң чоң 13; эң кичине 13; 3) эң чоңу жок; эң кичине 5; 5) эң чоңу жок; эң кичине $\frac{11}{6}$.

113. 2) $y=13x+4; y=13x+4; y=13x+4$. **114.** 1) жок. **115.** 3) жок.

117. 1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) $-2x+1$; 2) $\cos x+\sin x$; 4) $4^x\ln 4-\cos x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) $4x^3$; 3) $1+\frac{20}{x^2}$; 6) $e^x(\sin x+\cos x)$;8) $20\sin x+2(10x-1)\cos x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$; 0; 2) 3; 3; 3) $-2\pi+1$; $\pi+1$. 4) $-\pi$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $1-\frac{\pi^3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) $-\sin 2x$.

128. 2) өсүү: $(-\infty; +\infty)$; кемүү: Ø.
4) өсүү: Ø; кемүү: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6) өсүү: $(-\infty; +\infty)$; кемүү: Ø.
8) өсүү: $(0; +\infty)$; кемүү: $(-\infty; 0)$.

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.

130. 2) локалдык минимум: $x=9$. Локалдык максимум: жок.

131. 2) эң чоң: 81;эң кичине: –6. **134.** 62 500 м^2.

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $8(2x+1)^3$;

144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.

145. 1) $10x(x^2+1)^4$; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.

146. 1) өсүү: $(-\infty; 0,5)$; кемүү: $(0,5; -\infty)$;
3) өсүү: $(-1; 1)$; кемүү: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
4) өсүү: $(-\infty; +\infty)$; кемүү: Ø.
7) өсүү: $(-\infty; +\infty)$; кемүү: Ø.
8) өсүү: $(1; +\infty)$; кемүү: $(-\infty; 1)$.

147. 1) стационардык чекиттери: 1 жана 3, локалдык максимум : –4.

II ГЛАВА

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **6.** 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x^2}{2}+3x+2,5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15,8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$. **12.** 1) $5\ \ln|x-2|+7$; 2) $3\ \ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$. **14.** 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$.

17. 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$;

6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$. **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; 4) $x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$;

4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$. **23.** 2) $\frac{-1}{4}\cos 4x+C$. **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$. **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$; 4) $\ln|x-4|+C$. **26.** 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$. **28.** 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$. **31.** 4) $x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x-x\cos x+C$; 2) $x^2\cdot\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$;

3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$;   4) $x\cdot \mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$;   3) $9\sin\frac{x}{3}-3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

36. 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$. **38.** 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^8-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$;   2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$;   2) $f(x)=4-2x$;   3) $f(x)=x^2-3x$; 4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0,4}{\ln 5}+\frac{0,1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **48.** 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$;   2) 121,5;   3) $\frac{10}{3}$;   4) $\frac{1}{6}$.

50. 1) 9;   2) 9;   3) 4,5;

Пайдаланылган жана сунуш кылынуучу адабияттар.

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и основы анализа. учебник для 10-11 класса. Учебник для базового и профильного оброзование Москва, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 2 учебное пособие, Ташкент: “Ilm ziyo”, 2016.
5. *А.У. Абдухамидов жана башкалар.* Алгебра жана математиканын анализ нигездери, 1- бөлүк, Ташкент, “Ўқитувчи”, 2012.
6. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Ташкент: “Ўқитувчи” 1988.
8. *Г.К. Муравин.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. *Г.П. Бевз* и др.*,* Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ - Internetda matematika (ingliz tilida).
12. “Математика в школе” журналы.
13. Физика, математика жана информатика. Илимий-методикалык журнал (2001- жылдан баштап чыга баштаган).
14. *М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов* Митематикадан кызыктуу жана олимпиада мисалдары. I бөлүк, Ташкент, “Турон-Иқбол”, 2016.
15. Математикадан колдонмо, I жана II бөлүктөр. Мугалимдер үчүн кондонмо. Проф. Т.А. Азларов. Ташкент, “Ўқитувчи”, 1979.
16. *М.А. Мирзаахмедов, Д.А. Сотибалдиев.* Окуучуларды математикадан олимпиадаларга даярдоо. Ташкент, “Ўқитувчи”, 1993.
17. http://www.uzedu.uz – Элге билим берүү министрлигинин маалымат билим порталы.
18. http://www.eduportal.uz – Мультимедия борбору маалымат билим парталы.
19. http://www.problems.ru – Математикадан маселелер иштөө тизими (орус тилинде).
20. http://matholymp.zn.uz – Өзбекстанда жана дүйнөдө математикалык олимпиадалар.

МАЗМУНУ

I глава. . ТУУНДУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ 3

II глава. ИНТЕГРАЛ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ 79

ГЕОМЕТРИЯ

I ГЛАВА. МЕЙКИНДИКТЕГИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ ЖАНА ВЕКТОРЛОР

1. МЕЙКИНДИКТЕГИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ

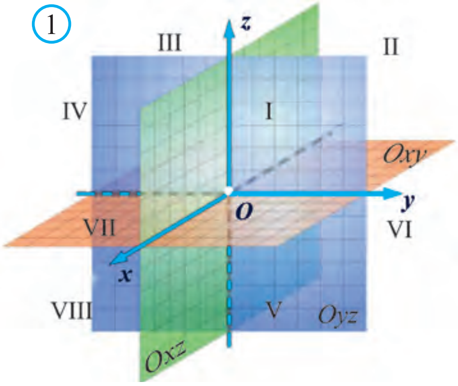
1.1. Мейкиндиктеги декарттык координаталар системасы

Тегиздиктеги декарттык координаталар системасы менен төмөнкү класстарда таанышкасыңар. Мейкиндикте координаталар системасы да тегиздиктегиге окшош киргизилет. *O* чекитте кесилишүүчү жана координаталар башталышы ушул чекитте болгон өз ара перпендикуляр үч *Ox*, *Oy*, жана *Oz* координата окторун карайбыз.

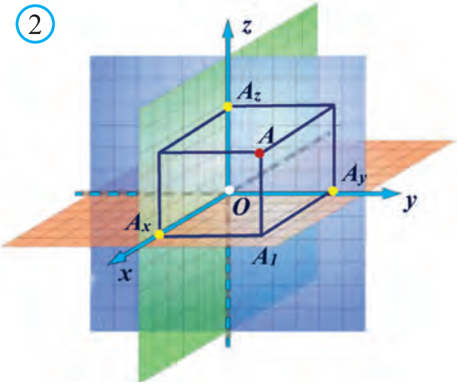
Бул түз сызыктардын ар бир жуптугу аркылуу *Oxy*, *Oxz* жана *Oyz* тегиздиктерин өткөрөбүз (1-сүрөт). Мейкиндиктеги тик бурчтуу декарттык координаталар системасы ушундайча киргизилет жана анда

O чекити – координаталар башталышы,
Ox, *Oy* жана *Oz* түз сызыктар – *координата октору,*
Ox – абциссалар, *Oy – ординаталар* жана *Oz* огу – *апликаталар огу*,
Oxy, *Oyz* жана *Oxz* тегиздиктер – *координаталар тегиздиктери* деп аталат.

①



②



Координата тегиздиктери мейкиндикти 8 *октантага* (*жарым чейрек*) бөлөт (1-сүрөт).

Мейкиндикте каалагандай *A* чекит берилген болсун. Бул чекиттен *Oxy*, *Oyz* жана *Oxz* координата тегиздиктерине перпендикуляр тегиздиктер өткөрөбүз (2-сүрөт). Бул тегиздиктерден бири *Ox* окту A_x чекитте кесип өтөт.

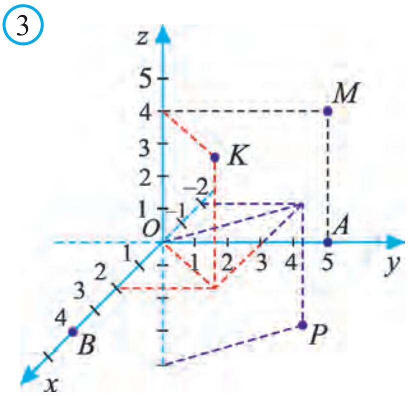
A_x чекиттин *x* огундагы координатасы *A* чекиттин *x*-координатасы же болбосо абциссасы деп аталат.

A чекиттин y – координатасы (ординатасы) жана z – координатасы (апликатасы) да ушундайча аныкталат.

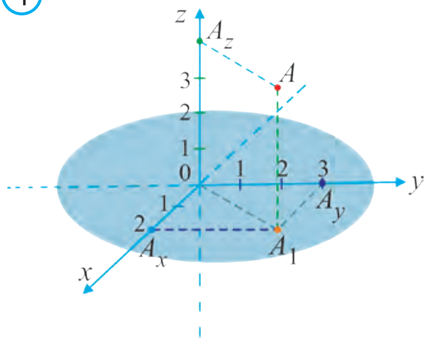
A чекиттин y – *координатасы* (*ординатасы*) жана z – *координатасы* (*апликатасы*) да ушундайча аныкталат.

A чекиттин координаталары $A(x;\ y;\ z)$ же кыскача $(x;\ y;\ z)$ сыяктуу белгиленет. 3- сүрөттө берилген чекиттер төмөнкү координаталарга ээ: $A(0;\ 5;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $M(0;\ 5;\ 4)$, $K\ (2;\ 3;\ 4)$, $P\ (-2;\ 3;\ -4)$.

③



④



1- маселе. Мейкиндиктеги декарттык координаталар системасы берилген. Андагы $A(2;\ 3;\ 4)$ чекиттин ордун аныктагыла.

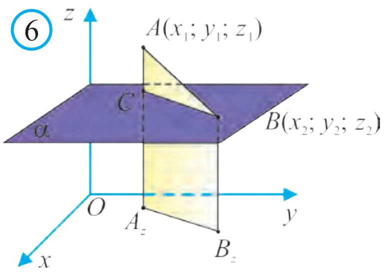
Чыгаруу. Координата башталышынан Ox жана Oy окторун оң багытта тиешелүү түрдө $OA_x = 2$ жана $OA_y = 3$ кесиндилерди жайгаштырабыз (4-сүрөт).

A_x чекиттен Oxy тегиздикте жаткан жана Oy огуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. A_y чекиттен Oxy тегиздикте жаткан жана Ox огуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Бул түз сызыктардын кесилишкен чекитин A_1 менен белгилейбиз. A_1 чекиттен Oxy тегиздигине перпендикуляр жүргүзөбүз жана анда Oz огунун оң багыт боюнча $AA_1 = 4$ кесинди жүргүзүлөт. Пайда болгон $A(2;\ 3;\ 4)$ чекит изделип жаткан чекит болот. ☐

Заманбап цифралуу-программалуу башкарылуучу станоктор жана автоматташтырылган роботтор үчүн координаталар системасынан пайдаланып, программалар түзүлөт жана алардын негизинде металлдар кайра иштетилет (5- сүрөт).

⑤

⑥



1.2. Эки чекит арасындагы аралык.

Эки $A(x_1; y_1; z_1)$ жана $B(x_2; y_2; z_2)$ чекиттер берилген болсун.

1. Алгач AB түз сызык Oz огуна параллель эмес абалды көрүп чыгабыз (6-сүрөт). A жана B чекиттер аркылуу Oz огуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Алар Oxy тегиздикти A_z жана B_z чекиттерде кесип өтсүн.

Бул чекиттердин z координатасы 0 гө барабар болуп, x жана y координаталары болсо тиешелүү түрдө A, B чекиттердин x жана y координаталарына барабар.

Эми B чекит аркылуу Oxy тегиздигине параллель α тегиздик жүргүзөбүз. Ал AA_z түз сызыкты кандайдыр C чекитте кесип өтөт.

Пифагор теоремасы боюнча: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Бирок $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ жана $AC = |z_2 - z_1|$.

Ошондуктан $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. AB кесинди Oz огуна параллель $AB = |z_2 - z_1|$ болгон учурда жогорудагы формула да ушул натыйжаны берет, себеби бул абалда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Демек, A жана B чекиттер арасындагы аралык:

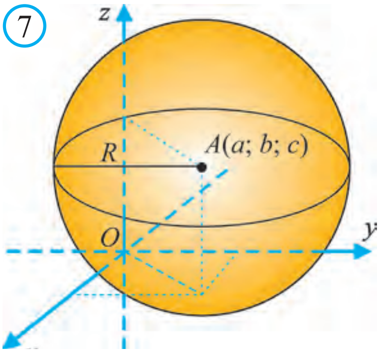
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Эскертме. (1) формула тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$ болгондо, анын диагоналы узундугун туюнтат.

Сфера жана шар теңдемеси. Белгилүү болгондой, $A(a; b; c)$ чекиттен R аралыкта жаткан бардык $M(x; y; z)$ чекиттер сфераны түзөт (7-сүрөт). Анда (1) формула боюнча, борбору $A(a;\ b;\ c)$ чекитте радиусу R ге барабар болгон сферада жаткан бардык чекиттердин координаталары $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ барабардыкты канааттандырат.

Анда борбору $A(a;\ b;\ c)$ чекитте, радиусу R ге барабар болгон шардын тендемеси $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$ түрүндө туюнтулат.

7



2- маселе. Чокулары $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$ чекиттерде болгон ABC үч бурчтуктун периметрин тапкыла.

Чыгаруу: ABC үч бурчтуктун периметри $P = AB+AC+BC$. Эки чекит арасындагы аралыктын формуласы $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ дан пайдаланып үч бурчтуктун жактарын табабыз:

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

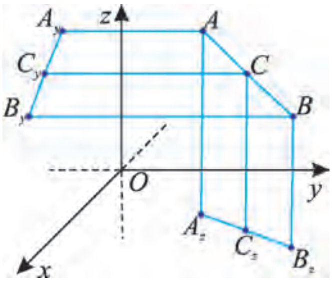
$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

Демек, ABC үч бурчтук тең жактуу жана анын периметри: $P=3\cdot 7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$. *Жообу:* $21\sqrt{2}$. ☐

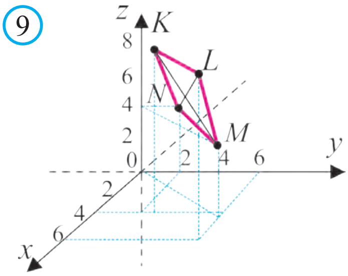
1.3. Кесиндинин ортосунун координаталары

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $B(x_2;\ y_2;\ z_2;)$ – эки каалагандай чекит болуп, AB кесиндисинин ортосу $C(x;\ y;\ z)$ болсун (8- сүрөт).

⑧



⑨



A, B жана C чекиттер аркылуу Oz огуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Алар Oxy тегиздикти $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$ жана $C_z(x;\ y;\ 0)$ чекиттерде кесип өтсүн.

Фалес теоремасы боюнча C_z чекит A_zB_z кесиндинин ортосу болот. Анда тегиздикте кесиндинин ортосунун координатларын табуу формуласы боюнча z ти табуу үчүн Oxy тегиздик ордуна Oxz же Oyz

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

тегиздикти алуу жетиштүү.

Мында z үчүн да жогорудагыларга окшош болгон формула пайда кылынат.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Ушуга окшош, берилген AB кесиндини λ катышта ($AP : PB = \lambda$) бөлүүчү $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$ чекиттин координаталары A жана B чекиттердин координаталары аркылуу формулалар табылат.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Бул барабардыктардын тууралыгын өз алдыңарча көрсөткүлө

3-маселе. Чокулары $M(3;\ 6;\ 4)$, $N(0;\ 2;\ 4)$, $K(3;\ 2;\ 8)$, $L(6;\ 6;\ 8)$ чекиттерде болгон MNKL төрт бурчтуктун параллелограмм экендигин далилдегиле. (9- сүрөт).

Далилдөө: Маселени чыгарууда диагоналдары кесилишет жана кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнө турган төрт бурчтуктун параллелограмм экендигинен пайдаланабыз.

MK кесинди ортосунун координаталары:

$$x = \frac{3+3}{2} = 3; \qquad y = \frac{6+2}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

NL кесинди ортосунун координаталары:

$$x = \frac{0+6}{2} = 3; \qquad y = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

MK жана *NL* кесиндилер ортолорунун координаталары бирдей экендигин көрөбүз. Бул, кесиндилер кесилишет жана кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнүшүн билдирет.

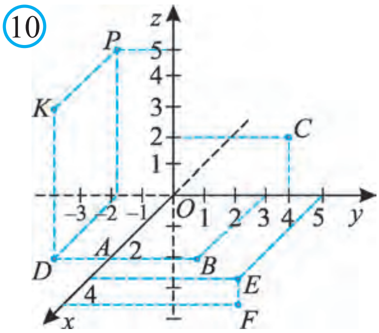
Демек, *MNLK* төрт бурчтук – параллелограмм. ☐

Темага карата көнүгүүлөр жана практикалык тапшырмалар.

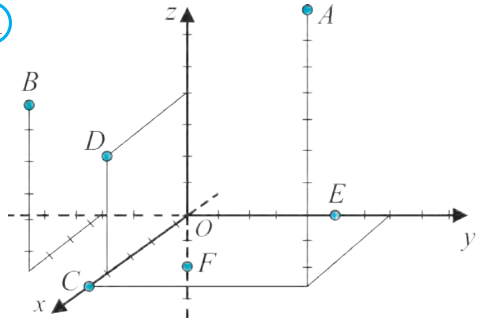
1. 10-сүрөттө берилген чекиттердин координаталарын тапкыла.

2. Мейкиндиктеги декарттык координаталар системасы киргизилген болуп, анда $A(0;\ 3;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 8)$, $D(0;\ -9;\ 0)$, $E(5;\ -1;\ 2)$, $F(-6;\ 2;\ 1)$ чекиттер берилген. Бул чекиттер кайсы *а*) координаталар огунда; *б*) координаталар тегиздигинде; *с*) октантада жатат?

⑩



⑪



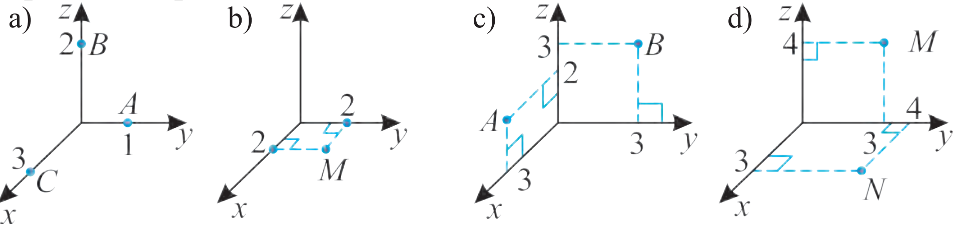
3. 11- сүрөттөгү чекиттердин координаталарын тапкыла.

4. 12- сүрөттө белгиленген чекиттердин координаталарын тапкыла.

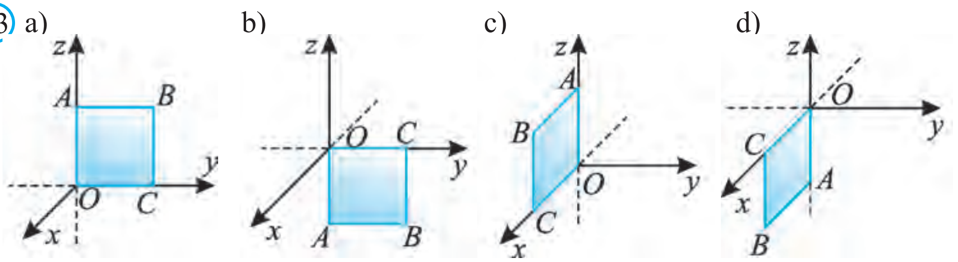
5. 13-сүрөттө диагоналы $\sqrt{2}$ ге барабар болгон квадрат сүрөттөлгөн. Анын учтарынын координаталарын тапкыла.

6. *A* (3; 2; 4) чекиттин координата тегиздиктериндеги проекциясынын координаталарын тапкыла.

⑫



⑬



7. Мейкиндикте декарттык координаталар системасы берилген болсун,анда *A* (–1; 2; –3), *B*(0; 1; 2), *C*(0; 0; 5), *D*(–2; 2; 0), *E*(5; –1; 0), *F*(0; 2; 0), *G*(9; 0; 0), *H*(9; 0; 2), *I*(6; 3; 1), *J*(–6; 3; 5), *K*(–6; –2; 3), *L*(6; –2; 4), *M*(6; 3; –9), *N*(–6; 3; –8), *O*(–6; –3; –6), *P*(6; –3; –2) чекиттер берилген болсун. Бул чекиттер кайсы координаталар огунда, координаталар тегиздигинде жана октантада жатат?Төмөндө берилген үлгү боюнча жадыбалды толтургула.

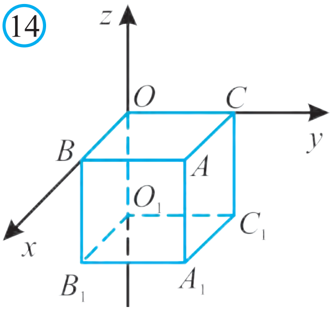
Чекит жайгашкан бөлүк	Чекит координаталарынын касиети	Берилген чекиттер
Ox огу	y=0, z=0 бир гана x координата нөлдөн айырмалуу	*G*(9; 0; 0)
Oy огу		
Oz огу		
Oxz тегиздик	z=0, x жана y координаталар нөлдөн	*D*(–2; 2; 0)
Oyz тегиздик		
Oxz тегиздик		
1- октанта	$x>0, y>0, z>0$	*I*(6; 3; 1)
2- октанта		
3- октанта		
4- октанта		
5- октанта		
6- октанта		
7- октанта		
8- октанта		

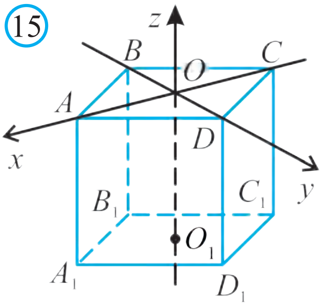
8. $A(2;\ 0;\ -3)$ жана $B(3;\ 4;\ 0)$ чекиттер арасындагы аралыкты тапкыла.

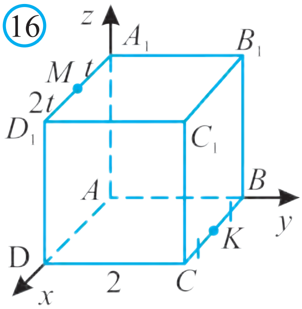
9. $A(3;\ 3;\ 3)$ чекиттен а) координата тегиздиктерине чейин; б) координата окторуна чейин; с) координата башталышына чейин болгон аралыкты тапкыла.

10. $M\ (2;\ -3;\ 1)$ чекиттен координата тегиздиктерине чейин болгон аралыкты тапкыла..

11. Координата тегиздиктеринин ар биринен 3 бирдик аралыкта жайгашкан чекиттин ордун аныктагыла.

⑭


⑮


⑯


12. Эгерде $OA=2\sqrt{2}$ ка барабар болсо, 14-сүрөттө берилген кубдун чокуларынын координаталарын тапкыла.

13. $C(2;\ 5;\ -1)$ жана $D(2;\ 1;\ -6)$) чекиттердин кайсы бири координата башталышына жакын жайгашкан?

14. Чокулары $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ 2)$ чекиттерде болгон үч бурчтуктун периметрин тапкыла.

15. Чокулары $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(3;\ 4;\ 5)$ чекиттерде болгон үч бурчтук барбы?

16. $A(-2;\ 0;\ 5)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$, $C(1;\ 1;\ -3)$, $D(0;\ -1;\ -1)$ чекиттер параллелограммдын чокулары экендигин далилдегиле.

17. ABC үч бурчтук түрүн аныктагыла жана анын периметрин жана аянтын тапкыла: a) $A\ (3;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 3;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 3)$; b) $A\ (2;\ 0;\ 5)$, $B\ (3;\ 4;\ 0)$, $C\ (2;\ 4;\ 0)$; c) $A\ (2;\ 4;\ -1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 2)$, $C\ (5;\ 1;\ 2)$.

18. Oxy тегиздигинде жатуучу жана $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ -1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$ чекиттерден бирдей алыстыкта жатуучу чекиттин координаталарын тапкыла.

19. $A\ (1;\ 1;1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 1)$, $C\ (-1;\ -1;\ 1)$, $C_1\ (-1;\ -1;\ -1)$ чекиттер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдун чокулары болсо, анын калган чокуларынын координаталарын тапкыла.

20. Кырларынын чокулары $S\ (0;\ 0;\ 0)$, $A\ (2;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 2;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 2)$ чекиттерде болгон $SABC$ үзгүлтүксүз пирамида экендигин далилдегиле.

21. Борбору координаталар башында радиусу 5 ке барабар болгон сфера жана шардын теңдемелерин жазгыла.

22. Борбору A (1; 2; 4) чекитте радиусу 3 кө барабар болгон шардын теңдемесин жазгыла.

23. Радиусунун учтары A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1) чекиттерде жаткан сфера теңдемесини жазгыла .

24. Калың кагаздан кубдун моделин жасагыла. Анын бир чокусун координата башталышына,андан чыгуучу кырларын бирдик орт катарында алып ,анын башка чокуларынын координаталарын тапкыла.

25. AB кесиндинин ортосунун координаталарын тапкыла:
1) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$; 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$; 3) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$, 4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1;1+\sqrt{2})$.

26. 15-сүрөттө берилген кубдун кырларынын ортолорунун жана капталдарынын борборлорунун координаталарын тапкыла.

27. $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$ чекиттер берилген. а) AB жана CD; б) AC жана BD кесиндилердин ортолорунун координаталарын тапкыла.

28. $M(1;-1;2)$ жана $N(-3;2;4)$ чекиттер AB кесиндини үч бөлүккө ажыратат. AB кесиндинин учтарынын координаталарын тапкыла.

29. $ABCD$ тик бурчтуктун жактары жана $A_1B_1C_1D_1$ тик төрт бурчтуктун жактарына ылайыктуу түрдө параллель $ABCD$ – тик төрт бурчтук экендиги далилдегиле.

30. $ABCD$ түз төрт бурчтуктун A учунан анын тегиздигине перпендикуляр AK түз сызык өткөрүлгөн. K чекиттен тик төрт бурчтуктун башка учтарына чейин болгон аралыктар 6 см. 7 см жана 9 см. AK кесиндинин узундугун тапкыла.

31*. Мейкиндикте $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$ чекиттер берилген. Oyz тегиздикте A, B, C чекиттерден бирдей алыстыкта жайгашкан чекитти тапкыла.

32. $ABCD$ параллелограммдын чокулары: а) $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4;2;-5)$; b) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$; c) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$ болсо, D чокунун координатасын тапкыла.

33. CK кесиндини $CK:KM = \lambda$ катышта бөлүүчү $M(x; y; z)$ чекиттин координаталарын тапкыла. а) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ жана $\lambda=2$; б) $C(1; -1; 2)$, $K(2;-4; 1)$ жана $\lambda=0{,}5$; c) $C(1; 0; -2)$, $K(9; -3; 6)$ жана $\lambda = \frac{1}{3}$.

34. Чокулары $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ чекиттерде болгон үч бурчтуктун медианаларынын кесилишкен чекити M дин координаталарын тапкыла.

35. Чокулары $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$ чекиттерде болгон үч бурчтуктун BL биссектрисасынын L чокусунун координаталарын тапкыла.

36*. Чокулары $A(4;\ 0;\ 1)$, $B(5;\ -2;\ 1)$, $C(4;\ 8;\ 5)$ чекиттерде болгон үч бурчтуктун AL биссектрисасынын узундугун тапкыла.

37*. Чокулары $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(3;\ -1;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ -1)$ чекиттер болгон үч бурчтук берилген. Анын а) чоң жагына жүргүзүлгөн бийиктиги; б) бурчтарын; с) аянтын тапкыла.

38*. 16-сүрөттө берилген куб жөнүндөгү маалыматтардан пайдаланып MK кесиндинин узундугун тапкыла.

Тарыхый маалыматтар

Абу Райхон Беруний атактуу табып жана математик Абу Али Ибн Сина менен кол жазмаларында ага төмөнкү суроону берет: “Эмне үчүн Аристотель жана башка (философ) лар жактарды алтоо деп аташат?”

Беруний алты грандуу кубду алып «башкача сандагы жактарга ээ болгон» телолор жөнүндө сүйлөйт жана «шар сымал телонун жактарынын жоктугун» кошуп коёт

Ибн Сина болсо ,,бардык абалдарда да грандар алтоо деп эсептөө зарыл, себеби ар бир телодо,анын түзүлүшүнө карабастан үч өлчөм- узундук,тереңдик жана кеңдик» бар деп жооп берет.

Бул жерде Ибн Сина ,,алты гран" деп белгилер менен алынган үч ,,координата” ны түшүнөт.

Беруний ,,Qonuniy Mas’udiy” чыгармасында алты грандын анык математикалык маанисин келтирет: ,,Грандар алтоо, себеби алар телолордун өлчөмдөрү боюнча аракеттеринин чеги. Өлчөмдөр үчөө,узундук, кеңдик жана тереңдик,алардын чокулары болсо өлчөмдөрдөн эки эсе көп».

Чыгарманын алдыңкы китептеринде автор жарыткычтардын асмандагы абалын асман сферасына салыштырмалуу эки координата- эклиптик кеңдеме жана узактама аркылуу ушул сыяктуу координаталар аркылуу, бирок асман экватору же горизонтко салыштырмалуу аныкталат. Анткени жылдыздар жана жарыткычтардын өз ара жайгашуусун аныктоо маселесинде алардын бир–бирлерин тосуп калуу абалдарын да көңүл бурууга туура келет. Мына ушундай абалда үчүнчү сферaлык координатага муктаждык туулат. Мындай муктаждык Абу Райхон Берунийдин мейкиндиктеги координаталар идеясын алга сүргөн.

2. МЕЙКИНДИКТЕГИ ВЕКТОРЛОР ЖАНА АЛАРДЫН ҮСТҮНДӨ АМАЛДАР АТКАРУУ

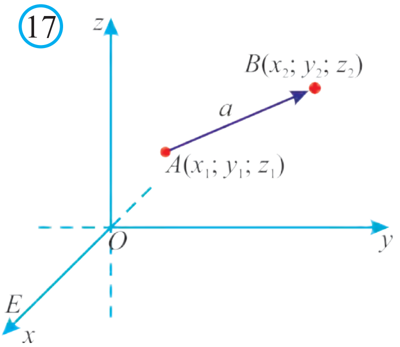
2.1. Мейкиндиктеги векторлор

Мейкиндиктеги *вектор* түшүнүгү тегиздиктеги сыяктуу киргизилет.

Мейкиндикте *вектор* деп – багытталган кесиндиге айтылат.

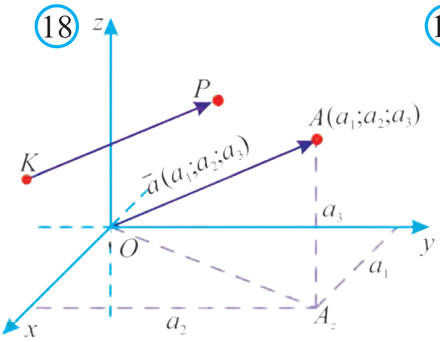
Мейкиндиктеги векторлорго карата негизги түшүнүктөр: вектордун узундугу (модулу), вектордун багыты, векторлордун барабардыгы тегиздиктеги сыяктуу аныкталат.

⑰



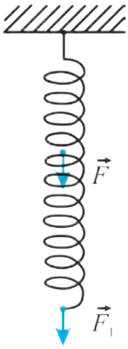
$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$

⑱



$\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

⑲



Башы A $(x_1; y_1; z_1)$ чекитте жана акыры B $(x_2; y_2; z_2)$ чекитте болгон *вектордун координаталары* деп $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ сандарга айтылат (17- сүрөт).

Векторлордун тегиздиктегиге окшош катар касиеттери да бар аларды далилдөөсүз келтиребиз.

Тегиздиктеги барабар векторлордун тиешелүү координаталары барабар болот жана тескерисинче, тиешелүү координаталары барабар болгон векторлор барабар болот.

Бул векторду анын координаталары менен туюнтууга негиз болот. Векторлор $\overline{AB}(a_1;a_2;a_3)$ же $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ кыскача түрдө $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ белгиленет (18-сүрөт).

Вектор координаталарысыз $\overline{AB}$ (же кыскача $\overline{a}$) түрүндө да белгиленет. Мында анын башталышы биринчи орунда,аягы болсо экинчи орунда жазылат.

Координаталары нөл болгон вектор нөлдүк вектор деп аталат жана $\overline{0}(0;0;0)$ же $\overline{0}$ түрүндө белгиленет жана бул вектордун багыты болбойт. Эгер O координата башталышы a_1, a_2 жана a_3 сандар A чекиттин координаталары мындайча айтканда $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ болсо, бул сандар $\overline{OA}$ вектордун да координаталары болот: $\overline{OA}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Бирок координаталар мейкиндигинде башталышы $K(c_1;\ c_2;\ c_3)$ чекитте, аягы $P(c_1+a_1;c_2+a_2;c_3+a_3)$ чекитте болгон $\overline{KP}$ векторда ушул координаталар менен сүрөттөлөт: $\overline{KP}\,(c_1+a_1-c_1;\ c_2+a_2-c_2;\ c_3+a_3-c_3) = \overline{KP}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Ушундан келип чыгып векторду координаталар мейкиндигинде каалаган чекитке коюлгандай сүрөттөө мүмкүн. Геометрияда биз ушундай *эркин* векторлор менен иш көрөбүз. Физикада болсо, адатта, векторлор бир *чекитте коюлган* болот. Мисалы 19-сүрөттөгү F күч пружинаны кайсы чекитине коюлганы менен эсептелет.

Вектордун узундугу деп сүрөттөгү көрсөтүлгөн кесиндинин узундугуна айтылат (17-сүрөт). $\overline{a}$ Вектордун узундугу $|\overline{a}|$ көрүнүштө берилет.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ вектордун узундугу анын координаталары аркылуу $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ формула менен туюнтулат.

1- маселе. $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$ жана $D(-2;\ 3;\ -1)$ чекиттер берилген. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ жана $\overline{BD}$ векторлордон кайсылары өз ара барабар болот?

Чыгаруу: Барабар векторлордун тиешелүү координаталары барабар болот. Ошондуктан векторлордун координаталарын табабыз:

$$\overline{AB}=(1-2,\ 0-7,\ 3-(-3))=(-1,\ -7,\ 6);$$

$$\overline{DC}=(-3-(-2),\ -4-3,\ 5-(-1))=(-1,\ -7,\ 6).$$

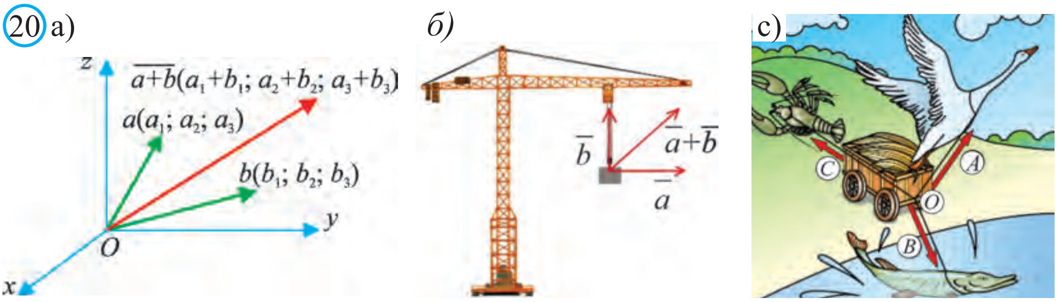
Демек, $\overline{AB}=\overline{DC}$. $\overline{BC}=\overline{AD}$ экендигин өз алдыңарча көрсөткүлө. ☐

2.2. Мейкиндиктеги векторлор үстүндө амалдар

Векторлор үстүндө амалдар. Аларды кошуу, санга көбөйтүү жана скалярдык көбөйтүү амалдары тегиздиктегидей эле аткарылат.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ жана $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ *векторлордун суммасы* деп
$\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ *векторго* айтылат .(20-сүрөт).

⑳


a) б) c)

20.*б*-сүрөттө кран $\overline{a}$ вектор боюнча, жүк болсо кранга карата $\overline{b}$ вектор боюнча аракеттенген болсун. Натыйжада жүк $\overline{a}+\overline{b}$ вектор боюнча аракеттенет. Ошентип, 20.*c*- сүрөттө көрсөтүлгөн орус жазуучусу Крыловдун тамсили каармандары эмне себептен арабаны жайынан козгото албагандыгын сезген болсоңор керек.

Векторлорду кошуунун касиеттери.

Каалагндай $\overline{a}$, $\overline{b}$ жана $\overline{c}$ векторлор үчүн төмөнкө касиеттери орундуу:

a) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – вектор кошуунун орун алмаштыруу мыйзамы;

b) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ – векторлорду кошуунун бөлүштүрүү мыйзамы.

Векторлорду кошуунун үч бурчтук эрежеси.

Каалагандай A, B жана C чекиттери үчүн (21-сүрөт): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

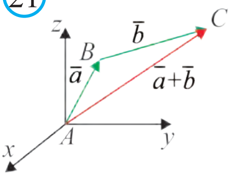
Векторлорду кошуунун параллелограмм эрежеси.

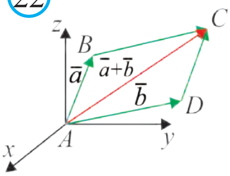
Эгерде $ABCD$ – параллелограмм (22- сүрөт) болсо, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

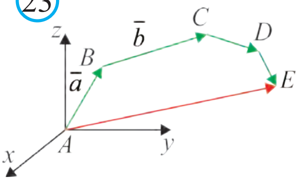
Векторларду кошуунун көп бурчтук эрежеси.

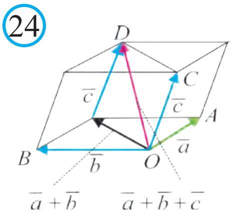
Эгер A, B, C, D жана E чекиттер көп бурчтук учтары болсо (23- сүрөт),

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE} \quad \text{болот.}$$

㉑


㉒


㉓


㉔


Бир тегиздикте жатпаган үч *векторлорду кошуунун параллелепипед* эрежеси. Эгер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелограмм (24- сүрөт) болсо,

$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC} \quad \text{болот.}$$

$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ *вектордун* λ *санга көбөйтүндүсү* деп $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$ векторга айтылат (25- сүрөт).

Каалагандай $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор жана λ жана μ сандар үчүн

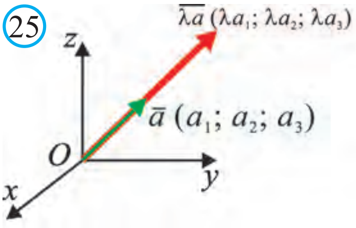
a) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

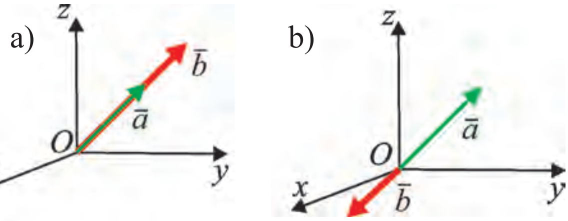
b) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

c) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ жана $\lambda\overline{a}$ вектордун багыты

$\lambda>0$ болгондо, $\overline{a}$ вектор багыты бирдей жана

$\lambda<0$ болгондо, $\overline{a}$ вектор багытына тескери болот.

㉕


㉖


2.3. Коллениардуу жана компланардык векторлор

Нөлдүк вектордон айырмалуу $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор берилген болсун. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор бирдей же карама-каршы багытталган болсо,алар коллениардуу векторлор деп аталат (26-сүрөт).

1- касиет. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор үчүн $\overline{a} = \lambda\overline{b}\ (\lambda \neq 0)$ барабардык орундуу болсо, алар өз ара коллениардуу болот жана тескерисинче.

Эгер λ> 0 болсо, $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор бир жакка ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), эгер λ< 0 болсо, карама-каршы жакка ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$) багытталган болот.

2- касиет. $\overline{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ жана $\overline{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ векторлор өз ара коллениардуу болсо, алардын координаталары өз ара пропорциялаш болот: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ жана тескерисинче.

2- маселе. Башталышы $A(1;\ 1;\ 1)$ чекитинде жана аягы *Oxy* *тегиздигинде B* чекитте болгон жана $\overline{a}\,(1; 2; 3)$ векторуна коллениардуу векторду тапкыла.

Чыгаруу: *B* чекиттин координаталары $B(x;\ y;\ z)$ болсун. *B* чекит *Oxy* тегиздикте жаткандыктан $z=0$. Анда $\overline{AB}\,(x-1;\ y-1;\ -1)$ болот.

Шарт боюнча, $\overline{AB}\,(x - 1;\ y - 1;\ - 1)$ жана $\overline{a}\,(1,\ 2,\ 3)$ векторлор коллениардуу. Демек, алардын координаталары өз ара пропорциялаш болот.

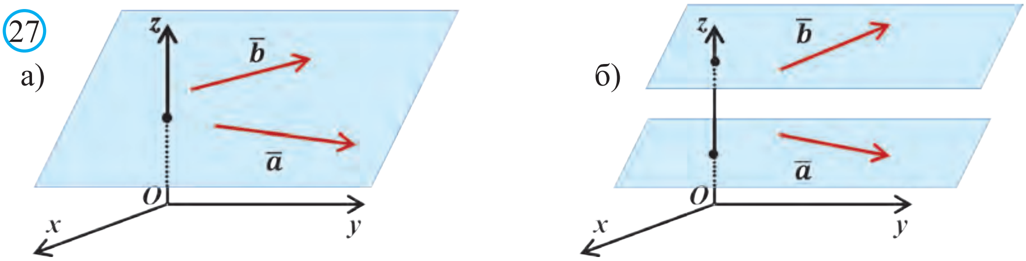
Мындан $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}$ пропорцияларды пайда кылабыз.

Алардан $x = \frac{2}{3},\ \ y = \frac{1}{3}$ экендигин табабыз

Анда $\overline{AB}\left(-\frac{12}{33};\!;-\frac{AB}{\quad}-1\right)$ болот. ☐

Бир тегиздикте же параллель тегиздиктерде жаткан векторлор *компланардык векторлор* деп аталат. (27-сүрөт).

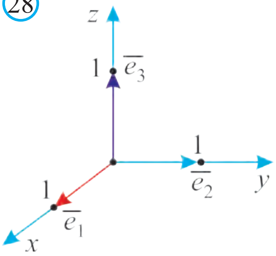
27



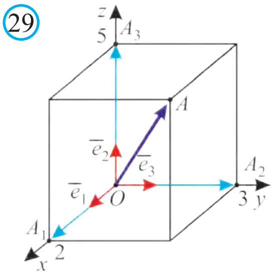
$\overline{e}_1\ (1; 0; 0)$, $\overline{e}_2\ (0; 1; 0)$ жана $\overline{e}_3\ (0; 0; 1)$ векторлор орттор деп аталат (28-сүрөт).

Каалагандай $\overline{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ векторду $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ көрүнүшүндө, жалгыз түрдө *орттор боюнча жаюу* мүмкүн(29-сүрөт).

28



29



Ушул сыяктуу үч компланар болбогон $\overline{OA}, \overline{OB}$ жана $\overline{OC}$ векторлор берилген болсо, каалагандай $\overline{OD}$ векторду төмөнкүдөй көрүнүштө, жалгыз түрдө туюнтууга болот:

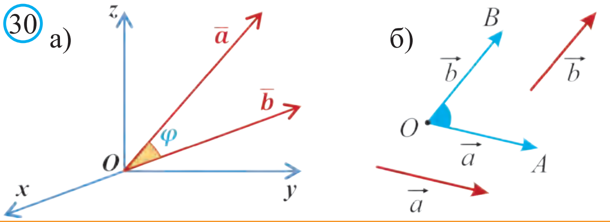
$$\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}.$$

Бул жерде a_1, a_2, a_3 кандайдыр чыныгы сандар. Бул *векторду берилген векторлор боюнча жаюу* деп аталат.

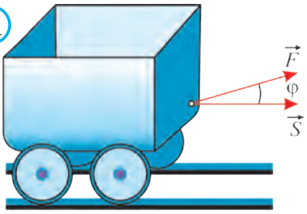
Нөлдүк вектордон айырмалуу түрдө $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ *векторлор арасындагы бурч* деп O чекиттен чыгуучу $OA=\overline{a}$ жана $OB=\overline{b}$ векторлордун багытталган кесиндилери арасындагы бурчка айтылат (30- сүрөт).

$\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор арасындагы бурч $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ түрүндө да белгиленет.

30



31



$\overline{a}$ жана $\overline{b}$ *векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү* деп, бул векторлор узундуктарынын ортосундагы бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнө айтылат.

Эгер векторлордун бири нөл вектор болсо, алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот.

Скалярдык көбөйтүнду $\overline{a} \cdot \overline{b}$ же $(\overline{a}; \overline{b})$ түрүндө белгиленет. Аныктама боюнча

$$(\overline{a}; \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Аныктамада берилишинче, $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болсо, алар *перпендикуляр* болот жана тескерисинче.

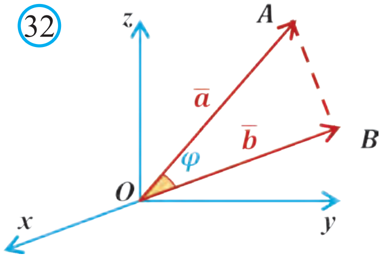
Физикада телону $\overline{F}$ күч таасири астында $\overline{s}$ аралыкка жылдырууда аткарылган A жумуш (31- сүрөт) $\overline{F}$ жана $\overline{s}$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар болот:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Касиет. $\overline{a}\,(a_1;\,a_2;\,a_3)$ жана $b(b_1;\,b_2;\,b_3)$ векторлор үчүн $(\overline{a}\,;\,\overline{b}\,)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Далилдөө. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорду координата башталышы O чекитке коёбуз. (32- сүрөт). Анда $\overline{OA}$ = $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ жана $\overline{OB}$ = $(b_1;\ b_2;\ b_3)$ болот. Эгерде берилген векторлор коллениардуу болбосо, ABO үч бурчтуктан түзүлөт жана ал үчүн косинустар теоремасы орундуу болот:

32



$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\varphi.\ \cos\varphi.\ \text{Анда}$$

$OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\dfrac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$ болот. Бирок, $OA^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$,

$OB^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$ жана $AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$.

Демек, $(\overline{a}\,,\overline{b}\,)=|\overline{a}\,|\cdot|\overline{b}\,|\cos\varphi=\dfrac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)=$

$$=\frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-$$

$$-(b_3-a_3)^2)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,.$$

Берилген векторлор колениардуу болгон (φ=0°, φ=180°) барабардык аткарылышын өз алдыңарча көрсөткүлө.□

Вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиеттери.

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – орун алмаштыруу

2. $(\overline{a}+\overline{b}\,)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ – бөлүштүрүү касиети.

3. $\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\cdot\overline{b})$ – топтоштуруу касиети.

4. Эгерде a жана b векторлор бирдей багытталган коллениардуу векторлор болсо, $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\,|\overline{b}|$ болот, себеби cos 0° = 1.

5. Карама-каршы багытталган болсо, $\overline{a}\cdot\overline{b}=-|\overline{a}|\,|\overline{b}|$, себеби cos180° = –1.

6. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0°=|\overline{a}|^2\Rightarrow\overline{a}^{\,2}=|\overline{a}|^2$.

7. $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$ векторго перпендикуляр болсо, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ болот.

Натыйжалар:

а) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ вектордун узундугу : $|\overline{a}\,|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$; (1)

б) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ жана $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ векторлор арасындагы бурчтун косинусу:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}\,;\qquad(2)$$

c) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ жана $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ векторлордун перпендикулярдуулук шарты:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (3)$$

3-маселе. $A(0;1;-1), B(1;-1;2), C(3;1;0), D(2;-3;1)$ чекиттер берилген. $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлор арасындагы бурчтун косинусун тапкыла.

Чыгаруу. $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлордун координаталарын андан кийин узундуктарын табабыз: $\overline{AB}=(1-0;\ -1-1;\ 2-(-1))=(1,-2,3)$,

$$\overline{CD}=(2-3;\ -3-1;\ 1-0)=(-1,-4,1).$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14},$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Демек, $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|}=\dfrac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\dfrac{5}{\sqrt{63}}.$ $\square$

4-маселе. $\overline{a}(1;2;0)$, $\overline{b}(1;-\frac{1}{2};0)$ векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\dfrac{1\cdot1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}=0.$

Демек, $\varphi=90°$. $\square$

5-маселе. $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$ жана бул векторлор арасындагы бурчка $\dfrac{2\pi}{3}$ барабар болсо, $|\overline{a}+\overline{b}|$ ны тапкыла.

Чыгаруу: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2}=\sqrt{\overline{a}^2+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+\overline{b}^2}=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\phi+\left|\overline{b}\right|^2}=$

$$=\sqrt{9+25+2\cdot15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{34-15}=\sqrt{19}$$

6-маселе. Эгерде $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$ жана $\overline{b}=-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ болсо, 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}$ вектордун координаталарын жана узундугун тапкыла.

Чыгаруу: $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлордун жайылмаларынын координаталарын изделип жаткан вектордук туюнтмага коёбуз: 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$.

Демек, $\overline{c}=\overline{(1;2;-2)}$. Анда $|\overline{c}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$;

2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}=2(2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k})-(-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=4\overline{i}+6\overline{j}-8\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}2\overline{k}=$
$=5\overline{i}+7\overline{j}-10\overline{k}$.

Демек, $\overline{d}=(5;7;-10)$. Анда $|\overline{d}|=\sqrt{5^2+7^2(-10)^2}=\sqrt{174}$. □

7- маселе. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлор арасындагы бурч 30° барабар жана $|\overline{a}|=\sqrt{3}$, $|\overline{b}|=2$ болсо, $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})$ көбөйтүндүнү эсептегиле.

Чыгаруу: Алгач $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлордун көбөйтүндүсүн эсептейбиз:

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}||\overline{b}|\cos 30^\circ=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

Андан соң векторлор көбөйтүндүсүнүн бөлүштүрүү касиети боюнча,берилген векторлор туюнтмаларын көп мүчөнү көп мүчөгө көбөйтүү сыяктуу көбөйтүрөбүз:

$(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\overline{a}^2+2(\overline{a},\overline{b})-6(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2=-4\overline{b}^2-4(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2.$

$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=9$, $\overline{b}=|\overline{b}|^2=4$, $(\overline{a},\overline{b})=3$ экендигин эсепке алсак, изделип жаткан көбөйтүндү $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36$. □

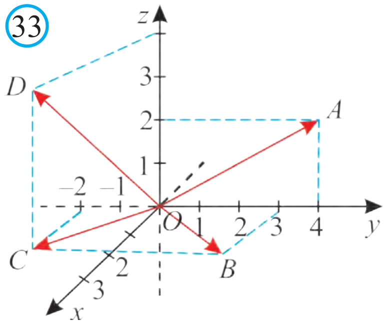
Темага карата көнүгүүлөр жана практикалык тапшырмалар

39. 30-сүрөттөгү векторлордун координаталарын аныктагыла.

40. $A(1;\,1;\,1)$, $B(-1;\,0;\,1)$, $C(0;\,1;\,1)$ va $O(0;\,0;\,0)$ чекиттер берилген. $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ жана $\overline{AB}$ векторлордун координаталарын тапкыла.

41. $\overline{AB}$ $(a;\ b;\ c)$ болсо, $\overline{BA}$ вектордун координаталарын айткыла.·

33



42. Эгер a) $A(1;\,2;\,3)$, $B(3;\,7;\,6)$; b) $A(-3;\,2;\,1)$, $B(1;\,-4;\,3)$ болсо, $\overline{AB}$ вектордун координаталарын тапкыла.

43. $\overline{a}(1;\,-1;\,1)$, $\overline{b}(0;\,2;\,-4)$, $\overline{c}(2;\,3;\,-1)$, $\overline{d}(1;\,2;\,5)$ векторлорунун узундуктарын тапкыла.

44. Эгерде $\overline{a}(2;\,1;\,3)$ жана $\overline{b}(-1;\,x;\,2)$ векторлордун узундутары барабар болсо, x ти тапкыла.

45. Узундугу $\sqrt{54}$ га барабар болгон $\overline{a}(c;\,2c;\,-c)$ вектордун координаталарын тапкыла.

46. A, B, C, D, E жана F чекиттер үзгүлтүксүз алты бурчтуктун чокулары болсо, алар аркылуу: а) эки барабар; б) эки бирдей багыттагы; с) эки карама-каршы багытта жана барабар; д) эки карама-каршы багыттагы жана барабар болбогон мисалдар келтиргиле.

47. k нын кандай маанисинде: а) $\overline{a}(4;\,k;\,2)$; б) $\overline{a}(k-1;1;4)$; с) $\overline{a}(k;\,1;\,k+2)$; d) $\overline{a}(k-1;\,k-2;\,k+1)$ вектордун узундугу $\sqrt{21}$ ге барабар болот?

48. Үч чекит берилген: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$. Ошондой $D(x;\ y;\ z)$ чекитин тапкыла, $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлор барабар болсун.

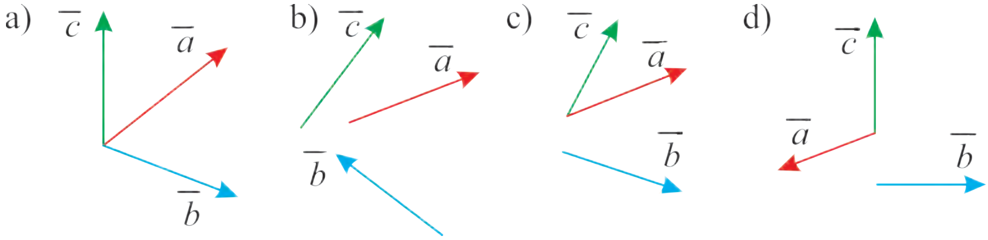
49. Үч чекит берилген: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Эгерде а) $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлор барабар; б) $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлордун суммасы нөлгө барабар болсо, $D\ (x;\ y;\ z)$ чекитти тапкыла.

50*. $(2;\ n;\ 3)$ жана $(3;\ 2;\ m)$ векторлору берилген. m жана n дин кандай маанилеринде бул векторлор коллениардуу болот?

51. Башталышы $A(1;\ 1;\ 1)$ чекитте жана аягы Oxy тегиздиктеги чекитте болгон $a(1;-2;\ 3)$ векторго коллениардуу векторду тапкыла.

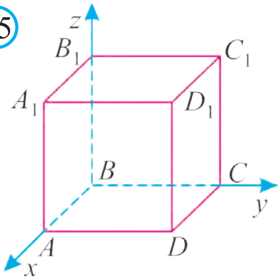
52*. $ABCD$ параллелограммдын чокулары а) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B\ (3;\ 1;\ 7)$, $C\ (4;\ 2;\ -5)$; b) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$; c) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$; d) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$ болсо, D чокунун координаталарын тапкыла.

53. 34- сүрөттө берилген векторлорду параллелепипед эрежеси боюнча суммасын тапкыла.

㉞


54. Эгер $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ жана $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$ болсо , $ABCD$ жана $MNPK$ төрт бурчтуктардан кайсы бири ромб,кайсы бири квадрат болот?

55. 35- сүрөттө берилген $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда: а) $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$ векторлорго барабар; б) $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$ векторуна карама-каршы багытталган; с) $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$ векторлор коллениардуу; д) $\overline{AB}$ жана $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ жана $\overline{A_1C}$ векторлоруна компланардык векторлорду аныктагыла.

㉟


56. Эгерде 1) $\overline{a}(1;-\ 4;0)$, $\overline{b}(-\ 4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;\ 3;\ 0)$ болсо, $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ вектордун координаталарын жана узундугун тапкыла.

57. Эгерде 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$ болсо, $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ вектордун координаталарын жана узундугун тапкыла.

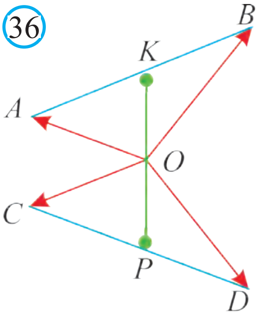
58. Эгерде $\overline{b}(-4; 8; 2)$ болсо, а) $2\overline{b}$; b) $-3\,\overline{b}$; c) $-1{,}5\,\overline{c}$; d) $0\cdot\overline{b}$ вектордун координаталарын жана узундугун тапкыла.

59. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ векторлорду орттор боюнча жайгыла.

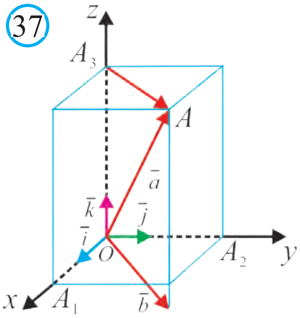
60*. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}\,(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ векторлор берилген. $|\overline{a}+2\overline{b}|$, $|\overline{a}-3\overline{b}|$, $|\overline{c}-2\overline{d}|$, $|3\overline{a}+4\overline{d}|$ ны тапкыла.

61*. *K* жана *P* чекиттер айкаш түз сызыктарда жатуучу *AB* жана *CD* кесиндилеринин ортосу жана *O* чекит *KP* кесиндинин ортосу болсо (36-сүрөт), $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{0}$ экендигин далилдегиле.

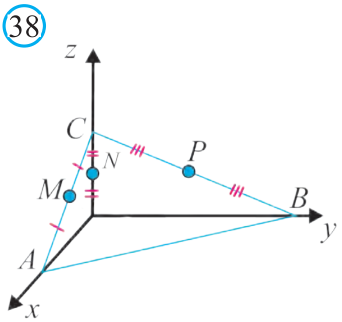
36



37



38



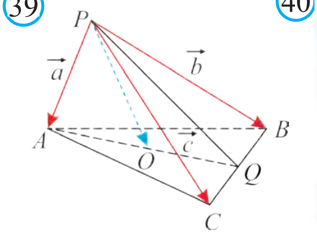
62. 37- сүрөттө $OA_1=2$, $OA_2=2$, $OA_3=3$. $\overline{a}$, $\overline{b}$ жана $\overline{A_3A}$ векторлордун координаталарын тапкыла.

63. 38- сүрөттө $OA=4$, $OB=9$, $OC=2$, M, N жана P чекиттер, тиешелүү түрдө , AC, OC жана CB кесиндилердин ортосу. $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ жана $\overline{CN}$ векторлорунун координаталарын тапкыла.

64. *Q* чекит *PABC* тетрэдрдин *BC* кырынын ортосу жана *O* чекит эсе *AQ* кесинди ортосу болсо (39- сүрөттө), $\overline{PO}$ векторду $\overline{PA}=\overline{a}$, $\overline{PB}=\overline{b}$ жана $\overline{PC}=\overline{c}$ векторлор аркылуу туюнткула.

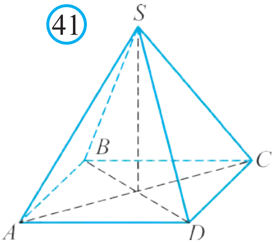
65*. 40- сүрөттө берилген кайыкка дарыя агымы $\overline{F_1}=120\ N$ күч менен жана жээктеги шамал $\overline{F_2}=100\ N$ күч менен таасир кылууда. Кайыкты дарыядан жайынан козголбой турушу үчүн аны кандай күч менен кармап туруу керек?

39



40

41



66. Скалярдык көбөйтүндүсү: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; с) 0; д) $-\frac{1}{2}$; е) б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ге барабар болгон бирдик векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

67. а) $\bar{a}\,(1;\,-1;\,1)$, $\bar{b}\,(0;\,2;\,-4)$; б) $\bar{c}(2;\,3;\,-1)$, $\bar{d}\,(1;\,2;\,5)$; с) $\bar{e}(1;\,-1;\,1)$, $\bar{f}(0;\,2;\,-\,4)$; д) $\bar{g}(2;\,3;-1)$, $\bar{h}(1;\,2;\,5)$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

68. ABC үч бурчтукта $\angle A= 50°$, $\angle C= 90°$. а) $\overline{BA}$ жана $\overline{BC}$; b) $\overline{CA}$ жана $\overline{AB}$; с) $\overline{AB}$ жана $\overline{BA}$ векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

69. $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлордун узундугун жана алардын ортосундагы бурчту тиешелүү түрдө а) 5, 12, 50°; б) 3, $\sqrt{2}$, 45°; с) 5, 6, 120°; д) 4, 7, 180° болсо, алардын скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

70. n дин кандай маанилеринде векторлор перпендикулярдуу болот?
а) $\bar{a}(2;\,-1;\,3)$, $\bar{b}(1;\,3;\,n)$; б) $\bar{a}(n;\,-2;\,1)$, $\bar{b}(n;\,-n;\,1)$;
с) $\bar{a}(n;\,-2;\,1)$, $\bar{b}(n;\,2n;\,4)$; д) $\bar{a}(4;\,2n;\,-1)$, $\bar{b}(-1;\,1;\,n)$.

71. $\bar{a}(1;-5;2)$, $\bar{b}(3;1;2)$ векторлор берилген. а) $\bar{a}+\bar{b}$ жана $\bar{a}-\bar{b}$; б) $\bar{a}+2\bar{b}$ жана $3\bar{a}-\bar{b}$; с) $2\bar{a}+\bar{b}$ жана $3\bar{a}\mathrm{b}-2\bar{b}$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

72. $A\,(1;\,0;\,1)$, $B\,(-1;\,1;\,2)$, $C\,(0;\,2;\,-1)$ чекиттер берилген. Oz координаталар огунда D чекитин тапкыла, $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$ векторлор перпендикуляр болсун.

73*. $(\bar{a},\,\bar{b}) \le |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ экендигине негиздегиле. Бул векторлор кандай болгондо барабардык орундуу болот?

74*. $SABCD$ пирамиданын бардык кырлары өз ара барабар (40-сүрөт) жана негизи квадраттан түзүлгөн. а) $\overline{SA}$ жана $\overline{SB}$; б) $\overline{SD}$ жана $\overline{AD}$; с) $\overline{SB}$ жана $\overline{SD}$; д) $\overline{AS}$ жана $\overline{AC}$; е) $\overline{AC}$ жана $\overline{AD}$ векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

75*. Узундуктары бирге барабар болгон $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлор жуп-жубу менен 60° туу бурчту түзөт. а) $\bar{a}$ жана $\bar{b}+\bar{a}$; б) $\bar{a}$ жана $\bar{b}-\bar{c}$ векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

76. O чекит $ABCD$ квадраттын диагоналдарынын кесилишкен чекити. Квадраттын B чокусунан диагоналга параллель жана DA түз сызыктар менен F чекитте кесилишүүчү түз сызыктар өткөрүлгөн. $\overline{BF}$ векторду $\overline{DO}$ жана $\overline{DC}$ векторлор аркылуу туюнткула.

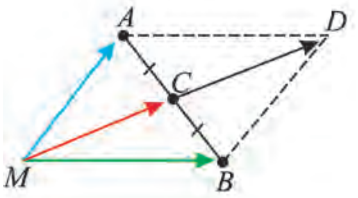
77. O чекит ABC үч бурчтуктардын медианаларынын кесилишкен чекити болсо, $\overline{OC}$ векторду $\overline{AB}$ жана $\overline{AC}$ векторлор боюнча жайып чыккыла.

78*. C чекит AB кесиндинин ортосу болсо (42-сүрөт), анда каалагандай M чекит үчүн $\overline{MC}=\dfrac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MB})$ экендигин далилдегиле.

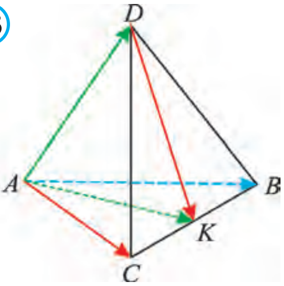
79. K чекит $ABCD$ тетраэдр BC кырынын ортосу болсо (43-сүрөт), $\overline{DK}$ векторду $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ жана $\overline{AC}$ векторлор боюнча жайып чыккыла.

80*. Телону жылдыруу багыты боюнча 30° туу бурч боюнча коюлган $\overline{F}=20N$ күч таасиринде тело 3 м ге жылды. Аткарылган жумушту тапкыла.

㊷



㊸



81*. Телону жылдыруу багыты боюнча 60° туу бурч менен коюлган $\overline{F}$ =50 N күч таасиринде тело 8 м ге жылды. Аткарылган жумушту тапкыла.

82*. (Коши-Буняковский барабарсыздыгы) Каалагандай a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 сандары үчүн $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ барабарсыздыктын туура экендигин векторлордон пайдаланып далилдегиле.

3. МЕЙКИНДИКТЕ АЛМАШТЫРУУЛАР ЖАНА ОКШОШТУК

3.1. Мейкиндикте геометриялык алмаштыруулар

Мейкиндикте берилген F фигуранын ар бир чекити кандайдыр бир усул менен көчүрүлсө, жаңы F_1 фигура пайда болот. Эгерде бул көчүрүүдө (чагылдыруу) биринчи фигуранын ар бир чекитти экинчи фигуранын ар бир чекитине көчүрүлсө, бул көчүрүүгө геометриялык форма алмаштыруу деп аталат..

Бүткүл мейкиндикти геометриялык фигура катарында эсептесек, мейкиндиктеги форма алмаштыруулар жөнүндө да айтууга туура келет.

Көрүнүп тургандай, мейкиндикте алмаштыруулар түшүнүгү тегиздиктегидей эле киргизилет. Ошондуктан анын төмөндө берилүүчү касиеттери жана алардын далилдөө тегиздиктегиге окшош. Ошол себептүү касиеттердин далилдөөлөрүнө токтолбойбуз жана аларды өз алдыңарча аткарууну сунуш кылабыз.

3.2. Аракет жана параллель көчүрүү

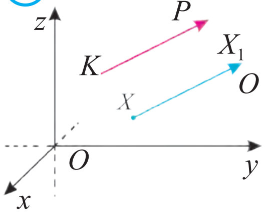
Чекиттер арасындагы аралыкты сактоочу форма алмаштыруулар аракет деп аталат. Аракеттин төмөнкү касиеттерин келтиребиз.

Аракетте түз сызык түз сызыкка,шоола шоолага,кесинди кесиндиге, бурч бурчка,үч бурчтук ага барабар болгон үч бурчтукка, тегиздик тегиздикке жана тетраэдр ага барабар болгон тетраэдрге көчүрүлөт(чагылдырылат).

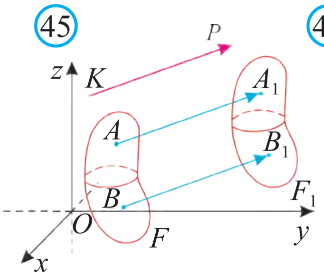
Мейкиндикте кандайдыр бир аракет жардамында бирин экинчисине көчүрүү мүмкүн болгон фигура *барабар фигуралар* деп аталат.

Аракетке эң жөнөкөй мисал бул параллель көчүрүү.

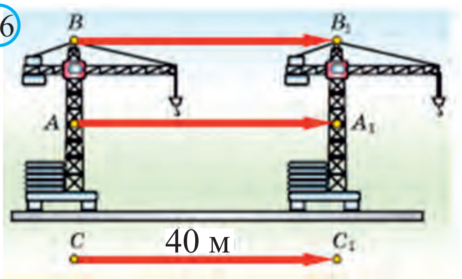
44



45



46



Мейкиндикте кандайдыр бир $\overline{KP}$ вектор жана каалагандай X чекит берилген болсун (45-сүрөт). Эгер X_1 чекит $\overline{XX_1} = \overline{KP}$ шартын канааттандырса, X чекит X_1 чекитке $\overline{KP}$ вектор бойлоп параллель көчүрүлгөн деп аталат.

Эгерде мейкиндикте берилген F фигуранын ар бир чекити КР вектор бойлоп көчүрүлсө (46-47-сүрөт), жаңы F_1 фигура пайда болот. Бул абалда F фигура F_j фигурага параллель көчүрүлгөн дейилет. Параллель көчүрүүдө F фигуранын ар бир чекити бирдей багытта бирдей аралыкка көчүрүлгөн болот.

46- сүрөттө көрсөтүлгөн көтөрмө кранды ар бир чекити алгачкы абалына караганда 40 м ге параллель көчкөн.

Көрүнүп тургандай, параллель көчүрүү аракет болуп эсептелет. Ошондуктан параллель көчүрүүдө түз сызык түз сызыкка, шоола шоолага.тегиздик тегиздикке, кесинди кесиндиге көчүрүлөт жана башкалар.

Айталы, $\overline{KP} = (a;\ b;\ c)$ вектор бойлоп параллель көчүрүүдө F фигуранын $X\,(x; y; z)$ чекити F_1 фигуранын $X_1(x_1; y_1; z_1)$ чекитине өтсүн. Анда аныктама боюнча төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$x_1 - x = a,\ \ y_1 - y = b,\ \ z_1 - z = c$ же $x_1 = x + a,\ \ y_1 = y + b,\ \ z_1 = z + c.$

Бул барабардыктар параллель көчүрүү формулалары деп аталат.

1- маселе. $\overline{p} = (3; 2; 5)$ вектор бойлоп параллель көчүрүүдө $P\,(–2; 4; 6)$ чекит кайсы чекитке көчүрүлөт?

Чыгаруу. Жогорудагы параллель көчүрүү формулаларынан пайдаланабыз:

$x_1 = -2 + 3 = 1,\ \ y_1 = 4 + 2 = 6,\ \ z_1 = 6 + 5 = 11.$ *Жообу:* $P_1(1; 6; 11).$ □

3.3. Мейкиндикте борбордук симметрия

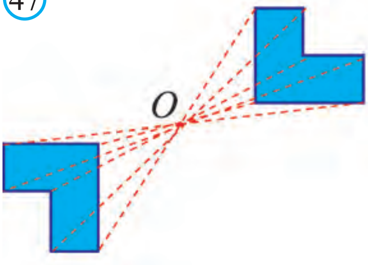
Мейкиндикте берилген A жана A_1 чекиттер O чекитке карата симметриялуу деп аталат, эгер $\overline{AO} = \overline{OA_1}$ болсо, же O чекитте AA_1 кесиндинин ортосу болсо.

Эгер мейкиндикте берилген F фигуранын ар бир чекити O чекитке салыштырмалуу симметриялуу чекитке көчүрүлсө (47-сүрөт), алмаштыруу *O чекитке салыштырмалуу симметрия* деп аталат. 48, 49- сүрөттөрдө O чекитке салыштырмалуу симметриялуу фигуралар сүрөттөлгөн.

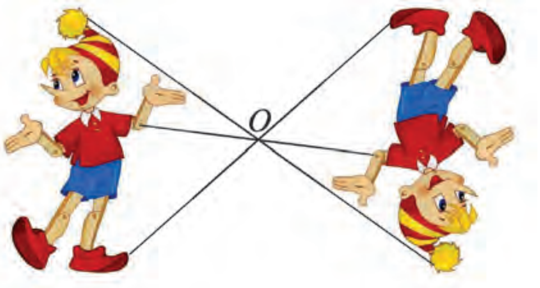
Чекитке салыштырмалуу симметрия аракет болуп эсептелет.

Эгер F фигура O чекитке карата симметриялуу алмаштырууда өзүнө чагылдырылса, ал *борбордук симметриялуу* фигура деп аталат.

㊼

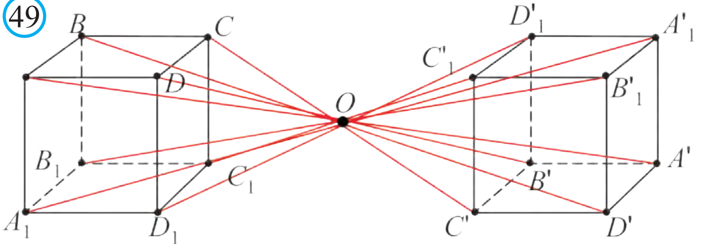


㊽

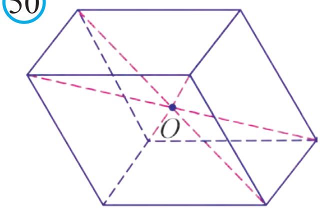


Мисалы, параллелепипедке (50- сүрөт) диагоналдары кесилишкен чекити O го карата борбордук симметриялуу фигура болуп эсептелет.

㊾



㊿



2- маселе. O (2; 4; 6) чекитке карата борбордук симметрияда A = (1; 2; 3) чекит кайсы чекитке өтөт?

Чыгаруу. $A_1 = (x; y; z)$ изделип жаткан чекит болсун. Аныктама боюнча, O чекит AA_1 кесиндинин ортосу. Демек, $2 = \frac{x+1}{2}$, $4 = \frac{y+2}{2}$, $6 = \frac{z+3}{2}$.

Бул барабадыктардан $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$, $z = 12 - 3 = 9$.

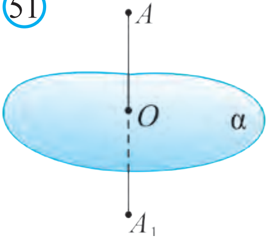
Жообу: $A_1(3; 6; 9)$.□

3.4. Тегиздикке салыштырмалуу симметрия

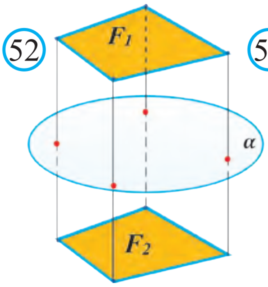
Мейкиндикте берилген A жана A_1 чекиттер *тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу* деп аталат, эгерде тегиздик AA_1 кесиндиге перпендикуляр болуп, аны тең экиге бөлсө (51-сүрөт). 52- сүрөттө тегиздикке карата симметриялуу болгон F_1 жана F_2 фигуралар келтирилген. Аныкталышынча, денебиз жана көрүнүшүбүз күзгү тегиздигине карата симметриялуу болот (53- сүрөт).

Тегиздикке салыштырмалуу симметрия аракет болуп эсептелет.

(51)

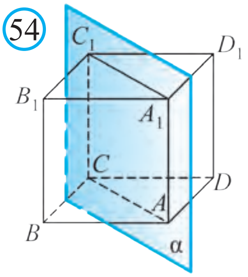


(52)



(53)

(54)



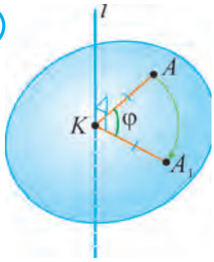
Демек,тегиздикке салыштырмалуу симметрияда кесинди өзүнө барабар кесиндиге, Түз сызык түз сызыкка жана тегиздик тегиздикке чагылдырылат.

Эгерде F фигура тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу алмаштырууда өзүнө көчүрүлсө, ал *тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу фигура* деп аталат.

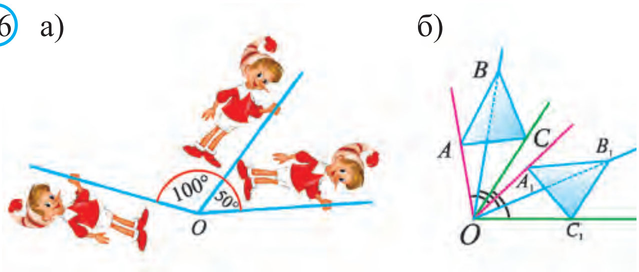
Мисалы, 54- сүрөттө берилген куб AA_1 жана CC_1 кырларынан өтүүчү тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу фигура болот.

3.5. Буруу жана окко салыштырмалуу симметрия

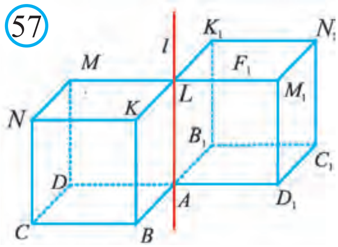
55



56 а) б)



57



Мейкиндикте A жана A_1 чекиттер жана 1 түз сызык берилген болсун . Эгерде 1 түз сызыкка түшүрүлгөн AK жана A_1K перпендикулярлар барабар жана өз ара φ бурчту пайда кылса, анда l түз сызыкка салыштырмалуу φ бурчка буруу натыйжасында A чекит A_1 чекитке өтөт дейилет (52-сүрөт).

Мейкиндикте берилген F фигуранын ар бир чекити l түз сызыкка салыштырмалуу φ бурчка бурсак жаңы F_1 фигура пайда болот. Мында F фигура l түз сызыкка салыштырмалуу ф бурчка буруудан F_1 фигурага өттү дейилет.

Мисалы, 57- сүрөттө берилген куб l түз сызыкка салыштырмалуу 180° бурчка бурууда жаңы кубду пайда кылабыз.

Түз сызыкка салыштырмалуу буруу да аракет болуп эсептелет.

l Түз сызыкка салыштырмалуу 180° бурчка буруу l *l түз сызыкка салыштырмалуу симметрия* деп аталат.

Фигуранын симметрия борбору, огу, тегиздиги анын *симметрия элементтери* деп аталат.

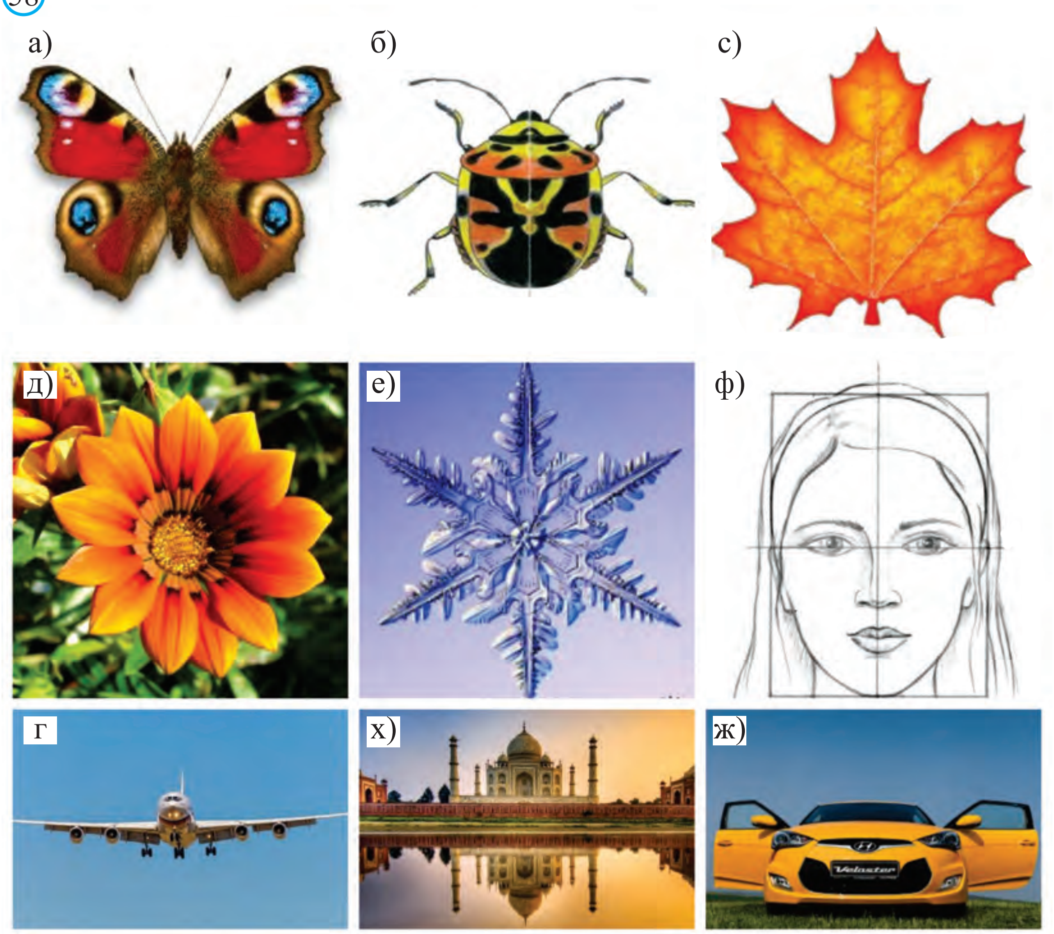
Координаталары менен берилген $A(x;\ y;\ z)$ чекитке координата тегиздиктери, координата октору жана координата башталышына салыштырмалуу симметриялуу чекиттер төмөнкү координаталарга ээ болот:

Симметрия элементи	**Симметриялуу чекиттин координаталры**
Oxy тегиздик	$(x;\ y;\ -z)$
Oxz тегиздик	$(x;\ -y;\ z)$
Oyz тегиздик	$(-x;\ y;\ z)$

Ox огу	$(x; -y; -z)$
Oy *огу*	$(-x; y; -z)$
Oz *огу*	$(-x; -y; z)$
O *чекит*	$(-x; -y; -z)$

3.6. Симметрия табиятта жана техникада

58

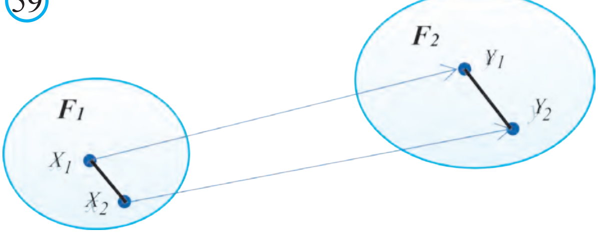


Табиятта симметрияны ар кадамда жолуктурууга болот.Мисалы адамдардын жана жаныбарлардын дене түзүлүшү,өсүмдүктөрдүн жалбырактары жана гүлдөрү симметриялуу түзүлгөн (58- сүрөт). Ошондой эле, жансыз табияттын, мисалы, түз кристаллдары, заттардын малекулалык түзүлүшү да ажайып симметриялуу фигуралардан түзүлгөн. Симметриялуу фигуралар кооз,кандайдыр мааниде эң туура жана татаал эсептелет. Ошондуктан, табияттагы сулуулук жана ар тараптуу түгөлдүк симметрия негизинде пайда болгон деп айтууга болот..Табияттагы бул сулуулук жана ар тараптуу түгөлдүктөн үлгү алган инженер жана архитекторлор сыяктуу чыгармачыл инсандар тарабынан жаратылган көптөгөн имараттар ,курулма жана механизмдер, техника жана транспорт каражаттары да симметриялуу жаратылган. Бул иште аларга геометрия илими жардам берет.

3.7. Мейкиндиктеги фигуралардын окшоштугу

Мейкиндикте $k \neq 0$ жана F_1 фигураны F_2 фигурага чагылдыруучу алмаштыруу берилген болсун. Бул чагылдырууда F_1 фигуранын каалагандай X_1 жана X_2 чекиттери болсо, жана алар чагылган F_2 фигуранын Y_1 жана Y_2 чекиттери үчүн $X_1Y_1 = k \cdot X_2Y_2$ болсо, бул алмаштыруулар окшош алмаштыруу деп аталат (59- сүрөт).

59



60

Көрүнүп тургандай, мейкиндиктеги окшош алмаштыруу түшүнүгү тегиздиктегидей эле киргизилет. Ошондой эле, анын төмөндө карала турган түрлөрүнүн аныктамасы, алардын касиеттери жана бул касиеттердин далилдөөсү да тегиздиктегиге окшош болот. Ошону үчүн бул касиеттердин далилдөөсүнө токтолбойбуз жана аларды өз алдыңарча аткарууну сунуш кылабыз.

Мейкиндикте окшош алмаштыруу түз сызыкты түз сызыкка, шооланы шоолага, кесиндини кесиндиге жана бурчту бурчка чагылдырат. Тегиздикти тегиздикке чагылдырат.

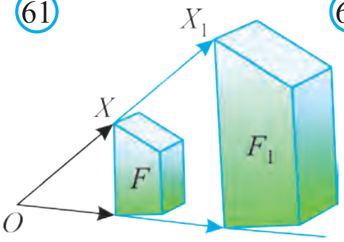
Мейкиндикте берилген эки фигуранын бири экинчисине окшош алмаштыруу аркылуу чагылдырылса,алар окшош фигуралар деп аталат.

Мейкиндикте F фигура, O чекит жана k нөлдөн айырмалуу ($k \neq 0$) сан берилген болсун. F фигуранын каалагандай X чекитин $\overline{OX_1}=k\overline{OX}$ шартын канааттандыруучу X_1 чекитке чагылдыруучу алмаштыруу O *чекитке салыштырмалуу k коэффициенттүү гомотетия деп аталат (61-сүрөт). O чекитке гомотетия борбору, k саны болсо гомотетия коэффициенти деп аталат.*

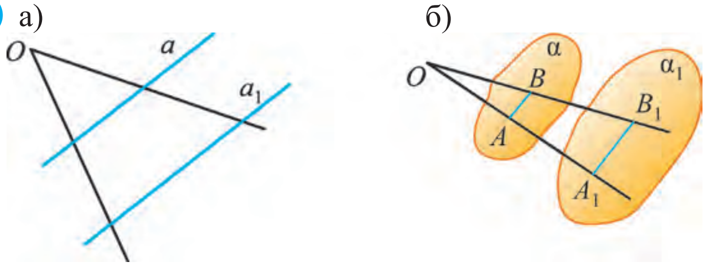
F фигуранын ар бир чекити ушул усулда чагылдырылса, натыйжада F_1 фигура пайда болот жана бул гомотетияда F фигура F_1 фигурага чагылат дейилет.

Көрүнүп тургандай,мейкиндиктеги гомотетия аныктамасы тегиздиктегидей эле. Ошону үчүн анын бир катар касиеттери жана алардын далилдөөлөрү да окшош болот. Касиеттеринин далилдөөлөрүнө токтолбойбуз аларды далилдөөнү өз алдынча аткарууну сунуш кылабыз.

61



62


а) б)

O чекитке салыштырмалуу *k* коэффициенттүү гомотетия окшоштук алмаштыруу болуп эсептелет.

Гомотетия коэффициенти *k* каалагандай нөлдөн айырмалуу сан болуп, k=1 де *F* фигура өзүнө – өзү чагылат, k=–1 де болсо *F* фигура *O* чекитке салыштырмалуу симметрия F_1 фигурага чагылат. Башка абалдарда гомотетия чекиттер арасындагы аралыкты сактабайт, ал аракет болбойт. Гомотетия натыйжасында чекиттер арасындагы аралык бирдей *k* санга көбөйөт,фигуранын өлчөмдөрү өзгөрөт,бирок формасы өзгөрбөйт.

Гомотетияда анын борборунан өтпөөчү а) түз сызык-параллель түз сызыкка; б) тегиздик болсо параллель тегиздикке чагылат (62- сүрөт).

Гомотетияда анын борборунан өтүүчү түз сызык же тегиздик өзүнө – өзү чагылат.

Темага карата көнүгүүлөр жана практикалык тапшырмалар.

83. $\overline{p}$ = (–2; 1; 4) вектор бойлоп параллель көчүрүүдө, а) (3; –2; 3); b) (0; 2; –3); c) (2; –5; 0) чекит кайсы чекитке көчөт?

84. Параллель көчүрүүдө *A*(4; 2; –8) чекит (3; 7; –5) чекитке көчүрүлдү. Параллель көчүрүү кайсы вектор бойлоп аткарылган?

85. Параллель көчүрүүдө : а) түз сызык түз сызыкка; б) шоола шоолага; с) тегиздик тегиздикке; д) кесинди кесиндиге көчүрүлүшүн далилдегиле.

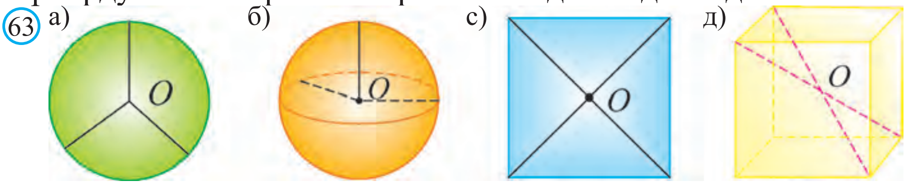
86. *O* (–2; 3; –1) чекитке салыштырмалуу борбордук симметрияда *A* (4; 2; –3) чекит кайсы чекитке өтөт?

87. 63- сүрөттө берилген фигураларда *O* чекит симметрия борбору экендигин негиздегиле.

88. (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) чекиттер координата башталышына салыштырмалуу борбордук симметрияда кайсы чекиттерге өтөт?

89*. Борбордук симметриянын аракет экендигин далилдегиле.

63



90*. Тегиздикке салыштырмалуу симметриянын аракет экендигин далилдегиле.

91. Параллелепипеддин (50- сүрөт) диагоналдарынын кесилишкен чекити O го салыштырмалуу борбордук симметриялуу фигура экендигин далилдегиле.

92. (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) чекиттер координата тегиздиктерине салыштырмалуу симметрияда кайсы чекиттерге өтөт?

93. (2; 4; –1) чекит координата тегиздигине салыштырмалуу симметриялуу чагылдырууда (2; –4; –1) чекитке өтөт. Чагылдыруу кайсы координата тегиздигине карата аткарылат?

94. Төмөнкү жадыбалда берилген 1-үлгү негизинде бош клеткаларды толтургула.

№	**Берилген чекит**	**Симметриялуу чекит**	**Эмнеге салыштырмалуу симметрия?**
1	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	Oxy тегиздигине
2	(2; 4; –1)		Oxz тегиздигине
3		(1; 2; 3)	*Oyz тегиздик*
4	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5	(–1; 6; 3)		Oy огу
6		(–3; 8; –2)	Oz огу
7	(4; 1; –2)		O чекит

95. 49- сүрөттө берилген фигураларда O чекит симметрия борбору экендигин негиздеп бергиле.

96*. Түз сызыкка салыштырмалуу буруу аракет экендигин көрсөткүлө.

97. O чекитке салыштырмалуу k коэффициенттүү гомотетия окшоштук алмаштыруу экендигин көрсөткүлө .

98. Oxy тегиздикке салыштырмалуу симметрияда каалагандай (x; y; z) чекит (x; y; -z) чекитке өтүшүн көрсөткүлө.

99. Oxz тегиздикке салыштырмалуу симметрияда каалагандай (x; y; z) чекит (x; -y; z) чекитке өтүшүн көрсөткүлө.

100. Параллель көчүрүүдө (1; 2; -1) чекит (1; -1; 0) чекитке өтөт. Координата башталышы алмаштырууда кайсы чекитке өтөт?

101. Параллель көчүрүүдө (3; 4; –1) чекиттен (2; –4; 1) чекитке өтөт. Координата башталышы кайсы чекитке өтөт?

102*. A(2; 1; 0) чекит $Б$ (1; 0; 1) чекитке, C (3; –2; 1) чекит болсо

Д (2; –3; 0) чекитке өтө турган параллель көчүрүү барбы?

103*. *А* (–2; 3; 5) чекит *Б* (1; 2; 4) чекитке, *С* (4; –3; 6) чекит болсо *Д* (7; –2; 5) чекитке өтө турган параллель көчүрүү барбы?

104. 58- сүреттөрдө берилген жандуу жана жансыз объекттер мейкиндиктеги фигура экендигин аныктагыла. Аладын (эгер бар болсо) симметриялуу борборун,симметрия огу же симметрия тегиздиктерин сызып көрсөткүлө.

105. 60- сүрөттө берилген эне балдар (матрёшкалар)дын чоң эне матрёшкага салыштырмалуу окшоштук коэффициентин тапкыла.

106. Үзгүлтүксүз тетраэдр кырынын узундугу 12 см ге барабар. Бул тетраэдрге а) 3; б) –4; с) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{3}$; коэффициенттүү гомотетия болгон тетраэдр кырынын узундугун эмнеге барабар?

107. Каалагандай *АВС* үч бурчтук чийгиле жана кандайдыр бир *О* чекитти белгилегиле. Борбору *О* чекитте жана коэффициенти: а) 2; б) –3; с) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ кө барабар болгон гомотетияда *АВС* үч бурчтук өтө турган үч бурчтук кургула.

108. Каалагандай *SABC* тетраэдр чийгиле. Борбору *S* чекитте жана коэффициенти: а) 1,5; б) –2; с) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ кө барабар болгон гомотетияда *SABC* тетраэдр өтө турган тетраэдрди кургула.

109. Каалагандай куб чийгиле. Борбору кубдун кандайдыр бир кырында жана коэффициенттүү а) 2; б) –2; с) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$ ге барабар болгон гомотетияда бул куб өтө турган мейкиндиктеги геометриялык фигураны кургула.

110. Борбору координата башталышында жана коэффициенти : а) 2,5; б) –2,5; с) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$ кө барабар болгон гомотетияда *А*(–2; 3; 5) чекит өтө турган чекиттин координаталарын тапкыла

111. Борбору $O(-1;2;2)$ чекитте жана коэффициенти: а) 0,5; б) –2; с) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$ га барабар болгон гомотетияда А(2; 4; 0) чекит өтүүчү чекиттин координаталарын тапкыла.

112. Чокулары *О*(0; 0; 0), *А*(4; 0; 0), *В*(0; 4; 0), *С*(0; 0; 4) чекиттерде болгон тетраэдр: а) борбору *О* чекитте, коэффициенти –1 ге барабар; б) борбору *А* чекитте, коэффициенти 2 ге барабар болгон гомотетияда өтүүчү тетраэдрдин чокуларынын координаталарын тапкыла.

113*. Гомотетияда анын борборунан өтпөөчү а) түз сызык – өзүнө параллель түз сызыкка, б) тегиздик болсо өзүнө параллель тегиздикке чагылышын көрсөткүлө.

114*. Гомотетияда анын борборунан өтүүчү түз сызык же тегиздик өзүнө-өзү чагылышын көрсөткүлө.

4. ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО КАРАТА ПРАКТИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

4.1. 1- тест сыноосу

1. $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ жана $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ чекиттер берилген. $z_2–z_1$ эмнени түшүндүрөт? А) *AB* кесиндинин ортосунун координатасын; В) *AB* кесиндинин узундугун; С) $\overline{AB}$ вектор узундугун; D) $\overline{AB}$ вектор координаталарынан бирөөсүн.

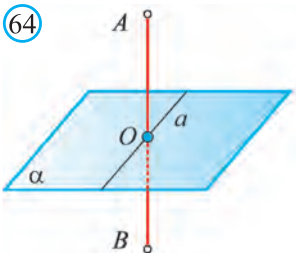
2. 64- сүрөттө $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO = OB$ болсо,

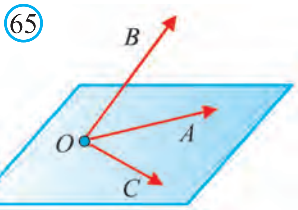
А) *A* жана *B* чекиттер О чекитке салыштырмалуу симметриялуу болот;

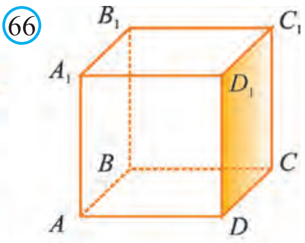
В) *A* жана *B* чекиттер түз сызыкка салыштырмалуу симметриялуу болот;

С) *A* жана *B* чекиттер α тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу болот;

D) *AB* кесинди *a* түз сызыкка салыштырмалуу симметриялуу болот.







3. 65- сүрөттө *B* чекит *AOC* тегиздикте жатпайт. Анда $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ жана $\overline{OC}$ векторлор …

А) коллениардуу; Б) компланардык;
С) бирдей багыттагы; Д) компланардык эмес.

4. $M(–7;\ 1;\ 4)$ жана $N(–1;\ –3;\ 0)$ чекиттер берилген. *MN* кесинди ортосунун координаталарын тапкыла.

А) (–4; –1; 4); Б) (–4; –1;2); С) (–4; –2; 2); Д) (–3; 2; 2).

5. $A(0;–3;2)$ жана $B(4;0;–2)$ чекиттер берилген. *AB* кесиндинин ортосу эмнеге тиешелүү?

А) *Ox* огуна; Б) *Oy* огуна; С) *Oz* огуна; Д) *Oxy* тегиздигине.

6. $A(3;\ 4;\ –3)$ чекиттен *Oz* огуна чейин болгон аралыкты тапкыла.

А) 3; Б) 5; С) $2\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{34}$.

7. $\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$ векторлордун суммасын тапкыла.

А) $\overline{O}$; Б) $\overline{CF}$; С) $\overline{DF}$; Д) $\overline{CE}$.

8. *m* дин кандай маанисинде $\overline{a}(m;\ 4;\ –3)$ жана $\overline{b}(4;\ 8;\ –6)$ векторлор коллениардуу болот?

А) 2; Б) 5; С) 1; Д) 3.

9. *O* чекит α тегиздигинде жатпайт. Борбору О чекитте болгон гомотетияда α тегиздик андан айырмалуу болгон β тегиздикке өтөт.

Эгерде α түз сызык α тегиздикке тиешелүү болсо, …

А) α || β болот; Б) α тегиздик β тегиздик менен кесилишет;

С) $a \subset \beta$ болот; Д) α ⊥ β болот.

10. *AB* түз сызык *BCD* тегиздикке перпендикуляр. Кайсы векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот?

А) $\overline{CA}$ жана $\overline{CB}$; Б) $\overline{BD}$ жана $\overline{AD}$; С) $\overline{AC}$ жана $\overline{BC}$; Д) $\overline{AB}$ жана $\overline{CD}$.

11. Кыры 1 ге барабар болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилген (66- сүрөт). $(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{BB}$ ны тап.

А) 1; Б) 0; С) –1; Д) 0,5.

12. *p* нын кандай маанисинде $\overline{a}(1;\ 1;\ 0)$ жана $\overline{b}(0;\ 4;\ p)$ векторлор арасындагы бурч 60° векторлор арасындагы бурч

А) 4; Б) 4 же –4; С) 16; Д) 16 же –16.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилген. Параллель көчүрүүдө A_1D кесинди D_1C кесиндиге өтөт. Бул көчүрүүдө AA_1B_1 тегиздик кайсы тегиздикке өтөт?

А) DB_1B; Б) DCC_1; С) AA_1C_1; Д) *ABC*.

14. α тегиздик жана анда жатпаган *ABC* үч бурчтуктун симметрия тегиздиги болуп эсептелет. Кайсы пикир туура?

А) $(ABC)\perp\alpha$; Б) *ABC* үч бурчтук тең капталдуу;

С) *ABC* үч бурчтуктун симметрия борбору бар;

Д) *ABC* үч бурчтуктун симметрия огу бар.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилген. $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$ ны тапкыла.

А) $\overline{A_1C}$; Б) $\overline{BD_1}$; С) $\overline{B_1D}$; Д) $\overline{AC_1}$.

16. Кайсы геометриялык алмаштыруу эки айкаш түз сызыктардан бирин экинчисине өткөрөт?

А) параллель көчүрүү; Б) тегиздикке салыштырмалуу симметрия; С) буруу; Д) гомотетия.

17. *M*(–1; 2; –4) чекитке *Oyz* t тегиздикке салыштырмалуу симметриялуу болгон чекитти тапкыла. А) (1; –2; 4); Б) (1; 2; –4); С) (–1; –2; –4); Д) (–1; 2; 4).

18. Параллель көчүрүүдө $\overline{AB}$ вектор $\overline{DC}$ векторго өтөт. Кайсы пикир туура эмес?

А) $\overline{AB}=\overline{DC}$; Б) *AC* жана *BD* кесиндинин ортолору биринин үстүнө бири түшөт;

С) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ жана $\overline{DC}$ векторлор компланардык; Д) *ABCD* параллелограмм.

19. *B* (-3; 2; –5) чекит *Oxz* тегиздикта кандай аралыкта жатат.

А) 2; Б) 5; С) 3; Д) $\sqrt{34}$.

20. *A* (1; –2; 0), *Б* (1; –4; 2), *C* (3; 2; 0) чекиттер *Oxz* үч бурчтуктун учтары. *CM* медиана узундугун тапкыла.

А) $2\sqrt{3}$ Б) $3\sqrt{2}$ С) $\sqrt{6}$ Д) 18

21. Эгер $a(1; m; 2)$ жана b (0,5+1; 3; 1) векторлар коллинеар болсо, $m+n$ ны тапкыла.

А) 3; Б) 5; С)–4; Д) 9.

22. A (–1; –9; –3) жана B (0; –2; 1) чекиттер берилген векторду координата векторлору (орттор) боюнча жайгыла.

А) $(\overline{BA}) = i + 9j - \overline{k}$; Б) $(\overline{BA}) = \overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$;

С) $(\overline{BA}) = -\overline{i} - 9\overline{j} - 4\overline{k}$; Д) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - 4\overline{k}$.

23. A (1; –2; 2) B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) жана D (–5; –5; 3) чекиттер берилген. AC жана BD векторлор арасындагы бурчтукту тапкыла.

А) 150°; Б) 30°; С) 45°; Д) 90°.

24. $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{a}+\overline{b}| = 11$, $|\overline{a}-\overline{b}| = 7$ экендиги анык болсо, $|\overline{b}|$ ны тапкыла.

А) 11; Б) 18; С) 20; Д) 7;

25. Негездери BC жана AD болгон $ABCD$ трапеция берилген. Эгер AB (–7; 4; 5), АС (3; 2; –1), (20; –4; –12) M жана N туура келген AB жана CD жактар ортосу болсо, MN вектор координаталары жыйындысын тапкыла.

А) 1; Б)2; С) 3; Д) 4;

4.2. Көнүгүүлөр

115. Чокулары $A(1; –2; 4)$ жана $B(3; –4; 2)$ чекиттерде болгон кесиндинин ортосунун координаталарын тапкыла.

116. $A(x; 0; 0)$ чекит $B(1; 2; 3)$ жана $C(–1; 3; 4)$ чекиттерден бирдей алыстыкта жаткан болсо, *x ти тапкыла*.

117. Эгер кесиндинин бир учу $A(1; –5; 4)$, ортосу $C(4; –2; 3)$ чекитте болсо,экинчи учунун координаталары кандай болот?

118. Oxz тегиздигине салыштырмалуу $A(1; 2; 3)$ чекитке симметриялуу болгон чекитти тапкыла.

119. Координата башталышына салыштырмалуу $A(1; 2; 3)$ чекитке симметриялуу болгон чекитти тапкыла.

120. Oxy тегиздигине салыштырмалуу (1; 2; 3) чекитке симметриялуу блгон чекитти тапкыла.

121. Oy огуна салыштырмалуу (2; –3; 5) чекитке симметриялуу болгон чекитти тапкыла.

122. Төмөнкү чекиттерден кайсы бири Oyz тегиздигинде жатат?
$A(2; –3; 0)$; $B(2; 0; –5)$; $C(1; 0; – 4)$; $D(0; 9; –7)$; $E(1; 0; 0)$.

123. Төмөнкү чекиттерден кайсы бири Oxz тегиздикте жатат:
$A(– 4; 3; 0)$; $B(0; –7; 0)$; $C(2; 0; –8)$; $D(2; –4; 6)$; $E(0; – 4; 5)$?

124. $A(–3; 8; 3\sqrt{33})$ чекиттен Ox огуна чейин болгон аралыкты тап.

125. $A(3; –2; 5)$ жана $B(–4; 5; –2)$ чекиттер берилген. $\overline{AB}$ вектордун координаталарын тапкыла.

126. $\overline{a}(1; –2; 3)$ вектордун аягы $B(2; 0; 4)$ чекит болсо, бул вектордун башталышын тапкыла.

127. $B(0; 4; 2)$ чекит $\overline{a}(2; –3; 1)$ вектордун аягы болсо, бул вектордун башталышынын координаталарын тапкыла.

128. $\overline{a}(x; 1; 2)$ вектордун узундугу 3 кө барабар. x тин маанисин тапкыла.

129. $\overline{a}(4; -12; z)$ вектордун модулу 13 кө барабар. z тин маанисин тапкыла.

130. Эгер $\overline{a}(6; 2; 1)$ жана $\overline{b}(0; -1; 2)$ болсо, $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ вектордун узундугун тапкыла.

131. Эгер $\overline{p}(2; 5; -1)$ жана $\overline{q}(-2; 2)$ болсо, $\overline{m} = 4\overline{p} + 2\overline{q}$ вектордун узундугун тапкыла.

132. $\overline{a}(2; -3; 4)$ жана $\overline{b}(-2; -3; 1)$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

133. $\overline{m}(-1; 5; 3)$ жана $\overline{n}(2; -2; 4)$ векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

134. m дин кандай маанисинде $\overline{a}$ (1; *м*; –2) жана $\overline{b}$(*м*; 3; –4) векторлор перпендикуляр болот?

135. n дин кандай маанисинде $\overline{a}(n; -2; 1)$ жана $\overline{b}(n; n; 1)$ векторлор перпендикуляр болот?

136. m дин кандай маанисинде $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ жана $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$ векторлор перпендикуляр болот?

137. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ va $D(-5; -5; 3)$ чекиттер берилген. $\overline{AC}$ жана $\overline{BD}$ векторлор арасындагы бурчту тапкыла.

138. n дин кандай маанилеринде $\overline{a}(2; n; 6)$ жана $\overline{b}(1; 2; 3)$ векторлор колениардуу болот?

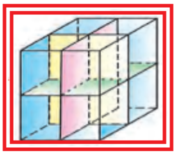
139. m дин кандай маанисинде $\overline{a}(2; 3; -4)$ жана $\overline{b}(m; -6; 8)$ векторлор параллель болот?

140. m жана n нын кандай маанисинде $\overline{a}(-1; m; 2)$ жана $\overline{b}(-2; -4; n)$ векторлор коллениардуу болот?

141. $A(2; 7; -3)$ жана $B(-6; -2; 1)$ чекиттер берилген. $\overline{BA}$ векторду координаталар векторлору (орттору) боюнча жайгыла.

4.3. 1- текшерүү ишинин үлгүсү

1. *Oxy* тегиздигине салыштырмалуу (1; 2; 3) чекитке симметриялуу болгон чекитти тапкыла
2. Эгерде $\overline{a}(6; 3; 2)$ жана $\overline{b}(-3; 1; 5)$ болсо, $\overline{c} = \overline{a} + 2\overline{b}$ вектордун узундугун тапкыла.
3. $A(2; -1; 0)$ жана $B(-2; 3; 2)$ чекиттер берилген .Координата башталышынан AB кесиндинин ортосуна чейин болгон аралыкты тапкыла.
4. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ жана $D(-5; -5; 3)$ чекиттер берилген. $\overline{AC}$ жана $\overline{BD}$ векторлорунун арасындагы бурчту тапкыла.
5. *(Жакшы өздөштүргөн окуучулар үчүн кошумча маселе).* Чокулары $A(4; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$ жана $C(2; 1; -1)$ чекиттерде болгон үч бурчтуктун BD медианасынын узундугун тапкыла.



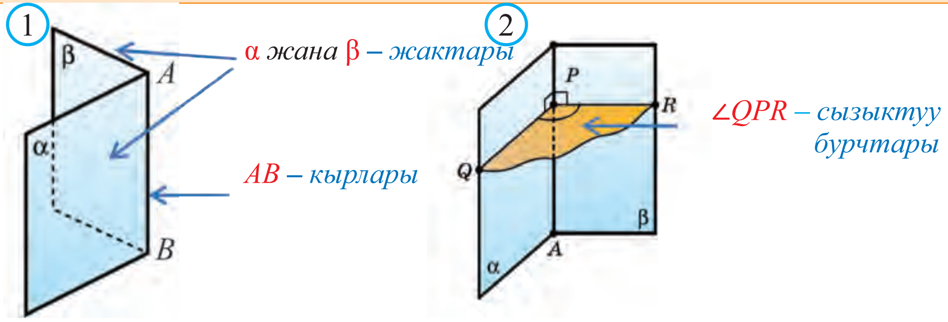
II ГЛАВА. ПРИЗМА ЖАНА ЦИЛИНДР

5. КӨП ГРАНДУУ БУРЧТАР ЖАНА КӨПГРАНДЫКТАР

5.1. Көп грандуу бурчтар

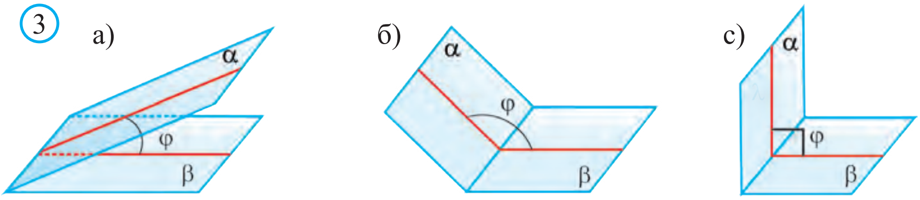
Эки грандуу бурчтун аныктамасы менен 10-класста таанышкансыңар.

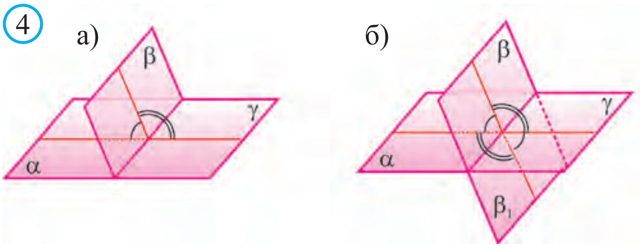
Эки α жана β жарым тегиздик (грандары) жана аларды чектеп турган жалпы *AB* түз сызык (кырлары) тан турган геометриялык фигурага эки грандуу бурч деп аталат (1-сүрөт) жана (α β) түрүндө белгиленет.

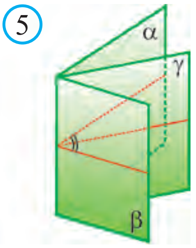


Эки грандуу бурчтун кырынын каалагандай чекити *P* дан анын грандарында жатуучу жана бул кырга перпендикуляр болгон *PR* жана *PQ* шоолаларын чыгарабыз. *ZQPR*–эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу деп аталат (2- сүрөт).

Эки грандуу бурчтун жапыз бурчтары сыяктуу сызыктуу бурчунун чоңдугуна карап өткүр, өтпөс, түз жана жапыз болот (3- сүрөт). Жапыз бурчтар сыяктуу эки грандуу бурчтар жакын жана вертикаль болушу мүмкүн (4- сүрөт).



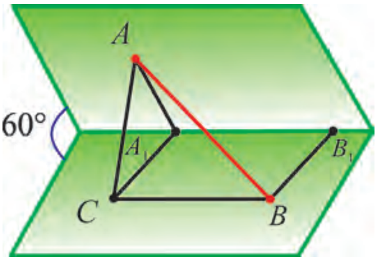




Эки грандуу бурчту тең экиге бөлүүчү жарым тегиздик анын *биссектору* деп аталат (5- сүрөт).

1- маселе. Сызыктуу бурчу 60° ка барабар болгон эки грандуу бурчтун грандарында жаткан A жана B чекиттерден (6-сүрөт) анын кырына AA_1 жана BB_1 перпендикуляр түшүрүлгөн. Эгерде $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ жана $A_1B_1 = 13$ болсо, AB кесиндинин узундугун тапкыла.

6



Чыгаруу. $BB_1 || CA_1$ жана $A_1B_1 || CB$ түз сызыктарды жүргүзөбүз. Пайда болгон A_1B_1BC төрт бурчтук параллелограмм болот. A_1B_1 түз сызык A_1AC үч бурчтук тегиздигине перпендикуляр болот, себеби бул тегиздикте жаткан эки A_1A жана A_1C түз сызыктарга перпендикуляр. Анда BC түз сызык да бул тегиздикке перпендикуляр болот.

Демек, ABC үч бурчтук тик бурчтуу үч бурчтук экен.

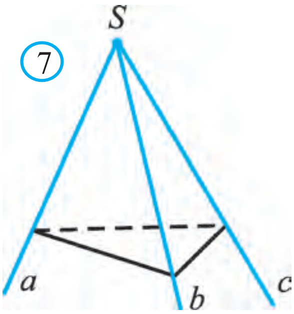
Косинустар теоремасы боюнча:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 124.$$

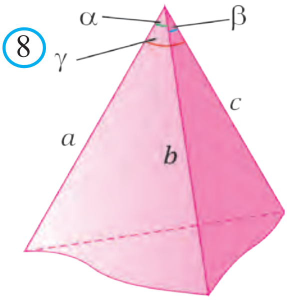
Пифагор теоремасы боюнча: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}.$

Жообу: $AB = \sqrt{293}.$ ☐

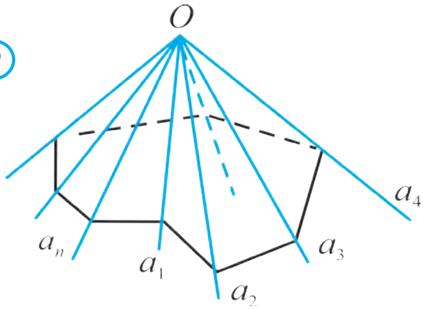
7



8



9



Мейкиндикте бир чекиттен чыгуучу a, b жана c нурлар үч жапыз $(a.b)$.$(b.c)$ жана (ac) бурчтар түзөт (7-сүрөт). Бул жапыз бурчтардан түзүлгөн топтон (abc) формага үч жактуу бурчтук деп аталат. Жапыз бурчтагы үч жактуу бурчтуктун жактары, алардын тараптарына үч жактуу бурчтуктун кырлыры, жалпы учуна болсо үч жактуу бурчтуктун учу деп аталат. Үч жактуу бурчтуктун жактарынан түзүлгөн эки грандуу бурчтар үч жактуу бурчтуктун эки грандуу бурчтар деп аталат.

Үч жапыз *(ab)*, *(bc)* жана *(ac)* бурчтуктар үч жактуу бурчтуктун *тегиз бурчтары* деп да аталат.

Үч жактуу бурчтуктун тегиз бурчтарыны ылайык түрдө, α, β, γ деп белгилесек. (8-сүрөт) алар үчүн үч бурчтук барабарсыздыгы туура болот, мындайга айтканда алардын каалаган калган экөөсүнүн жыйындысынан кичүү болот: $\alpha+\beta<\gamma$, $\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ жана түз бурчтардын жыйындысы 360° дан кичүү болот: $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

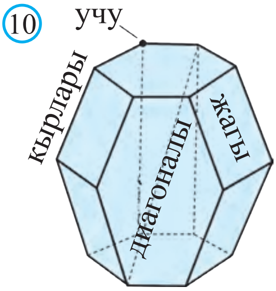
Көп грандык түшүнчөсү да ушуга окшош киритилет (9-сүрөт).

5.2. Көпграндыктар

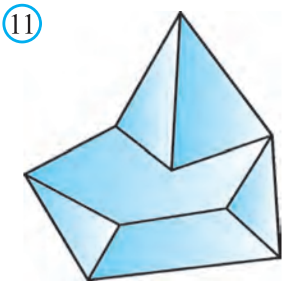
Көңүл бурган болсоңор, ушул мезгилге чейин мейкиндиктеги фигура иретинде бир нече телолордун, ошолордон көп грандыктардын касиеттерин үйрөнүп келдик. Мейкиндиктеги фигуралардын **тело** деп атоонун себеби, аларды мейкиндиктеги кандайдыр бир материалдык тело ээлеген жана бети менен чектелген бөлүгү иретинде элестетүүгө мүмкүн. Төмөндө көп грандыктарга тиешелүү болгон кээ бир түшүнүктөрдү эстетип өтөбүз.

Көпграндык деп жалпак көп бурчтуктар менен чектелген телого айтылат (10-сүрөт).

⑩

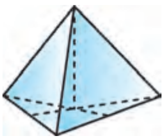
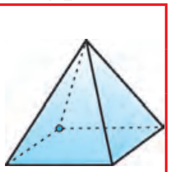
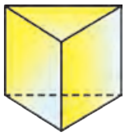
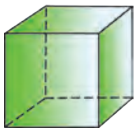


⑪



Көпграндык каалаган граны жаткан тегиздиктин бир жагында жатса,мындай көп грандыкка томпок көп грандык деп аталат. 10-сүрөттө томпок, 7-сүрөттө болсо томпок эмес көп грандыктар сүрөттөлгөн.

Каалагандай көп грандыктардын грандарынын санын *Г*, чокуларынын санын *У* жана кырларынын санын *Q* менен белгилейбиз. Бизге тааныш болгон көп грандыктар үчүн төмөнкү жадыбалды толтурабыз:

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Көпграндыктын аты</td><td>Г</td><td>U</td><td>К</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Үч бурчтуу пирамида</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Төрт бурчтуу пирамида</td><td>5</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Үч бурчтуу призма</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Төрт бурчтуу призма</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td><i>n</i>- бурчтуу пирамида</td><td>$n+1$</td><td>$n+1$</td><td>$2n$</td></tr>
<tr><td><i>n</i>- бурчтуу призма</td><td>$n+2$</td><td>$2n$</td><td>$3n$</td></tr>
</table>

Жадыбалдан ар бир көп грандык үчүн $Г + Ч – К = 2$ экендигин байкоого болот. Белгилүү болгондой, бул байланыш бардык томпок көп грандыктар үчүн туура болот. Муну алгач 1752- жылда швецариялык математик Леонард Эйлер аныктаган.

Эйлер теоремасы. *Каалагандай томпок көп грандык үчүн:* $Г + У - К = 2$ байланыш орундуу болот, бул жерде $Г$-көп грандыктын грандары, $У$ – чокулары, $К$ – болсо кырларынын саны.

Бул теореманын далилдөөсүнө токтолбойбуз. Андан төмөнкү натыйжалар келип чыгат. Аларды Эйлер теоремасынан пайдаланып, өз алдыңарча далилдегиле.

1- натыйжа. Көпграндыктагы тегиз бурчтардын саны анын кырларынын санынан эки эсе көп.

2- натыйжа. Көпграндыктагы тегиз бурчтардын саны ар дайым жуп болот.

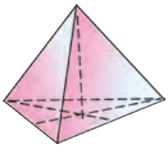
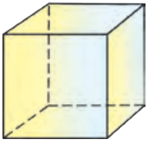
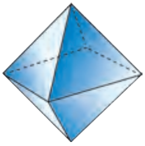
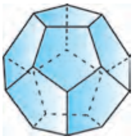
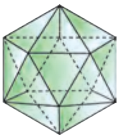
3- натыйжа. Эгерде көп бурчтуктун ар бир чокусунан бирдей k сандагы кырлар туташтырылса, $У \cdot к = 2Q$ аткарылат.

4- натыйжа. Эгерде көп грандыктын бардык грандары бирдей n-бурчтардан түзүлгөн болсо, $Г = 2К$ аткарылат.

5- натыйжа. Көпграндыктын тегиз бурчтарынын суммасы $360°(Г - К)$ га барабар.

Грандары бири-бирине барабар болгон үзгүлтүксүз көп бурчтуктардан түзүлгөн жана ар бир чокусунан бирдей сандагы кырлар чыга турган томпок көп грандуу үзгүлтүксүз көп грандык деп аталат.

Аныкталышынча, үзгүлтүксүз көп грандыктар беш түрдүү болот (муну өз алдыңарча текшерип көргүлө). Алар төмөнкүлөр:

Фигураси					
Аты жана анын чечмеси	үзгүлтүксүз тетраэдр (төрт жактуу)	Куб, гексаэдр (алты жактуу)	Октаэдр (сегиз жактуу)	Доде-каэдр (он эки жактуу)	Икосаэдр (жыйырма-жактуу)
Жактары	үзгүлтүксүз үч бурчтук	үзгүлтүксүз төрт бурчтук	үзгүлтүксүз үч бурчтук	үзгүлтүксүз беш бурчтук	үзгүлтүксүз үч бурчтук
Жактарынын саны	4	6	8	12	20
Кырларыны саны	6	12	12	30	30
Учтарынын саны	4	8	6	20	12
Ар бир учунан чыгуучу кырлары саны	3	3	4	3	5

Тарыхый маалыматтар

Бардык тик көп грандыктар Байыркы Грецияда белгилүү болгон. Евклиддин белгилүү «Негиздер» инин VIII китеби томпок көп бурчтуктарга арналган. Бул көп грандыктарды көбүнчө Платон телолору деп да аташат. Байыркы Грециянын атактуу окумуштуусу Платон (б.э ч 427-347-жылдар) баяндаган ааламдын идеалисттик сүрөттөлүшүндө бул телолордон төртөөсү ааламдын төрт элементине окшоштурулат: тетраэдр-отко, гексаэдр-жер, икосаэдр-суу, октаэдр-аба, бешинчи көп грандык-додокаэдр болсо бүт ааламдын түзүлүшүнүн белгиси.

XVIII кылымда көп грандыктар теориясына Леонард Эйлер (1707-1783) салмактуу салым кошкон.1758-жылы томпок көп грандыктардын чокулары,кырлары,грандарынын саны ортосундагы байланыш жөнүндөгү Эйлер теоремасы жана анын далилдөөсү түрдүү көп грандыктар дүйнөсүнө тартип орнотту жана анын укмуштуу геометриялык маанисин алгебралык теория боюнча баяндаган.

Темага карата маселелер жана практикалык тапшырмалар

142. Эки тегиздик арасындагы бурчтук 47°. Бул тегиздиктер кесүшүүдөн пайда болгон эки грандуу бурчтуктардын градус өлчөөсүн тапкыла

143. Эки грандуу бурчтуктун градус өлчөөсу 52° тен бул бурчтукка жакын болгон эки грандуу бурчтук градус өлчөөсү эмнеге барабар болот?

144. Түз бурчу 100° болгон эки грандуу бурчтун жактарына перпендикуляр болгон түз сызыктар арасындагы бурчтукту тапкыла

145. Эки жакын эки грандуу бурчтугу биссекторлору арасындагы эки грандуу бурчтуктун грандус өлчөөсү эмнеге барабар

146. *A* чекит градус өлчөөсү 60° болгон эки грандуу бурчтун биссекторунда жатат. Эгер бул чекит эки грандуу бурчтук чокусунан 10 см аралыкта жаткан болсо, анда эки грандуу бурчтуктун жактарына чейин болгон аралыкта тапкыла.

147. *A* чекит градус өлчөөсү 30° болгон эки грандуу бурчтуктун бир жагына тийиштүү болуп, экинчи жагынан 6 см аралыкта жатат. Бул чекитте эки грандуу бурчтуктун чокусуна чейин болгон аралыкты тапкыла.

148*. *A* чекит тик эки грандуу бурчтуктун жактарынан 3 *дм* жана 4 *дм* аралыкта жатат. Бул чекиттен эки грандуу бурчтуктун кырына чейин болгон аралыкты тапкыла.

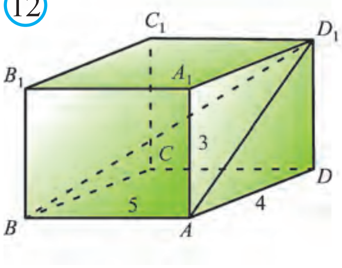
149*. Тетрэдрдин бардык эки грандуу бурчтуктары барабар экендигин далилдегиле жана алардин градус өлчөөсүн тапкыла.

150. Түз бурчтары: а) 30°; 60°; 20°; б) 45°; 80°; 130°; с) 30°; 60°; 20°; д) 20°; 60°; 70°; е) 76°; 34°; 110° болгон 3 грандуу бурчтук барбы?

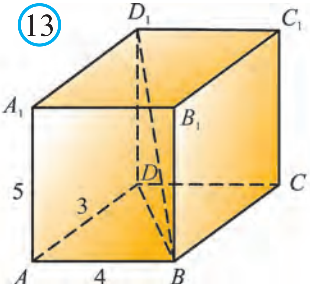
151*. Жантык көп грандуу бурчтуктун бардык түз бурчтуктары 360° дан кичүү экенин далилдегиле

152. Тик бурчтуу параллелипедде $AB=5$, $AD=4$ жана $AA_1=3$ болсо, ABD_1 бурчтукту тапкыла (12- сүрөт).

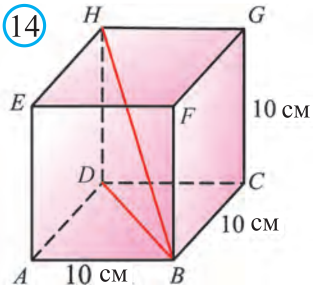
12



13



14



153. Тик бурчтуу параллелипедде $AB=4$, $AD=3$ жана $AA_1=5$ болсо, DBD_1 бурчтукту тапкыла (13- сүрөт).

154. 14- сүрөттө берилген кубдагы DBH бурчтукту тапкыла.

155*. n кыры бар жантык көп грандуу көп грандыктын бардык түз бурчтуктары жыйындысы $360°(n-2)$ ге барабар экендигин далилдегие

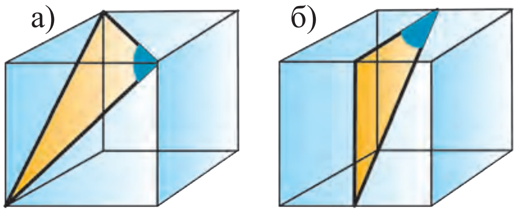
156*. Көп грандуу түз бурчтуктун саны анын кырлары санынан эки эсе чоң болушун далилдегиле.

157*. Көп грандуу түз бурчтуктары саны ар дайым жуп түрүндө болуусун далилдегиле

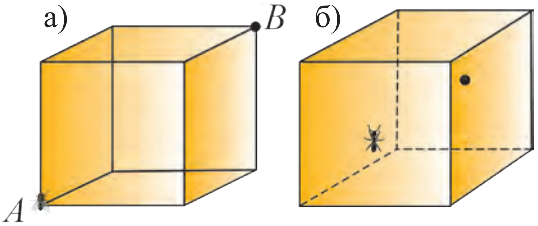
158*. Көп грандыктын түз бурчтуктары жыйындысы $360°\ (Y - Q)$ ге барабар болуусун далилдегиле.

159. 15- сүрөттөрдөгү кубдарда ажратып көрсөтүлгөн бурчтуктар чоңдугун аныктагыла

15



16



160*. 16- сүрөттөгү кубдун бетиндеги чымынга: а) A кырынан B кырына; б) куб жагынын борборунан карама-каршы жагынын борборуна алып бара турган эң кыска жолду көрсөткүлө (көрсөтмө: кубдун жайылмасынан пайдалангыла).

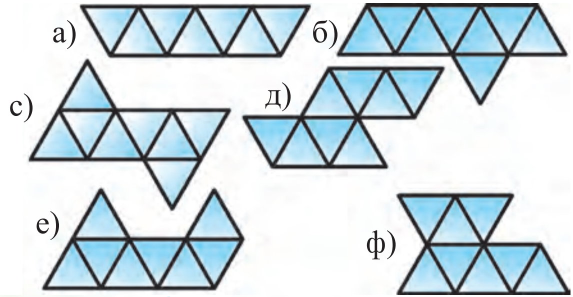
161. 17- сүрөттө көрсөтүлгөн мейкиндик фигура дайыма көп грандуу боло алабы? Анын бети канча квадраттан түзүлгөн? Анын канча учу жана кырасы-кыры бар?

162. 18- сүрөттө көрсөтүлгөн жайылмалардын кайсы бири октаэдрге тийиштүү?

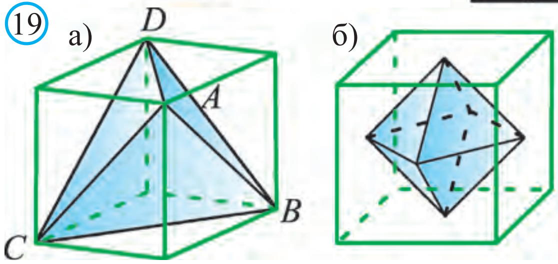
163. 19- сүрөттө көрсөтүлгөн кубга ички сызылган көп грандык: а) дайыма тетраэдр; б) октаэдр экендигин далилдегиле.

17

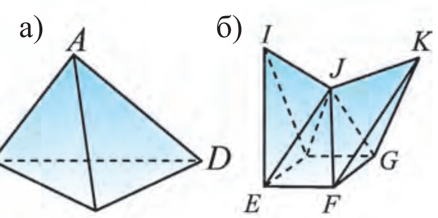
18



19



20



164. 20- сүрөттө көп грандыктардын учтары жана жактары санын аныктап, аларды Ейлер теңдемесине коюп текшергиле.

165. Жантык көп грандыктын ар бир учунан 3 төн кыры чыгат. Эгер бул көп грандыктын кырларынын саны: а) 12; б) 15 ге барабар болсо. Анын канча учу жана жагы бар?

166*. 13 жагы жана ар бир жагынан 13 төн кыры болгон көп грандуу барбы?

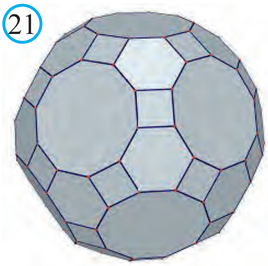
167. Жантык көп грандыктын ар бир учунан төрттөн кыр чыгат Эгер бул көп грандыктын кырлары саны 12 ге барабар болсо, анын канча учу жана жагы бар.

168. а) Үзгүлтүксүз тетраэдр; б) куб; с) октаэдр; д) додекаэдр; е) икосаэдрдн учтары, кырлары жана жактарынын санын тапкыла жана бул көп грандыктар үчүн Ейлер теңдемесинин орундуу болушун текшергиле.

169. Учтары саны 8, кырлары саны 12 болгон үзгүлтүксүз көп грандыктын жактары санын тапкыла жана алардын атын аныктагыла.

170. Учтары саны 6 кырлары саны 12 болгон үзгүлтүксүз көп грандыктын жактары санын тапкыла жана анын атын тапкыла

21



171. Учтары саны 10. жактары саны 7 болгон көп грандыктын кырлары санын тапкыла.

172. Учтары саны 14 кырлары саны 21 болгон көп грандыктын жактарынын санын тапкыла.

173. 21- сүрөттөгү көп грандыктын 62 жагы жана 120 учу болсо, анын кырлар-кырлары санын тапкыла.

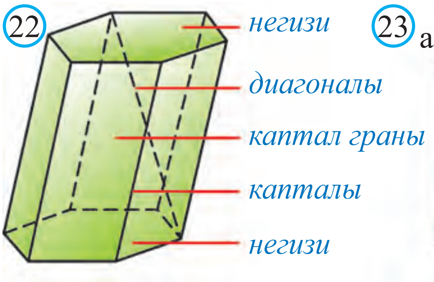
6. ПРИЗМА ЖАНА АНЫН БЕТИ

6.1. Призма жана анын кесилиштери

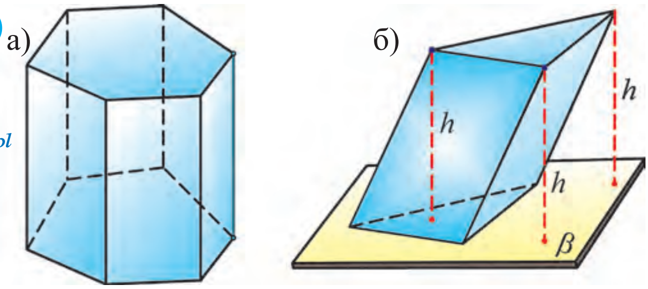
Призмалар менен төмөнкү класстардан эле таанышсыңар. Аларга карата кээ бир түшүнүктөрдү жана касиеттерди келтиребиз.

Призма деп эки граны(негизи) барабар n-бурчтардан, калган n граны болсо параллелограммдан түзүлгөн көп грандыкка айтылат (22- сүрөт).

22

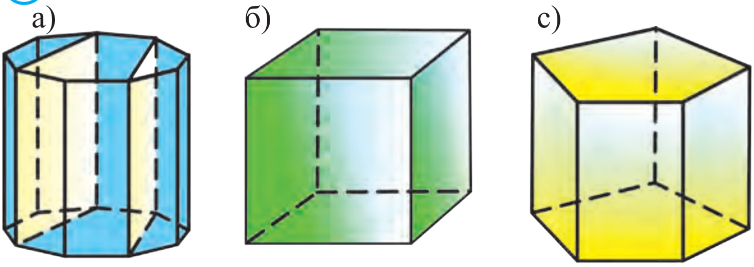


23

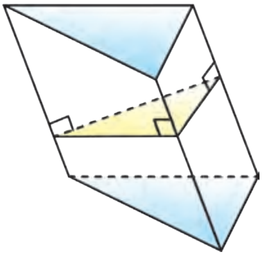


Призманын каптал кырлары негизине перпендикуляр же перпендикуляр эместигине карап тик же жантык призмаларга ажыратылат. 8- сүрөттө жантык алты бурчтуу призма, 9- сүрөттө болсо тик беш бурчтуу призма берилген.Тик призманын каптал грандары тик бурчтуктардан түзүлгөн.

24



25



Негизи үзгүлтүксүз көп бурчтуктар болушса, анда ал үзгүлтүксүз призма деп аталат (24- сүрөт). Үзгүлтүксүз призманын каптал грандары бири-бирине барабар тик бучтуктардан түзүлгөн болот.

Призма негизинин кандайдыр бир чекитинен экинчи негизге түшүрүлгөн перпендикуляр призманын бийиктиги деп аталат. (23.б- сүрөт).

Призманын диагоналдык кесими деп,призма негиздеринин тиешелүү диагоналдары аркылуу жүргүзүлгөн кесилишке айтылат (24.а- сүрөт). Призманын диагоналдык кесилиштеринин саны призманын бир негизинин диагоналдарынын санына барабар.

Призманын перпендикулярдык кесилиштери, деп анын бардык каптал кырларына перпендикуляр болгон кесилишке айтылат (25-сүрөт).

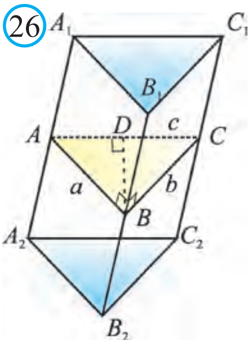
Томпок n-бурчтун $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналы бар экендигин эсепке алып, n-бурчтуу призманын диагоналдык кесилиштеринин саны да $\frac{n(n-3)}{2}$ болот.

Ар бир диагоналдык кесилиште призманын эки диагоналын жүргүзүүгө болот. Демек, n-бурчтуу призманын бардыгы $n(n$-3) диагоналы бар.

1- маселе. Үч бурчтуу жантык призманын каптал кырларынын арасындагы аралыктар,тиешелүү түрдө, 7 см, 15 см жана 20 см. Призманын чоң каптал гранынан анын каршысындагы каптал кырына чейин болгон аралыкты тапкыла.

Чыгаруу. Белгилүү болгондой, параллель түз сызыктар арасындагы аралык ушул түз сызыктарга жүргүзүлгөн перпендикулярдын узундугуна барабар. Анда берилген призманын ABC перпендикулярдык кесилиштери жактарынын узундугу ушул аралыкка барабар болот (26- сүрөт). Призманын эң чоң гранында эң чоң AC = 20 см каптал жатат. B_2B_1 кырынан $A_2A_1C_1C_2$ тегиздикке чейин болгон аралык ABC Үч бурчтуктун BD бийиктигине барабар болот. Герон формуласы боюнча:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+15+20}{2} = 21,$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42.$$

Экинчи жактан, $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

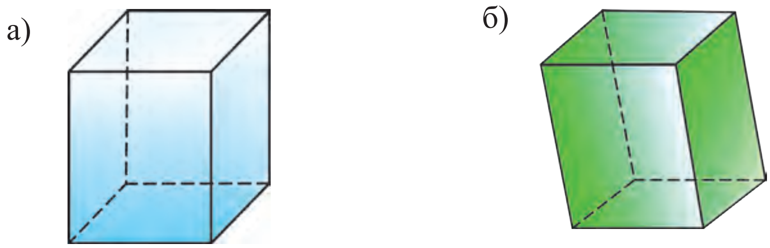
Мындан, $42 = \frac{AC \cdot BD}{2}$ же $BD = 4{,}2$ см.

Жообу: 4,2 см.

6.2. Параллелепипед жана куб

Негиздери параллелограммдан түзүлгөн призма параллелепипед деп аталат (27- сүрөт). Параллелепипед да призма сыяктуу тик жана жантык болушу мүмкүн.

27



а)

б)

Параллелепипеддин жалпы чокуга ээ болбогон грандары *карама-каршы жаткан грандар* деп аталат.

Параллелепипеддин

– 12 кыры болуп алардын ар бир төртөөсү барабар кесилиштерден түзүлгөн (28.а- сүрөт),

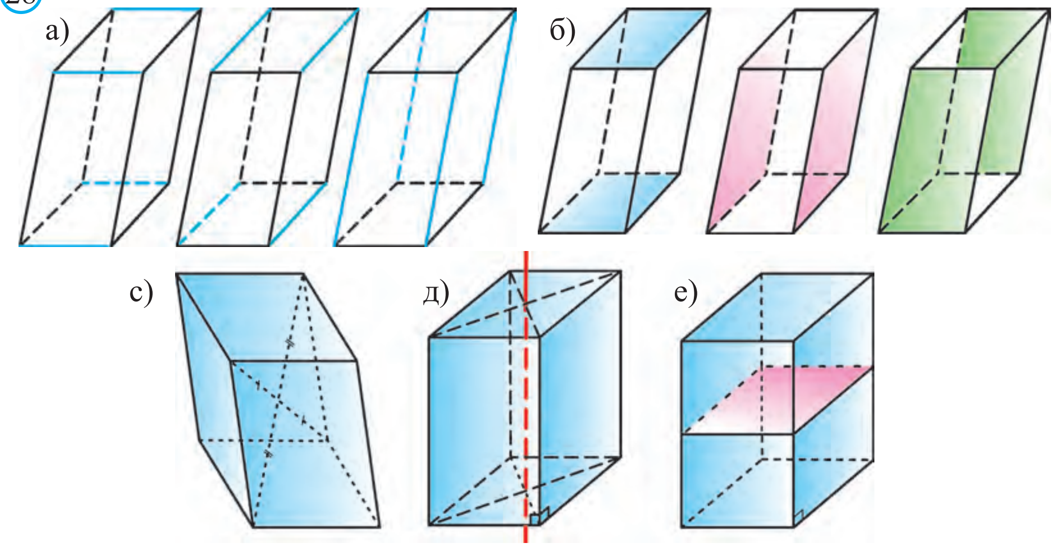
– 6 граны болуп, анын карама-каршы грандары өз ара параллель жана барабар болот (28.б- сүрөт),,

– 4 диагоналы болуп,алар бир чекитте кесилишет жана кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнөт (28.с- сүрөт),

– Диагоналдарынын кесилишкен чекити анын симметрия борбору болот (28.с- сүрөт).

Тик параллелепипеддин симметрия огу (28.д- сүрөт) жана симметрия тегиздиги бар (28.е- сүрөт).

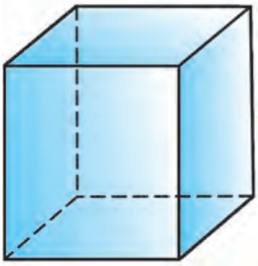
㉘



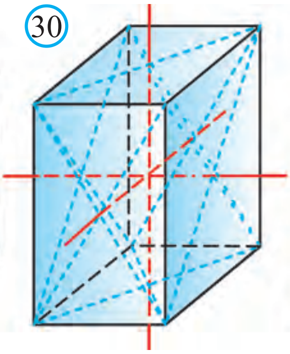
Негизи тик бурчтуктан түзүлгөн тик параллелепипед *тик бурчтуу параллелепипед* деп аталат. (29- сүрөт).

Тик бурчтуу параллелепипеддин бардык грандары тик бурчтуктардан түзүлгөн болот.

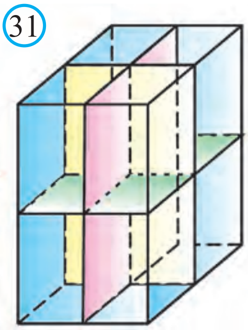
㉙



㉚

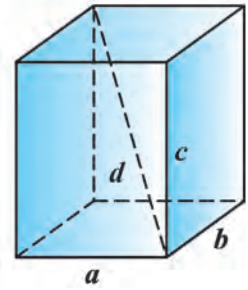


㉛



㉜

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Тик бурчтуу параллелепипеддин үч симметрия огу (30- сүрөт) жана үч симметрия тегиздиги бар (31- сүрөт).

Тик бурчтуу параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу үч кыры анын *өлчөмдөрү* деп аталат.

Корутунду: Тик бурчтуу параллелепипед d диагоналынын квадраты анын өлчөмдөрү: a, b жана c нын квадраттары суммасына барабар (32- сүрөт):

$$\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2.}$$

Өлчөмдөрү барабар болгон тик бурчтуу параллелепипед *куб* деп аталат.

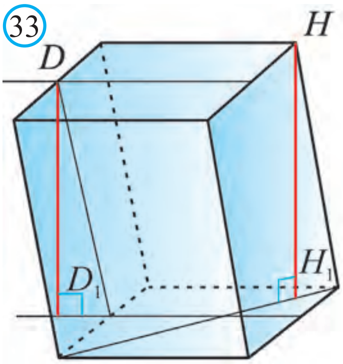
Кубдун бардык грандары барабар квадраттардан түзүлгөн. Куб бир симметрия борборуна ээ жана, 9 симметрия огуна, 9 симметрия тегиздигине ээ.

Жогорудагы призмалардын бир катар касиеттерин санап өттүк. Алардын кээ бирлерин 10-класста далилдеген болчубуз. Калган касиеттеринин далили салыштырмалуу жөнөкөй болгону үчүн өз алдыңарча далилдөөгө калтырдык.

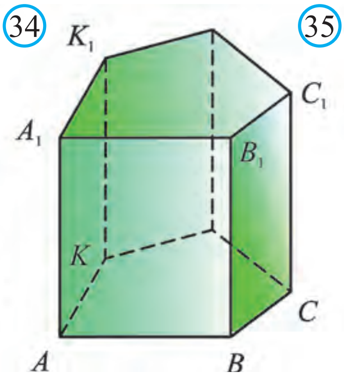
6.3. Призманын каптал жана толук бети

33- сүрөттө $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ призманын HH_1 жана DD_1 бийиктиктери берилген. Туура призманын бийиктиги анын каптал кырына барабар болот.

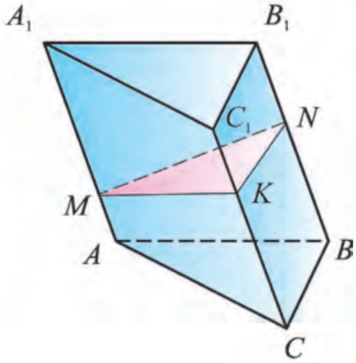
33



34



35



Призманын каптал бети (каптал бетинин аянты) анын каптал грандарынын аянттарынын суммасына барабар,толук бети болсо каптал бетинин жана эки негизинин аянтынын суммасына барабар.

$$\boldsymbol{S_{толо} = S_{жаны} + 2S_{негиз}.}$$

Теорема. Тик призманын каптал бети негизинин периметри менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар:

$$\boldsymbol{S_{жаны} = P_{негиз} \cdot h.}$$

Далилдөө. Берилген призманын бийиктиги h, негизинин периметри

$P = AB + BC + \ldots + KA$ болсун (34- сүрөт). Призманын, ар бир граны тик бурчтук. Бул тик бурчтуктардын негизи призманын тиешелүү жагына,бийиктиги болсо призманын бийиктигине барабар.

Демек, $S_{каптал}=AB \cdot h+ BC \cdot h+\ldots+ KA \cdot h=(AB+ BC + \ldots KA)\cdot h = P\cdot h.$ □

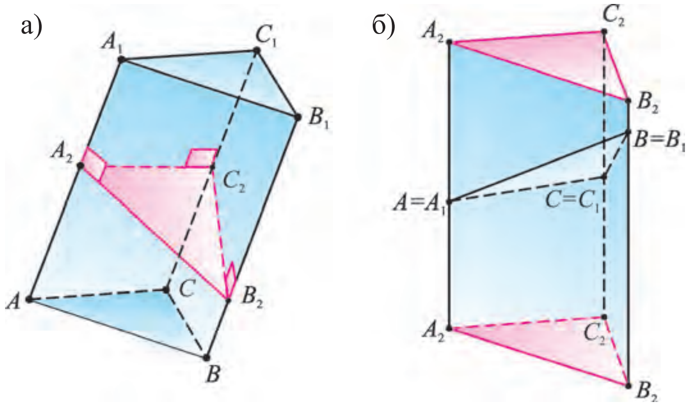
Теорема. Призманын каптал бети анын перпендикулярдык кесими периметри менен каптал кырынын узундугунун көбөйтүндүсүнө барабар:

$$\boldsymbol{S_{каптал} = P \cdot l.}$$

Далилдөө. Перпендикулярдык кесилиштин периметри P га барабар болсун (35- сүрөт). Кесилиш призманы эки бөлүккө ажыратат. Бул бөлүктөрдүн бирин алып,призма негиздерин дал келгендей кылып параллель көчүрөбүз. Натыйжада жаңы тик призма пайда болот (36- сүрөт). Призманын каптал бети берилген призманын каптал бетине барабар. Анын негизи перпендикуляр кесилиштен түзүлгөн болуп,каптал кыры l ге барабар болот.

Демек, жогоруда далилденген теорема боюнча: $S_{каптал} = P \cdot l$ □

㊱


а) б)

Темага карата көнүгүүлөр жана практикалык тапшырмалар.

174. Тетраэдр бир гранынын аянты 6 м^2 болсо, анын толук бетин тапкыла

175. Октаэдр бир гранынын аянты 5,5 см^2 болсо, анын толук бетин тапкыла

176. Додокаэдр бир гранынын аянты 6,4 см^2 болсо, анын толук бетин тапкыла.

177. Кубдун толук бетинин аянты 105,84 4 см^2 болсо, анын ар бир гранынын аянтын жана кырынын узундугун тапкыла.

178. Октаэдр толук бетинин аянты 32 см^2 болсо, анын ар бир граны аянтын жана кырларынын узундугун тапкыла.

179. Тик бурчтуу параллепипеддин негизинин жактары 7:24 катышта, диагоналдык кесилиштин аянты 50 дм^2 ка барабар. Каптал бетинин аянтын тапкыла.

180*. Тик параллелепипеддин каптал кыры 1 м ге, негиздеринин жактары 23 м жана 11 м ге барабар. Негизинин диагоналдарынын катышы 2:3 сыяктуу. Диагоналдык кесилиштин аянтын тапкыла.

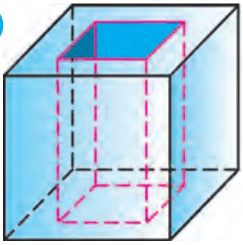
181. Тик параллелепипед негизинин жактары 3 см жана 5 см, негизинин диагоналдарынан бири 4 см ге барабар Параллелепипеддин кичине диагоналы негизинин тегиздиги менен 60° туу бурчту пайда кылат. Анын чоң диагоналынын узундугун тапкыла.

182. Тик параллелепипед каптал кыры 5 м, негизинин жактары 6м жана 8 м, негизинин диагоналдарынан бири 12 м ге барабар. Параллелепипеддин диагоналдарын тапкыла.

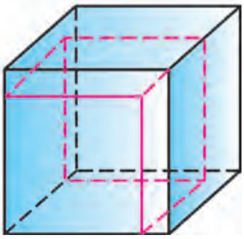
183*. Үч бурчтуу үзгүлтүксүз призманын кыры 3 кө барабар. Негизинин жагы жана октун ортосу аркылуу тегиздик жүргүзүлгөн. Кесилиштин аянтын тапкыла.

184. Үч бурчтуу призманын бийиктиги 50 см,негизинин жактары 40 см, см,жана 37 см.Призманын толук бетин тапкыла.

37



38



185*. 37- сүрөттө берилген бирдик кубдан негизинин жагы 0,5 ке каптал кыры 1 ге барабар болгон үзгүлтүксүз төрт бурчтуу призма оюп алынды.Кубдун калган бөлүгүнүн толук бетинин аянтын тапкыла.

186. Эгерде кубдун кыры 1 бирдик чоңойтулса, анын толук бети 54 бирдикке чоңоёт. Кубдун кырын тапкыла (38- сүрөт)..

187. $ABCC_1B_1A_1$ жантык призманын негизи ABC тең капталдуу үч бурчтук болуп, анда $AB=AC=10$ см жана $BC=12$ см. A_1 чоку A, B жана C чокуларынан бирдей алыстыкта жатат жана $AA_1 = 13$ см ге барабар. Призманын толук бетин тапкыла.

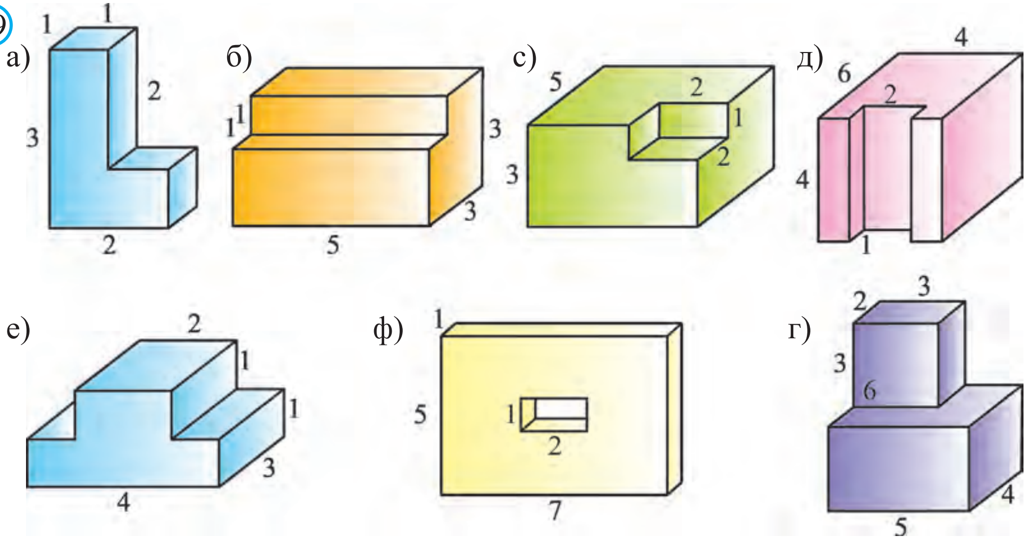
188. Үзгүлтүксүз тик бурчтуу призманын каптал бети 160 ка,толук бети 210 го барабар. Призма негизинин диагоналын тапкыла.

189. Үч бурчтуу жантык призманын каптал кырлары жаткан параллель түз сызыктар арасындагы аралык 2 см, 3 см, 4 см, каптал кыры 5 см ге барабар. Призманын каптал бетин тапкыла.

190. Кубдун кырларынын узундуктарынын суммасы 96 га тең. Анын каптал бетин тапкыла.

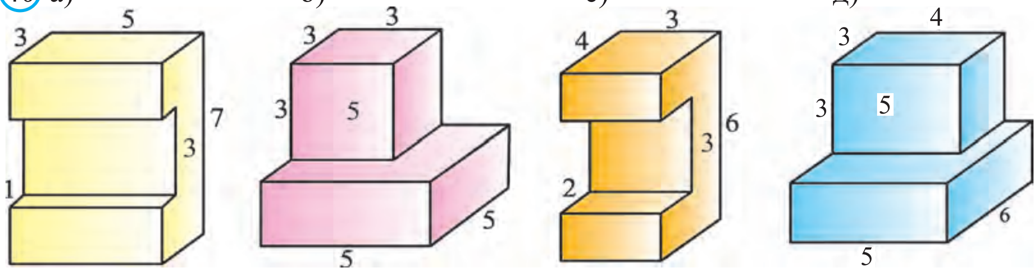
191. 39- сүрөттө берилген көп грандыктардын толук бетин эсептегиле. (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтук).

39



192. 40- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктардын толук сыртын эсептегиле (бардык экиграндуу бурчуктар тик бурчтук).

40



193. Алты бурчтуу үзгүлтүксүз призманын каптал кыры 8см, негизинин жагы болсо 3 см. Призманын бардык кырлары узундуктарынын суммасын тапкыла.

194. Төрт бурчтуу үзгүлтүксүз призма негизинин жагы 6 см, призманын бийиктиги болсо 5 см, анын диагоналдык кесилиш аянтын тапкыла.

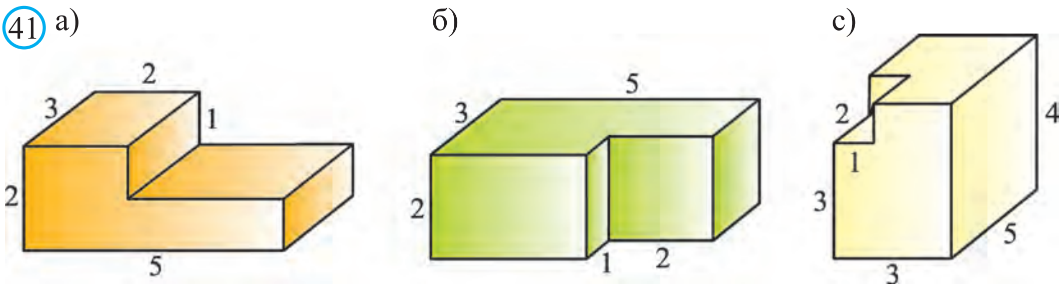
195. Үч бурчтуу үзгүлтүксүз призма негизинин жагы 6 см, каптал кыры болсо 12 см. Призма каптал бетинин аянтын тапкыла.

196. 41- сүрөттөрдө берилген көп грандыктардын толук бетинин аянтын эсептегиле (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтук).

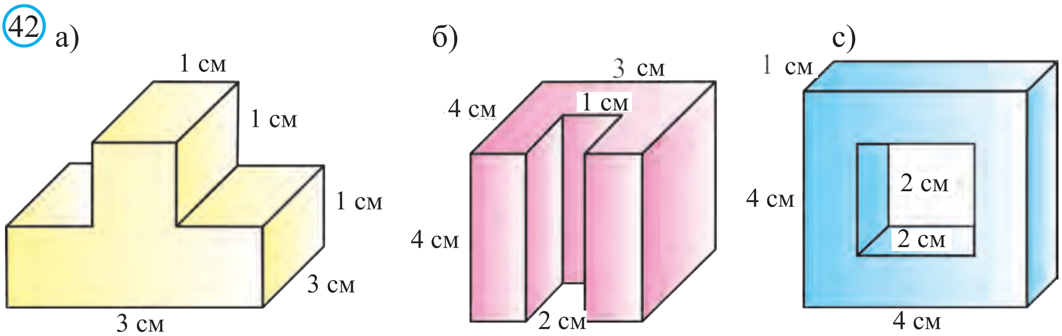
197. 42- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктын толук сыртын эсептегиле (эки грандуу бурчтар тик бурчтук).

198*. 43- сүрөттөгү үйдүн негизинин өлчөмдөрү 6 м х 8 м. Үйдүн төбөсү негизине 45° туу бурч менен кыйшайган. Төбөсү бетинин аянтын тапкыла.

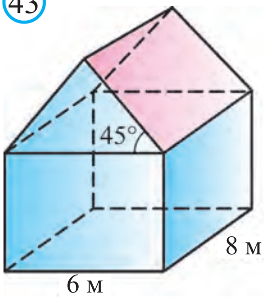
41



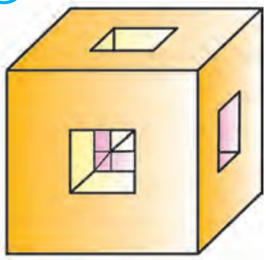
42



43



44



45

199. Параллелепипеддин чокусунан чыгуучу кырлары тиешелүү түрдө, 6 см, 8 см жана 12 см. Параллелепипеддин бардык кырларынын узундуктарынын суммасын тапкыла.

200. Параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу грандарынын аянты тиешелүү түрдө, 6 $см^2$, 12 $см^2$ жана 16 $см^2$. Параллелепипеддин толук бетинин аянтын тапкыла.

201*. Кыры 3 см болгон кубдун ар бир гранынан тикеден кесими - негизи 1 см ге тең квадрат формасындагы тешиктер оюлган (44-сүрөт). Кубдун калган бөлүгүнүн толук бетинин аянтын тапкыла.

202*. Футбол тобунун бетинин кырлары өз ара барабар болгон 12 үзгүлтүксүз беш бурчтук жана 20 туура алты бурчтуктан түзүлгөн. Футбол тобунун толук бетинин аянтын тапкыла. Топтун квадрат сантиметри 60 сумдан туруучу териден жасалган болсо жана анын 10 % тигишине жана таштандыга чыгышы белгилүү болсо, топко сарпталган теринин баасын тапкыла.

7. ПРИЗМАНЫН КӨЛӨМҮ

7.1. Көлөм түшүнүгү

Мейкиндикте геометриялык телого тиешелүү болгон өзгөчөлүктөрдүн бири бул көлөм түшүнүгү. Ар кандай предмет (тело) мейкиндиктин кандайдыр бир бөлүгүн ээлейт. Мисалы, кыш күкүрт кутусуна караганда чоңураак жайды ээлейт. Бул бөлүктөрдү өз ара салыштыруу үчүн көлөм түшүнүгү киритилет.

Көлөм – мейкиндиктеги телонун төмөнкү касиеттерине ээ болгон өлчөмдүк (сандуу) көрсөткүчү:

1. Ар кандай тело оң сан менен туюнтулуучу белгилүү көлөмгө ээ;

2. Барабар телолор барабар көлөмдөргө ээ;

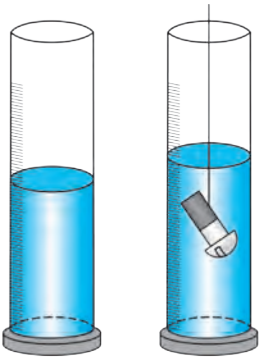
3. Эгерде тело бир нече бөлүктөргө бөлүнгөн болсо,анын көлөмү бөлүктөрдүн көлөмдөрүнүн суммасына барабар;

4. Кыры бир бирдик узундукка барабар болгон кубдун көлөмү бирге барабар.

Көлөм – узундук жана аянт сыяктуу сандуу чоңдуктардын бири. Узундук өлчөө бирдигинин тандалышына карап бирдик куб(кыры бирдик узундукка ээ) дун көлөмү 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3 жана башка көлөм бирдиктери менен өлчөнөт.

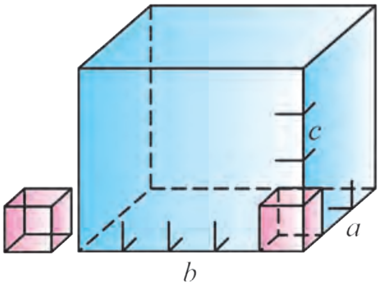
Телолордун көлөмдөрү түрдүү усулдар менен өлчөнөт же эсентешет Мисалы, кичине тетиктин көлөмүн шкалага ээ болгон идиш (мензурка) жардамында өлчөө мүмкүн (46- сүрөт). Чаканын көлөмүн болсо ага бирдик көлөмгө ээ болгон идиш жардамында суу куюп толтуруу менен өлчөөгө болот (47- сүрөт). Бирок, бардык телолордун көлөмдөрүн мындай усулдар менен өлчөөгө болбойт. Мындай учурларда көлөмдү түрдүү усулдар менен эсептешет. Төмөндө ошол усулдардын кээ бирлерине токтолобуз жана алардын кээ бирлерин далилдөөсүз келтиребиз.

㊻

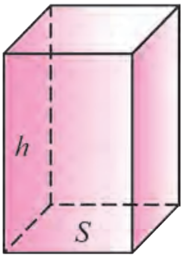


㊼

㊽



㊾



7.2. Параллелепипеддин көлөмү

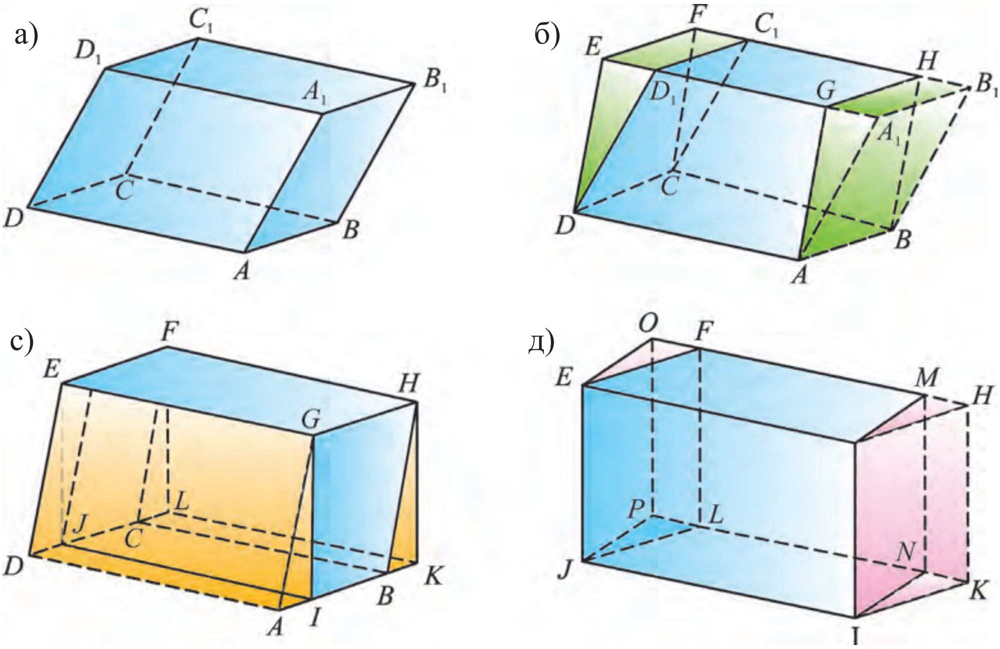
Теорема. Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү анын үч өлчөмдөрүнүн көбөйтүндүсүнө барабар (48- сүрөт): $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$.

Натыйжа. Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү негизинин аянты менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар (49- сүрөт): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Теорема. Каалагандай параллелепипеддин көлөмү негизинин аянты менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар (50- сүрөт): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Бул касиет жогорудагы натыйжадан келип чыгат. Төмөнкү сүрөттөрдө берилген параллелепипед кандай кылып тик бурчтуу параллелепипедке толтурулушу сүрөттөлгөн. Мындан пайдаланып касиетти өз алдыңарча негиздегиле.

(50)



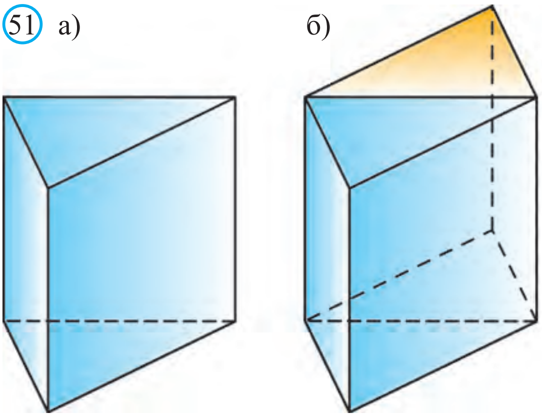
7.3. Призманын көлөмү

Теорема. Тик призманын көлөмү негизинин аянты менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар (51- сүрөт): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

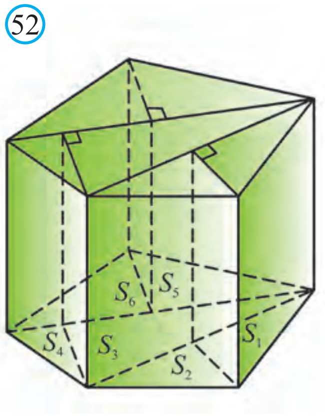
Далилдөө. 1-абал. Негизи тик бурчтуу үч бурчтуктан турган призма берилген болсун.Бул призманы ага барабар болгон призма менен тик бурчтуу параллелепипедке чейин толтурууга болот (52- сүрөт).

Берилген призманын көлөмү,негизинин аянты жана бийиктиги тиешелүү түрдө V, S жана h болсо, пайда болгон тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү,негизинин аянты жана бийиктиги тиешелүү түрдө $2V$, $2S$ жана h болот.

(51)



(52)



Демек, $2V=2S \cdot h$ же $V=S \cdot h$ болбосо.

2- абал. Каалагандай тик бурчтуу призма берилген болсун,анын негизинин аянты S, бийиктиги h ка барабар болсун. Призманын негизи - n-бурчту анын диагоналдары менен үч бурчтуктарга,үч бурчтуктардын ар бирин болсо тик бурчтуу үч бурчтуктарга бөлүүгө болот (53- сүрөт). Натыйжада берилген призманы чектүү сандагы негизи тик бурчтуу үч бурчтуктардан түзүлгөн тик призмаларга ажыратуу мүмкүндүгүн аныктайбыз. Бул призмалардын бийиктиги h ка барабар болуп,алардын негиздеринин суммасы берилген призманын аянтына барабар болот: $S = S_1+ S_2+\ldots+S_k$.

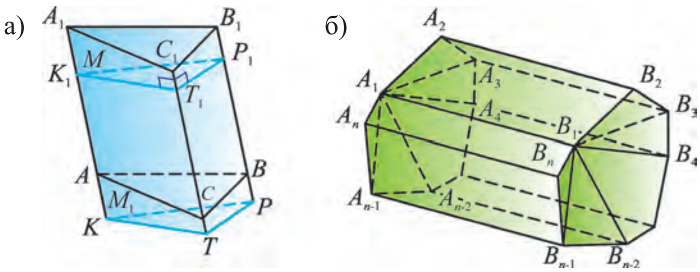
Берилген призманын көлөмү аны түзгөн үч бурчтуу призмалар көлөмдөрүнүн суммасынан турат.

$$V = S_1h + S_2h +\ldots+S_k h=(S_1+S_2+\ldots+S_k)\, h = S \cdot h, \text{ же } V = S \cdot h. \ \square$$

Теорема. Каалагандай призманын көлөмү негизинин аянты менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар: $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Бул теореманы 5.3- сүрөттөн пайдаланып, алгач үч бурчтуу призма үчүн (5.3.а- сүрөт), андан кийин каалаган призма үчүн (5.3.б- сүрөт) өз алдынча далилдегиле.

(53)



1- маселе. Тик праллелепипеддин негизинин жактары а жана b га барабар болуп алар 30° туу бурчту түзөт. Эгер параллелепипеддин каптал бети S ке барабар болсо, көлөмүн тапкыла.

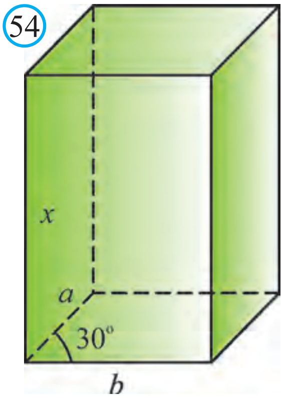
Чыгаруу: Параллелепипеддин бийиктигин h менен белгилейбиз (54- сүрөт). Шарт боюнча:

$$S = (2a+2b)\,h \text{ же } h = \frac{S}{2(a+b)}.$$

$$S_{\text{негиз}} = ab\sin 30^\circ = \frac{ab}{2}.$$

$$V = S_{\text{негиз}} \cdot h = \frac{ab}{2} \cdot \frac{S}{2(a+b)} = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

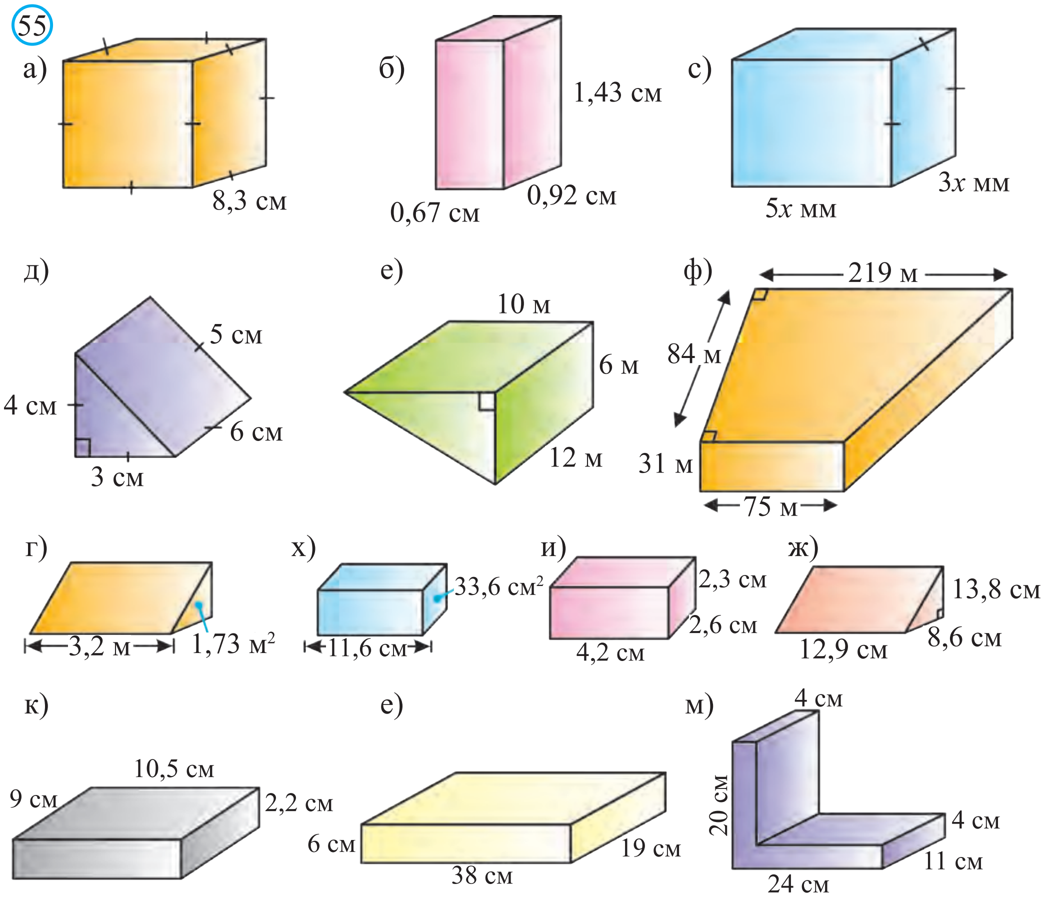
54



Темага карата көнүгүүлөр жана практикалык тапшырмалар

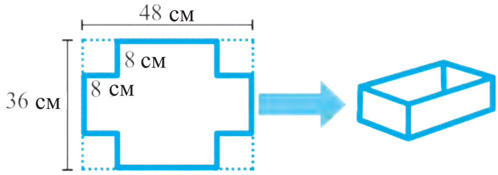
203. 55- сүрөттө берилген көп грандыктардын көлөмүн тапкыла.

55

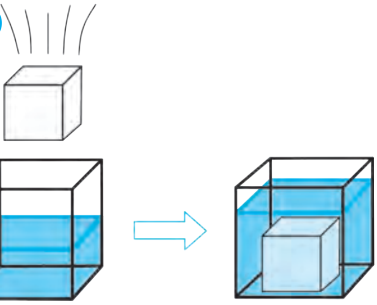


204. 56- сүрөттө берилген жайылма боюнча жасалган идиштин көлөмүн тапкыла.

56



57



58

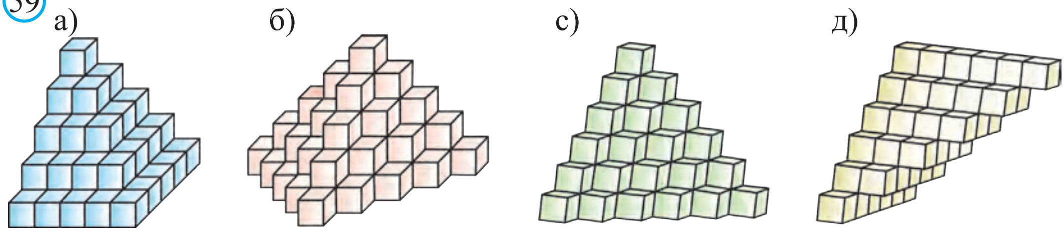
205*. 57- сүрөт боюнча маселе түзгүлө жана аны чыгаргыла.

206. 58- сүрөттө берилген тело 88 бирдик кубчадан жасалган.Телонун толук бетин тапкыла.

207. Тик бурчтуу параллелепипеддин гранынын аянты 12 ге жана ага перпендикуляр кырдын узундугу 12 ге барабар. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

208. 59- сүрөттө берилген мейкиндиктеги фигуралардын кайсы биринин көлөмү чоң,же болбосо көп кубчалардан түзүлгөн?

59



209. Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү 24 кө барабар жана кырларынын биринин узундугу 3 кө барабар.Параллелепипеддин ушул кырга перпендикуляр гранынын аянтын тапкыла.

210. Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү 60 ка барабар жана грандарынын биринин аянты 12 ге барабар. Параллелепипеддин гранга перпендикуляр кырынын узундугун тапкыла.

211. Параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу үч кырынын узундуктары 4, 6 жана 9 га барабар. Ага теңдеш болгон кубдун кырын тапкыла.

212. Кубдун толук бетинин аянты 18 ге барабар болсо, анын диагоналын тапкыла.

213. Кубдун көлөмү 8 ге барабар болсо, анын толук бетинин аянтын тапкыла.

214. Эгерде кубдун кырлары бир бирдик чоңойтулса,анын көлөмү 19 бирдикке чоңоёт. Кубдун кырын тапкыла.

215. Кубдун толук бетинин аянты 24 кө барабар ,анын көлөмүн тапкыла.

216. Кубдун диагоналы $\sqrt{12}$ ге барабар болсо, анын көлөмүн тапкыла

217. Кубдун көлөмү $24\sqrt{3}$ кө барабар болсо,анын диагоналын тапкыла.

218. Биринчи кубдун көлөмү экинчисинен 8 эсе чоң. Биринчи кубдун толук бетинин аянты экинчисиникинен канча эсе чоң?

219. Кыры 30 см болгон куб формасындагы идишке (цистернага)канча литр суу батат?

220. Тик бурчтуу параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу кырлары 2 жана 6 га барабар. Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү 48 ге барабар. Параллелепипеддин чокусунан чыгуучу үчүнчү кырын тапкыла.

221. Тик параллелепипеддин негизинин жактарынын узундугу $2\sqrt{2}$ см жана 5 см, алар арасындагы бурч 45° ка барабар. Эгерде кичине диагоналы 7 см ге барабар болсо, анын көлөмүн тапкыла.

222*. Тик параллелепипед негизинин a жана b жактары 30° туу бурчту түзөт. Каптал бети S ке барабар. Анын көлөмүн тапкыла.

223. Тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү 15 м, 50 м жана 36 м. Ага теңдеш болгон кубдун кырын тапкыла.

224. Үч бурчтуу тик призма негизинин жактары 29, 25 жана 6 га, кыры болсо негиздин чоң бийиктигине тең. Призманын көлөмүн тапкыла.

225. 39- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктардын көлөмүн эсептегиле (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтук).

226. 40- сүрөттө берилген көп грандыктардын көлөмүн эсептегиле (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтар).

227. Тик параллелепипеддин негизинин аянты 1 м^2 болгон ромбдон турат. Диагональ кесилиштердин аянты тиешелүү түрдө 3 м^2 жана 6 м^2. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

228. 41- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктардын көлөмүн эсептегиле (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтар).

229. 42- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктардын көлөмүн эсептегиле (бардык эки грандуу бурчтар тик бурчтар).

230. Кеңдиги 3 м жана узундугу 20 м болгон тратуарга калыңдыгы 10 см болгон асфальт жаткырылды. Тротуар үчүн канча көлөмдөгү асфальт иштетилет?

231*. Жантык перпендикулярдын негизи – жагы 1 м болгон квадраттан түзүлгөн. Каптал кырынын бири 2 м ге барабар жана негизине жабышкан ар бир жагы менен 60° туу бурчту түзөт. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

232*. Параллелепипеддин грандары – жагы a жана b га барабар жана тар бурчу 60° болгон тең ромбдордон түзүлгөн.Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

233. Параллелепипедин ар бир кыры 1 см ге барабар. Параллелепипеддин бир чокусундагы үч жалпак бурчу тар болуп, ар бири *2a* га барабар. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла.

234*. Параллелепипеддин бир чокусунан чыгуучу үч кырынын узундуктары *a*, *b*, *c* га барабар. *A* жана *b* кырлары өз ара перпендикуляр, с кыры болсо алардын ар бири менен бурчту түзөт. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла (60- сүрөт).

235. а) Үч бурчтуу; б) төрт бурчтуу; с) алты бурчтуу үзгүлтүксүз призма негизинин а жагы жана каптал кыры боюнча көлөмүн тапкыла.

236. Түз параллепипед негизинин жактары *a* см жана *b* см ге барабар болуп, алар өз ара α бурчтук түзө алат. Параллепипеддин кичүү диагоналы *d* га барабар болсо, анын көлөмүн тапкыла.

237. Үч бурчтуу жантык призманын каптал кырлары 15 м ге, алар арасындагы аралык болсо 26 м, 25 м жана 17 м ге барабар. Призманын көлөмүн тапкыла.

238. Төрт бурчтуу үзгүлтүксүз призманын диагоналы 3,5 см ге барабар, каптал гранынын диагоналы 2,5 см ге барабар. Призманын көлөмүн тапкыла.

239. Үч бурчтуу үзгүлтүксүз призма негизинин жагы *a* га барабар,каптал бети негиздеринин аянттарынын суммасына барабар. Анын көлөмүн тапкыла.

240. Алты бурчтуу үзгүлтүксүз призманын эң чоң диагоналдык кесилиштин аянты 4 м^2 ка, эки карама-каршы каптал кырлары арасындагы аралык 2 м ге барабар Призманын көлөмүн тапкыла.

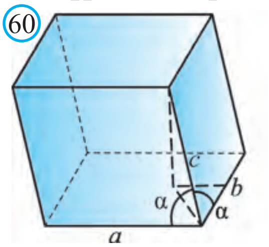
241*. Жети жолу кир жуугандан кийин самындын өлчөмү эки эсе азайды. Эгерде ар кир жууганда бирдей көлөмдөгү самын сарпталганы белгилүү болсо,самын дагы канча кир жууганы жетет?

242*. Жантык призмада каптал кырларына перпендикуляр жана бардык каптал кырларын кесип өтүүчү тегиздик жүргүзүлгөн. Пайда болгон кесилиштин аянты *Q*, каптал кырлары болсо l ге барабар призманын көлөмүн тапкыла (61- сүрөт).

243. Үч бурчтуу тик призманын негизинин аянты 4 см, 5 см, 7 см, каптал кыры болсо негизинин чоң бийиктигине барабар. Призманын көлөмүн тапкыла.

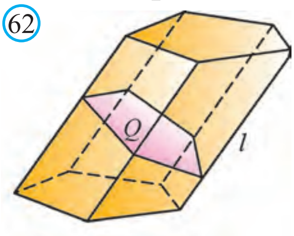
244. 63- сүрөттө көрсөтүлгөн көп грандыктардын көлөмүн эсептегиле.

60

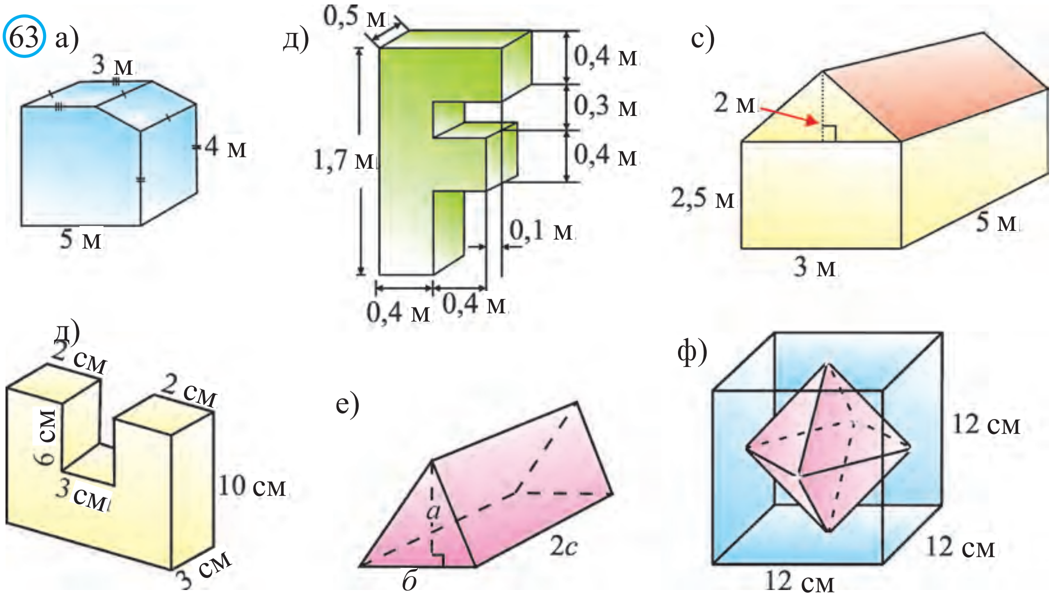


61

62



⑥③



245. Үч бурчтуу тик призма негизинин аянты 4 см^2 ка, каптал грандарынын аянты 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2 ка барабар болсо,анын көлөмүн тапкыла.

246*. Призманын негизи тең капталдуу үч бурчтук болуп,анын бир жагы 2 см, калган эки жагы 3 см ге барабар. Призманын каптал кыры 4 см ге барабар болсо,ал негиздин тегиздиги менен 45° туу бурчту түзөт.Бул призмага теңдеш кубдун кырын тапкыла.

247. Жантык призма негизинин жагы *a* га барабар болгон тең жактуу үч бурчтук. Каптал грандарынан бири негизине перпендикуляр жана кичине диагоналы *S* ке барабар болгон ромбдон турат. Призманын көлөмүн тапкыла.

248. Эгерде төрт бурчтуу тик призманын бийиктиги h, диагоналдары негиз тегиздиги менен α жана β бурчтарды пайда кылат. Эгерде негиздин диагоналдары ортосундагы бурч γ ка барабар болсо, призманын көлөмүн тапкыла.

249*. Кесилиштин негизи 1,4 м жана бийиктиги 1,2 м болгон тең капталдуу үч бурчтук формасындагы суу чыгаруучу куурдун суу өткөрүү кубаттуулугун (1 саатта агып өтүүчү суунун көлөмүн) эсептегиле. Суунун ылдамдыгы 2 м/с.

250*. Темир жол көтөрмөсүнүн кесилиши трапеция формасында, анын төмөнкү негизи 14 м, жогорку негизи 8 м жана бийиктиги 3,2 м. 1 км көтөрмөнү куруу үчүн канча куб метр топурак керек болот?

251*. Жагы 3,2 см жана калыңдыгы 0,7 см болгон үзгүлтүксүз сегиз бурчтук формасындагы жыгач плитканын массасы 17,3 г. Жыгачтын тыгыздыгын тапкыла.

252. Өлчөмдөрү 30×40×50 (см) болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы кутудан канчасынын өлчөмдөрү 2×3×1,5 м болгон машина кузовуна жайгашышы мүмкүн?

253*. Өлчөмдөрү 420 мм × 240 мм × 90 мм болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы,тыгыздыгы 7,8 г/см^3 болгон болот плиталардын канчасын жүк көтөрүү кубаттуулугу 3т болгон жүк машинасында ташуу мүмкүн?

254. Өлчөмдөрү 250 мм × 120 мм × 65 мм болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы,тыгыздыгы 1,6 г/см^3 болгон кыштын канчасын жүк көтөрүү кубаттуулугу 3 т болгон жүк машинасына жүктөө мүмкүн?

255*. Өлчөмдөрү 820 мм × 210 мм × 120 мм болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы,тыгыздыгы 7,3 г/см^3 болгон чоюн плитанын жүк көтөрүү кубаттуулугу 2 т болгон көтөрмө крандын жардамында көтөрүү мүмкүнбү?

256. Бою 105 м жана туурасынын кесилиш өлчөмдөрү 30 см × 40 см болгон тик бурчтуктан түзүлгөн жыгачтан, бою 3,5 м, туурасы 20 см жана калыңдыгы 20 мм болгон канча такта бөлүгү чыгат?

257. Кыштын өлчөмдөрү 25 × 12 × 6,5 (см). Эгердег 1 м^3 көлөмдөгү кыштын массасы 1700 кг болсо,бир даана кыштын массасын граммдарда аныктагыла.

258. Санитария талаптары боюнча,класстагы ар бир окуучуга 7,5 м^3 аба туура келет. Эгер класстык бөлмөнүн бийиктиги 3,5 м жана 28 окуучуга болжолдонгон болсо,класстык бөлмөнүн аянтын тапкыла.

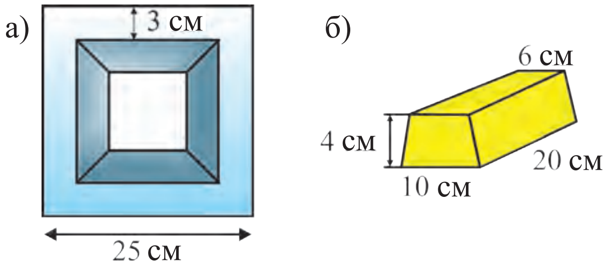
259*. Бою 100 м, туурасы 10 м болгон тик бурчтук формасындагы аянттын калыңдыгы 5 см болгон асфальт менен каптоо керек. Эгерде 1 м^3 көлөмдөгү асфальттын массасы 2,4 т жана бир жүк ташуучу машинанын жүк көтөрүү кубаттуулугу 5 т болсо, бул аянтты асфальттоо үчүн канча машина асфальт керек болот?

260*. Өлчөмдөрү 3 см, 4 см, 5 см болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы темир бөлүгүн станокто кайра иштөө керек. Бул процессте анын ар бир кыры кемип барат,толук бети 42 см^2 га кемигени белгилүү. Бул темир бөлүгүнүн көлөмү кайра иштелгенден кийин канчаны түзөт?

261*. 64.а- сүрөттө чоюндан жасалган ноонун тикесинен кесилиши көрсөтүлгөн. Сүрөттө берилген маалыматтар негизинде бир метр узундуктагы ноонун массасын аныктагыла (чоюндун тыгыздыгы - 7,3 г/см^3).

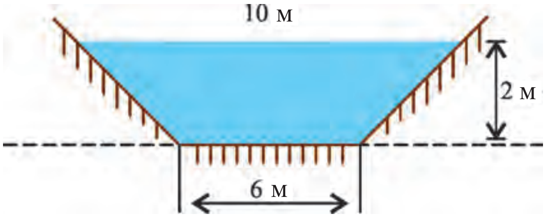
262. Өлчөмдөрү 64.б- сүрөттө берилген алтын плитканын массасы 12,36 кг болсо,анын тыгыздыгын аныктагыла.

64

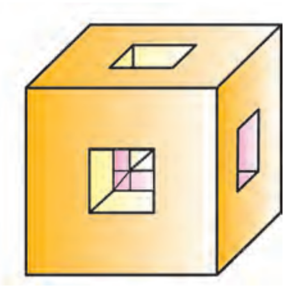


263*. Каналдын тикесинен кесилишинин негизи 10 м, 6 м бийиктиги 2 м болгон тең капталдуу трапециядан түзүлгөн. Суунун агымынын ылдамдыгы 1 м/с болсо бир минутада бул каналдан канча көлөмдөгү суу агып өтөт?

65



66

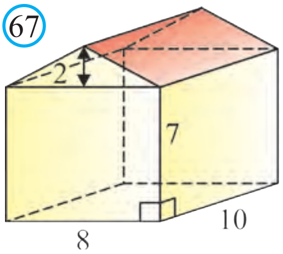


264*. Кыры 6 см ге барабар болгон, жезден жасалган кубдун ар бир гранынан тикесинен кесилген – негизи 2 см ге барабар болгон квадрат формасындагы тешикчелер оюлган (66- сүрөт). Эгер жезден салыштырма тыгыздыгы 0,9 г/см^3 болсо, кубдун калган бөлүгүнүн массасын тапкыла.

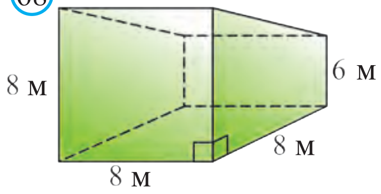
265. Тик бурчтуу параллелепипед формасындагы металл блок негизинин өлчөмдөрү 7 см жана 5 см. Блоктун массасы 1285 г жана металлдын тыгыздыгыі 7,5 г/см^3 болсо, блоктун бийиктигин тапкыла.

266. 67- сүрөттө берилген маалыматтар негизинде гараждын көлөмүн тапкыла.

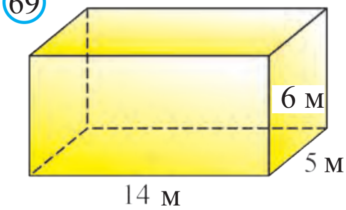
67



68



69



267. Гүл өстүрүүчү чоң идиштин терендиги 2 фут, кендиги 12 фут жана узундугу 15 фут болгон тик бурчтуу параллелепипед формасында. Идиштин көлөмүн тапкыла жана куб метрлерде туюнт (1 фут = 30,48 см).

268. Жүк кампасы 68- сүрөттө берилген трапециялуу призма формасында. Сүрөттө берилген маалыматтардын негизинде кампанын сыйымдуулугун аныктагыла.

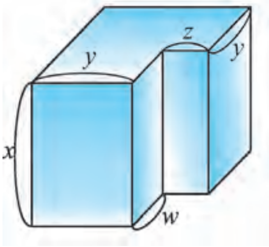
269*.69- сүрөттө кутунун өлчөмдөрү берилген. Кутунун негизде 1 квадрат метр 1000 сум турса,каптал грандары болсо 1квадрат метри 2000 сум болгон материалдан жасалган.Кутуну жасоого канча сумдук материал кетет?

270. Кубдун көлөмүн V га барабар болсо, анын диагоналын тапкыла.

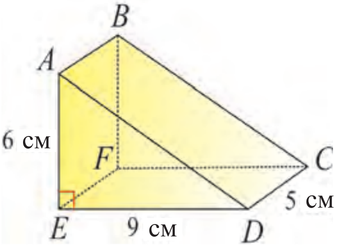
271. Чоң тик бурчтуу параллелепипедден 70- сүрөттө көрсөтүлгөндөй кылып кичине тик бурчтуу параллелепипед кыркып алынган. Берилген маалыматтар негизинде пайда болгон телонун көлөмүн тапкыла.

272. 71- сүрөттө берилген пирамиданын көлөмүн тапкыла.

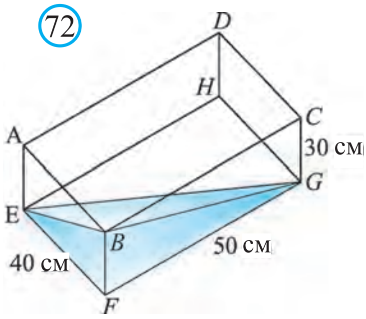
70



71



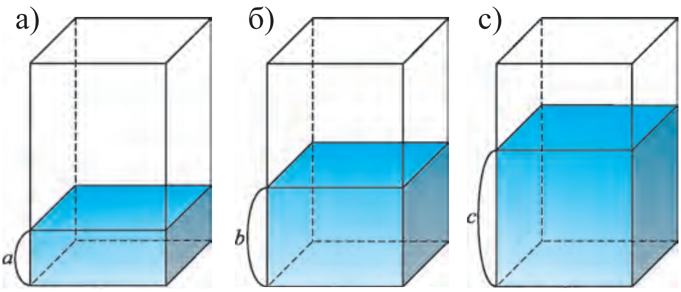
72



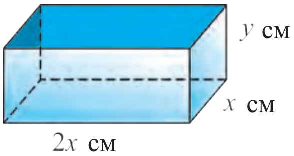
273*.72- сүрөттө берилген тик бурчтуу параллелепипед формасындагы аквариумда канча суу бар?

274*. Тик бурчтуу параллелепипед формасындагы бирдей аквариумдарда 73- сүрөттө көрсөтүлгөндөй кылып,түрдүү деңгээлдеги суу куюлган.Бул аквариумдарга куюлган суунун көлөмдөрүнүн катышы кандай болот?

73



74



275*. Изилдөө. Ишкана сыйымдуулугу1 литр, негизинин өлчөмдөрүнүн катышы 1:2 болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы үстү ачык кутуларды иштеп чыгармакчы болушту (74- сүрөт). Кутуну үнөмдүү иштеп чыгаруу, жана ага керек боло турган материал эң аз өлчөмдө болушу үчүн анын өлчөмдөрү кандай болууга тийиш?

(x ке түрдүү маанилерди берип,кутунун көлөмүн тапкыла жана аларды салыштыруу усулу менен чыгарууда урунуп көргүлө же дифференциалдык эсептөө мүмкүнчүлүктөрүнөн пайдалангыла).

276*. **Чечим татаал болгон абал.** Геологдор таш таап алышты жана анын көлөмүн болжолдуу болсо да аныктамакчы болушту.Алар көлдүн жанында турушат жана алардын карамагында таш бата турган чоң металл идиш,бир нече сыйымдуулугу белгисиз болгон чакалар жана сыйымдуулугуу 1 литр болгон бутылка бар. Геологдор бул ишти кандай кылып аткарышат?

8. ЦИЛИНДРДИН БЕТИ ЖАНА КӨЛӨМҮ

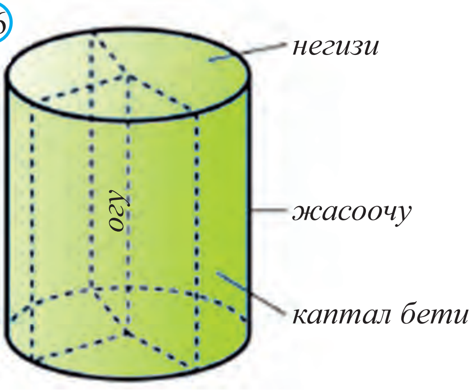
8.1. Цилиндрдин бети

Мейкиндиктеги фигуралардын дагы бир белгилүү класстарынан бири – бул айлануу телолору. Цилиндр айлануу телолорунун бири болуп,анын касиеттерин призманын касиеттерине окшоштугу үчүн удаалаш үйрөнөбүз.

Тик бурчтукту бир жагын айланасында айландыруудан пайда болгон телого *цилиндр* деп айтабыз(тагыраак айтканда тегерек цилиндр) (14-15- сүрөттөр). Бул айланууда тик бурчтуктун бир жагы козголбойт, аны *цилиндрдин огу* деп айтабыз. Тик бурчтуктун бул жагына карама-каршы жаткан жагы айлануудан пайда болгон бет – *цилиндрдин каптал бети*, жактын өзү болсо *цилиндрдин түзүүчүлөрү* деп аталат Тик бурчтуктун калган жактары бул айланууда эки барабар айлана пайда кылат, аларды *цилиндрдин негиздери* деп айтабыз (76- сүрөт).

75

76



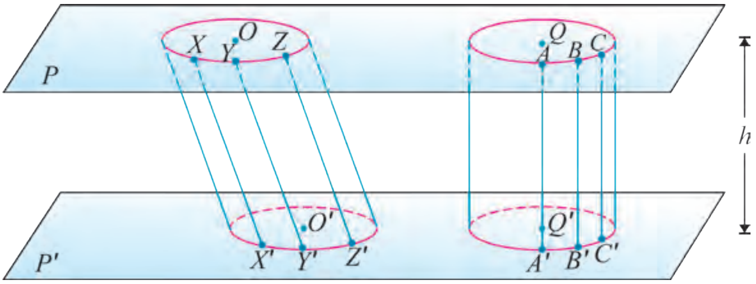
Эскертүү. Тик бурчтукту бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон тело туура айлана цилиндр деп жүргүзүлөт. Цилиндр түшүнүгү болсо кеңири мааниде төмөнкүдөй киритилет:

Мейкиндикте жалпак F_1 фигура кандайдыр бир көчүрүүдө F_2 фигурага өтсүн. Бул эки фигура жана параллель көчүрүүдө бири-бирине өткөн чекиттерди туташтыруучу кесиндилерден турган телого цилиндр деп аталат (77- сүрөт).

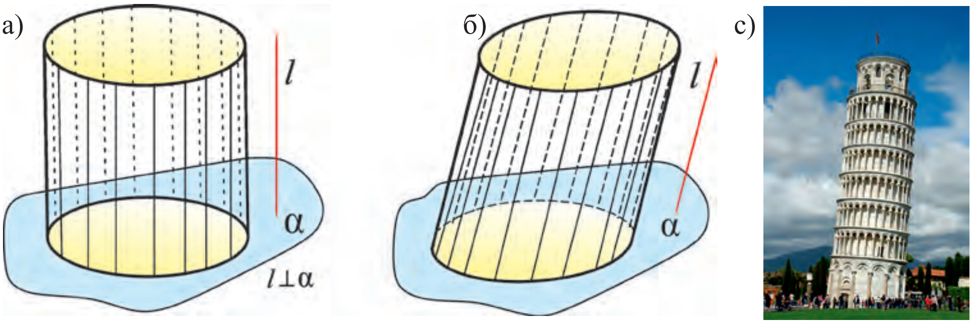
Эгерде параллель көчүрүү жалпак F} фигура тегиздигине перпендикуляр болсо, цилиндр – тик цилиндр (78.а- сүрөт) деп, тескерисинче – жантык цилиндр (78.б- сүрөт) деп жүргүзүлөт.

78.с- сүрөттө көрсөтүлгөн Пиза мунарасы оомо цилиндр формасында.

77



78


а)
б)
с)

Эгерде F_1 фигура айланадан түзүлгөн болсо, цилиндр *айлана цилиндр* (79- сүрөт) деп аталат.

Аныктама берилген бардык цилиндрлер ичинен тегайла цилиндр айлануу телосу болуп эсептелет. Биз ушул цилиндр жөнүндө сөз кылабыз аны кыскача цилиндрлер деп атайбыз.

Цилиндрдин негиздери өз ара барабар айланалардан түзүлүп,алар параллель тегиздиктерде жатат. Цилиндрдин бир негизинин чекитинен экинчи негизинин тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр анын *бийиктиги* деп аталат.

Бул параллель тегиздиктер арасындагы аралык цилиндрдин бийиктигине барабар болот. Цилиндрдин огу анын бийиктиги да болуп эсептелет.

Цилиндрдин түзүүчүлөрү болсо өз ара параллель жана барабар болот. Цилиндр огу, түзүүчүлөрү жана бийиктигинин узундуктары өз ара барабар болот.

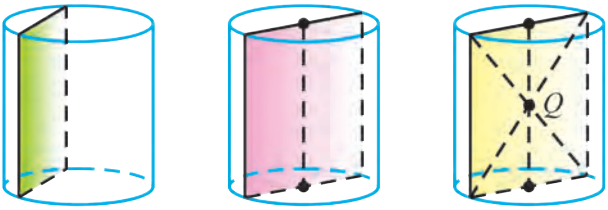
Цилиндрди анын огуна параллель тегиздик менен кескенде пайда болгон кесилиши тик бурчтукту билдирет (79.а- сүрөт). Анын эки жагы цилиндрдин түзүүчүлөрү, ал эми калган экөө негиздеринин параллель хордалары болушат.

Жалпы алганда *октук кесилиш* тик бурчтук болот. Бул цилиндрдин огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен цилиндрдин кесилиши (79.б-сүрөт).

Октук кесилиштин диагоналдары негиз борборлорун туташтыруучу кесиндинин ортосу Q чекиттен өтөт. Ошондуктан, бул Q чекит цилиндрдин симметрия борборлорунан түзүлгөн болот (79.с-сүрөт).

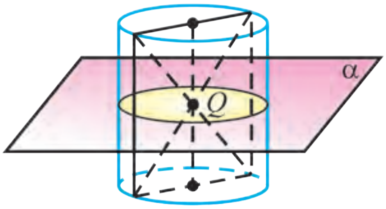
Q чекиттен өтүүчү жана цилиндр огуна перпендикуяр болгон тегиздик цилиндрдин симметрия тегиздигинен түзүлөт (80-сүрөт). Цилиндрдин огунан өтүүчү тегиздиктер да симметрия тегиздиктери болот (81-сүрөт).

79



а) б) с)

80



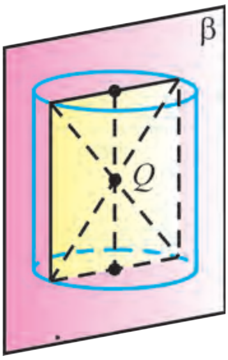
1- маселе. Цилиндрдин октук кесилиши аянты Q га барабар болгон квадраттан турат. Цилиндр негизинин аянтын тапкыла.

Чыгаруу. Квадраттын жагы $\sqrt{Q}$ ке барабар. Ал негизинин диаметрине барабар. Анда цилиндрдин негизинин аянты: $S=\pi r^2=\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$ га барабар. □

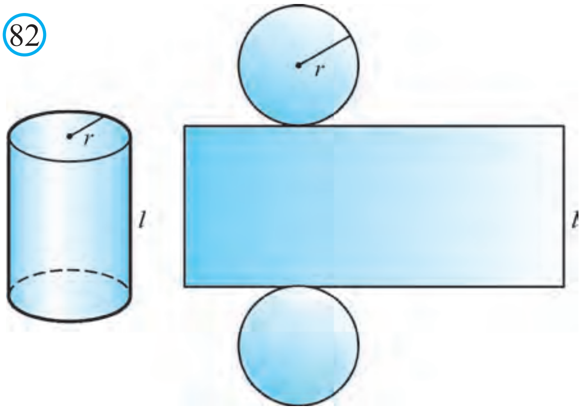
Теорема. Цилиндрдин каптал бети негизинин айлана узундугу менен түзүүчү көбөйтүндүсүнө барабар: $S_{каптalы}=2\pi rl$.

Теореманы төмөнкү 82- сүрөт аркылуу далилдегиле.

81



82



Натыйжа. Цилиндирдин толук сырты анын каптал бети менен эки негиздин аянтынын суммасына барабар: $S_{толук} = S_{каптал} + 2S_{негиз}$ же

$$S_{толук} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(\,l + r\,).$$

Каалагандай цилиндр берилген болсун. Анын негиздеринен бирине ички $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ көп бурчтукту чиебиз. (83- сүрөт). Көп бурчтуктун $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ жана A_n чокулары аркылуу, цилиндрдин $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_{n-1}B_{n-1}$ жана A_nB_n түзүүчүлөрүн өткөрөбүз жана түзүүчүнү башка $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ жана Bn удаалаш кесиндилер менен туташтырып чыгабыз. Натыйжада $A_1A_2...A_{n-1}A_n\,B_1B_2...B_{n-1}B_n$ призманы пайда кылабыз. Бул призма берилген цилиндрге ички сызылган призма деп аталат. Цилиндр болсо призмага сырттан сызылган цилиндр деп аталат. Эгер призма цилиндрге ички сызылган болсо, анда призманын негизи цилиндр негизине ички сызылган болот жана призманын каптал кырлары цилиндр каптал бетинде жатат.

Призма негизине сырттан айлана сызуу мүмкүн болсо, ага сырттан цилиндр да сызууга болот.

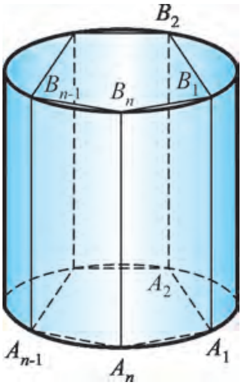
Ушуга окшош цилиндрге сырттан призма, жана призмага ичтен сызылган цилиндр түшүнүктөрү да киритилет (84- сүрөт). Эгерде призма цилиндрге сырттан сызылган болсо, анда призманын негизи цилиндр негизине сырттан сызылган болот жана призманын каптал грандары цилиндрдин каптал бетин жанып өтөт.

Эгерде призма негизине сырттан айлана сызууга мүмкүн болсо, ага сырттан цилиндр да сызууга болот.

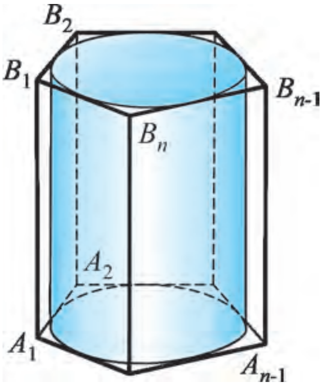
8.2. Цилиндрдин көлөмү

Теорема. Цилиндрдин көлөмү негизинин аянты түзүүчүлөрү көбөйтүндүсүнө барабар $V = S_{негиз} \cdot l.$

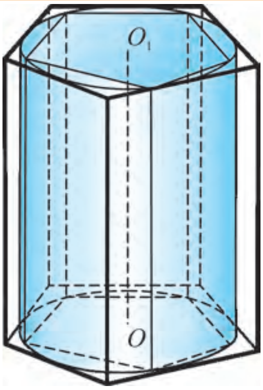
83



84



85



Далилдөө. Огу OO_1 болгон цилиндр берилген болсун. (85- сүрөт).

Ага ичтен $A_1A_2 ... A_{n-1}A_n\,B_1B_2 ... B_{n-1}B_n$ жана сырттан $C_1C_2 ... C_{n-1}C_n\,D_1D_2 ... D_{n-1}D_n$ призмаларды чиебиз. Цилиндр көлөмүн V, ичтен жана сырттан сызылган призмалар көлөмүн V_1 жана V_2 менен белгилесек, анда $V_1 < V < V_2$ кош барабарсыздык орундуу болот. Призмалар көлөмү төмөнкү формулалардын жардамында табылат:

$$V_1 = S_{A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{жана} \qquad V_2 = S_{C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

Призмалар негизи жактарынын саны n ди чоңойтуп барабыз. Анда ички сызылган призма көлөмү чоңоюп барат,сырттан сызылган призманын көлөмү болсо кичирейип барат. Эгер жактарынын саны n чексиз чоңоюп барса, бул көлөмдөр ортосундагы айырма нөлгө умтулат. Цилиндрге ички жана сырттан сызылган призмалар көлөмү жакындашкан сан берилген цилиндрдин көлөмү иретинде алынат.

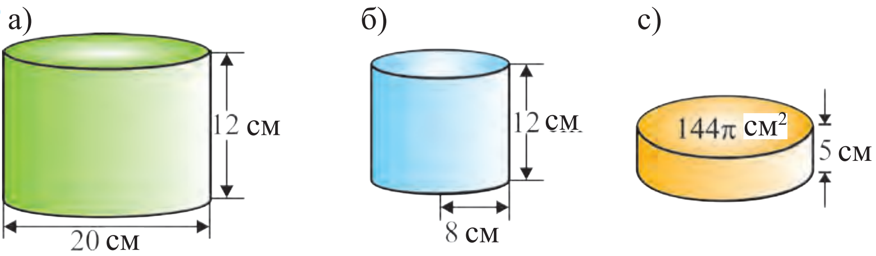
Бул процессте $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ жана $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$ көп бурчтуктар аянты,цилиндр негизинде жаткан тегеректин аянты S ке жакындашат.

Демек, $V = S_{\text{негиз}} \cdot l.$ ☐

Темага карата маселелер жана практикалык тапшырмалар

277. 86- сүрөттө келтирилген цилиндирдин жаны жана толук сыртын тапкыла.

86



278. Цилиндр негизинин радиусу 6 см, анын бийиктиги 4 см. Цилиндрдин октук кесилиштин аянтын эсептегиле.

279. Цилиндр негизинин радиусу 2 м, бийиктиги 3 м. октук кесилиштин диагоналын тапкыла.

280. Цилиндр негизинин аянты 64 π см², анын бийиктиги 8 см. Цилиндр октук кесилиштин аянтын эсептегиле

281. Цилиндрдин октук кесилиши – аянты Q га барабар квадрат Цилиндр негизинин аянтын тапкыла.

282. Цилиндрдин октук кесилиши-аянты 36 см² болгон квадраттан түзүлгөн.Цилиндр каптал бетиннин аянтын тапкыла.

283. Цилиндр октук кесилиш аянты 4 барабар. Анын каптал бетинин аянтын тапкыла.

284. Цилиндрдин бийиктиги 6 см негизинин радиусу 5 см. Цилиндрдин огуна параллель түрдө андан 4см аралыкта жүргүзүлгөн кесилиш аянтын тапкыла.

285. Цилиндр негизинин радиусу 2 ге, бийиктиги 3 кө барабар. Цилиндр каптал бетинин аянтын тапкыла.

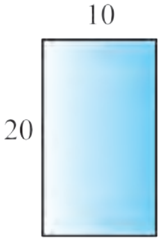
286. Цилиндр негизинин айлана узундугу 3 кө, бийиктиги 2 ге барабар. Цилиндр каптал бетинин аянтын тапкыла.

287. Цилиндр жайылмасынын аянты 24π дм^2, цилиндрдин бийиктиги 4 дм. Анын негизинин радиусун тапкыла.

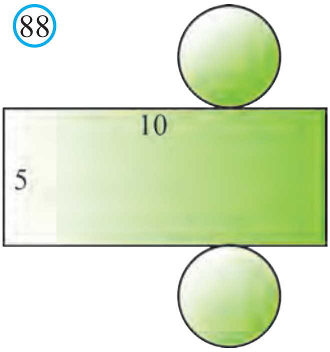
288. Цилиндр негизинин радиусу 5 см, анын бийиктиги 6 см. Цилиндр октук кесилишинин диагоналын тапкыла.

289. Цилиндрдин бийиктиги 8 дм, негизинин радиусу 5 дм. Цилиндр тегиздик менен ушундай кесилген, кесилиште квадрат пайда болгон. Бул кесилиштен окко чейин болгон аралыкты тапкыла.

(87)



(88)



290*.87-сүрөттө берилген цилиндрдин октук кесилиши боюнча, анын каптал жана толук бетинин аянтын тапкыла.

291*.88- сүрөттө берилген цилиндрдин жайылмасы боюнча каптал жана толук бетинин аянтын тапкыла.

292. Цилиндр негизинин радиусу 3 см, бийиктиги болсо негиз радиусунан 2 см ашыкча. Цилиндрдин көлөмүн эсептегиле.

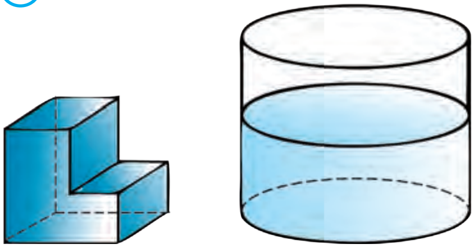
293. Цилиндрдин көлөмү 64 π см, бийиктиги 4 см. Цилиндр негизинин аянтын эсептегиле.

294*. Цилиндр формасындагы идишке 2000 см^3 суу куюлганда суунун деңгээли 12 см ди пайда кылды. Идишке тетик салынганда болсо суунун деңгээли дагы 9 см ге көтөрүлдү. Тетиктин көлөмүн аныктагыла жана жоопту см^3 дарда туюнткула.

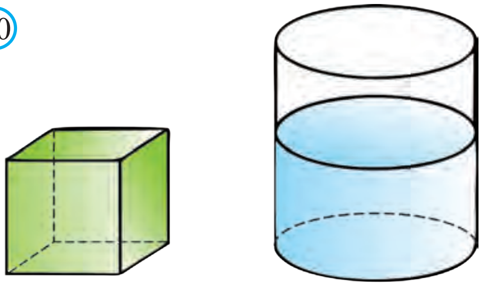
295. Цилиндр формасындагы идишке 3 литр суу куюлганда суунун деңгээли 15 см ди түздү (89-сүрөт). Идишке тетик салынганда болсо суунун деңгээли дагы 4 см ге көтөрүлдү. Тетиктин көлөмүн аныктагыла жана жоопту см^3 да туюнткула.

296*. Цилиндр формасындагы идишке 4 литр суу куюлганда суунун деңгээли 20 см ди түздү (90- сүрөт). Идишке тетик салынганда болсо суунун деңгээли дагы 5 см ге көтөрүлдү. Тетиктин көлөмүн аныктагыла жана жоопту см^3 да туюнткула.

89



90

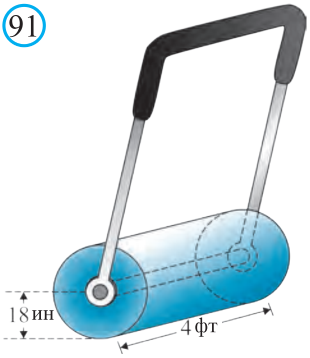


297*. 91- сүрөттө цилиндр формасындагы жол тегиздөөчү аспап берилген. Берилгендерден пайдаланып, ал бир жолу айланганда канча аянттагы жолду тегиздешин аныктагыла.

(Эскертүү: 1 фт (фут) = 12 ин. (дюм) = 30,48 см).

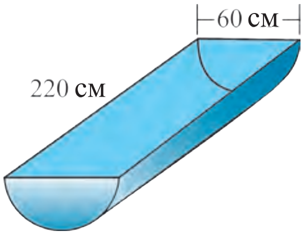
298*. 92- сүрөттөгү суу себүүгө ылайыкташкан резина куурдун ички диаметри 3 см,сырткы диаметри 3,5 см, узундугу болсо 20 м болсо, ага канча литр суу кетишин тапкыла. Эгерде резинанын тыгыздыгы 7 г/см^3 экендиги белгилүү болсо, бул резина куур оромунун массасын тапкыла.

91



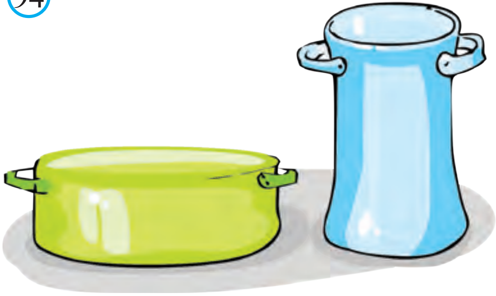
92

93



299*. 93- сүрөттө каптал бети жарым цилиндр формасында болгон идиш берилген. Эгерде 1 см^2 аянттуу бетти боёо үчүн 6 г боёк талап кылынса, бул идиштин ички, сырткы бөлүгүн боёо үчүн канча боёк керек болот? Идишке канча литр суу батат?

94



95

96

300*. Цилиндр формасындагы идиштерден бири экинчисинен эки эсе кең, бирок үч эсе төмөн (94- сүрөт). Бул идиштердин кайсы биринин сыйымдуулугу чоң?

301*. Негизинин радиусу 5 см ,бийиктиги болсо 20 см болгон цилиндр формасындагы апельсин ширеси идишинин негиздери металлдан, каптал бети болсо картондон жасалган (95- сүрөт). Эгер 1 см^2 металл наркы 20 сум, 1 см^2 картон наркы болсо 8 сум болсо, бул идишти даярдоо үчүн канча сумдук материал керек болот? Идишке канча апельсин ширеси батат?

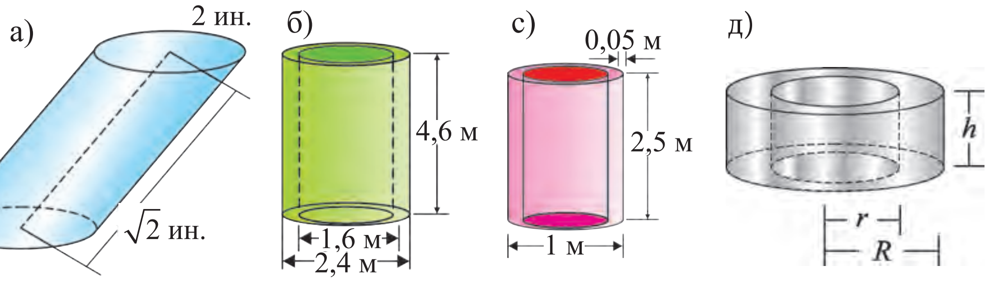
302*. Негизинин радиусу 1,5 дюм, бийиктиги болсо 4,25 дюм болгон цилиндр формасындагы консерва банкасы берилген (96- сүрөт). Консерва банкасынын толук бети жана көлөмүн тапкыла.Эгерде 1 см^2 металл наркы 20 сум болсо, бул идишти даярдоо үчүн канча сумдук материал керек болот? (Эскертүү: 1 дюм= 2,54 см)

303*. Нефть сактала турган идиш (цистерна) бийиктиги 16 фут, негизинин радиусу 10 фут болгон цилиндр формасында.Эгерде 1 куб фут 7,5 галлонго барабар болсо, бул цистернанын галондордогу сыйымдуулугун аныктагыла. (Эскертүү: 1 америка галлону = 3,785 литр . 1 америка барелли = 42 америка галлону = 159 литр).

304*. Фермердин күйүүчү май куюлуучу идиши цилиндр формасында. Идиштин бийиктиги 6 фут, негизинин радиусу 1,5 фут. Идиштин галондордогу сыйымдуулугун аныктагыла.

305. 97- сүрөттөгү маалыматтардан пайдаланып, берилген мейкиндиктеги телонун көлөмүн тапкыла.

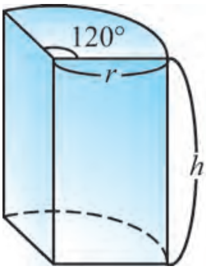
97



306*. Цилиндр формасындагы идишке 6 см^3 суу куюлду. Идишке детал толук чөктүрүлгөндө, суунун көлөмү 1,5 эсе жогорулайт. Деталдын көлөмүн аныктагыла жана жообун см^3 да туюнткула.

307*. Цилиндр формасындагы идиштеги суунун деңгээли 16 см. Бул идиштеги суу негизинин диаметри биринчи идишке караганда 2 эсе, цилиндр формасындагы экинчи идишке салынганда суунун деңгээли канча болот?

98



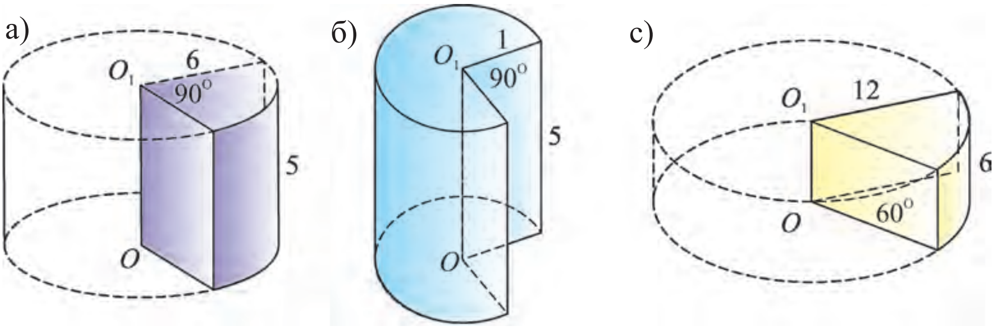
308. Биринчи цилиндрдин көлөмү 12 $м^3$. Экинчи цилиндрдин бийиктиги биринчисине караганда 3 эсе чоң, негизинин радиусу болсо 2 эсе кичине. Экинчи цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

309*. Цилиндр формасындагы идиш экинчисинен 2 эсе бийик, бирок 1,5 эсе кененирээк. Бул идиштер көлөмдөрүнүн катышын эсептегиле.

310. 98- сүрөттө берилген мейкиндиктеги телолордун көлөмүн тапкыла.

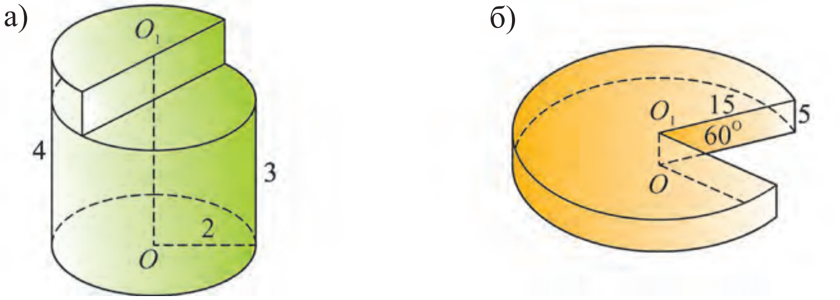
311. 99- сүрөттө берилген цилиндр бөлүгүнүн көлөмүн тапкыла.

99



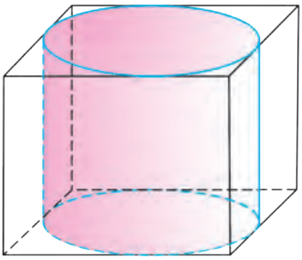
312. 100- сүрөттө берилген цилиндр бөлүгүнүн көлөмүн тапкыла.

100

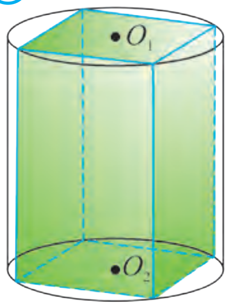


313. Тик бурчтуу параллелепипед негизинин радиусун жана бийиктигин 1 ге барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (101- сүрөт). Параллелепипед көлөмүн тапкыла.

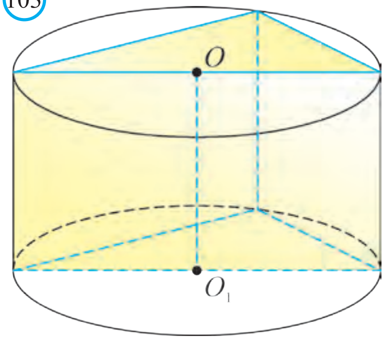
101



102



103



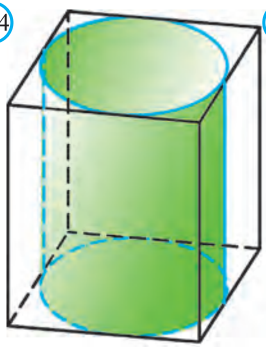
314. Тик бурчтуу параллелепипед негизинин радиусу 4 кө барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (102-сүрөт). Параллелепипед көлөмү 16 га барабар болсо, цилиндрдин бийиктигин тапкыла.

315. Тик призманын негизи - катеттери 6 жана 8 болгон тик бурчтуу үч бурчтуктардан түзүлгөн,каптал кырлары болсо 5 ке барабар. (103- сүрөт) Бул призмага сырттан сызылган цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

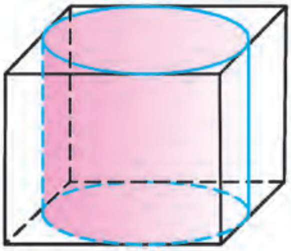
316. Тик призманын негизи-жагы 2 ге барабар болгон квадраттан түзүлгөн, каптал кырлары болсо 2 ге барабар. Призмага сырттан сызылган цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

317. Төрт бурчтуу тик призманын негизинин радиусу 2 ге барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (104-сүрөт). Призма каптал бетинин аянты 48 ге барабар болсо,цилиндрдин бийиктигин тапкыла.

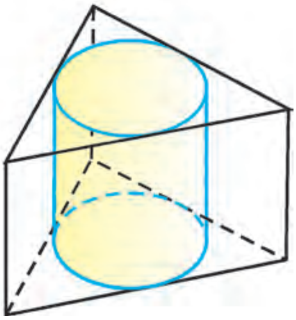
104



105



106

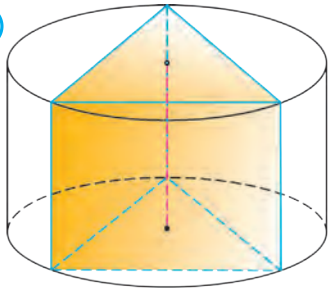


318. Үзгүлтүксүз төрт бурчтуу призма негизинин радиусу жана бийиктиги 1 ге барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (105-сүрөт). Призма каптал бетинин аянтын тапкыла.

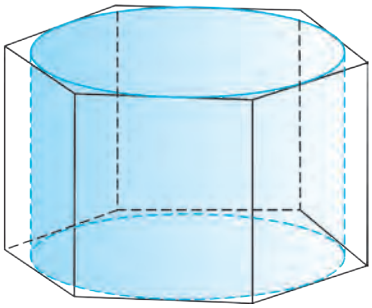
319. Үч бурчтуу тик призманын негизинин радиусу $\sqrt{3}$ кө жана бийиктиги 2 ге барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (106-сүрөт). Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.

320. Үч бурчтуу үзгүлтүксүз призманын негизинин радиусу $2\sqrt{3}$ кө жана бийикиги 2 ге барабар болгон цилиндрге ичтен сызылган (107- сүрөт). Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.

107



108



321. Алты бурчтуу туура призманын негизинин радиусу $\sqrt{3}$ кө жана бийиктиги 2 ге барабар болгон цилиндрге сырттан сызылган (108- сүрөт). Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.

322*. 109- сүрөттө берилген тетиктин көлөмүн тапкыла.

323*. Узундугу 10 м, негизинин диаметри 1 м болгон цилиндр формасындагы ноонун сырткы бетин 1 мм калыңдыкта боёк менен боё керек болот?

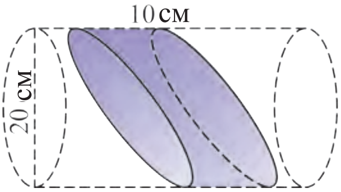
324*.110- сүрөттө көрсөтүлгөн тирсектүү куурдун: а) жан сыртынын бети; б) көлөмүн тапкыла ($\pi \approx 3$ деп алгын).

325*. Чоюндан жасалган ноонун узундугу 2 м, сырткы диаметри 20 см. Ноонун калыңдыгы 2 см жана чоюндун салыштырма тыгыздыгы 7,5 г/см^3 болсо,анын массасын тапкыла.

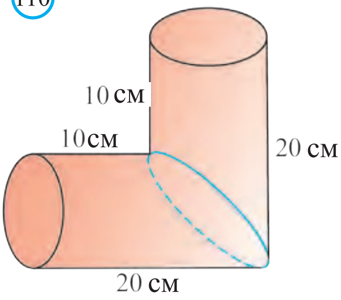
326*.111- сүрөттөн пайдаланып, жантык цилиндр үчүн $S \cdot h = Q \cdot l$ барабардык аткарылышын далилдегиле.

327*.112- сүрөттө берилген цилиндр бетинен A чекиттен B чекитке алып баруучу эң кыска аралыктын узундугун тапкыла (цилиндрдин жайылмасынан пайдалангыла).

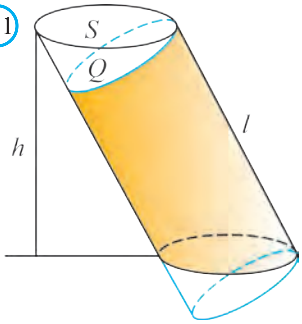
109



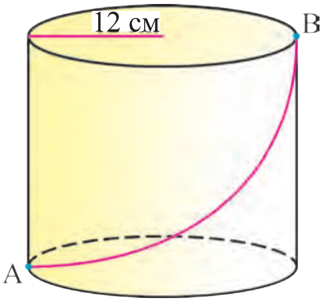
110



111



112



Абу Али Ибн Сина

Гыясиддин ал Коший

Тарыхый маалыматтар

Абу Райхан Берунийдин «Астрономия өнөрүнөн башталгыч маалымат берүүчү китеп» (кыскача «Астрономия») аттуу чыгармасынын геометрияга тиешелүү бөлүгүндө стереометрияга кирүү иретинде мейкиндиктеги фигуралардын төмөнкүдөй аныктамалары келтирилген.

Куб- телолук фигура болуп нарданын сакасына окшойт,алты жагы алты квадрат менен чектелген.

Призма-бириккен фигура болуп, каптал жагынан квадрат же тик бурчтук формасындагы тегиздиктер менен асты жана үстүнөн эки үч бурчтук менен чектелген.

Беруний берген бул аныктамага призманын өзүнүн абалы, башкача айтканда үч бурчтуу призманын аныктамасы келтирилген Абу Райхан Берунийдин “Конуни Маъсудий” китеби 1037- жылы жазылган болуп, анда параллелепипед, призманын көлөмдөрүн табуу эрежелери: “Эгерде тело төрт бурчтуу болбостон башкача айтканда башка түрдүү болсо анын өлчөмү төмөндөгүдөй: анын аянтын билгин, аны тереңдикке көбөйткүн, натыйжада көлөм пайда болот” иретинде берилген.

Абу Али Ибн Сина “Донишнома” аттуу чыгармасынын “Геометриялык телолорго карата негиздер” главасында телонун жана үч бурчтуу призманын аныктамасын берет жана эки призманын өз ара барабар болуу шарттарын баяндаган. Ибн Сина призманы төмөнкүдөй аныктайт:”Призма эки үч бурчтуу тегиз фигуралар жана каптал-дары өз ара параллель үч тегиз фигуралар менен чектелген тело”

Гыясиддин Жамшид ибн Маъсуд ал-Кошийнин “Эсеп китеби” аттуу чыгармасында беттин аянттары жана телолордун көлөмдөрүн эсептөөнүн көптөгөн эрежелери келтирилген. Ал математика, геометрия, тригонометрия, механика жана астрономия сыяктуу илимдерди терең билгендиги себептүү Улугбектин урматына ээ болгон. Ал-Коший көп бурчтуктар менен бир катарда призмалар, пирамидалар,цилиндрлер, конустар, кесилген конустарды да изилдеген.

9. ГЛАВАНЫ КАЙТАЛОО БОЮНЧА ПРАКТИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

9.1. 2- тест сыноосу

1. Кубдун канча симметрия тегиздиги бар?
А) 8;   Б) 9;   С) 7;   Д) 10.

2. Эгерде кубдун диагоналдык кесилишинин аянты $2\sqrt{2}$ барабар болсо, анын көлөмүн тапкыла.
А) $2\sqrt{2}$;   Б) $\sqrt{7}$;   С) $4\sqrt{2}$;   Д) $5\sqrt{2}$.

3. Тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары 7 см жана 24 см. Параллелепипеддин бийиктиги 8 см. Диагоналдык кесилиштин аянтын тапкыла.
А) 168;   Б) 1344;   С) 100;   Д) 200.

4. Үзгүлтүксүз төрт бурчтуу призманын диагоналы 4 кө барабар,каптал жагы менен 300 дуу бурчту пайда кылат. Призманын каптал бетинин аянтын тапкыла.
А) $16\sqrt{2}$;   Б) 16;   С) 18;   Д)$18\sqrt{2}$.

5. Үзгүлтүксүз төрт бурчтуу призманын негизинин жагы $\sqrt{2}$ ге, диагоналы менен каптал жагы арасындагы бурч болсо 300 гө барабар.Призманын көлөмүн тапкыла.
А) $8\sqrt{2}$;   Б) 4;   С) 16;   Д) $4\sqrt{2}$.

6. Призманын кырлары 36 болсо,анын канча каптал жагы бар?
А) 12;   Б) 16;   С) 9;   Д) 10.

7. Жантык призманын каптал кыры 20 га барабар болсо жана негиздин тегиздиги менен 300° туу бурчту пайда кылат. Призманын бийиктигин тапкыла.
А) 12;   Б) $10\sqrt{3}$;   С) 10;   Д) $10\sqrt{2}$.

8. Үч бурчтуу тик призманын негизинин жактары 15, 20 жана 25 ке, каптал кыры негизинин бийиктигине барабар. Призманын көлөмүн тапкыла.
А) 600;   Б) 750;   С) 1800;   Д) 1200.

9. Үзгүлтүксүз алты бурчтуу призманын эң чоң диагоналы 8 барабар,ал каптал кыры менен 300° туу бурчту пайда кылат. Призманын көлөмүн тапкыла.
А) 72;   В) 64;   С) 76;   D) 80.

10. Октук кесилиштин аянты 10 го барабар болгон цилиндрдин каптал бетинин аянтын тапкыла.
А) 10π;   Б) 20π;   С) 30π;   Д) 15π.

11. Цилиндрдин бийиктиги 8 ге каптал бети жайылмасынын диагоналы 10 го барабар.Цилиндрдин каптал бетинин аянтын тапкыла.
А) 48;   Б) 48π;   С) 24;   Д) 48π.

12. Жактары 2 жана 4 кө барабар болгон тик бурчтук өзүнүн чоң жагы айланасында айланат. Пайда болгон телонун толук бетин тапкыла.
А) 22π;   Б) 23π;   С) 24π;   Д) 20π.

13. Цилиндрдин каптал бетинин аянты 72 я ге барабар жана ал жайылганда пайда болгон тик бурчтук диагоналы негиз менен 45^o бурчту пайда кылат. Цилиндрдин негизинин радиусун тапкыла.
А) 5; Б) 4; С) 6; Д) 8.

14. Цилиндрдин негизинин радиусу эки эсе көбөйсө,анын көлөмү канча эсе чоңоёт?
А) 4; Б) 2; С) 3; Д) 6.

15. Цилиндрдин 120π ге, каптал бети 60π ге барабар.Цилиндр негизинин радиусун тапкыла.
А) 4; Б) 5; С) 6; Д) 4; 2.

16. Цилиндрдин бийиктиги 5 ке, негизине ичтен сызылган туура $3\sqrt{3}$ га барабар. Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.
А) 25π; Б) 35π; С) 45π; Д) 40π.

17. Цилиндрдин октук кесилишинин диагоналы 12 ге барабар болгон квадраттардан турат. Анын көлөмүн тапкыла.
А) $108\sqrt{2}\pi$; Б) $54\sqrt{2}\pi$; С) $36\sqrt{2}\pi$; Д) $216\sqrt{2}\pi$.

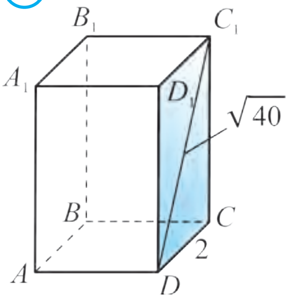
18. 18.Цилиндрдин толук бети 24π ге, каптал бети болсо 6π га барабар. Ушул цилиндрдин көлөмүн тапкыла.
А) 7π; Б) 11π; С) 8π; Д) 9π.

9.2. Көнүгүүлөр

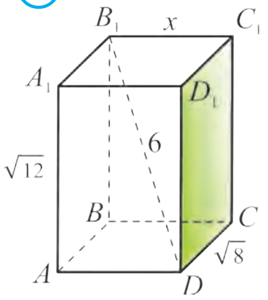
328. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипедде (113- сүрөт) $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$. Параллелепипеддин диагоналын тап.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипед. 114- сүрөттө берилген маалыматтар боюнча B_1C_1 кырынын узундугун тапкыла.

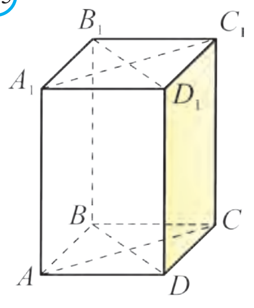
113



114



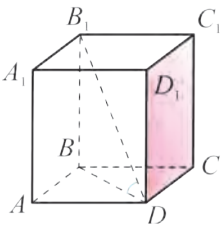
115



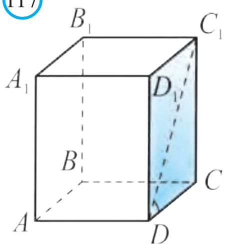
330. Тик призманын негизи *ABCD* ромб (115- сүрөт). Призманын диагоналдык кесилишинин аянты 60 жана 80 ге, бийиктиги болсо 10 го барабар. Призманын каптал бетин тапкыла.

331. Тик призманы негизи ABCD ромб. Призманын диагоналдык кесилишинин аянты 24 жана 32 ге, бийиктиги болсо 4 кө барабар. Призманын каптал бетин тапкыла.

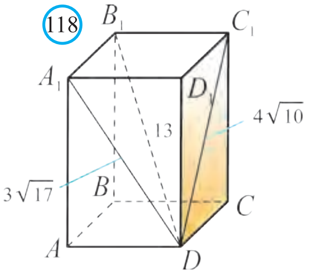
116



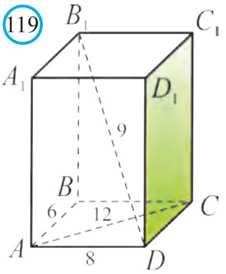
117



118



119



332. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ үзгүлтүксүз призма (116-сүрөт) $\angle B_1DB = 45°$, $S_{толук} = 32(2\sqrt{2}+1)$. AD тапкыла.

333. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ үзгүлтүксүз призма (117-сүрөттө $\angle C_1DC = 60°$, $S_{толук} = 128(2\sqrt{3}+1)$. AD тапкыла.

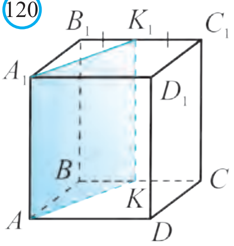
334. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик бурчтуу параллелепипед (118- сүрөт) $DB_1 = 13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4\sqrt{10}$. Параллелепипеддин каптал бетинин аянтын тапкыла.

335. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик параллелепипед (119- сүрөт) $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$. Параллелепипеддин каптал бетинин аянтын тапкыла.

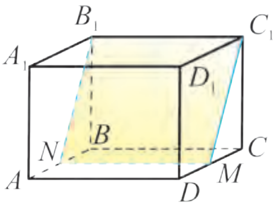
336. K чекит BC кырдын ортосу (120- сүрөт). $ABKA_1B_1K_1$ призманын көлөмүн $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед көлөмүнө болгон катышын тапкыла.

337. N жана M чекиттер параллелепипеддин кырларынын ортолору (121- сүрөт). $AA_1B_1NDD_1C_1M$ призма көлөмүнүн $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеддин көлөмүнө болгон катышын тапкыла.

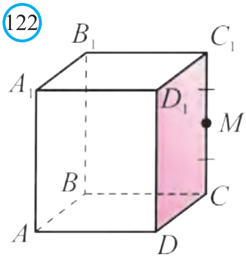
120



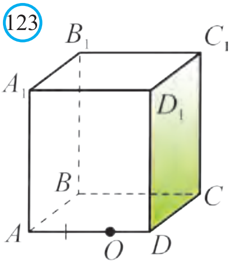
121



122



123



338. Төрт бурчтуктуу үзгүлтүксүз призма каптал жагынын бети 72 см^2 ге тең, негизинын бети болсо 64 см^2 ка тең. Призманы көлөмүн тапкыла.

339. Төрт бурчтуктуу үзгүлтүксүз призма нигезинин периметри 12 см, жан жагынын периметри 18 см ге тең. Призманын көлөмүн тапкыла.

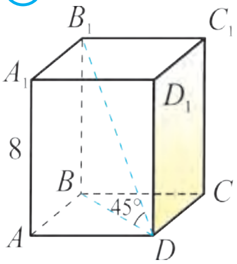
340. Куб берилген (122- сүрөт). $CM = MC_1$ жана ADM тегиздик кубду эки көлөмүнүн кичүү бөлүгү көлөмүн катышын тапкыла.

341*. Куб берилген (123- сүрөт). $AO : OD = 2 : 1$ жана BB_1O тегиздик кубду эки бөлүккө ажыратат. Эгер кубдун кичүү бөлүгүнүн көлөму 6 га тең болсо, кубдун көлөмүн тапкыла.

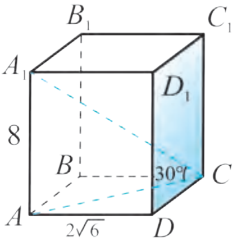
342*. Төрт бурчтуктуу үзгүлтүксүз призманын каптал бетинин аянты 8 ге, диагоналынын негиз тегиздигине жантаймалуулугу 45° ка тең (124-сүрөт),

343*. Төрт бурчтуу үзгүлтүксүз призмада негизинин жагы $2\sqrt{6}$ га, диагоналы негизинин тегиздиги менен 30° туу бурчту түзөт (125- сүрөт). Призманын көлөмүн тапкыла.

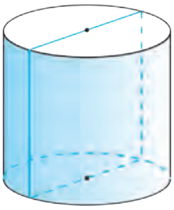
124



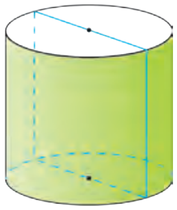
125



126



127



344. Цилиндрдин каптал бетинин аянты 91 π ге барабар (126- сүрөт). Цилиндрдин октук кесилишинин аянтын тапкыла.

345. Цилиндрдин октук кесилишинин аянты 173 кө барабар болгон квадрат (127-сүрөт). Цилиндрдин каптал бетинин аянтын тапкыла.

346. Цилиндрдин бийиктиги 24 кө,октук кесилишинин диагоналы 26 га барабар. Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

347. Цилиндрдин октук кесилишинин аянты 10 го. Негиз айланасынын узундугу 8 ге барабар.Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

348. Цилиндрдин радиусу 3кө, каптал бетинин аянты 200 гө барабар. Цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

9.3. 2-текшерүү ишинин үлгүсү

1. Эки грандуу бурчтун А чекити анын кырынан 10 см, капталынан 5 см алыстыкта жайгашкан. Эки грандуу бурчтун градустук өлчөмүн тапкыла.

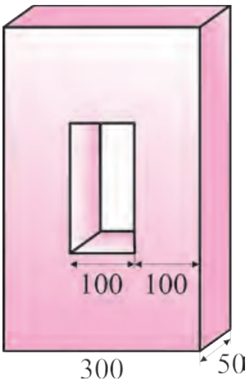
2. Алты бурчтуу үзгүлтүксүз призманын бардык кырлары 2 ге барабар болсо, анын толук бетинин аянтын тапкыла.

3. Негизинин диаметри 18 м жана бийиктиги 7 м болгон цилиндр формасындагы система нефть менен толтурулган.Эгер нефттин тыгыздыгы 0,85 г/см^3 болсо, ушул системадагы нефттин массасы канча тонна?

4. Ар бир кырынын узундугу 4 см ге барабар болгон үзгүлтүксүз алты бурчтуу призмага ичтен сызылган цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

5. (Жакшы өздөштүргөн окуучулар үчүн кошумча маселе) 128- сүрөттө өлчөмдөрү мм дерде берилген тетиктин толук бетинин аянтын жана көлөмүн тапкыла.

128



Тригонометриялык функциялардын жакындаштырылган маанилеринин жадыбалы

A	sin *A*	tg *A*	*A*	sin *A*	tg *A*	*A*	sin *A*	tg *A*
0°	0	0	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ЖООПТОР

1- глава жооптору

3. $A(5; 7; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$, $E(0; 5; 0)$, $F(0; 0; -2)$. **6.** (3; 2; 0), (3; 0; 4), (0; 2; 4). **8.** $\sqrt{26}$. **9.** а) 3, 3, 3; б) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$; с) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** (3; 3; 3), (–3; 3; 3), (3; –3; 3), (3; 3; –3), (–3; –3; 3), (–3; 3; –3), (3; –3; –3), (–3; –3; –3). **12.** $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $A(2; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O_1(0; 0; -2)$, $B_1(2; 0; -2)$, $A_1(2; 2; -2)$, $C_1(0; 2; -2)$. **13.** D чекит. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** Жок. **17.** *с)* тең капталдуу, $P=6\ (1+\sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. **18.** (–0,25; 0,25; 0). **19.** $D_1(1; -1; 1)$, $A_1(1; 1; -1)$, $B_1(-1; 1; -1)$, $D_1(1; -1; -1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2 \leq 25$. **22.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$; $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 \leq 9$. **23.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$. **25.** 1)(0; 1; 0); 2) (1; 1; 1); 3) (0; 0; 2), 4) (–0,7; 0,1; 0,6); 5) $(2\sqrt{3}; 1{,}5; 1)$. **28.** $A(5;-4;0)$, $B(-7;5;6)$, **31**. $K\left(0; -5; \dfrac{17}{2}\right)$. **32.** а) $D(-1; -3; -9)$. **33.** *а)* $M(-1; 2; 0)$; *с)* $M(3; \frac{3}{4}; 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8}; \frac{33}{8}; \frac{9}{4})$. **36.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **37**. а) $\sqrt{2}$; b) 30°; 30°; 120°; с) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\frac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5; 4; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1; 1; 1)$, $\overline{OB}=(-1; 0; 1)$, $\overline{OC}=(0; 1; 1)$, $\overline{BO}=(1; 0; -1)$, $\overline{CO}=(0; -1; -1)$, $\overline{AB}=(-2; -1; 0)$. **42.** а) $\overline{AB}=(2; 5; 3)$, б) $\overline{AB}=(4; -6; 2)$. **43.** $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$, $|\overline{c}|=\sqrt{14}$, $|\overline{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ±3. **45.** а) $\overline{a}(3; 6; -3)$, б) $\overline{a}(-3; -6; 3)$. **46.** а) 1 же –1; б) 3 же –1; с) 2 же –4; д) 3 же 5/3. **48.** $D(-2; 0; 1)$. **50**. $n=\frac{4}{3}$; $m=\frac{3}{2}$. **52.** а) $D(3; 0; 0)$. **56.** $\overline{c}(-3; -4; 8)$, $|\overline{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\overline{c}(4; 5; 5)$, $|\overline{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\overline{c}(-3; 4; 0)$, $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}(0; 2; 6)$, $|\overline{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{d}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(-4; 0; 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0; 9; 2)$; $AB = AO + OB = -4i + 9j$, $AB(-4; 7; 0)$. **65.** ≈180N. **66.** а) 60°; б) 30°; с) 90°; д) 60°; е) 45°. **67.** а) –6; б) 3; с) –6; д) 3. **68.** а) 40°; б) 140°; с) 150°. **69.** а) 30; б) 3; с) 15; д) –28. **70.** а) 1/3; б) –1; с) 2; д) 4. **71.** а) 16. **75.** а) 1; б) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}-\overline{DC})$. **77.** $\frac{1}{3}(2\overline{AC}-\overline{AB})$. **78.** $\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})-\overline{AD}$. **83.** а) (1; –1; 7); b) (–2; 3; 1); с) (0; –4; 4). **84.** $\overline{p}(-1; 5; 3)$. **86.** $B(-8; 4; 1)$. **88.** (2; –5; 9); (–2; –2; 7); (6; –12; 2). **93.** Oxz теги салыштырмалуу. **100.** (0; –3; 1). **106.** а) 36 см; б) 48 см; с) 6 см; д) 4 см. **110.** а) $B(-5; 7{,}5; 12{,}5)$; б) $B(5; -7{,}5; -12{,}5)$; с) $B(-0{,}5; 0{,}75; 1{,}25)$; д) $B(0{,}5; -0{,}75; -1{,}25)$. **111.** а) $B(-2{,}5; 1; 3)$; б) $B(-7; 2; 6)$. **112.** а) $O_1(0; 0; 0)$, $A_1(-4; 0; 0)$, $B_1(0; -4; 0)$, $C_1\ (0; 0; -4)$; b) $O_1(-4; 0; 0)$, $A_1(4; 0; 0)$, $B_1(-4; 8; 0)$, $C_1\ (-4; 0; 8)$. **115.** (2;–3; 3). **116.** –3. **117.** (7; 1; 2). **118.** (1; –2; 3). **119.** (–1; –2; –3). **120.** (1; 2; –3). **121.** (–2; –3; –5). **122**. $D(0; 9;-7)$. **123.** $C(2; 0;-8)$. **124.** 19. **125.** (–7; 7; –7). **126.** (1; 2; 1). **127.** (–2; 7; 1). **128.** ±2. **129.** ±3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** –2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4. **139.** –4. **140.** –2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}-4\vec{k}$.

1- тест сыноосу жооптору

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	D	D	B	D	B	B	A	A	D	B	B	B	C	A	C	B	D

1- текшерүү ишинин жооптору

1) (1; 2; -3); 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

2- глава жооптору

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 см, 5 см. **147.** 12 см. **148.** 5 см. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **165.** а) 4, 10; б) 5, 12. **166.** Жок. **170.** 6, куб. **171.** 15 та. **172.** 9 та. **173.** 180 та. **174.** 24 см^2. **175.** 44 см^2. **176.** 76,8 см^2. **177.** 17,64 см. **178.** $4\sqrt{3}$см^2 , 4 см. **179.** 124 дм^2. **180.** 20 м^2, 30 м^2. **181.** 8 см, 8 см. **182.** 13 см, 9 см. **184.** 4500 см^2. **185.** 7,5. **186.** 4. **187.** 480 см^2. **188.** $5\sqrt{2}$. **189.** 45 см^2. **190.** 144. **191.** а)18; б)76; с) 110; д) 132; е) 48; ф) 96; g) 124. **192.** а) 146; б) 126; с) 108; д) 146. **193.** 84 см. **194.**$3\sqrt{2}$ см^2. **195.** 216 см^2. **196.** а) 58; б) 62; с) 94. **197.** а) 38; б) 92; с) 48. **198.** ≈68 м^2. **199.** 104 см. **200.** 68 см^2. **201.** 78 см^2. **204.** 5120 см^3. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **219.** 27 литр. **220.** 4. **221.** 60 см^2. **222.** $\frac{(S-ab)a\mathrm{b}}{4(a+b)}$. **223.** 30 м. **224.** 1200. **225.** а) 4; б) 40; с) 71; л) 88; е) 18; ф) 33; г) 78. **226.** а) 90; b) 77; с) 54; д) 96. **227.** 6 м^3. **228.** а) 21; б) 26; с) 58. **230.** 6 м^3. **231.** $\sqrt{2}$ м^3. **232.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **233.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **234.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** а) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; b) a^2b; с) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$. **237.** 3060 m^3. **238.** 3 см^3. **239.** $\frac{a^3}{8}$. **240.** $3\sqrt{3}$ м^3. **241.** 1 эсе. **243.** 24 см^3. **245.** 12 см^3. **246.** 2 см. **247.** $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$. **248.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$. **249.** 6048 м^3/саат. **250.** 35200 м^3. **251.** 0,5 г/см^3. **252.** 150 та. **253.** 42 та. **254.** 961 та. **255.** 13 та. **256.** 90 та. **257.** 3315 г. **258.** 60 м^2. **259.** 24 та. **260.** 24 см^3. **261.** 1927,2 г. **262.** 1927,2 г. **263.** 960 м^3. **264.** 144 г. **265.** 19,3125 г/см^3. **266.** 440 м^3. **267.** 0,0127 м^3. **271.** $(y+w+z)yx$. **274.** $a:b:c$. **277.** 240π см^2 , 280π см^2. **278.** 48 см^2. **279.** 5 см. **280.** 128 см^2. **281.** $\pi Q/4$. **282.** 36π см^2. **283.** 4π. **284.** 36 см^2. **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 дм. **288.** $2\sqrt{34}$ см. **289.** 3 дм. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 +50/π. **292.** 45π см^3. **293.** 16π см^2. **294.** 1500 см^3. **295.** 800 см^2. **296.** 1000 см^2. **297.** 5574 см^2, 1824 см^2. **298.** 1375π см^3, 11,375 кг. **299.** 141900 г, 310860 см^2. **300.** Биринчисинин. **301.** 2041 сум, 15700 см^2. **302.** 349,45 см^2, 492 см^3, 1747 сум. **303.** 37680 галлон. **304.** 318 галлон. **306.** 3 см^3. **307.** 4 см . **308.** 9 м^3. **309.** 1,125. **311.** а) 45π; б) 3,75π; с) 144π. **312.** а) 14π; б) 937,5π. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 м^3. **323.** ≈3000 см^3. **324.** а) ≈1050 см^2; б) ≈2250 см^3. **325.** ≈162 кг. **328.** 7. **329.** 4. **330.** 200. **331.** 160. **332.** 4. **333.** 8. **334.** 168. **336.** 1/3. **337.** 1/3. **338.** 144 м^3. **339.** 56 см^3. **340.** 6. **341.** 2. **342.** 256. **343.** 96. **344.** 91. **345.** 173 π. **346.** 600π. **347.** 20. **348.** 300.

2- текшерүү ишинин жооптору

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	D	A	B	A	C	C	A	A	A	C	C	A	A	C	A	D

2- текшерүү ишинин жооптору

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}$ +24; 3) 1513 l; 4) 64π см^3; 5) 35 дм^2, 6,5 дм^3.

Эскертүү. *Геометрия боюнча татаал маселелердин тартип цифрасы жылдызча менен,үйдө аткарылуучу маселелер кызыл түстө берилген.*

Окуу китебин түзүүдө жана кошумча үйрөнүүгө сунуш кылынган окуу-методикалык адабияттар жана электрондук ресурстар.

1. *А.В. Погорелов* “Геометрия 10-11”, учебник, Москва. “Просвещение”, 2009.
2. *Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский.* “Математика 11”, учебник, Минск, 2013.
3. *М. Смирнова, В.А. Смирнов* Геометрия. 10-11 класс, учебник, Москва, 2008
4. *О.Я. Билянина и др.* “Геометрия 11” учебник, Киев, "Генеза", 2010.
5. *Daniel C.Alexander,* Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
6. *Mai Coad and others,* Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. *Норжигитов Х, Мирзаев Ч.* Стереометриялык маселелерди чыгаруу. Академиялык лицейлер үчүн окуу куралы. -Т., 2004.
8. *Исраилов И, Пашаев З.* Геометрия. Академиялык лицейлер үчүн колдонмо. II бөлүк. -Т.: “Ўқитувчи”, 2005.
9. http://www.uzedu.uz – Элге билим берүү министрлигинин маалымат таалим порталы.
10. http://www.eduportal.uz – Мультимедия борбору маалымат таалим порталы.
11. http://www.ixl.com – Аралыктан туруп окутуу сайты (англис тилинде).
12. http://www.mathkang.ru - “Кенгуру” Эл аралык математикалык конкурс сайты (орус тилинде).
13. http://www.khanakademy.org - "Хон академиясы" аралык таалим сайты (англис тилинде).
14. http://www.brilliant.org – Математикадан аралык таалим сайты (англис тилинде).

МАЗМУНУ

I ГЛАВА. МЕЙКИНДИКТЕГИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ ЖАНА ВЕКТОРЛОР

II ГЛАВА. ПРИЗМА ЖАНА ЦИЛИНДР

Algebra va analiz asoslari: **M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.**

Geometriya: B.Q. Xaydarov.

MATEMATIKA 11

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI, GEOMETRIYA

I QISM

(qirg‘iz tilida)

Жалпы орто билим берүүчү мекемелеринин 11-класс окуучулары
үчүн окуу китеби
1- басылышы

Которгон	Ж. Батирова
Редактору	Ш. Уринбоева
Корректору	Г. Шерматова
Техникалык автор	А. Абдусаломов
Компьютерде даярдаган:	А. Мухамадиев

Басма үйүнүн лицензиясы AI № 296. 22.05.2017
Басып чыгарууга уруксат этилди 20.07.2018.
Форматы $70*100^1/_{16}$ «TimesNewRoman» гарнитурасы.
Көлөмү: 12,0 басма табак. Ред таб 11,0.
Нускасы 786.

Оригинал макет «Zamin Nashr» ЖЧК до даярдалды.
100053, Ташкент шаары. Багышамал көчөсү, 160.
Tel: 234-44-05

«Credo Print Group» ЖЧК до басылды.
100053, Ташкент шаары. Багышамал көчөсү, 160.