МАТЕМАТИКА 11

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ НЕГІЗДЕРІ
ГЕОМЕТРИЯ
I БӨЛІМ

Жалпы білім беретін мектептің 11-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі бекіткен

1-басылым

ТАШКЕНТ
2018

UO‘K: 51(075.32)
KBK: 22.1ya72
M 56

Алгебра және анализ негіздері бөлімінің авторлары:

М.А. Мирзахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.Қ. Аманов

Геометрия бөлімінің авторы:

Б.Қ. Хайдаров

Пікір жазғандар:

Р.Б. Бешимов – Мырза Ұлықбек атындағы Өзбекстан Ұлттық Университеті “Геометрия және топология” кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы;

Қ.С. Жуманиязов – Низами атындағы ТМПУ-дің Физика-математика факультеті “Математиканы оқыту методикасы” кафедрасының доценті, педагогика ғылымдарының кандидаты;

Р.О. Розимов – Сіргелі ауданына қарасты 237- жалпы білім беретін мектептің математика пәні оқытушысы;

С.Б. Жуманиязова – РБО методисті;

С.Р. Сумбердиева – Сіргелі ауданына қарасты 6-мамандандырылған мектептің математика пәні оқытушысы.

Оқулықтың “Алгебра және анализ негіздері” бөлімінде істетілген белгілер және олардың мағынасы:

△ – мысалды шешу (дәлелдеу) басталды

▲ – мысалды шешу (дәлелдеу) аяқталды

! – бақылау жұмыстары және тест (сынақ) жаттығулары

? – сұрақтар мен тапсырмалар

– негізгі мәлімет

* – күрделірек жаттығулар

ISBN: 978-9943-5127-9-5

Алгебра және анализ негіздері

І ТАРАУ. ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

1–2 ӨЗГЕРУШІ МӨЛШЕРЛЕР ӨСУІНІҢ ҚАТЫНАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ МАҒЫНАСЫ. ЖАНАМАҒА СИПАТТАМА. ФУНКЦИЯ АРТТЫРУШЫСЫ

Өзгеруші мөлшерлер өсуінің қатынасы

Түрлі өлшеу бірліктеріне ие болған екі өзгергіш мөлшер қатынасын есептеу адам өмірінде тез-тез кездесіп тұрады.

Мысалы, автомашинаның ***тездігі*** оның жүрген жолының уақытына қарағанда км/сағ немесе м/с тарда өлшенеді, жанармайдың жұмсалуы есе км/литр немесе 100 км/литрде өлшенеді.

Дәл осылай, баскетболшының шеберлігі бір ойында жинаған ұпайлар санымен белгіленеді.

Мысал. Оқып істеп шығару комплексі (кешені) УПК 11-сынып оқушылары арасында тақырып терудің сапасы және жылдамдығы бойынша сынақ өткізді.

Кәрім 3 минутта 213 сөзді теріп, 6 емле қатеге, Наргиза болса 4 минутта 260 сөзді теріп, 7 емле қатеге жол қойғаны мәлім болды. Олардың нәтижелеріні салыстыр.

△ Әр бір оқушы үшін тиісті қатынастарды құраймыз:

Кәрім:

мәтін терудің жылдамдығы $\dfrac{213 \text{ сөз}}{3 \text{ мин}} = 71 \dfrac{\text{сөз}}{\text{мин}}$;

мәтін терудің сапасы $\dfrac{6 \text{ қате}}{213 \text{ сөз}} \approx 0{,}0282 \dfrac{\text{қате}}{\text{сөз}}$.

Наргиза:

мәтін терудің жылдамдығы $\dfrac{260 \text{ сөз}}{4 \text{ мин}} = 65 \dfrac{\text{сөз}}{\text{мин}}$;

мәтін терудің сапасы $\dfrac{7 \text{ қате}}{260 \text{ сөз}} \approx 0{,}0269 \dfrac{\text{қате}}{\text{сөз}}$.

Демек, Кәрім мәтінді Наргизаға қарағанда жылдамырақ терген болса, Наргиза жұмысты сапалырақ орындаған. ▲

Есептер

1. Пульс жиілігін тексеру үшін бармақтар ұшы артерия тамыры өтетін жерге қойылады және тамырдың ұруын сезіну үшін осы жер басылады.

Мадина пульсіні өлшегенде бір минутта 67 рет ұрғанын сезінді.

а) Пульс частотасының мағынасын түсіндір. Ол қандай шама (белгі)?

б) Әр сағатта Мадинаның жүрегі қанша рет соғады?

2. Кәрім үйінде 14 бет мәтін теріп, 8 емле қатеге жол қойды. Егер 1 бетте орташа 380 сөз болса:

а) Кәрімнің мәтін теру сапасын анықта және жоғарыдағы мысалда алынған нәтижемен салыстыр. Кәрімнің мәтін теру сапасы жақсыланды ма?

б) Кәрім 100 сөз тергенде орташа қанша қате жасайды?

3. Маруф12 сағат жұмыс істеп 148 м 20 см, ал Мұрат болса 13 сағат жұмыс істеп 157 м 95 см арық тазалады. Олардың еңбек өнімділігін салыстыр.

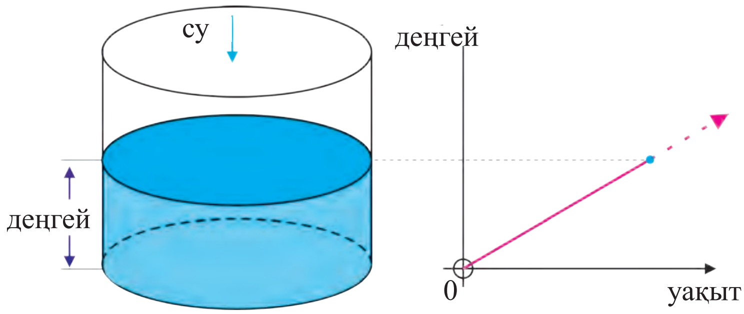
4. Автомашина жаңа шина протекторының тереңдігі 8 мм. 32178 км жүрілгеннен соң жемірілу нәтижесінде шина протекторының тереңдігі 2,3 мм болғаны мәлім болды.

а) 1 км қашықтық жүрілгенде шина протекторының тереңдігі қандай өзгереді?

б) 10000 км қашықтық жүрілгенде ше?

5. Мадина Қаршы қаласынан сағат 11:43 те шығып, сағат 15:49 да Гүлістан қаласына жетіп келді. Егер ол 350 км қашықтық жүрген болса, оның орташа жылдамдығы қанша $\frac{\text{км}}{\text{сағат}}$ болды?

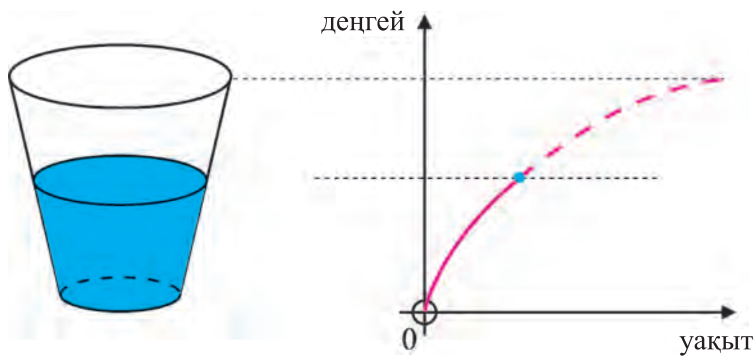
Мысал. Цилиндр түріндегі ыдыс сумен бір қалыпты жылдамдықта толтырылып жатыр. Мұнда цилиндрлік ыдыс ішіне уақытқа пропорционал болған су көлемі, құйылып жатқандығы себепті су деңгейінің (биіктігінің) уақытқа қарағанда байланысуы сызықты функция көрінісінде болады (1-суретке қара).



1-сурет.

Бұл жағдайда ыдыстағы су деңгейінің уақытқа болған өлшемі (немесе деңгейдің *өзгеру жылдамдығы*) өзгермейтін сан болып қала береді.

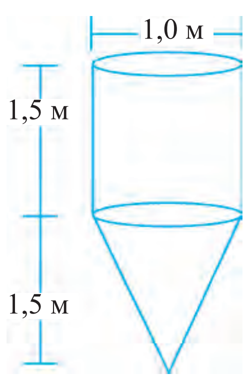
Енді басқа түрдегі ыдысты қараймыз (2-сурет):



2-сурет.

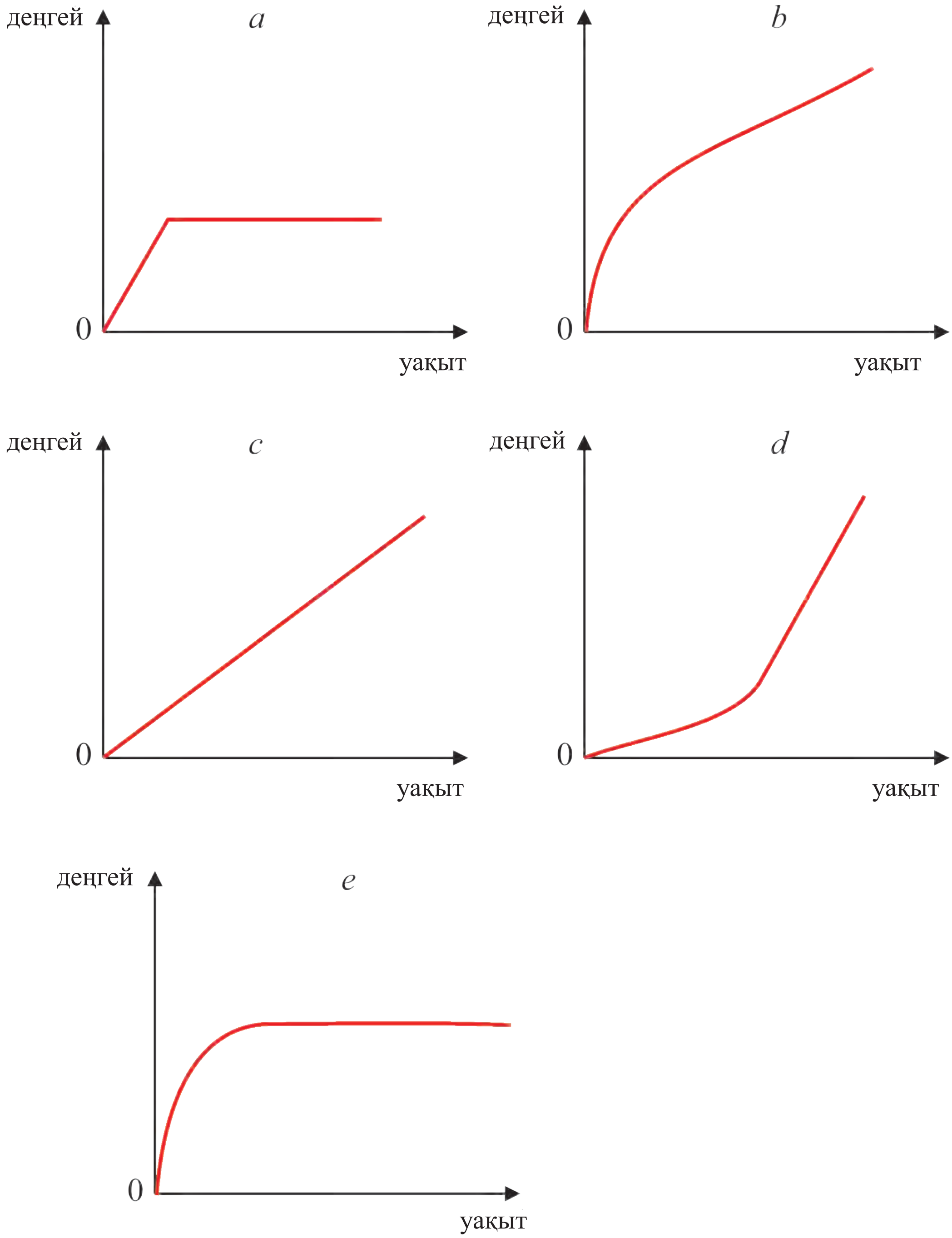
2- суретте су деңгейінің өзгеру жылдамдығының уақытқа қарағанда қатынас байланысы бейнеленген.

1-сұрақ. 3-суретте су құюға арналған ыдыс бейнеленген.



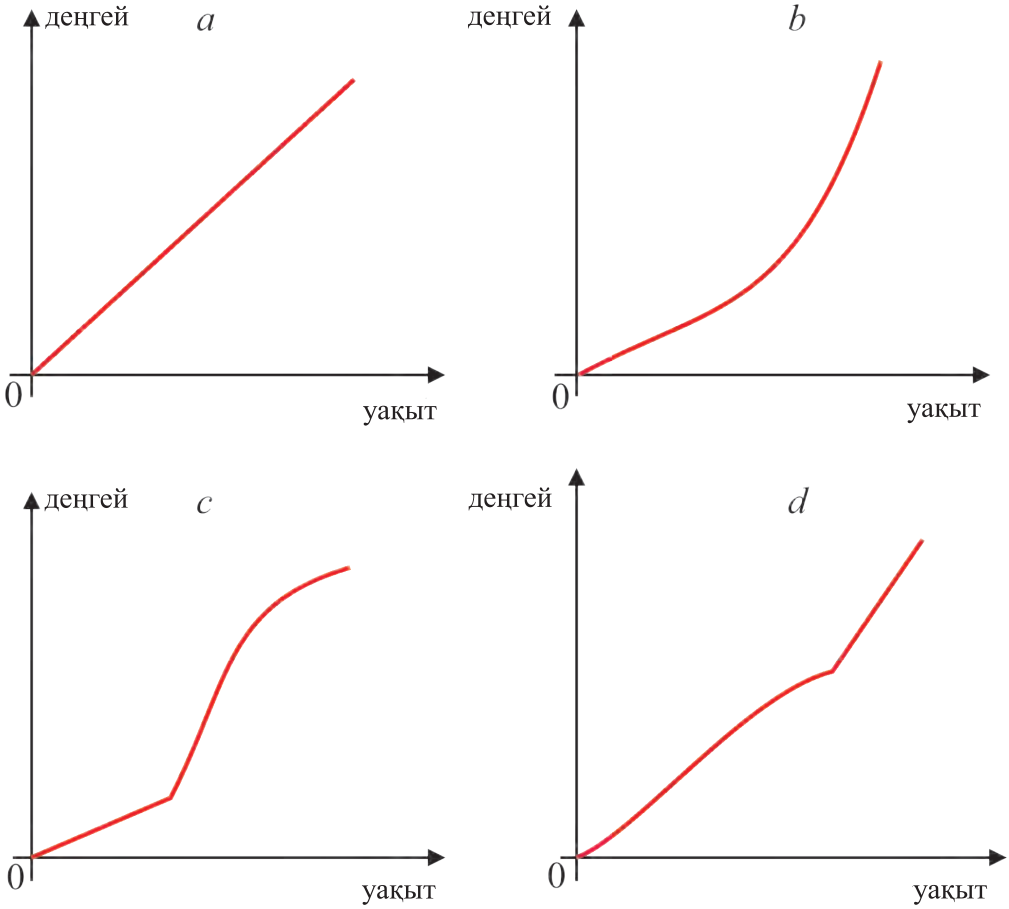
3-сурет.

Алғашында онда су жоқ еді. Кейін ол "бір секундта бір литр" жылдамдықта толтырыла бастады. Су деңгейінің уақытқа қарағанда өзгеруі 4-суреттегі қай графикте тура көрссетілген?



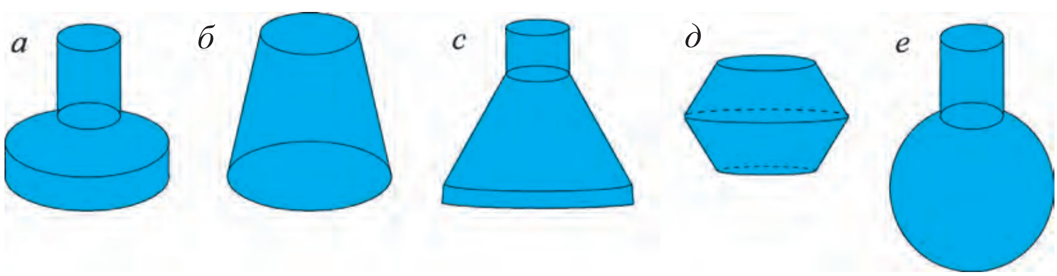
4-сурет.

2-сұрақ. Су деңгейінің уақытқа қарағанда өзгеруі 5-суреттегі графиктерде берілген:



5-сурет.

Олар 6-суреттегі қайсы ыдыстарға сәйкес келеді?



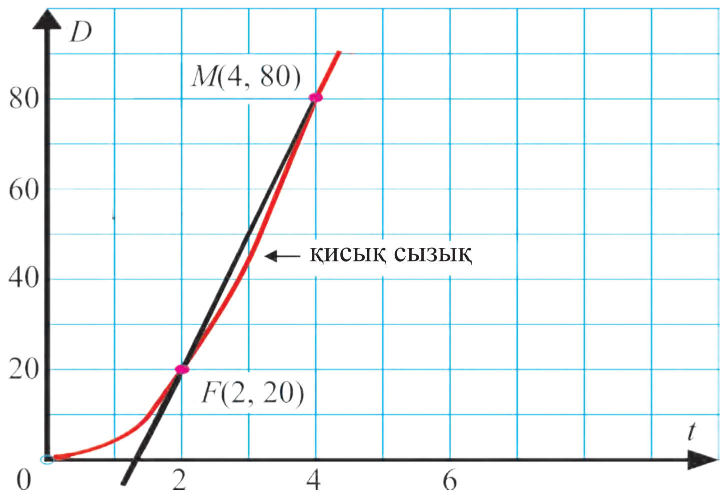
6-сурет.

Өзгерудің орташа жылдамдығы

Екі өзгеруші мөлшердің бір-біріне байланысуы сызықты функция көрінісінде болса, бұл мөлшерлер арттырмаларына қарағанда өзгермейтін сан болады.

Екі өзгергіш мөшердің бір-біріне байланысы сызықты функция көрінісінде болмаса, біз бұл өзгеруші мөлшерлердің берілген аралықтағы орташа қатнасын таба аламыз. Егер аралық түрліше алынса, есептелген орташа салыстырмаларда да түрліше болады.

1-есеп. Материалдық нүктенің уақытқа қарағанда тік сызық бойлап әрекеті графикте бейнеленген (7- сурет). FM кесушінің бұрыш коэффицентін тап.



7-сурет.

△ Графикте t=2 секундқа сәйкес болған F нүктені және одан айрықша (мысалы, t=4 секундқа сәйкес болған) M нүктені белгілейік. $2 \le t \le 4$ уақыт арасында орташа жылдамдық $\frac{(80-20)\,m}{(4-2)\,s} = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$-қа тең екенін табамыз.

Көрініп тұрғандай, FM кесіндінің бұрыш коэффиценті 30-ға тең екен. ▲

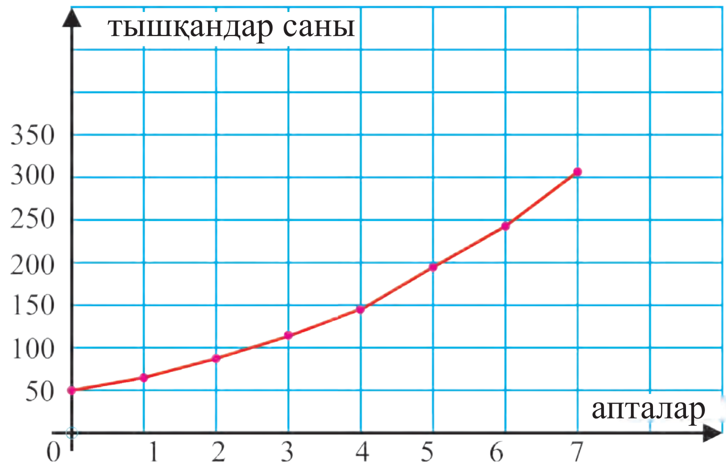
Сұрақ. F нүктені қозғалмайды деп есептеп, t-ның төменде берілген мәндеріне сәйкес болған M нүктелер үшін FM кесінділерінің бұрыш коэффиценттерін есептеп, таблицаларыды толтыр;

t	бұрыш коэффиценті
0	
1,5	
1,9	
1,99	

t	бұрыш коэффиценті
3	
2,5	
2,1	
2,01	

Қандай қорытындыға келдің?

2-есеп. Популяциядағы тышқандар саны апталар өтуімен төмендегідей өзгереді (8-сурет):



8-сурет.

3- және 6- апта арасында тышқандар саны орташа қандай өзгерген? 7 апталық уақыт аралығында ше?

△ Тышқандар популяциясының өсу жылдамдығы

$\dfrac{(240\text{–}110)\text{ тышқан}}{(6\text{–}3)\text{ апта}} \approx 43\,\dfrac{\text{тышқан}}{\text{апта}}$, немесе 3- және 6- апта аралығында тышқандар саны аптасына орташа 43-ке көбейген.

Тура осылай 7 аптада $\dfrac{(315-50)\text{ тышқан}}{(7-0)\text{ апта}} \approx 38\,\dfrac{\text{тышқан}}{\text{апта}}$.

7 апта аралығында тышқандар саны аптасына орташа 38-ге көбейген. ▲

Жалпы тұрғыда: x мөлшер a-дан b-ға дейін өзгергенде $y=f(x)$ мөлшер өзгеруінің ***орташа жылдамдығы***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

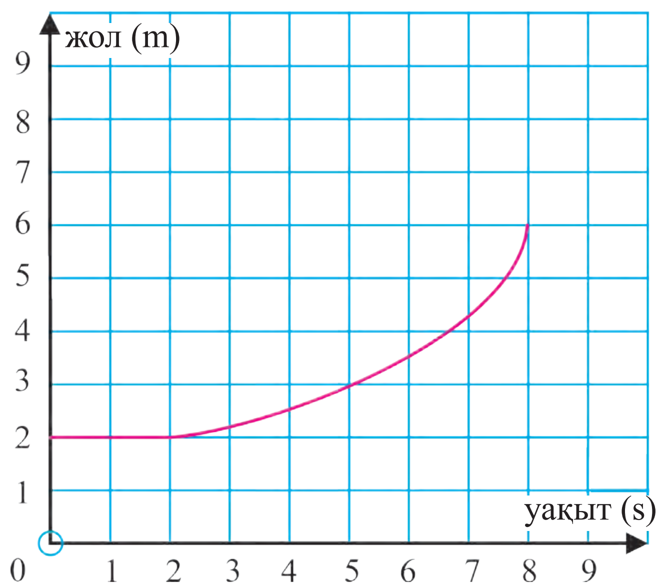
өсулер қатнасына тең, бұл жерде $f(b) - f(a)$ – *функция* өсуі, $b - a$ болса аргумент арттырмасы.

$h=b-a$ деп белгілесек, орташа жылдамдық $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ көріністе болады.

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ бөлшек алымы $y=f(x)$ *функция* аргументі x-тың h өсуіне сәйкес келетін *өсуі* деп атау қабылданған. Бөлшектің өзі болса *айырмалы қатынас деп аталады*.

Жаттығулар

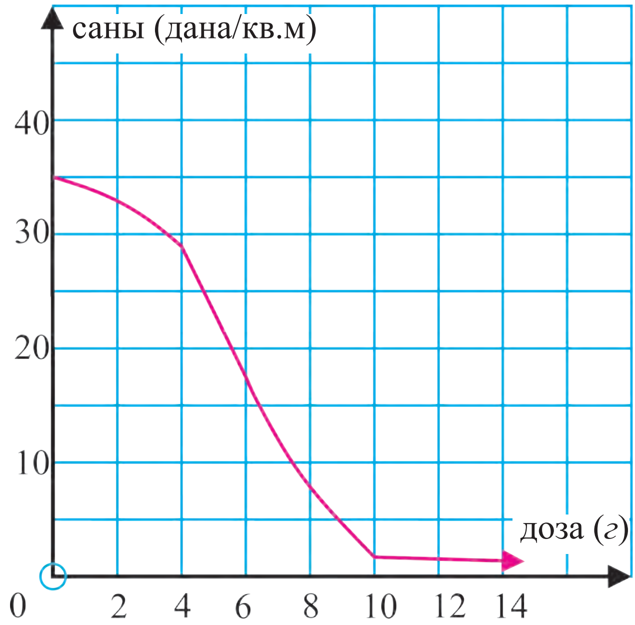
6. Нүктенің тік сызық бойлап жүрген жолы уақытқа қандай байланысқан 9-суреттегі графикте бейнеленген.



9-сурет.

Нүктенің
а) алғашқы 4 секунд;
б) соңғы 4 секунд;
с) 8 секунд ішінде орташа жылдамдығын тап.

7. Егін даласына түрлі мөлшердегі (дозадағы) дәрімен өңдеу берілгенде 1 m^2-та пайда болған зиянды жәндіктер санының өзгеруі 10-суреттегі графикте көрсетілген.



10-сурет.

а) 1) доза 0 граммнан 10 граммға дейін көбейтілсе; 2) 4 граммнан 7 граммға дейін көбейтілсе, 1 m^2-та пайда болған зиянды жәндіктер санының өзгеруін тап.

б) доза 10 граммнан 14 граммға дейін көбейтілсе, қандай жағдай болды?

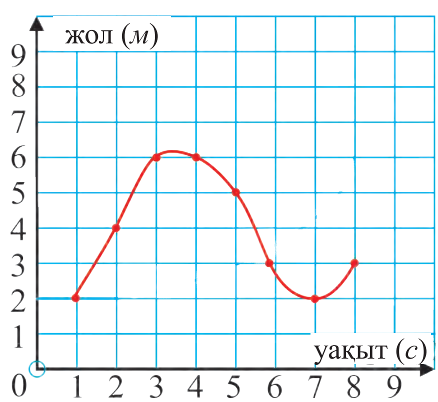
2) Материалдық нүктенің тік сызық бойынша әрекет заңы $s(t)$-ның графигі суретте берілген.

а) $s(2)$, $s(3)$, $s(5)$, $s(7)$ сандары қаншаға тең?

б) Қайсы аралықта функция өсуші?

с) Қайсы аралықта функция кемеюші?

д) $s(3) - s(1)$, $s(5) - s(4)$, $s(7) - s(6)$, $s(8) - s(6)$ арттырмаларды есепте.



3–4 ЛИМИТ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

x-тың мәндері 2-ден кіші болып, 2-ге жақындағанда $f(x)=x^2$ функциясының мәндерінің кестесін қарайық:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Кестеден дәл көрініп тұрғандай, x-тың мәндері 2-ге қанша жақын болса $f(x)$ функцияның мәндері 4 санына жақындай береді.

Мұндай жағдайда x аргумент (өзгеруші) 2-ге *солдан жақындағанда* $f(x)$-тың мәндері 4 санына жақындайды дейміз.

Енді x тың мәндері 2-ден үлкен болып, 2-ге жақындасқанда $f(x)=x^2$ функциясының мәндер кестесін қарайық:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Мұндай жағдайда x аргумент 2-ге *оңнан жақындағанда* , $f(x)$ функция мәндері 4 санына жақындайды дейміз.

Жоғарыдағы екі жағдайды жалпылай, x аргумент 2-ге *жақындағанда,* $f(x)$-тың мәндері 4 санына жақындайды дейміз және бұны былайша жазамыз:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Бұл жазу былай оқылады: x аргумент 2-ге жақындасқанда, $f(x) = x^2$ функциясының *лимиті* 4-ке тең.

Жалпы жағдайда *функция лимиті түсінігіне* былайша қаралады:

$x \neq a$ болып, оның мәндері a санына жақындасса, $f(x)$-тың мәндері A санына жақындассын. *Бұл жағдайда* A санды x a-ға жақындасқанда $f(x)$ функциясының *лимиті* делінеді де былай белгіленеді:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Кейбір жағдайларда осы x-тің мәндері a-ға *ұмтылғанда* $f(x)$ функция A-ға ұмтылады дейміз.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ жазу орнына $x \to a$ да $f(x) \to A$ жазуы да қолданылады.

Ескерту. x тың мәні a ға *ұмтылғанда* $x \neq a$ шарты орындалуының маңыздылығын айтып өту орынды.

Мысал. $x \to 0$ болғанда $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x}$ функциясының лимитин тап.

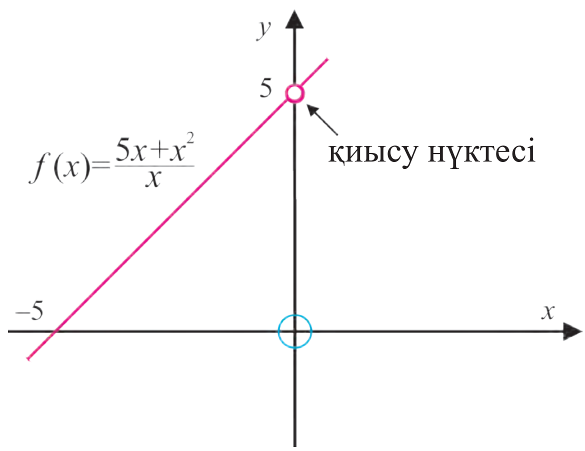
△ $x \neq 0$ шарты орындалмасын, немесе $x=0$ болсын. $x=0$ мәнін $f(x)$ ке тікелей қойып көрсек, $\dfrac{0}{0}$ көріністегі *белгісіздікке* ие боламыз.

Басқа жақтан, $f(x) = \dfrac{x(5 + x)}{x}$ болғаны үшін бұл функция мынау

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, & \text{егер } x \neq 0 \text{ болса} \\ \text{белгісіз, егер } x = 0 \text{ болса,} \end{cases}$$

көріністі алады.

$y=f(x)$ функциясының графигі (0; 5) координаталы нүктесі "алып тасталған" $y=x + 5$ түзу сызық көрінісінде болады (11-сурет):



11-сурет.

(0; 5) координаталы нүкте $y = f(x)$ функциясының *үзілу нүктесі* дейіледі.

Көрініп тұрғандай, бұл нүктеден айырмашылығы нүктелерде x тың мәндері 0 ге жақындасқанда $f(x)$ функциясының сәйкес мәндері 5 ке жақындайды, немесе оның *лимиті* бар:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x + x^2}{x} = 5$. ▲

Тәжірибеде, функция лимитін табу үшін, керек болса, тиісті қарапайым жолмен орындау мақсатқа сай.

1-мысал. Лимиттерді есепте:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

△ а) x тың мәндері 2 ге *жақындасқанда* x^2 нің мәндері 4 ке жақындайды, немесе $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

б) $x\neq 0$ болғаны үшін

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+3)=3\cdot$$

с) $x\neq 3$ болғаны үшін

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6. \blacktriangle$$

Жаттығулар

Лимитті есепте (**8–11**):

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(5-2x)$; с) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-1)$

д) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+2)$; е) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$; ф) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 5} 5$; б) $\lim 7$; с) $\lim\limits_{x\to 0} c$, c – өзгермейтін сан.

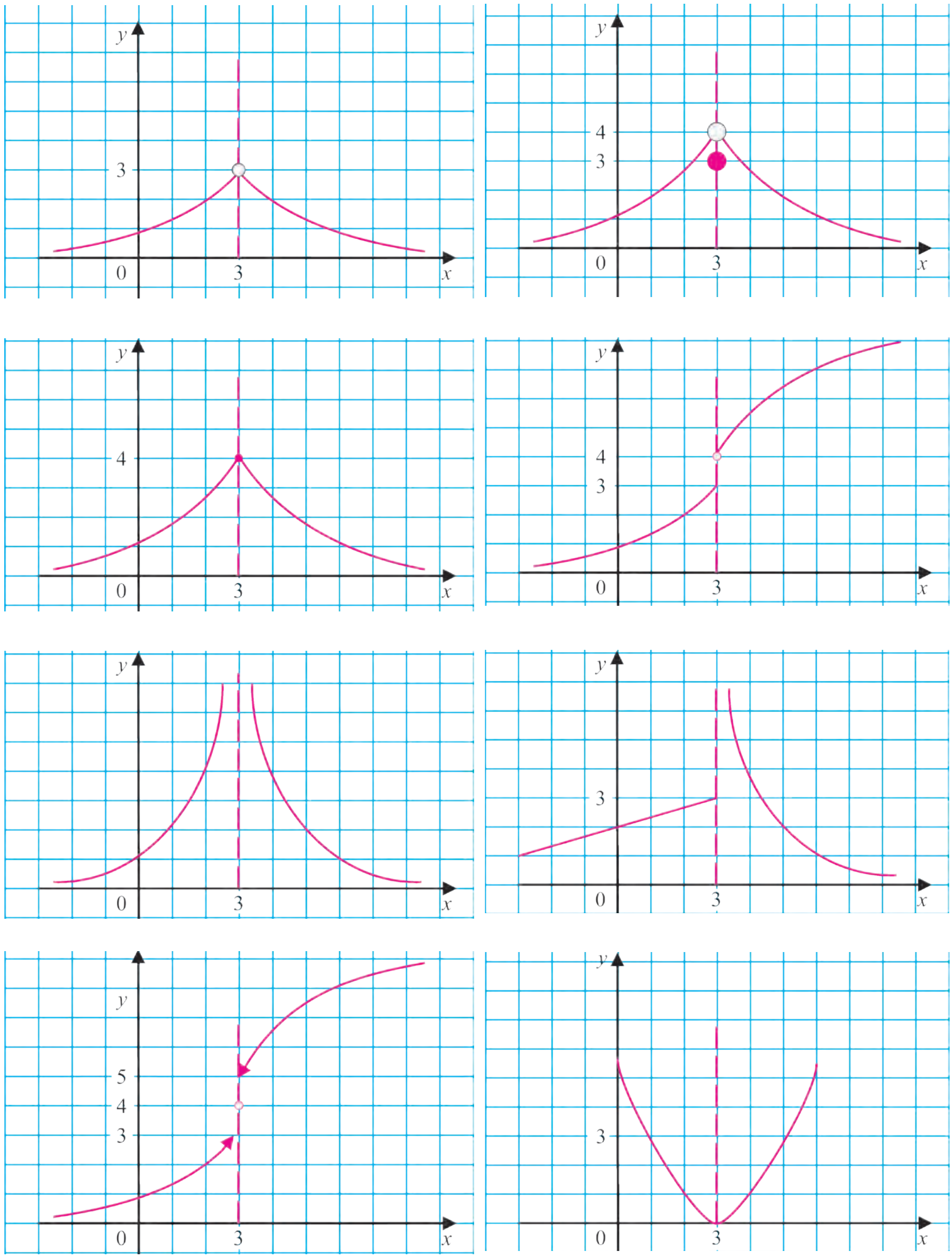
10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{h^2+5h}{h}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{x}$.

д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+6h}{h}$; е) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2-4h}{h}$; ф) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-8h}{h}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}$; х) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$; и) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$.

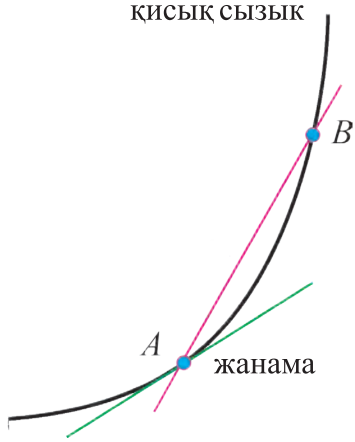
12. Төмендегі функциялардан қайсысы $x\to3$ те лимитке ие? Осы лимитті тап.



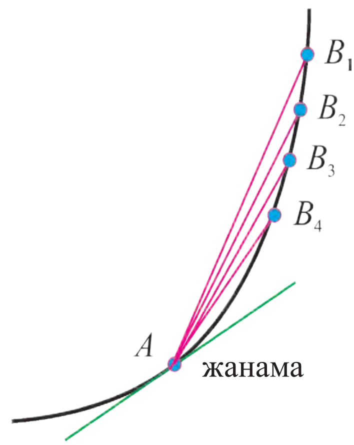
5–6

ТУЫНДЫ, ОНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

12-суретте қисық сызық, кесуші және жанама бейнеленген.



12-сурет.

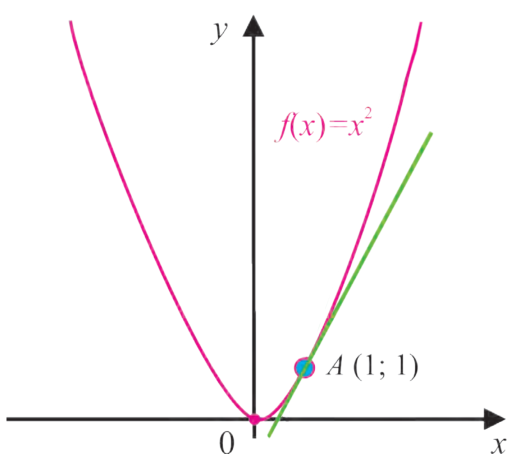


13-сурет.

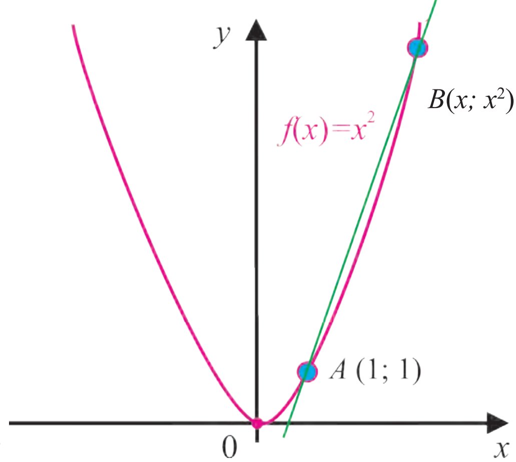
B нүкте B_1, B_2, ... жағдайларды кейтпе-кет қабылдап, A нүктеге *қисық қисық сызық бойлап жақындасса* (13-сурет), сәйкес кесінділердің қисық сызыққа A нүктеде өткізілген жанама жағдайын алуға ұмтылуын *интиутив түрінде* қабылдаймыз.

Бұл жағдайда, анық, AB туры сызықтың бұрыш коэффиценті жанаманың бұрыш коэффицентіне жақындайды.

1-мысал. $f(x) = x^2$ функциясының графигіне $A(1;\ 1)$ нүктеде жанамаланған түзу сызықтың бұрыш коэффицентіні тап. (14-сурет).



14-сурет.



15-сурет.

△ $f(x) = x^2$ функциясының графигіне тиісті мәжбүри $B(x, x^2)$ нүктені қарайық (15-сурет).

AB түзу сызықтың бұрыш коэффиценті

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ немесе $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ге тең.

B нүкте A нүктеге қисық сызық бойлап жақындағанда, x тың мәні 1 ге жақындайды, мұнда $x \neq 1$.

Демек, AB түзу сызықтың бұрыш коэффиценті жанама бұрыш коэффиценті k ге жақындайды, немесе:

$$k = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\cdot$$

Демек, $k = 2$. ▲

$y = f(x)$ функция берілген болсын. Оның графигіне тиісті болған $A(x; f(x))$ және $B(x+h; f(x+h))$ нүктелерді қарайық (16-сурет).

AB тік сызықтың бұрыш коэффиценті

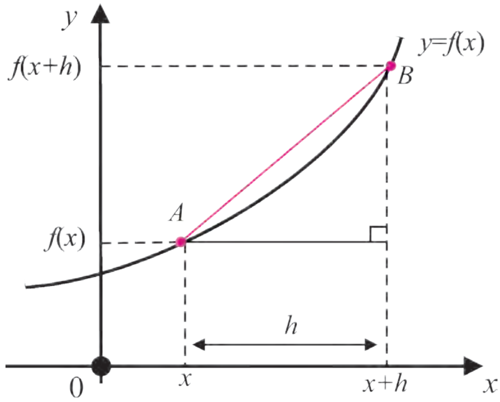
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

айырмалы қатынасқа тең.

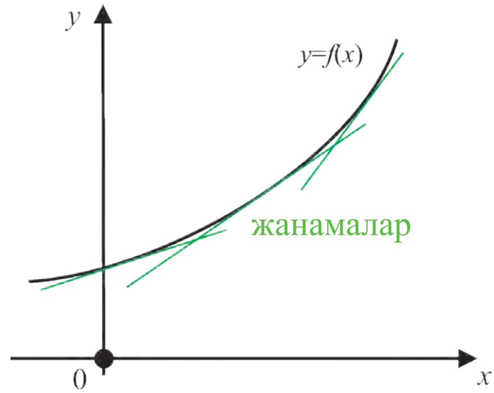
B нүкте A нүктеге қисық сызық бойлап жақындағанда $h \to 0$, немесе h арттырма жағдайда ұмтылады, AB кесуші болса функция графигіне A нүктеде өткізілген жанамаға ұмтылады

Сонымен қатар, AB түзу сызықтың бұрыш коэффиценті жанаманың бұрыш коэффицентіне жақындайды.

Басқаша айтқанда, h тың мәні 0 ге ұмтылғанда мәжбүри $(x; f(x))$ нүктеде өткізілген жанаманың бұрыш коэффиценті $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ айырмалы қатынастың лимит мәніне, немесе $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ мәніне тең болады.



16-сурет.



17-сурет.

x тың дәл осындай лимит пайда болған ерікті еркін мәніне функция графигіне $(x,\ f(x))$ нүктеде өткізілген жанаманың бұрыш коэффицентінің жалғыз мәнін сәйкес қою мүмкін (17-сурет).

Демек, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ формула жаңа функцияны сипаттайды.

Міне осы функция $y=f(x)$ функциясының **туындының шөгу функциясы** немесе жай ғана **туынды** деп аталады.

Сипаттама: $y=f(x)$ функциясының **туынды** деп төмендегі лимитке (егер ол бар болса) айтылады:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (1)$$

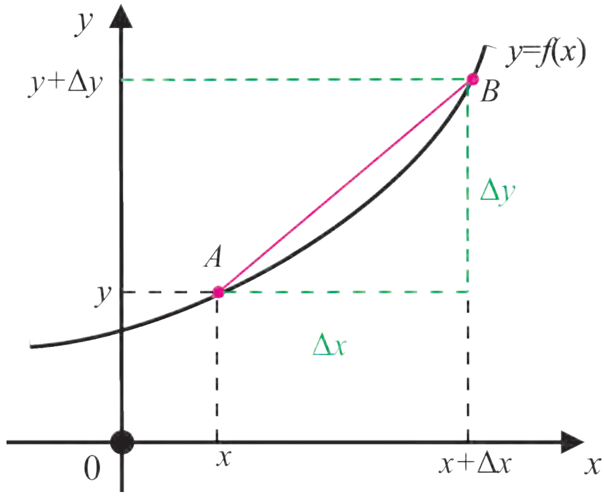
Әдетте $y=f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ сияқты белгіленеді. Туындыны табу амалы *дифференциалдау* дейміз.

$f'(x)$ белгілеудің орнына $\dfrac{dy}{dx}$ сынды белгілеу де қабылданған.

Бұл белгілеудің "бөлшек фракция" көріністе екендігін төмендегідей түсіндіру мүмкін.

Егер арттырмаларды $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ деп белгілесек,

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ тан төмендегіге ие боламыз (18-сурет): $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$.



18-сурет.

Жоғарыдағы айтылған пікірлерден мынадай қорытындыға келеміз: $y = f(x)$ функция шешімін x_0 нүктедегі мәні функция графигіне осы нүктеде өткізілген жанаманың бұрыш коэффицентіне тең. Туындының геометриялық *мағынасы осыдан тұрады*.

2-есеп. Материалдық нүкте $s=s(t)$ (s – метрлерде, t – секундтарда өлшенеді) заңға сәйкес түзу сызық бойлап әрекет жасауда. Осы заңды нүктенің уақыттың t сәтіндегі (уақытындағы) жылдамдығы $v(t)$ ны тап.

△ Белгілі, лездік жылдамдық нүктенің кіші уақыт аралығы Δt дағы орташа жылдамдығы $v(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ ға шамалас тең. Δt нолге ұмтылғанда лездік тездігі және орташа жылдамдық арасындағы айырмашылық та нолге ұмтылады. Демек, материалдық нүктенің t сәтіндегі лездік жылдамдығы

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t). \ ▲$$

Сонымен, t сәттегі лездік жылдамдық нүктенің әрекет заңы $s(t)$ функциядан алынған туындыға тең екен.

Туындының *физикалық мағынасы* осындай. Жалпы айтқанда, шешімі *функциясының өзгеру жылдамдығы.*

Жаттығулар

Туынды анықтамасынан пайдаланып, функциялардың туындысын тап:

1. $f(x)=x^2$; **2.** $f(x)=5$; **3.** $f(x)=x^3-7x+5$;

4. $f(x)=x^4$; **5.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **6.** $f(x)=\sqrt{x}$; **7.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

△ **1.** $h\neq 0$ болғаны үшін

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\,.$$

2. $h\neq 0$ болғаны үшін $f(x+h)=5$, $f(x+h)-f(x)=5-5=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0 \quad \text{Демек,}\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

3. $h\neq 0$ болғаны үшін

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5$;

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$

$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

$h\to 0$ де $3xh+h^2\to 0$ болғаны үшін

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

4. Қысқа көбейтіру формулаларына қарағанда $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Демек, $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h\to 0$ болса,

$2h^2x(3x+h)\to 0$ va $h^3(2x+h)\to 0$ болғаны үшін

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Демек, $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ болсын,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

$h\to 0$ da $x+h\to x$ болғаны үшін $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ болады.

6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$ болсын, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ айырмалы қатынасты түземіз және оны жеңілдеттіреміз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

$h\to 0$ де $\sqrt{x+h}\to\sqrt{x}$ болғаны үшін $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ болады.

7. Айырмалы қатынасты түземіз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

$h\to 0$ де $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}\to\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Демек, $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Жауап: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

Ескерту керек, x мөлшері x тан $x+h$ қа өзгергенде $y=f(x)$ мөдшер өзгеруінің **орташа жылдамдығы**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

айырмалы қатынасына тең.

Мұнан $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ өрнек $y=f(x)$ мөлшер өзгеруінің **лездік жылдамдығын** білдіреді.

Жаттығулар

13. Төмендегі функцияның туындысы неге тең?

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=x^{-1}$; с) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$; д) $f(x)=c$.

14. Кестені дәптеріңе көшір және толтыр:

а)

$f(x)$	$f'(x)$
x^1	
x^2	
x^3	
x^{-1}	
$x^{\frac{1}{2}}$	

б) Сенің ойыңша, $y=x^n$ функция туындысы неге тең (бұл жерде n – рационал сан) ?

15. Өрнекті пайдаланып, функция туындысын тап:

а) $f(x)=2x+3$; б) $f(x)=3x^2+5x+1$; с) $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Дәптеріңе көшір және толтыр:

а) $f(x)=ax+b$ үшін $f'(x)=...$;

б) $f(x)=ax^2+bx+c$ үшін $f'(x)=...$;

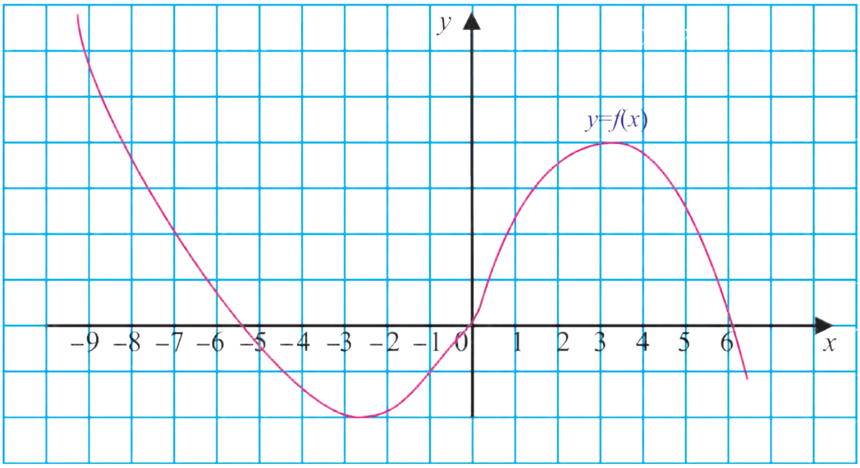
с) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ үшін $f'(x)=...$

17*. Төмендегі анықтамаларды дәлелде:

а) $f(x)=cg(x)$ болса, онда $f'(x)=cg'(x)$;

б) $f(x)=g(x)+h(x)$ болса, онда $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Функция графигіне қарап кесінділердің дәрежесін салыстыр:



а) $f'(-7)$ және $f'(-2)$; с) $f'(-9)$ және $f'(0)$;
б) $f'(-4)$ және $f'(2)$; д) $f'(-1)$ және $f'(5)$.

19. 1) Жоғарыдағы функция графигіне қарап, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын x_1, x_2 нүктелерін тап (x_1, x_2 – Ox оқтың нүктелері: –9, –8, ..., 5, 6,):

а) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) > 0$; b) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) > 0$;
c) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) < 0$; d) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) < 0$.

2) Графикке қарап осы сұрақтарға жауап беріңдер:

а) функция кайсы аралықта өсуші? Қайсы аралықта азаюшы?

б) функцияның [0; 3], [3; 6], [–9; –6] аралықтарындағы артықшылықты есепте.

3) Функция қайсы нүктеде ең үлкен, қайсы нүктеде ең кіші құнын қабылдайды?

4) Функция қайсы нүктелерде нолге айланады?

5) Қайсы аралықта функция плюс (+) құнын кабылдайды?

6) Қайсы аралықта функция минус (–) құнын кабылдайды?

7–9 ТУЫНДЫНЫ ЕСЕПТЕУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Егер $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының әр бірі туындыға ие болса, бұл жағдайда төмендегі дифференциалдық ережелері орынды:

1. Жиындының туындысы туындылар жиындысына тең:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \qquad (1)$$

2. Айырманың туындысы туындылардың айырмасына тең:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x). \qquad (2)$$

1-есеп. Функцияның туындысын тап:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

△ Туындыны табуда 1, 2-ережелерден және туындылар кестесінің 1, 3- бөлімдерінен пайдаланамыз, яғни :

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1;$

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$

Жауабы: 1) $3x^2+2x-1;$ 2) $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$ ▲

3. Өзгермейтін көбейткішті туынды белгісінен сыртқа шығару мүмкін:

$$(cf(x))'=c\cdot f'(x), \quad c - \text{өзгермейтін сан}. \qquad (3)$$

2-есеп. Функцияның туындысын тап:

1) $f(x) = 7x^3-5x^2+4$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3$.

△ Туындыны табуда 1, 2, 3-ережелерден және туындылар кестесінің 1, 3- бөлімдерінен пайдаланамыз, яғни:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x;$

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2.$

Жауабы: 1) $21x^2-10x;$; 2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2.$ ▲

4. Көбейтудің туындысы:

$$(f(x)g(x))' = f\,'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (4)$$

3- есеп. Функцияның туындысын тап:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; | 2) $f(x)=(3x^2+4x+1)(2x+6)$; | 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot(x^2-5x)$.

△ Туындыны табуда 1, 3, 4-ережелерден және туындылар кестесінің 1, 3- бөлімдерінен пайдаланамыз, яғни:

1) $f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$
$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$

2) $f\,'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$
$+(3x^2+4x+1)(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26;$

3) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\,(2x-5)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+(2x-5)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3(2x-5)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x(7x-20)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20).$$

Жауап: 1) $12x+14$;; 2) $18x^2+52x+26$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20)$. ▲

5. Бөліндінің туындысы:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{бұл жерде} \quad g(x)\neq 0. \qquad (5)$$

4- есеп. Функцияның туындысын тап:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

△ Туындыны табуда 1, 3, 5-ережелерден және туындылар кестесінің 1, 3- бөлімдерінен пайдаланамыз,яғни:

1) $f\,'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2};$

2) $f\,'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$

$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2};$$

3) $f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Жауабы: 1) $-\dfrac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\dfrac{22}{(x-5)^2}$; 3) $-\dfrac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

5- есеп. Функциялардың туындысын тап:

1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=\operatorname{tg} x$.

△ 1) Айырмалы қатнасын табуда синустар айырмасын көбейтуге келтіру формуласынан пайдаланамыз:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

$h\to 0$ де $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\dfrac{2x+h}{2}\to\cos x$ екенін дәлелдеу мүмкін.

Демек, $(\sin x)'=\cos x$.

2) Айырмалы қатнасын табуда косинустар айырмасын көбейтуге келтіру формуласынан пайдаланамыз:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

$h\to 0$ де; $\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\to\sin x$ екенін дәлелдеу мүмкін.

Демек, $(\cos x)'=-\sin x$.

3) Туындыны табудың 5-ережесі осы есептің 1-, 2-бөлімдегі жауаптарынан пайдаланып, $f(x)=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ функцияның туындысын табамыз:

$$f'(x)=(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Жауабы: 1) $(\sin x)'=\cos x$; 2) $(\cos x)' = -\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Туындыны есептеуде дифференциалдау ережелерінен және төмендегі кестеден пайдалану мақсатқа сай.

Туындылар кестесі

№	*Функциялар*	*Туындылар*
1	c – өзгермейді	0
2	$kx+b$, k, b – өзгермейтіндер	k
3	x^p, p – өзгермейді	px^{p-1}
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7	$\mathrm{ctg}x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9	e^x	e^x
10	$\ln x$	$1/x$
11	$\lg x$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln 10}$
12	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Туындыны есептеу ережелерін айт. Әрбір ережеге мысал келтір.
2. Туындылар кестесінің 4-, 5- бөлімдерін дәлелде.
3. Функцияның $x=x_0$ нүктедегі туындысы не, туынды функция деген не? Олардың қандай айырмашылығы бар? Мысалдармен түсіндіріңдер.

Жаттығулар

Туындыны тап (**20–22**):

20. 1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$.

21. 1) $y = x^4 - x^2 + x$; 2) $y = \frac{1}{x} + x$; 3) $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$;

4) $y = x^4 + x^3 + x^2 - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

22. 1) $y = (x-1)(x^2-5)$; 2) $y = \frac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y = (x^4 - \sqrt{x})(x^2 + x)$; 4) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Материялдық нүктенің берілген t_0 уақыттағы жылдамдығын есепте:

1) $s(t) = t^3 - 2t^2 + t$; $t_0 = 5$; 2) $s(t) = 5t + t^3 + \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

24. Функцияның абссиссасы берілген нүктедегі туындыны есепте:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$; 3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{2}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -2$; 4) $f(x) = x^2 + \lg 2$, $x_0 = 1$.

Туындыны тап (**25–29**):

25. 1) $y = 2x^3 - 4x^2 + 5$; 3) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$;

2) $y = 7x^2 - 2x + \sqrt{7}$; 4) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

26. 1) $y = (x-2)(x+2)$; 3) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^2 + \lg 7 + \sin\frac{\pi}{9}$.

27. 1) $y = x^8 + 7x^2 + 5x$; 2) $y = 2x^8 + x^6$;

3) $y = \frac{x^4}{x^6 - 1}$; 4) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$;

5) $y = x^{-2} + \frac{1}{x}$; 6) $y = x^4 - 4x$;

7) $y = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$; 8) $y = (x^5 + x^{-5})(x^2 + x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\mathrm{tg}x$;

4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Материялдық нүктенің берілген t_0 уақыттағы жылдамдығын тап:

1) $s(t)=t^2+5t+1$, $t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\dfrac{1}{t}+1$, $t_0=1$.

31. Функцияның берілген нүктедегі туындысын тап:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

32. Туындыны тап:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\mathrm{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Функцияның x_0 нүктедегі туындысын есепте:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-5}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x+2$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1)$, $x_0=10$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{2}\ln x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

34. Туындыны нөлге айналдыратын нүктені тап:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{x}{\ln 2}$.

10–12 КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ

Күрделі функция. $y=(x^2+3x)^4$ функцияны қараймыз. Егер біз $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ белгілеуді кіргізсек, $y=(x^2+3x)^4$ функция $y=f(g(x))$ көріністе болады. Біз $y=f(g(x))$ функцияны *күрделі функция дейміз*.

1-есеп. Егер $f(x)=x^2$ және $g(x)=\frac{x-2}{x+3}$ болса, төмендегілерді тап:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;

4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$ 6) $g(g(-1))$.

△ Берілген функциялардан пайдаланып, есептеулерді орындаймыз.

1) $f(g(x))=f\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$, осыдан $f(g(2))=f\left(\frac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\frac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\frac{16-2}{16+3}=\frac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\frac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-\frac{3}{2}-2}{-\frac{3}{2}+3}=\frac{-3,5}{1,5}=-\frac{7}{3}$.

Жауабы: 1) 0; | 2) 36; | 3) $-\frac{1}{4}$; | 4) $\frac{14}{19}$; | 5) 1; | 6) $-\frac{7}{3}$. ▲

Күрделі функцияның туындысы үшін осы формула орынды:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{1}$$

2-есеп. Функцияның туындысын тап (k, b – өзгермейтін сандар):

1) $f(x) = (kx + b)^n$; 2) $f(x) = \sin(kx + b)$;
3) $f(x) = \cos(kx + b)$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}(kx + b)$.

△ 1) $f(t) = t^n$ және $t(x) = kx + b$ функцияларға (1) формуланы қолданамыз:

$$((kx+b)^n)' = (t^n)' \cdot (kx+b)' = nt^{n-1} \cdot k = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}.$$

2) $f(t) = \sin t$ және $t(x) = kx + b$ функцияларға (1) формуланы қолданамыз:

$$(\sin(kx+b))' = (\sin t)' \cdot (kx+b)' = k \cdot \cos t = k \cdot \cos(kx + b).$$

3) $f(t) = \cos t$ және $t(x) = kx + b$ функцияларға (1) формуланы қолданамыз

$$(\cos(kx + b))' = (\cos t)' \cdot (kx+b)' = -k \cdot \sin t = -k \cdot \sin(kx + b).$$

4) $f(t) = \mathrm{tg}\, t$ және $t(x) = kx + b$ функцияларға (1) формуланы қолданамыз:

$$(\mathrm{tg}(kx + b))' = (\mathrm{tg}\, t)' \cdot (kx + b)' = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot k = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Жауап: 1) $((kx + b)^n)' = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx+b)$; 3) $(\cos(kx+b)' = -k \cdot \sin(kx+b)$; 4) $(\mathrm{tg}(kx+b)' = \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

3-есеп. $f(x) = \sin 8x \cdot e^{(3x+2)}$ функция туындысын тап.

△ Туындыны табудың 4-ережесіне де (1) формуланы пайдаланып туындыны табамыз:

$$f'(x) = (\sin 8x e^{(3x+2)})' = (\sin 8x)' e^{3x+2} + \sin 8x \cdot (e^{3x+2})' = \cos 8x e^{3x+2} \cdot (8x)' +$$
$$+ \sin 8x e^{3x+2} \cdot (3x+2)' = e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x).$$

Жауабы: $e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x)$. ▲

4-есеп. $h(x) = (x^3 + 1)^5$ функцияның $x_0 = 1$ нүктедегі туындысын тап.

△ (1) формуладан пайдаланып туындыны есептейміз:

$h'(x) = 5(x^3+1)^4(x^3+1)' = 5(x^3+1)^4 3x^2 = 15x^2(x^3+1)^4$.

Демек, $h'(1) = 15(1^3+1)^4 \cdot 1^2 = 15 \cdot 16 = 240$. *Жауабы*: 240. ▲

5-есеп. $f(x) = 2^{\cos x}$ функцияның туындысын тап.

△ (1) формуладан пайдаланып туындыны есептейміз:

$f'(x) = 2^{\cos x} \ln 2\, (\cos x)' = -\sin x\, 2^{\cos x} \ln 2$. *Жауабы*: $-\sin x\, 2^{\cos x} \ln 2$. ▲

6-есеп. $f(x) = \mathrm{tg}^5 x$ функцияның туындысын тап.

△ (1) формуладан пайдаланып тундыны есептейміз:

$f'(x) = 5\,\mathrm{tg}^4 x\,(\mathrm{tg}\,x)' = 5\mathrm{tg}^4 x\dfrac{1}{\cos^2 x}$. *Жауабы*: $\dfrac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. ▲

7-есеп. $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$ функцияның туындысын тап.

△ $f(x)=3^{\cos x}$ және $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ белгілеулерді кіргізіп, (1) формуланы –күрделі функция туындысын есептеу формуласын қолдаймыз:

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}$$

әрі $h(x)$ функцияны 2 функцияның көбейтіндісі деп қараймыз:

$$h'(x) = (3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))' = (3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x) +$$
$$+ 3^{\cos x}\cdot(\log_7(x^3+2x))' = -3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Жауабы: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Күрделі функция деп неге айтылады? Мысал келтір.
2. Күрделі функцияны анықтау саласы қалай табылады?
3. Күрделі функция туындысын табу формуласын жаза аласың ба?
4. Күрделі функция туындысын табуды 1–2 есепте көрсет.

Жаттығулар

35. Егер $f(x)=x^2-1$ болса, көрсетілген функцияларды тап:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Егер $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ болса , көрсетілген функцияларды тап:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Егер $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ болса, төмендегілерді тап:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Егер $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ болса төмендегілерді тап:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Теңдеуден пайдаланып , $f(x)$ ті тап (**39–42**):

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Туындыны тап (**43–44**):

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;

4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;

7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;

4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;

7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14 ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНЕ ӨТКІЗІЛГЕН ЖАНАМА ЖӘНЕ НОРМАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

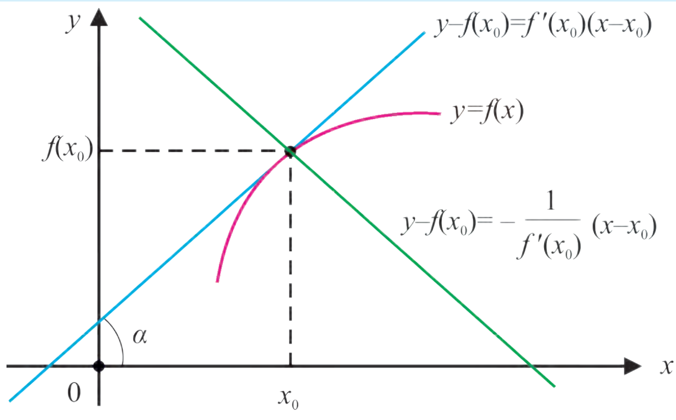
ЖАНАМА теңдеуі. $y=f(x)$ функцияға графиктің $(x_0; f(x_0))$ нүктесінен өтетін жанама теңдеуін табамыз (19-сурет). Жанама түзу сызық болғаны үшін оның жалпы көрінісі $y=kx+b$ болады. Туындының геометриялық мағанасына көре $k=\text{tg}\alpha=f'(x_0)$, немесе жанама теңдеуі $y=f'(x_0)x+b$ көріністе болады. Бұл жанама $(x_0; f(x_0))$ нүктеден өткені үшін $f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$ болады,осыдан $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Табылған b ны жанама теңдеуіне қойсақ,

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0 \text{ немесе}$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

теңдеуі пайда болады.

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ теңдеу $(x_0; f(x_0))$ нүктеде $y=f(x)$ функцияға өткізілген жанама теңдеуі болады.



19-сурет.

1-есеп. $f(x)=x^2-5x$ функция графигіне $x_0=2$ абсциссалы нүктеде өткізілген жанама теңдеуін жаз.

△ Ең алдымен функцияның және функциядан алынған туындының $x_0=2$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$f(x_0)=f(2)=2^2-5\cdot 2=-6, \quad f'(x)=2x-5, \quad f'(2)=2\cdot 2-5=-1.$$

Табылғандарды (1) теңдеуге қойып , жанама теңдеуі пайда болады.

$y-(-6)=-1\cdot(x-2)$ немесе $y=-x-4$. *Жауабы:* $y=-x-4$. ▲

2-есеп. $f(x)=x^3-2x^2$ функция графигіне $x_0=1$ абсциссалы нүктеде өткізілген жанама теңдеуін жаз.

△ Алдымен функцияның және функциядан алынған туындының $x_0=1$ нүктедегі мәнін табамыз:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot1^2=-1, \qquad f'(x)=3x^2-4x, \qquad f'(1)=3\cdot1^2-4\cdot1=-1.$$

Табылғандарын (1) теңдеуге қойсақ , жанама теңдеуі пайда болады:

$y-(-1)=-1(x-1)$ немесе $y=-x$. *Жауабы:* $y=-x$. ▲

Егер $y=f(x)$ функция графигінің x_0 абсциссалы нүктесіне өткізілген жанама $y=kx+b$ түзу сызыққа параллель болса, $f'(x_0)=k$ болады. Бұл шарт арқылы функцияның берілген түзу сызыққа параллель болған жанамасы табылады.

3-есеп. $f(x)=x^2-3x+4$ функция үшін $y=2x-1$ түзу сызыққа параллель болған жанама теңдеуін жаз.

△ Жанаманың берілген түзу сызыққа параллельдік шартына қарай , $f'(x_0)=2$ немесе $2x_0-3=2$ теңдеуі пайда болады. Бұл теңдеуде $x_0=2{,}5$ болғаны үшін жанама абсциссасы $x_0=2{,}5$ болған нүктеден өтеді. Енді орындаймыз:

$$f(x_0)=f(2{,}5)=2{,}5^2-3\cdot2{,}5+4=6{,}25-7{,}5+4=2{,}75$$

$$f'(x_0)=f(2{,}5)=2.$$

Енді жанама теңдеуін табамыз:

$$y-2{,}75=2(x-2{,}5) \text{ немесе } y=2x-2{,}25.$$

Жауабы: $y=2x-2{,}25$. ▲

4-есеп. $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ функция графигіне $x_0=4$ абсциссалы нүктеде өткізілген жанама теңдеуін құрастыр және жанама мен Ox осінің оң бағытымен түзілген бұрыштың синусын тап.

△ Алдымен функцияның және функциядан алынған туындының $x_0=4$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$f(x_0)=f(4)=3\cdot4^3-2\cdot4^2+3\cdot4-2=170, \quad f'(x)=3x^2-4x+3,$$

$$f'(4)=3\cdot4^2-4\cdot4+3=35.$$

Табылғандарды (1) теңдеуге қойып , жанама теңдеуін табамыз:

$y-170=35(x-4)$ немесе $y=35x+30$.

Туындының геометриялық мағанасына қарай $\mathrm{tg}\alpha=35$, осыдан

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{35}{\sqrt{1+35^2}}=\frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Жауабы: $y=35x+30$; $\sin\alpha=\frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

5*-есеп. $f(x)=x^2$ параболаға абсциссасы x_0 болған A нүктеде өткізілген жанама Ox осін $\frac{1}{2}x_0$ нүктеде кесіп өтеді.Осыны дәлелде.

△ $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Жанама теңдеуі (1) ге қарай $y=2x_0\cdot x-x_0^2$ болады.Оның Ox осімен қиылысу нүктесі $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ екені белгілі.Осыдан $y=x^2$ параболаға абсциссасы x_0 болған A нүктеде өткізілген жанаманы жасау әдісі келіп шығады: A нүкте және $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ нүкте арқылы өтетін түзу сызық $y=x^2$ параболаға A нүктеде жанама.

Нормал теңдеуі. $y=f(x)$ функция графигіне $x=x_0$ абсциссалы нүктеде өткізілген жанамаға $x=x_0$ нүктеде перпендикуляр болған

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

тік сызыққа $y=f(x)$ функция графигінің x_0 абсциссалы нүктесіне өткізілген нормал делінеді (19- сурет).

6-есеп. $f(x)=x^5$ функция графигіне $x_0=1$ абсциссалы нүктеге өткізілген нормал теңдеуді түз.

△ Туынды формуласынан $f'(x)=5x^4$ болады. Функция және оның туындысынынң $x_0=1$ нүктедегі мәнін есептейміз: $f(1)=1^5=1$ және $f'(1)=5\cdot1^4=5$. Бұл мәндерді нормал теңдеуіне қоямыз және $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ немесе $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ теңдеуі келіп шығады.

Жауабы: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Ескерту: $f(x)=x^5$ функция графигіне $x_0=1$ абсциссалы нүктеде өткізілен жанама теңдеуі $y=5x-4$ болады (дәлелде!). Жанама және нормалдың бұрыш коэффициентінің көбейтіндісі $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$ екеніне мән бер.

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. $y=f(x)$ функция графигіне x_0 абсциссалы нүктеде өткізілген жанама теңдеуін жаз.

2. $y=f(x)$ функция графигіне x_0 абсциссалы нүктеде өткізілген нормал теңдеуін жаз.

3. Берілген функциянынң бірер түзу сызыққа параллель болған жанамасы қалай табылады? Мысалдар арқылы түсіндір.

Жаттығулар

45. Функция графигіне абссиссасы $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$ болған нүктеде өткізілген жанама теңдеуін жаз:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$;	2) $f(x)=3x-4$;	3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$;	5) $f(x)=e^x$;	6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$;	8) $f(x)=\sin x$;	9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$;	11) $f(x)=e^x x$;	12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Функция үшін $y=7x-1$ түзу сызыққа параллель болған жанама теңдеуін жаз:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Берілген $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың жанамалары параллель болатын нүктелерді тап:

1) $f(x)=3x^2-5x+4,$ $g(x)=4x-5;$

2) $f(x)=8x+9,$ $g(x)=-5x+8;$

3) $f(x)=7x+11,$ $g(x)=7x-9;$

4) $f(x)=x^3-8,$ $g(x)=x^2+5;$

5) $f(x)=x^3+x^2,$ $g(x)=5x-7;$

6) $f(x)=x^4+11,$ $g(x)=x^3+10.$

48. Функция графигіне абсциссасы а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -2$; д) $x_0 = 0$ болған нүктеде өткізілген нормал теңдеуді тап:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-40$; 3) $f(x)=7$;

4) $f(x)=x^3-10x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=12^x$;

7) $f(x)= \sin x$; 8) $f(x)=\cos x$; 9) $f(x)=\cos x - \sin x$;

10) $f(x)=e^{\pi x}$; 11) $f(x)=x \cdot \cos x$; 12) $f(x)=x \cdot \sin x$.

Бақылау жұмыс үлгісі

I вариант

1. $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ функция үшін $x_0=2$ және $\Delta x=0,1$ болғанда функция өсуінің аргумент өсуінің шамасын тап.

2. $f(x)=-8x^2+4x+1$ функцияның $x_0=-3$ нүктесіндегі туындыны есепте.

3. $f(x)=x^3-7x^2+8x-5$ функция графигіне $x_0=-4$ абсциссалы нүктеде өткізілген жанама теңдеуін жаз.

4. Материялдық нүкте $s(t)=8t^2-5t+6$ заңдылық пен қозғалуда. Егер t – секунд, s – метрлерде өлшенетін болса, нүктенің $t_0=8$ секундтағы лездік жылдамдығын тап.

5. Көбейтіндінің туындысын тап: $(3x^2-5x+4) \cdot e^x$.

II вариант

1. Бөліндінің туындысын тап: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2. Күрделі функция туындысын тап: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3. $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ функцияның $x_0=\dfrac{1}{16}$ нүктедегі туындысын есепте.

4. $f(x)=\ln(x+1)$ функция графигіне $x=0$ нүктеде өткізілген жанама теңдігін жаз.

5. $s(t)=0,5t^2-6t+1$ заңдылығымен әрекеттенетін материалдық материалдық нүктенің $t=16$ секундтағы лездік жылдамдығын тап. (t – секундта, s – метрлерде өлшенеді).

15–17 ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУ

49. Берілген $y=f(x)$ функция, x_0 және x нүктелерге сәйкес h және Δy ті есепте:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; | 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Егер $x_0 = 3$ және $\Delta x = 0{,}03$ болса, берілген функциялар үшін: a) функция өсуі; b) функция өсуінің аргумент өсуіне қатынасын тап:

1) $f(x)=7x-5$; | 2) $f(x)=2x^2-3x$; | 3) $f(x)=x^3+2$; | 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Егер $x_0=2$ және $\Delta x=0{,}01$ болса, берілген функциялар үшін: a) функция өсуі; b) функция өсуінің аргумент өсуіне қатынасын тап:

1) $f(x)=-4x+3$; | 2) $f(x)=-8$; | 3) $f(x)=x^2+10x$; | 4) $f(x)=x^3-10$.

52. $x\to 0$ болса, функция қай санға ұмтылады:

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Функцияның туындысын тап:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;

5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;

8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Функцияның туындысын: a) $x = -3$; b) $x = 1{,}1$; c) $x = 0{,}4$; d) $x = -0{,}2$ нүктелерде есепте:

1) $y=15x$; | 2) $y=9x+3$; | 3) $y=-20$; | 4) $y=5x^2+x$;

5) $y=-8x+4$; | 6) $y=8x-x^2$; | 7) $y=x^2+25x$; | 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. $y=f(x)$ функция туындысын анықтама жәрдемінде тап:

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. $y=f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі туындысын тап:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$, $x_0=1$;
2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°$, $x_0=-1$;
3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1)$, $x_0=4$;
4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, $x_0=-3$.

57. Материялдық нүкте $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$ заңдылық пен қозғалуда (s метрде, t – секундта). Материялдық нүктенің 2-секундтағы жылдамдығын тап.

58. Функцияның туындысын тап:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;
3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot \operatorname{tg}x-\log_3 x$;
4) $y=(2x+3)^3$;
5*) $y=x\cdot \ln x\cdot (x+1)$;
6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)$;
7) $y=\frac{x+2}{\sin x}$;
8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°$;
9) $y=3^{-x}\cdot \sin x$;
10*) $y=\operatorname{tg}x\cdot \cos x+7^x\cdot x^7$;
11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$;
12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;
13) $f(x)=x^{10}-80x$;
14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}$.

59. Функция туындысының x_0 нүктедегі мәнін есепте:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x_0=0$;
2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x$, $x_0=1$;
3) $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=1$;
4) $f(x)=e^x(x-\ln 2)$, $x_0=\ln 2$.

60*. $f'(x)>0$ теңсіздікті есепте:

1) $f(x)=x\cdot \ln 27-3^x$;
2) $f(x)=\sin x-2x$;

61. Материялдық нүкте $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$ заңдылықпен қозғалуда.

Материялдық нүктенің жылдамдығы қашан нөлге тең болады? Осының мағанасы не?

62. Туындыны тап: 1) $y=x^5-x^4+x$; | 2) $y=\frac{1}{x^2}-x$; | 3) $y=x^4+\sqrt[5]{x}$.

63. Материялдық нүктенің t_0 уақыттағы жылдамдығын тап:

1) $x(t)=t^4-2t^3+t$, $t_0=-5$; | 2) $x(t)=-5t+t^2-\sqrt{t}$, $t_0=4$.

Туындыны тап (**64–66**):

64. 1) $y=(x+2)(x^2-5x)$; | 2) $y=\frac{x^2-3x}{x+8}$; | 3) $y=(x^4+\sqrt{x})(x^3-5x)$;

4) $y=2x^3+4x^2+5x$; | 5) $y=\frac{14}{x}-\frac{x}{14}$; | 6) $y=7x^2+12x+\sqrt{2019}$.

65*. 1) $y=\frac{x^8}{x^{10}-1}$; 2) $y=\frac{x^3+x+1}{x^5+7}$; 3) $y=(x^{10}+x^{-10})(x^8+x^{-8})$.

66*. 1) $y=\frac{3^x\cdot\sin x}{\cos x}$; 2) $y=e^{5x}(\cos x-\sin x)$;

3) $y=x\mathrm{ctg}x$; 4) $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Туындыны x_0 нүктеде есепте:

1) $f(x)=\frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=\mathrm{ctg}x-2x+2$, $x_0=\frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x)=x^2(\lg x-1)$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{20}\ln x$, $x_0=1$.

68*. Күрделі функцияның туындысын тап:

1) $x^2\cdot\sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\mathrm{ctg}x$;

4) $\mathrm{tg}^{35}x$; 5) $e^{\mathrm{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5-6x+4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\mathrm{tg}x$;

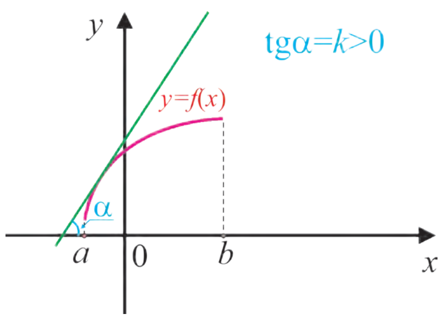
12) $\frac{x^3+7x+1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

18–21 ТУЫНДЫ ЖӘРДЕМІНДЕ ФУНКЦИЯНЫ ТЕКСЕРУ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРДІ ЖАСАУ

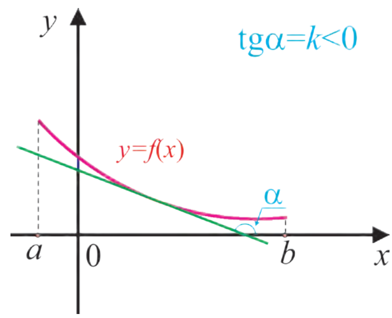
Функцияның өсуі және кемеюі. Өсетін және кемейетін функциялармен таныссың. Енді функцияның өсуі және кемейетін аралықтарын анықтау үшін туынды түсінігінен пайдаланамыз.

1-теорема. $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралықта анықталған және туындысы бар болсын. Егер $x \in (a; b)$ үшін $f'(x) > 0$ болса, $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралығында өсетін функция болады (20-сурет).

2-теорема. $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралығында анықталған туындысы бар болсын. Егер $x \in (a; b)$ үшін $f'(x) < 0$ болса, $y = f(x)$ функция $(a; b)$ аралықта кемейетін функция болады (21-сурет).



20-сурет.



21-сурет.

1, 2- теоремаларды дәлелдеусіз қабылдаймыз.

1-есеп. Функцияның өсуі және кемейетін аралықтарын тап: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

△ Бұл функция $(-\infty; +\infty)$ аралықта анықталған.Оның туындысы:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1).$$

$f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ теңсіздіктердің аралықтар әдісімен шығарып, $(-\infty; -1)$ және $(2; +\infty)$ аралықтарда функцияның өсуі әрі $(-1; 2)$ аралықта кемейетінін үйреніп алдық.

Жауабы: $(-\infty; -1)$ және $(2; +\infty)$ аралықтарда функция өседі; $(-1; 2)$ аралықта функция кемейетін болатын. ▲

2-есеп. Функцияның өсуі және кемейетін аралықтарын тап: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

△ Бұл функция $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ аралықта анықталған. Оның туындысы : $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$, яғни $1-\frac{1}{x^2}>0$ теңсіздікті аралықтар әдісімен орындап, туындының (–∞; –1) және (1; +∞) аралықтарда оң сандарды табамыз. Дәл сондай, $f'(x)<0$, яғни $1-\frac{1}{x^2}<0$ теңсіздікті аралықтар әдісімен орындап, бұл теңсіздік (–1; 0) және (0; 1) аралықтарын үйрендік.

Жауабы: Функция (–∞; –1) және (1; +∞) аралықтарда өседі;

Функция (–1; 0) және (0; 1) аралықтарда кемейеді. ▲

Функцияның стационар нүктелері. $y = f(x)$ Функция $(a;\ b)$ аралықтарда анықталған болсын.

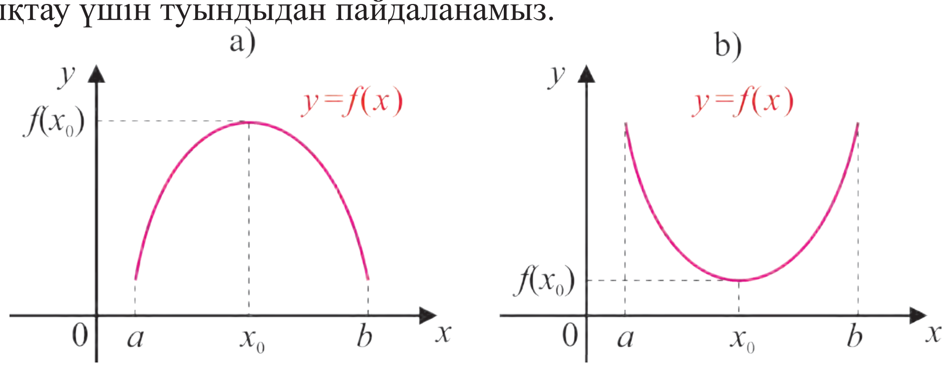
1-анықтама. $y = f(x)$ функцияның туындысы 0 ге тең болатын нүктелер *стационар нүктелер* деп аталады.

3-есеп. Функцияның стационар нүктелерін тап: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$.

△ Функцияның туындысын тап, оны нөлге теңейміз: $f'(x)=6x^2-6x-12=0$. Бұл теңдеуді шешіп функцияның стационар нүктелері $x_1=-1$, $x_2=2$ екенін табамыз.

Жауабы: функцияның стационар нүктелері $x_1=-1$, $x_2=2$. ▲

Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдары. Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдарын анықтау үшін туындыдан пайдаланамыз.



22- сурет.

3-теорема. $f(x)$ Функция $(a;\ b)$ аралықта анықталған және $f'(x)$ бар; $(a;\ x_0)$ аралықта $f'(x)>0$ және $(x_0;\ b)$ аралықта $f'(x)<0$ болсын, $x_0\in(a;\ b)$.

Ол жағдайда x_0 нүкте $f(x)$ функцияның локалдық максимумы болады (22-*а* сурет).

4-теорема. $f(x)$ функция $(a;\ b)$ аралықта анықталған және $f'(x)$ бар; $(a;x_0)$ аралықта $f'(x)<0$ және $(x_0;b)$ аралықта $f'(x)>0$ болсын, $x_0 \in (a,\ b)$.

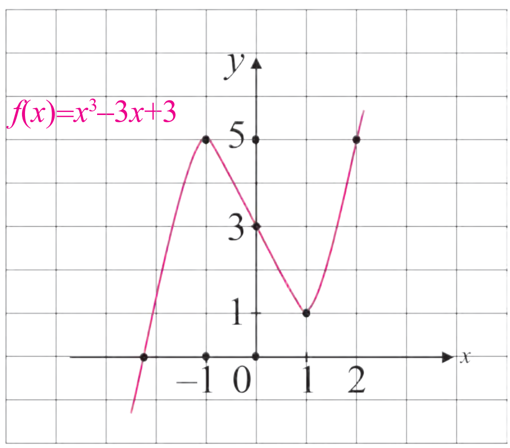
Ол жағдайда x_0 нүкте $f(x)$ функцияның локалдық минимумы болады (22-*b* сурет).

3, 4 - теоремаларды дәлелсіз қабылдаймыз.

2-анықтама. Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдары оның *экстремумдары* деп аталады.

4-есеп. Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимум нүктелерін тап: $f(x)=x^3-3x+3$.

△ Функцияның туындысын есептейміз: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ Туынды барлық нүктелерде анықталған және $x=\pm1$ нүктелерде нөлге айналады. Сол себепті $x=\pm1$ нүктелер функцияның критикалық нүктелері. Аралықтар әдісіннен пайдаланып $(-\infty;\ -1)$ және $(1;\ +\infty)$ аралықтарда $f'(x)>0$, $(-1;\ 1)$ аралықта болса $f'(x)<0$ екендігін анықтаймыз. Демек, $x=-1$ локалдық максимумы мен $x=1$ локалдық минимум нүктелері екен (23-сурет).



23-сурет.

Жауабы: $x=-1$ локалдық максимумы мен $x=1$ локалдық минимум нүкте. ▲

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері мен 10-сыныпта танысқанбыз.

$f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесіндіде анықталған және $(a;\ b)$ дағы туындысы бар. Оның ең үлкен мәнін табу ережесі мынадай:

1) функцияның бұл аралықтағы барлық стационар нүктелері табылады;

2) функкцияның стационар, шекаралық a және b нүктелердегі мәні есептеледі;

3) бұл мәндердің ең үлкен функциясының осы аралықтағы ең үлкен мәні деп аталады.

Функцияның ең кіші мәні осы сияқты табылады.

5-есеп. $f(x)= x^3 + 4{,}5x^2 - 9$ функцияның $[-4; 2]$ аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін тап.

△ Функцияның туындысын табамыз: $f'(x)=3x^2+9x$. туындыны нөлге тең теңестіріп, функцияның стационар нүктелерін табамыз:

$f'(x)=3x(x+3)=0$,

$x_1=0$ және $x_2=-3$.Функцияның табылған $x_1=0$, $x_2=-3$ әрі $a=-4$, $b=2$ нүктелердегі мәндерін табамыз:

$f(0)=0^3+4{,}5\cdot 0^2-9=-9$, $f(-3)=(3)^3+4{,}5\cdot(-3)^2-9=4{,}5$,

$f(-4)=(-4)^3+4{,}5\cdot 4^2-9=-1$, $f(2)=2^3+4{,}5\cdot 2^2-9=17$.

Демек,функцияның ең үлкен мәні 17 және ең кіші мәні –9 екен.

Жауабы: функцияның ең үлкен мәні 17 және ең кіші мәні –9 . ▲

Туынды жәрдемінде функцияны тексеру және графигін жасау. Функция графигін жасауды төмендегідей жүзеге асырамыз.

Функцияның:

1) анықтау аралығы;

2) стационар нүктелерін;

3) өсу және кемею аралықтарын;

4) локалдық максимумы мен локалдық минимумдарын әрі функцияның функцияның осы нүктелердегі мәндерін табамыз;

5) анықталған мәліметтер бойынша функцияның графигін жасаймыз.

Графикті жасауда функция графигін координата остерімен қиылысу және басқа кейбір нүктелерін табу мақсатқа сай.

6-есеп. $f(x)=x^3-3x$ функцияны туынды жәрдемінде тексер және оның графигін жаса.

1. Функция $(-\infty; +\infty)$ аралықта анықталған.

2. Стационар нүктелерді табамыз:

$f'(x)=(x^3-3x)' = 3x^2-3=0$. $x_1=1$ va $x_2=-1$ стационар нүктелер.

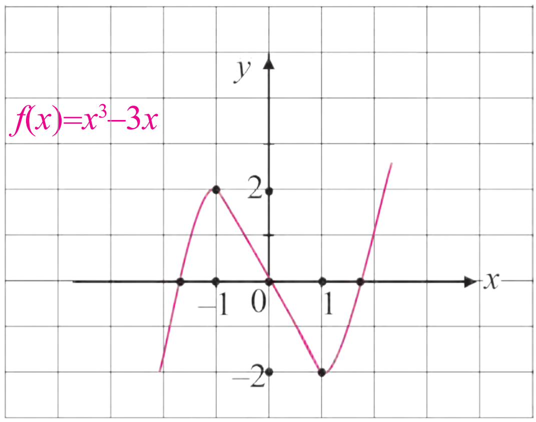
3. Функцияның өсетін және кемейетін аралықтарын табамыз:

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ аралықтарда $f'(x) > 0$ болғаны үшін $f(x)$ функция осы аралықтарда өседі және $(-1; 1)$ аралықта $f'(x) < 0$ болғаны үшін $f(x)=x^3-3x$ функция $(-1; 1)$ аралықта кемейеді.

4. $x=-1$ болғанда локал максимум $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2$ ге және $x=1$ болғанда функция локал минимум $f(1)=1^3-3\cdot 1=-2$ ге тең болады.

5.Функцияның Ox осімен қиылысу нүктелерін табамыз:

$x^3-3x=x(x^2-3)=0$.Осыдан $x=0$ немесе $x^2-3=0$ теңдеуі пайда болады. Теңдеуді шығарып $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ функция графигін Ox осімен қиылысу нүктелерін табамыз. Нәтижеде 24- суреттегі графиканы құраймыз.



24-сурет.

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Функцияның өсуі мен кемеюі қалай табылады?

2. Функцияның стационар нүктесіне анықтама бер.

3.Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдар қалай табылады?

4. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері қалай табылады?

5. Туынды жәрдемінде функцияны жасау сатыларын айт және мысал арқылы түсіндір.

6. Функцияның стационар нүктелері оның экстремум нүктелері болуы шарт па? Мысалдар келтіріңдер.

7. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ функцияны туынды жәрдемінде тексеріңдер және графикті жаса.

ЖАТТЫҒУЛАР

69. Функцияның өсу және кемею аралықтарын тап:

1) $f(x)=2-9x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$; 3) $f(x)=x^3-27x$;

4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$; 5) $f(x)=x^2-2x+4$; 6) $f(x)=x(x^2-6)$;

7) $f(x)=-x^2+2x-3$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 9) $f(x)=x^4-2x^2$;

10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$; 11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $f(x)=\sin x$;

13) $f(x)=\cos x$; 14) $f(x)=\operatorname{tg} x$; 15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Функцияның стационар нүктелерін тап:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$; 2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$; 3*) $f(x)=|x-1|$;

4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=8x^3+5x$; 6) $f(x)=3x-4$;

7*) $f(x)=|x|+1$; 8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$; 9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдарын тап:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=(x-4)^8$; 3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;

4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$; 5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$; 6) $f(x)=3\operatorname{tg} x$;

7) $f(x) = 2\sin x + 3$; 8) $f(x) = -5\cos x-7$; 9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Функцияның өсуі мен кемею аралықтарын тап:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$; 3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;

4) $f(x)=5\sin x+13$; 5) $f(x)=15\cos x-7$; 6) $f(x)=-3\operatorname{tg} x$.

73. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін тап:

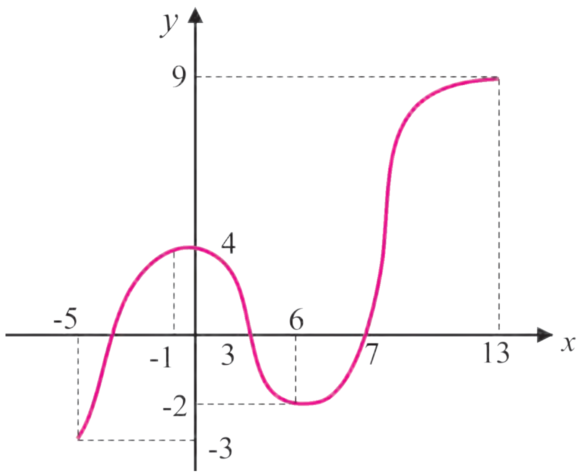
1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2;2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x\in[1;2]$; 4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$, $x\in[-1;4]$.

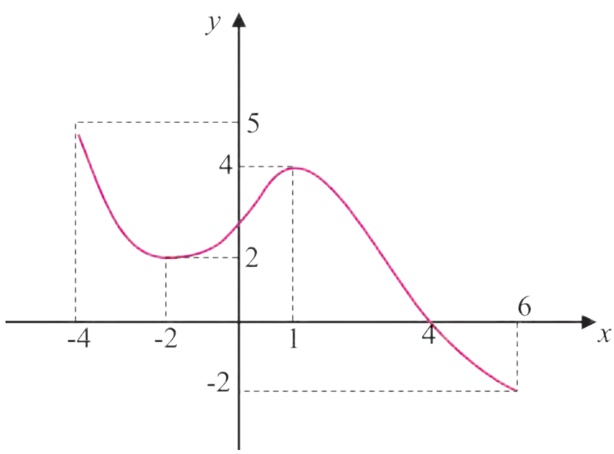
74. Функцияны тексер және графигін жаса:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2;$ 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1;$ 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15$.

75*. Функция туындысының графигіне қарап (25, 26-суреттер), төмендегілерді тап:
1) стационар нүктелерді;
2) өсу аралықтарын;
3) кемею аралықтарын;
4) локалдық максимумдарды;
5) локалдық минимумдарды.



25-сурет.



26-сурет.

Бақылау жұмыс үлгісі

I вариант

1. Туындыны тап: $f(x) = 20x^3 + 6x^2 - 7x + 3$.

2. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ va $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ болса, $f(g(3))$ ті есепте.

3. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ функция үшін төмендегілерді тап:

1) стационар нүктелерді;
2) өсу аралықтарын;
3) кемею аралықтарын;
4) локалдық максимумдарды;
5) локалдық минимумдарды.

4. Туындыны тап: $(3x + 5)^3 + \sin^2 x$.

5. $f(x) = \sqrt{1-3x}$ болса $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ ті есепте.

II вариант

1. Туындыны тап: $f(x)=10x^3+16x^2+7x-3$.

2. $f(x)=x^2+6x-3$ va $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ болса, $f(g(3))$ ті есепте.

3. $f(x)=x^3+2x^2-x+3$ функция үшін төмендегілерді тап:

1) стационар нүктелерді;
2) өсу аралықтарын;
3) кемею аралықтарын;
4) локалдық максимумдарды;
5) локалдық минимумдарды.

4. Туындыны тап: $(2x - 6)^3 + \cos^2 x$.

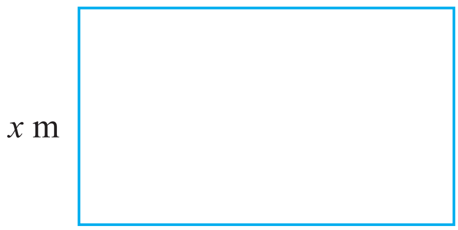
5. $f(x) = \sqrt{1-2x}$ болса, $f'\left(\frac{3}{8}\right)$ ті есепте.

22–25 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ, ФИЗИКАЛЫҚ, ЭКОНОМИКАЛЫҚ МАЗМҰНДЫ ЭКСТРЕМАЛДЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУ ӘДІСТЕРІ

Геометриялық мазмұнды есептер

1-есеп. Тік төртбұрыш пішініндегі жер майданы айналасын 100 м тормен орауда. Бұл ең көбімен неше квадрат метр жер майданын орауға жетеді?

△ Жер көлемінің ені x м және бойы y м болсын (27-сурет).



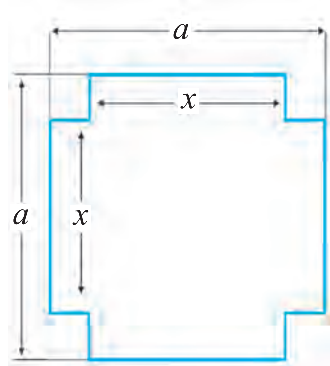
27-сурет.

Есеп шарты бойынша жер майданыны периметрі $2x+2y=100$. Осыдан $y=50-x$. Жер көлемінің ауданын $S(x)=xy=x(50-x)=50x-x^2$. Есеп $S(x)$ функцияның ең үлкен құнын табуға келтірілді. Алдымен $S(x)$ функцияның стационар нүктесін табамыз: $S'(x)=50-2x=0$, осыдан $x=25$. $(-\infty; 25)$ аралықта $S'(x)>0$ және $(25; +\infty)$ аралықта $S'(x)<0$ болғаны үшін $S(x)$ функция $x=25$ те ең үлкен мәнге тең болады және $S(25)=625$. Демек, 100 м тор жәрдемінде ең көбімен 625 m^2 жер майданын орау мүмкін.

Жауабы: 625 м^2. ▲

Жалпы алғанда, периметр берілген барлық тік төртбұрыштар ішінде ауданының ең үлкен квадраты.

2-есеп. Бүйірлері a см болған квадрат пішіндегі картоннан үсті ашық құты дайындамақшы. Осында картонның ұштарынан бірдей квадраттар кесіп алынады. Құтының көлемі ең үлкен болуы үшін оның негізгі бүйірінің ұзындығы неше сантиметр болуы керек?



28-сурет.

△ Картонның ұштарынан бірдей квадраттар қырқылады, негізі x см болған ашық құты жасалған, десек (28-сурет), қырқып алынған квадраттың бүйірі $\frac{a-x}{2}$ см болады.

Сондықтан ашық құтының көлемі $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ см^3. Демек, берілген есеп $V(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ функцияның [0; a] кесіндідегі ең үлкен мәнін табамыз. $V(x)$ функцияның стационар нүктелерін табамыз: $V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax=0$.

Бұл жерден $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ стационар нүктелер табылады. Анық білеміз, $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$ және $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$. Демек, $V(x)$ тің $[0;\,a]$ кесіндідегі ең үлкен мәні $\frac{2}{27}a^3$ болады.

Жауабы: ашық құтының негізгі бүйір ұзындығы $x=\frac{2}{3}a$ см. ▲

Физикаға мәндес мағаналы есептер

3-есеп. Материялдық нүкте $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ заңдылығымен қозғалуда ($s(t)$ м де, t s те өлшенеді).

Төмендегілерді тап:
1) ең үлкен жылдамдыққа жететін уақытты (t_0);
2) t_0 уақыттағы лездік жылдамдықты;
3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды тап.
△ Материялдық нүктенің жылдамдығын табамыз:

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{t^4}{12}+t^3\right)'=-\frac{t^3}{3}+3t^2.$$

Физикадан белгілі, жылдамдықтан алынған туынды үдеуді береді, яғни:

$$a(t)=v'(t)=-t^2+6t.$$

1) Ең үлкен жылдамдыққа ие болатын t_0 уақытты анықтау үшін $(t)=v'(t)=-t^2+6t$ функцияны максимумда тексереміз. Алдымен $a'(t)=-2t+6=0$ теңдеуді шешеміз, одан $t_0=3$. (0; 3) аралықта $a'(t)>0$ және $(3;+\infty)$ аралықта $a'(t)<0$ болғаны үшін $t=3$ те $a(t)$ ең үлкен мәнге жетеді.

2) t_0 уақыттағы лездік жылдамдықты есептейміз: $v(3) = -\frac{3^3}{3} + 3\cdot 3^2 = 18\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жол $s(t) = -\frac{t^4}{12} + t^3$ формулаға $t_0=3$ ті қойып есептейміз: $s(3) = -\frac{3^4}{12} + 3^3 = -\frac{27}{4} + 27 = \frac{81}{4} = 20,25$ m.

Жауабы: 1) 3 с; 2) $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) 20,25 м. ▲

4-есеп. Материялдық нүкте $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t + 50$ заңдылығымен қозғалған (s(t) қашықтық метрде, уақыт t секундпен өлшенеді). Төмендегілерді тап:

1) ең кіші жылдамдыққа жететін уақытты (t_0);
2) t_0 уақыттағы үдеуді;
3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды.

△ Материялдық нүктенің жылдамдығы мен үдеуін табамыз:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t + 50\right)' = t^2 - 2t + 4,$$

$$a(t) = v'(t) = \left(t^2 - 2t + 4\right)' = 2t - 2.$$

1) Ең кіші жылдамдыққа жететін t_0 уақытты анықтаймыз:

$$v'(t) = (t^2 - 2t + 4)' = 2t - 2 = 0, \text{ осыдан } t_0 = 1.$$

(0; 1) аралығында $v'(t) < 0$ және $(1; +\infty)$ аралығында $v'(t) > 0$ болғаны үшін $t_0=1$ де $v(t)$ ең кіші мәнге жетеді.

2) t_0 уақыттағы үдеуді есептейміз: $a(1) = 2\cdot 1 - 2 = 0$ m/s^2.

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t + 50$ формулаға $t_0=1$ ді қойып есептейміз, яғни $s(1) = \frac{1^3}{3} - 1^2 + 4\cdot 1 + 50 = 53\frac{1}{3}$ m.

Жауабы: 1) 1 с; 2) 0 м/с^2; 3) $53\frac{1}{3}$ m. ▲

5-есеп. Ауа шарына $t \in [0; 8]$ минут аралығында $V(t) = 2t^3 - 3t^2 + 10t + 2$ (м^3) көлемде ауа бүркуде.
Төмендегілерді тап:
1) бастапқы уақыттағы ауа көлемін;
2) $t = 8$ минуттағы ауа көлемін;

3) $t=4$ минуттағы ауа бүрку жылдамдығын;

△ 1) бастапқы уақыттағы ауа көлемін табу үшін $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ m^3 формулаға $t=0$ қойылады, яғни $V(0)=2$ m^3.

2) $t=8$ минут уақыттағы ауа көлемін табу үшін $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ m^3 формулаға $t=8$ қоямыз:

$$V(8)=2\cdot8^3-3\cdot8^2+10\cdot8+2=1024-192+80+2=914 \text{ м}^3;$$

3) ауа пүркеу жылдамдығын табамыз:

$$v'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min.}}\right).$$

Демек, $v'(4)=6\cdot4^2-6\cdot4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right)$.

Демек, $a(3)=12\cdot3-6=30\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}^2}\right)$.

Жауабы: 1) 2 м^3; 2) 914 м^3; 3) $82\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ▲

Экономикалық мазмұнды есептер

6-есеп. Карима көйлек тігу үшін тапсырыс алды. Бір айда x көйлек тіксе, $p(x)=-x^2+100x$ мың сум пайда алады.

Төмендегілерді тап:

1) өте үлкен пайда табу үшін неше көйлек тігу керек?

2) өте үлкен пайда қанша болады?

△ 1) $p(x)=-x^2+100x$ функцияны максимумға тексереміз:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, осыдан $x_0=50$. $(0;\ 50)$ кесіндіде $p'(x)>0$ және $(50;\ +\infty)$ аралығында $p'(x)<0$ болғаны үшін $x_0=50$ болғанда функция ең үлкен мөлшерге ие болады. Демек ,ең үлкен пайда алу үшін 50 көйлек тігу керек екен.

2) Өте үлкен пайда екенін табу үшін $p(x)=-x^2+100x$ өрнекке $x_0=50$-ді қоямыз:

$$p(50)=-50^2+100\cdot50=-2500+5000=2500(\text{мың сум})=2500000 \text{ сум.}$$

Жауабы: 1) 50 көйлек; 2) 2 500 000 сум. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

Туындыны қолданып шешілетін:

1) геометриялық; 2) физикалық; 3) экономикалық мазмұнды есептерге мысал келтір.

ЖАТТЫҒУЛАР

76. Тіктөртбұрыш пішініндегі жер майданының айналасын орамақшы. 300 м тор жәрдемінде ең көбі болып неше квадрат метр жер майданыны орау керек?

77. Тік төртбұрыш пішініндегі жер майданының айналасын орай қажет. 480 м тор жәрдемінде ең көбімен неше квадрат метр жер майданыны орауға болады?

78*. Бүйірі 120 см болған квадрат пішініндегі картоннан үсті ашық құты даярланды. Мұнда картонның ұштарынан бірдей квадраттар кесіп алынды. Құтының көлемі ең үлкен болуы үшін кесіп алынған квадраттың бүйірі неше сантиметр болу керек?

79*. Консерва банкасы цилиндр пішінінде болып, оның толық сырты ті $216\,\pi$ см^2 ге тең. Банкаға ең көп су сияқты (кетуі) үшін банка негізінің радиусы және биіктігі қандай болу керек?

80. Тіктөртбұрыш пішініндегі майданының ауданы 6400 м^2. Майданның бүйірлері қандай болғанда оны орау үшін ең аз тор керек болады.

81*. Радиусы 5 м болған шарға ең кіші көлемді конус сырты сызылған. Конустың биіктігін тап.

82*. Металлдан сыйымдылығы 13,5 *л*, негізі квадраттан болған түзу бұрышты параллелепипед жасалуда. Ыдыстың өлшеулері қандай болғанда оны жасау үшін ең кем металл кетеді?

83. Материялық нүкте $s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t^3$ зандылықпен қозғалуда

($s(t)$ метрде, уақыт t секундта өлшенеді).

Төмендегілерді тап:

1) ең үлкен удеуге жететін t_0 уақытты;

2) t_0 уақыттағы лездік жылдамдықты;

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды.

84. Материялдық нүкте $s(t)=-\frac{t^4}{2}+12t^3$ зандылықпен қозғалуда ($s(t)$ метрде, уақыт t секундта өлшенеді).

1) ең үлкен удеуге жететін t_0 уақытты;

2) t_0 уақыттағы лездік жылдамдықты;

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды тап.

85. Материялдық нүкте $s(t)=\dfrac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$ заңдылықпен қозғалуда

($s(t)$ метрде, уақыт t секундта өлшенеді).

1) ең кіші жылдамдыққа жететін t_0 уақытты;

2) t_0 уақыттағы үдеуді;

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды тап..

86. Материялдық нүкте $s(t)=\dfrac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$ заңдылықпен қозғалуда ($s(t)$ метрде, уақыт t секундта өлшенеді).

Төмендегілерді тап:

1) ең кіші жылдамдыққа жететін t_0 уақытты;

2) t_0 уақыттағы үдеуді;

3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды

87. Ауа шарына $t\in[0;\ 10]$ минут аралығында $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (м^3) ауа бүркуде

1) бастапқы уақыттағы ауа көлемін;

2) $t=10$ минуттағы ауа көлемін;

3) $t=5$ минуттағы ауа бүрку жылдамдығын;

88. Ауа шарына $t\in[0;\ 15]$ минут аралығында $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (м^3) ауа бүркуде.

1) бастапқы уақыттағы ауа көлемін;

2) $t=15$ минуттағы ауа көлемін;

3) $t=10$ минуттағы ауа бүрку жылдамдығын тап;

89. Муслима шалбар тігу үшін тапсырыс алды. Ол бір айда x шалбар тіксе, $p(x)=-2x^2+120x$ мың сум пайда алады.

Төмендегіледі тап:

1) ең үлкен пайда табу үшін неше шалбар тігу керек?

2) ең үлкен пайда қанша болады?

90. Мухлиса юбка тігу үшін тапсырыс алды. Бір айда x юбка тігетін болса, $p(x)=-3x^2+96x$ (мың сум) пайда алады.

Төмендегілерді тап:

1) ең үлкен пайда табу үшін неше юбка тігу керек?

ең үлкен пайда қанша болады?

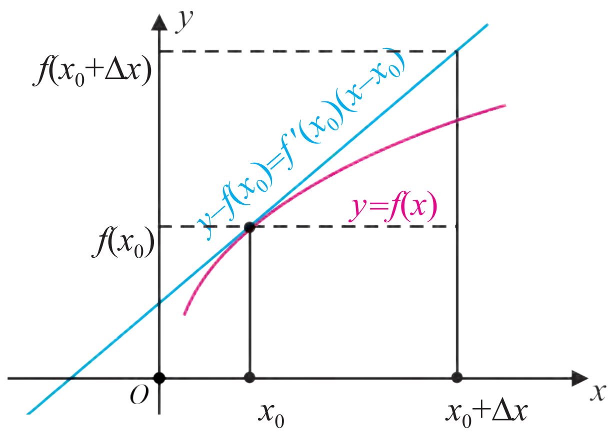
2. ең үлкен пайда қанша болады?

ЖУЫҚ-МӘНДЕС ЕСЕПТЕУЛЕР

$y=f(x)$ функция x_0 нүктеде шекті $f'(x_0)$ туындыға ие болсын.

x_0 абсциссалы нүктеде $y=f(x)$ функция графигіне өткізілген жанама теңдеуі $y–f(x_0)=f'(x_0$ сияқты жазылуын білеміз.

x_0 нүкте жанында $y=f(x)$ функция графигін жанаманың сәйкес кесіндісімен алмастырса болады (29-суретке қара):



29-сурет.

$x-x_0$ өсуі Δx деп белгілесек (яғни $x=x_0+\Delta x$ деп алсақ төмендегі тақырыпты қатынасқа ие боламыз:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ немесе}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

(1) жуықтау формула *кіші өсуші формуласы* деп аталады.

Пікір. x_0 нүкте есебінде $f(x_0), f'(x_0)$ мәндері оңай есептелетін нүктені таңдап алу ұсынылады. Осымен бірге x нүкте x_0 ке қанша жақын болса, осындай алмастыру анық болуы керек.

Енді біз кіші өсушілер формуласына таянған жағдайда жуықтап есептеулерді орындаймыз.

1-есеп. $f(x)=x^7–2x^6+3x^2–x+3$ функцияның $x=2{,}02$ нүктесіндегі мәнін жуықтап есепте.

△ $x = 2{,}02$ нүктеге жақын болған $x_0 = 2$ нүктені алсақ, бұл нүктеде $f(x)$ функция мәні оңай табылады: $f(x_0) = f(2) = 13$.

Бұл функцияның туындысын табамыз: $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$.

Ол жағдайда $f'(x_0) = f'(2) = 75$, $\Delta x = x - x_0 = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$ болады.

Демек, (1) формуладан $f(2{,}02) = f(2 + 0{,}02) \approx 13 + 75 \cdot 0{,}02 = 14{,}5$.
Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде $f(2{,}02) \approx 14{,}57995$ мәнін табуымыз мүмкін. ▲

2-есеп. $\sqrt{1{,}02}$ түбірдің мәнін жуықтап есепте.

△ $f(x) = \sqrt{x}$ функцияны көреміз.Оның туындысын табамыз:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$x_0 = 1$ деп алсақ, $f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1$,

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \quad \Delta x = x - x_0 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02 \text{ болады.}$$

Демек, (1) формуладан

$$\sqrt{1{,}02} = \sqrt{1 + 0{,}02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 1{,}01.$$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}0099504938...$ мәні пайда болуы мүмкін ▲

3есеп. $\sqrt[3]{7.997}$ нің мәнін жуық есепте.

△ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функцияны қараймыз. Оның туындысын есепте:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$x_0 = 8$ деп алсақ, $f(x_0) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$,

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12},$$

$\Delta x = 7{,}997 - 8 = -0{,}003$ болады.

Демек, (1) формуладан

$$\sqrt[3]{7{,}997} = \sqrt[3]{8 + (-0{,}003)} \approx 2 - \frac{0{,}003}{12} = 1{,}9997.$$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде

$\sqrt[3]{7.997} \approx 1,9997499687...$ мәні пайда болуы мүмкін. ▲

4-есеп. $\sin 29°$ тың мәнін тақырыпты есепте.

△ $f(x) = \sin x$ функцияны қараймыз. Оның туындысын табамыз: $f'(x) = \cos x$.

$x_0 = \frac{\pi}{6}$ деп алсақ, $f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}$ болады.

Демек , (1) формуладан

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0,484... .$$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде

$\sin 29^{\circ} \approx 0,4848096202...$ мәні пайда болуы мүмкін. . ▲

5-есеп. Логарифмдерді есептеу үшін кіші өсу формуласын келтіреміз.

△ $f(x)=\ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$. (1) бойынша,

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x \text{ —}$$

кіші өсу формуласы пайда болады.

Егер $x_0 = 1$ және $\Delta x = t$ болса, $\ln(1+t) \approx t$ болады.
Осыдан, мәселен, ln1, 3907= ln(1+0,3907) ≈ 0,3907 мәнін аламыз.

Егер $x_0 = 0$, яғни $\Delta x = x - x_0 = x$ болса, (1) кіші өсу формуласы

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (2)$$

көрінісінде болады. ▲

S Сыныпта орындалатын тапсырма .

(2) формула негізінде, x барынша кіші болғанда

$\sin x \approx x$, $\mathrm{tg}\, x \approx x$, $e^x \approx 1+x$, $(1+x)^m \approx 1+mx$, негізінен, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$ жуық формулалары пайда болады.

6-есеп. $\dfrac{1}{0,997^{30}}$ өрнекті жуық-мәндес түрде есепте.

△ $(1+x)^m \approx 1+mx$ формуласынан пайдаланамыз:

$$\frac{1}{0,997^{30}} = (1-0,003)^{-30} \approx 1+(-30)(-0,003)=1+0,09=1,09.$$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде $\dfrac{1}{0,997^{30}} \approx 1,0943223033...$ мәні пайда болуы мүмкін ▲

$(1+x)^m \approx 1+mx$ жуық-мәндес формуласынан пайдаланып түбірлерді тезірек есептеу әдістерін ұсыну мүмкін.

Шынында, n – натурал сан болып, $|B|$ саны $|A^n|$ ға қарағанда шағын болсын.

Ол жағдайда

$$\sqrt[n]{A^n+B} = A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right) \text{ немесе}$$

$$\sqrt[n]{A^n+B} \approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Мысалы, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\dfrac{6}{3\cdot 5^2}=5,08.$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде $\sqrt[3]{125}=5,0788...$ мәні пайда болуы мүмкін.

(2) формула негізінде, x барынша шағын болғанда cos$x$-тің мәнін жуық-мәндесте есептесек. $(\cos x)'=-\sin x$ болғаны үшін $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$ формула $\cos x \approx \cos 0-(\sin 0)x=1$, яғни $\cos x \approx 1$ көрінісінде болады. Анық белгілі, осындай “жуық-мәндес” формула бізді қанағаттандырмайды Соның үшін, басқа жолмен орындаймыз. Негізгі тригонометриялық теңдестік $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ теңсіздік пайда болады.

Жоғарыда айтқанымыздай, x барынша кіші болғанда $\sin x \approx x$ болады. Демек, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \approx \sqrt{1-x^2}$.

Белгілі, x барынша кіші болғанда x^2 да кіші болады .

Демек, $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ формуладан $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$ формула келіп шығады , яғни $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ формула орынды болады.

7-есеп. cos44° ті тақырыпты есепте.

△ $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ болғаны үшін

$$\cos 44° = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}). \quad \cos\frac{\pi}{180} \approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{180})^2 = 0,9998476...,$$

$$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0,0174532....$$

Демек, $\cos 44° \approx 0,7193403....$

Калькулятор немесе басқа есептеу құралы жәрдемінде $\cos 44° \approx 0,7193339...$ мәні пайда болуы мүмкін..

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Шағын өсулер формуласын жаз.
2. Шағын өсулер формуласының енгізілуіне тиісті мысалдар келтір.

Жаттығулар

91. $f(x)$ функцияның x_1 және x_2 нүктелердегі мәндес тақырыпты есепте:

a) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2,016$, $x_2=0,97$;

b) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1,995$, $x_2=0,96$;

d) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3,02$, $x_2=0,92$;

e) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5,04$, $x_2=1,98$.

$(1+x)^m \approx 1+mx$ тақырыпты формуладан пайдаланып, санды өрнек мәнін есепте **(92–93)**:

92. а) $1,002^{100}$; | б) $0,995^6$; | д) $1,03^{200}$; | е) $0,998^{20}$.

93. а) $\sqrt{1,004}$; | б) $\sqrt{25,012}$; | д) $\sqrt{0,997}$; | е) $\sqrt{4,0016}$.

Жуық-мәндес формулаларынан пайдаланып, есепте (**94 – 97**):

94. a) tg 44°; b) cos 61°; d) sin 31°; e) ctg 47°.

95. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-0,02\right)$;

с) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-0,05\right)$.

96. a) $\frac{1}{1,003^{20}}$; b) $\frac{1}{0,996^{40}}$; d) $\frac{1}{2,0016^{3}}$; e) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

97. a) ln0,9; б) $e^{0,015}$; д) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

$y=f(x)$ тің көрсетілген нүктедегі жуық-мәндесті есепте.

(**98 – 106**):

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$, $x=1,021$.

101. $y=x^4$, $x=0,998$.

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 ТУЫНДЫ ЖӘРДЕМІНДЕ МОДЕЛЬДЕСТІРУ

10-сыныпта (**79 – 81** тақырып) бактериялар санының көбею процесін үйрендік. Енді бұл туындыға басқаша караймыз.

1-есеп. Әрбір бактерия белгілі (бірнеше сағат немесе минуттан) соң екіге бөлінеді және бактерилар саны екі есе артады. Келесі уақыттан соң осы екі бактерия да екіге бөлінеді және популяция мөлшері (бактериялардың жалы саны) және екі есе артады... Бұл көбею процесі қолайлы (популяция үшін керекті ресурстар, орын, корек, су, энергия және басқалар жеткілікті болған) жағдайларда жалғаса береді, десек.

Бактерияның ***көбею жылдамдығы*** бактериялар жалпы санына пропорционал деп ойлайық.

Бактериялар популяциясының саны еркін t уақытта қарағанда қандай өзгереді?

△ $b(t)$ деп t уақыт аралығындағы бактериялар популяциясының жалпы санын белгілейміз.

Туындының мағанасына қарай, бактериялардың көбею жылдамдығы $b'(t)$ ға тең.

Ойымызша еркін t уақытта $b'(t)$ мөлшері $b(t)$ мөлшеріне пропорционал, яғни

$$b'(t)=kb(t) \tag{1}$$

қатынасы орынды. Бұл жерде k – пропорционалдық коэффициенті.

$b_0 = b(0)$ – бастапқы $t = 0$ уақыттағы популяция саны болсын.

Белгілі , $b(t)=b_0e^{kt}$ функция (1) ді қанағаттандырады.

Шынында , $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Алғаш 10 м бактерия болса (b_0=10 млн), осындай бактериялар саны бір сағаттан соң $b(1)=10e^k=20$ (млн) ға тең болады, яғни $e^k=2$. Мұнда $k=\ln 2$ ие боламыз.

t уақыт аралығындағы бактериялар популяциясының санын табамыз:

$$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^t \text{ (mln)}.$$

Бұл нәтиже 10-сыныпта алынған нәтижемен бетпе-бет түседі. ▲

Тарихи мәліметтер. 18 ғасырда ағылшын ғалымы Томас Малтус жоғарыдағы пікірлерге ұқсас пікір жүргізіп, жер жүзіндегі халық санының өсуі үшін

$$N'(t)=kN(t) \tag{2}$$

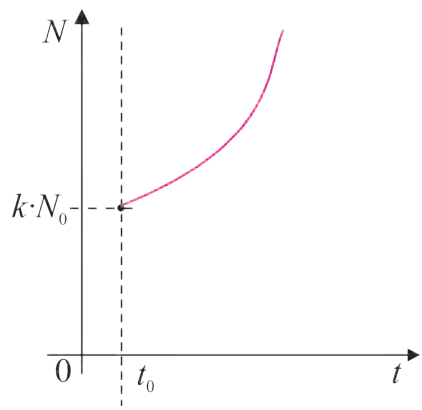
қатынасы пайда болды, бұл жерде $N(t)$ –уақыттың t моменттегі халық саны.

$N_0=N(t_0)$ – бастапқы 0 t_0 уақыттағы халық саны болсын.

Бұл жағдайда $N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ функция (2) теңдеуді қанағаттандырады.

Шынында, $N'(t)=\ N_0(e^{k(t-t0)})'=kN_0e^{k(t-t0)}=kN(t)$.

$N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ заңдылық халқтың ***экспоненциалдық өсуін,*** яғни қатаң, тоқтаусыз процестің өрнектелуін есепке алып, Томас Малтус уақыт өтуімен адамзатқа қорек ресурстары жетіспейтін алдын ала айтып өткен (30-суретке қара).



30-сурет.

2-есеп. Экология жанды организмдердің сыртқы мұхитпен өзара қатынасын үйренеді. Көбею немесе түрлі себептер бойынша жоғалып кетуімен байланысты болған популяциялар санының өзгеру жылдамдығы уақытқа қандай байланысты екенін үйрен.

△ $N(t)$ – уақыттың t мезетіндегі популяция саны болсын, ол жағдайда егер уақыттың бір өлшеуінде популяцияда туылатын жәндіктер санын A, жоғалып кеткендерінің санын B десек, жеткілікті негізімен айту мүмкін, N ді уақытқа қарағанда өзгеру жылдамдығының

$$N'(t)=A-B \tag{3}$$

қатынасы қанағаттандырады

Зерттеушілер A және B-ның N-ге байланысы төмендегідей өрнектейді.

а) Ең қарапайым жағдай: $A = aN(t)$, $B = bN(t)$. Бұл жерде a және b – уақыттың бірлігінде туылу және жойылып кететін коэффициенттері

Бұл жағдайда (3) қарым-қатынасты

$$N'(t) = (a-b)N(t) \tag{4}$$

көрінісінде жазу мүмкін.

$N_0 = N(t_0)$ – бастапқы t_0 уақыттағы популяция саны болсын.

Бұл жағдайда $N(t) = N_0 e^{(a-b)(t-t0)}$ функция (4)ті қанағаттандырады (тексер).

b) $A = aN(t)$, $B = bN^2(t)$ жағдайда да кездеседі.

Мұнда

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t) \tag{5}$$

қатынас пайда болады.

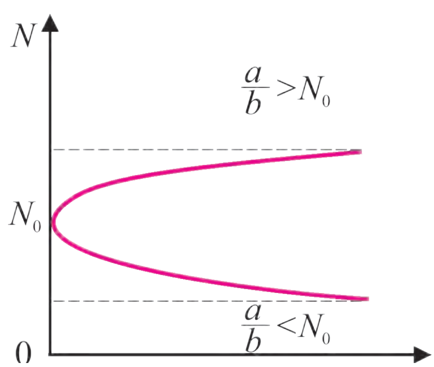
Тексеру мүмкін, $N(t) = \dfrac{N_0 a/b}{N_0 + [a/b - N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ функция (5) теңдеуді қанағаттандырады ▲

(4) қарым-қатынасты 1845 жылы белгиялық демограф-ғалым Ферхюлст популяциядағы ішкі күресті есепке алған жағдайда жаратты. Бұл нәтиже Малтустің (2) қарым-қатынасына қарағанда популяцияның дамуын анық сипаттайды.

Популяцияның өсу - кемеюі a және b сандарға калай байланыста болады, деген сұрақ туылуы мүмкін.

31-суретте $\dfrac{a}{b} > N_0$ және $\dfrac{a}{b} < N_0$ жағдайлар үшін $N(t) = \dfrac{N_0 a/b}{N_0 + [a/b - N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ көрінісіндегі

функция графиктері бейнеленген:



31-сурет.

Көрініп тұрғандай, уақыт өтуімен популяция саны $\frac{a}{b}$ санына жақын екен. Аталмыш жағдай *қанықтыру* деп аталған оқиғаны білдіреді.

Сызуда бейнеленген қисық сызық Малтус жағынан *логистикалық қисық сызық* деп аталып, ол адам тұрмысының түрлі салаларында ұшырайды.

Функцияның туындысын осы функциямен байланысты $y'(x)=F(x;y)$ көрінісіндегі қатынас *дифференциалдық теңдеу* делінеді.

Жоғарыда келтірілген (1) – (5) қатынастар дифференциалдық теңдеулерге мысалдар.

Дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын әр қандай функция оның шешімі дейіледі. Жоғары математиканың нақты шарттарда $y'(x)=F(x,\ y)$ көрінісіндегі дифференциалдық теңдеудің $y(x_0)=y_0$ бастапқы шартыны қанағаттандыратын жеке $y(x)$ шешімі бар екені дәлелденген.

3-есеп. Уақыттың t кезеңінде сатылып жатқан өнім жайында қабарланған тұтынушы саны $x(t)$ уақытқа байланысты екенін үйреніңдер.

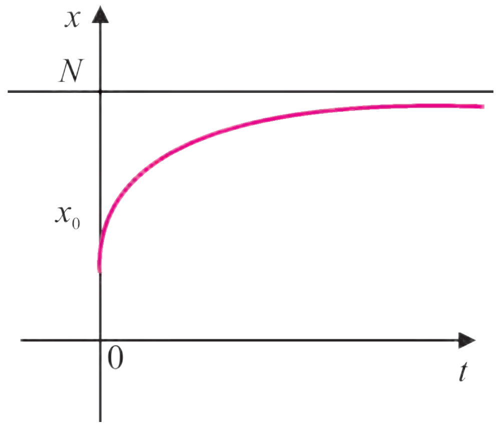
△ Барлық тұтынушылар саны N деп белгілесек, сатылып жатқан өнімнен хабарсыздар саны $N-x(t)$ болады.

Өнім туралы хабарланған тұтынушылар санының өсу жылдамдығы $x(t)$ ға және $N–x(t)$ ға пропорционал деп есептесек, төмендегі дифференциалдық теңдеуге ие боламыз:

$x'(t)=kx(t)(N–x(t))$, бұл жерде $k > 0$ – пропорционалдық коэффиценті.

Бұл теңдеудің шешімі $x(t)=\dfrac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ болса, онда $P=\dfrac{1}{e^{NC}}$, C – өзгермейтін сан.

Анық, қандай болған жағдайда да t уақыт мерзімі өткенімен Pe^{-Nkt} аз болып барады және осыдан $x(t)=\dfrac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ өрнектің мәні N ге жақын болады (32-суретке қара). ▲



32-сурет.

4-есеп. Массасы m, жылу сыйымдылығы c өзгермейтін болған дене бастапқы кезде T_0 температураға ие болсын. Ауа температурасы тұрақты және τ $(T > \tau)$ ге тең. Дененің шексіз шағын уақыт ішінде берілген жылуы дене және ауа температуралары арасындағы айырмашылыққа, сондай-ақ, уақытқа пропорционал екенін есепке алған жағдайда, дененің суыту заңын тап

△ Суыту уақытында дене температурасы T_0 ден τ дейін кемейеді. Уақыттың t мезетінде дене температурасы $T(t)$-ға тең болсын. Шексіз шағын уақыт аралығында дене берген жылу мөлшері, жоғарыда айтылғандай

$$Q'(t) = -k(T-\tau)$$

тең, бұл жерде k *–пропорционалдық коэффициенті* .

Екінші жағынан, физикадан белгілі, дене T температурадан τ температураға дейін суығанда берілетін жылу мөлшері

$Q = mc(T(t) - \tau)$ тең. Туындыны есептейміз:

$$Q'(t) = mcT'(t). \qquad (6)$$

$Q'(t)$ үшін табылған әр екі өрнекті салыстырып, $mcT'(t) = -k(T-\tau)$ дифференциалдық теңдеуді пайда болады.

$$T(t) = \tau + Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

функция (6) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады (өзің тексер!), бұл жерде C – еркін тұрақты сан.

Бастапқы шарт ($t = 0$ да $T = T_0$) C-ны табуда жәрдем береді:

$$C = T_0 - \tau.$$

Соның үшін дененің суу заңы төмендегі көріністе жазылады :

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Жауабы: $T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

5-есеп. Тандырдан алынған (үзілген) нанның температурасы 20 минут ішінде 100° тан 60°-қа кеміді. Сыртқы орта температурасы 25°. Нанның температурасы қанша уақытта 30°-қа төмендейді ?

△ Жоғарыда мәселенің шешімінен пайдаланып, нанның суықтау заңын төмендегі көріністе жазамыз :

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}} = 25 + (100 - 25)e^{at} = 25 + 75e^{at},$$

бұл жерде a – белгісіз коэффициент.

a ны табу үшін $t = 20$ да $T(20) = 60$ теңдіктен пайдаланамыз :

$$T(20) = 25 + 75e^{20a} = 60,$$

$$75e^{20a} = 35, \quad (e^a)^{20} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}, \quad e^a = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Демек, нанның сууы $T = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ заңдылығына мойынсұнады.

Нанның температурасы 30°-қа төмендеу уақытын табамыз :

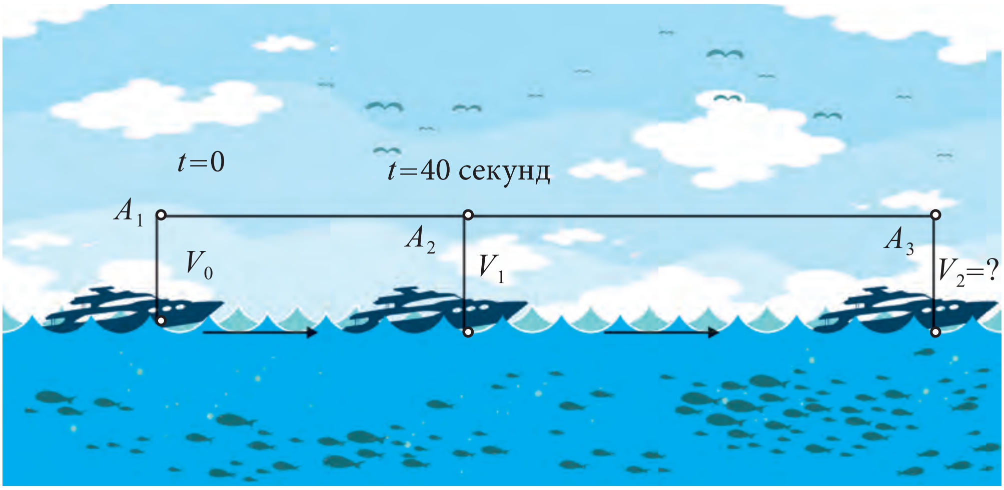
$$30 = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}, \quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15},$$

$$\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{t}{20}(\ln(7) - \ln(15))$$

болғаны үшін $t^* = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \dfrac{-20 \cdot 2,7081}{-0,762} \approx 71.$

Жауабы: 1 сағат 11 минутта нанның температурасы 30° қа төмендейді. ▲

6-есеп. Маторлы қайық тұрғын суда 20 км/сағат жылдамдықпен қозғалуда. Белгілі уақыттан кейін матор жұмыстан шықты. Матор тоқтағаннан кейін 40 секунд уақыт өткенше қайықтың жылдамдығы 8 км/сағат болды. Судың кедергісі жылдамдыққа пропорционал болса, матор тоқтағаннан кейін 2 минут өткендегі қайық жылдамдығын тап .



33-сурет.

△ Қайыққа $F = -kv$ күш әсер етуде . Ньютон заңы бойынша $F = mv'(t)$ Осыдан $mv'(t) = -kv$.

Бұл теңдеуді $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ көрінісіндегі функцияны қанағаттандырады .

$t = 0$ де $v = 20$ шартынан $C = 20$ келіп шығады.

Осыдан $v(t) = 20e^{-\frac{r}{m}t}$. $t = 40$ s $= \frac{1}{90}$ сағат болғанда қайықтың жылдамдығы 8 км/сағатқа тең, осыдан $8 = 20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ немесе $e^{\frac{r}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}$ және де

$t = 2\min = \frac{1}{30}$ сағат болғанда $v = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28$

(км/с) ты таптық .

Жауабы: Матор тоқтағаннан соң 2 минут уақыт өткенде қайықтың жылдамдығы шамамен, 1,28 км/сағатқа тең болады . ▲

7-есеп. Радиоактивтік жейілу нәтижесінде радиоактивтік заттың массасы $m(t)$ уақытына қарағанда өзгеру заңын тап. Бұл жерде $m(t)$ грамм, t – жылдарда өлшенеді .

△ Жейілу жылдамдығы массаға пропорционал деп ойласақ,

$$m'(t) = -\alpha\, m(t) \tag{7}$$

дифференциал теңдеуге ие боламыз . $m(t)=Ce^{-\alpha t}$ функция бұл теңдеудің шешімі екенін тексеру мүмкін.

$m(t_0) = m_0$ бастапқы шарттан $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$ заңына ие боламыз .
Жауабы: $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$. ▲

Экономиялық моделдер. Талап және ұсыну экономиканың фундаментал (негізгі) түсінігі .

Талап (тауарлармен және қызметтерге талап) – сатып алушы, тұтынушылардың базардағы нақты тауарларды, азық-түліктерді сатып алу қалауы; базарға шыққан және ақша мүмкіндіктерімен қамтамасыз етілген қажеттілігі.

Талап мөлшерінің өзгеруіне бірнеше факторлар әсер етеді. Олардың арасындағы ең маңыздысы баға факторы. Тауар бағасының төмендеуі сатып алынатын тауар мөлшерінің өсуі және керісінше, бағаның өсуі сатып алынған мөлшердің кемеюіне алып келеді .

Ұсыныс – белгілі уақытта және нақты бағалармен базарға шығарылған немесе шығарылуы мүмкін болған тауарлар және қызметтер мөлшерімен өрнектеледі; ұсыныс – өндіріс шығарушы (сатушы)лардың өздерінің товарларын базарда сатуға болған тілегі. Базарда товар бағасымен оның ұсыныс мөлшері арасында күрделі байланыс бар: баға қанша жоғары болса, басқа жағдайлар өзгермеген түрде, сату үшін тағы да көбірек тауар ұсынылары, немесе керісінше, баға төмендеуімен ұсыныс көлемі қысқарады.

Талап және ұсыныстың түп мағынасы олардың бағасы арқылы өзара байланыста болуы. Бұл байланыс – талап және ұсыныс заңы базар экономикасының объектив заңы болып есептеледі . Талап және ұсыныс заңы бойнша, базардағы ұсыныс пен талап тек мөлшерінен емес, өзінің құрамы жағынан да бір-біріне сәйкес келуі керек, сондықтан базар теңдігіне (баланс) жетеді. Бұл заң айырбастау заңы болып, базарды басқаратын және тәртіпке салатын күш дәрежесіне көтеріледі. Осыған орай базардағы талап өзгерістері тез арада өндіріске жеткізілуі керек. Базардағы талап және ұсыныс қатынасына қарай өндіріс тездігі және құрылмасынан құралған.

Төмендегі *есепті* көреміз.

Фермер ұзақ мерзім барысында жемістерді базарға сатуға шығарып келеді. Әр апта соңында ол бағаның өзгеру жылдамдығын бақылап, кейінгі аптаға шығарылатын жемістердің жаңа бағасын шамалайды.

Дәл осылай тұтынушылар да бағаның өзгеру жылдамдығы бақылап, кейінгі аптада сатып алынатын жемістердің мөлшері белгіленеді.

Кейінгі аптадағы жемістердің бағасын p арқылы, бағаның өзгеру жылдамдығын p' арқылы белгілейміз.

Ұсыныс та, талап та тауар бағасы мен оның өзгеру жылдамдығына байланысты екендігін сеніммен айтуымыз мүмкін. Бұл байланыс қандай болады?

△ Мұндай байланыстардың ең қарапайым көрінісі төмендегідей болады: $y = ap' + bp + c$, бұл жерде a, b, c – анық сандар.

Мысалы, q арқылы талапты, s арқылы ұсынысты белгілесек, олар үшін жоғарыдағы байланыстар $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$ теңдеулер өрнектелуі мүмкін.

Бұл жағдайда талап және ұсыныстың өзара теңдігі $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$ қатынасы өрнектеледі.

Бұл теңдіктен $p' = -\dfrac{p-10}{10}$ көрінісіндегі дифференциалдық теңдеуі келіп шығады.

Егер бастапқы бағасын $p(0) = p_0$ деп белгілесек, баға $p = (p_0 - 10)e^{-\frac{t}{10}} + 10$ заңдылық пен өзгеруі келіп шығады. ▲

Инвестиция. Ойлайық, қандай да бір өнім бағамен сатылады, $Q(t)$ функция t уақыт бірлігінде істеп шығарылған өнім мөлшері өзгеруін білдіреді десек, бұл жағдайда t уақыт бірлігінде $Q(t)$ ға тең пайда алынады. Айталық, алынған пайданың бір бөлігі өндіріс істеп шығару инвестицияға жұмсалуы, яғни

$$I(t) = mpQ(t)\,, \tag{8}$$

m – инвестиция нормасы, өзгермес сан және $0 < m < 1$.

Егер базар барынша қамтамасыз етілген және істеп шығарылған өндіріс толық сатылған деген ой келсе, бұл жағдай істеп шығару жылдамдығының тағы да өсуіне алып келеді.

Істеп шығару жылдамдығы инвестицияның өсуіне пропорционал, яғни

$$Q' = l \cdot I(t), \tag{9}$$

бұл жерде l – пропорционалдық коэффициенті.

(8) формуланы (9) ға қойып

$$Q' = kQ\,, \quad k = lmp \tag{10}$$

дифференциалдық теңдеуі келіп шығады.

C – еркін тұрақты сан болғанда $Q = Ce^{kt}$ көрінісіндегі функция (10) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

Пікірімізше, бастапқы мезет $t = t_0$ де өндіріс істеп шығару көлемі Q_0 берілген. Осы жағдайда бұл шарттан тұрақты C ны табу мүмкін :

$$Q_0 = Ce^{kt_0}\text{, осыдан } C = Q_0e^{-kt_0}.$$

Нәтижеде істеп шығару көлемі $Q = Q_0e^{k(t-t_0)}$ заңдылықпен өзгеруін білдік .

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Бактерияның белгілі уақыттан соң екіге бөліну процессін туынды жәрдемінде модельдестір.

2. Томас Малтустің жер шарындағы адамдар саны өсуіне тиісті мәселені түсіндір .

3. Томас Малтустің логикалық қисық сызығын түсіндір.

4. Жарнама тиімділігіне тиісті мәселені туынды жәрдемінде модельдестір.

Жаттығулар

Мәтіндегі 4-есеп шешімінен пайдаланып, жаттығуларды орында . **(107–108)**:

107. Температурасы 25°С болған металл бөлшегі пешке қойылды. Пештің температурасы 25°С-тан басталып минутына 20°С жылдамдықпен бір қалыпты көтеріле бастады. Пеш және металл температурасының айырмашылығы T°С болғанда металл минутына $10 \cdot T$°С жылдамдықпен жылыта бастайды. Металл бөлшегінің 30 минуттан кейінгі температурасын тап .

108. Дененің бастапқы температурасы 5°С. Дене N минут ішінде 10°С-қа дейін жылыды. Қоршаған ортаның температурасы 25°С болды. Дене қашан 20°С-қа қызады?

Мәтіндегі 7-есеп шешімінен пайдаланып, жаттығуларды орында:

109. Тәжірбиелерге орай 1 жыл ішінде радийдің әр бір граммынан 0,44 мг зат жойылады

а) қанша жылдан соң бар радийдің 20 пайызы жойылады?

б) бар радийдің 400 жылдан соң қанша пайызы қалады ?

Мәтіндегі 6-есепті шешуде пікірлерден пайдаланып жаттығуларды орында **(110 – 111):**

110. Қайық судың кедергісі әсерінде өз қозғалысын кемейтірді. Судың кедергісі қайықтың жылдамдығына пропорционал Қайықтың бастапқы жылдамдығы 1,5 м/с. 4 секундтан кейін оның жылдамдығы 2 есе кеміді?

111. 10 *л* көлемдегі ыдыс ауамен толтырылды (80% азот, 20% кислород). Осы ыдысқа 1секундта 1 литр жылдамдықта азот бүркуде. Ол үздіксіз түрде араласып, осы жылдамдықта ыдыстан шығуда. Қанша уақыттан соң ыдыста 95% азотты араласпа пайда болады?
Көрсеткіш: $y(t)$ мен t уақыттағы азот үлесін белгілесек, $y(t)$ функция $y' \cdot V = a(1-y)$ қатынасын қанағаттандырады. Бұл жерде V – жылыту көлемі , a – бүрку жылдамдығы.

Бақылау жұмыс үлгісі

1. Негізі квадрат болған түзу бұрышты параллелепипед пішініндегі сырты ашық металл ыдыс жасалуда . Ыдыстың көлемі 270 л болу керек. Ыдыстың өлшемдері қандай болғанда оны жасауда ең кем металл кетеді?

2. Материялдық нүкте $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 72t^3$ заңдылықпен қозғалуда ($s(t)$ метрде, *t уақыт секундта* өлшенеді).
1) ең үлкен үдеуге жететін уақытты (t_0);
2) t_0 уақыттағы лездік жылдамдықты ;
3) t_0 уақыт ішінде басып өтілген жолды тап .

3. Жуық-мәндес есептеу формуласынан пайдаланып $\ln 0{,}92$ ні тап.

4. Шамалап есептеу формуласынан пайдаланып sin(–1; 2) ті тап.

5. Өндіріс істеп шығарушы кәсіпкер күнде табатын пайдасы төмендегі формуламен есептеледі :
$P(x) = -3x^2 + 42x - 6$ (мың сум), бұл жерде x – өндірістер саны.
Төмендегілерді анықта :
1) ең көп пайда алу үшін кәсіпкер қанша өндіріс істеп шығару керек?
2) кәсіпкердің ең үлкен пайдасы қанша сумды құрайды?

ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУ

112. Материялдық нүкте қозғалысының заңы $s=s(t)$ ге қарай оның ең үлкен немесе ең кіші жылдамдығын тап:

1) $s=13t$; | 2) $s=17t-5$; | 3) $s=t^2+5t+18$; | 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$;
5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; | 6) $s=13t^3+2t^2$; | 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Берілген функция графигіне : 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2{,}2$; 3) $x_0=0$ абсциссалы нүкте өткізілген жанаманы тап:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; | 2) $f(x)=13x+4$; | 3) $f(x)=60$; | 4) $f(x)=x^3+4x$.

114. Берілген функция үшін $y=-7x+2$ түзу сызыққа параллель болған жанама теңдеуін жаз :

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; | 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; | 3) $f(x)=-8x+5$.

115. Берілген $f(x)$ және $g(x)$ функциялар графиктерінің жанамалары параллель болатын нүктелерді тап:

1) $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=12x-8$;
2) $f(x)=18x+19$, $g(x)=-15x+18$;
3) $f(x)=2x+13$, $g(x)=4x-19$;
4) $f(x)=2x^3$, $g(x)=4x^2$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=15x-17$;
6) $f(x)=2x^4$, $g(x)=4x^3$.

116. 1) $y=\dfrac{1}{x}$ функция графигінің $x=-\dfrac{1}{2}$ нүктеден өтетін жанама теңдеуін құрастыр .

2) $y=x^2$ параболаның $x=1$ және $x=3$ абсциссалы сәйкес нүктелер түсірілген.Параболаның осы екі нүктені тұтастыратын кесінді параллель болған жанамасы қайсы нүктеден өтеді?

3) Материялдық нүкте $s(t)=\dfrac{2}{9}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{2}+3$ заңдылығымен қозғалуда (s – сантиметрде, t – секундта). Материялдық нүктенің 1-секундтағы үдеуін тап.

117. Функцияның көрсетілген нүктедегі туындысын есепте :

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$; 6) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-2$; 8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=-\frac{\pi}{8}$.

118. Көрсетілген уақыттағы жылдамдық пен үдеуді тап :

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$; 2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$; 4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

119. Функцияның абсциссасы көрсетілген нүктедегі туындысын есепте:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=2$; 4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$; 6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=2$; 8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$; 10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Көрсетілген уақыттағы жылдамдық пен үдеуді тап :

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$; 2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$; 4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Берілген функцияның туындысын тап **(121–122)**:

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; | 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; | 3) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

4) $f(x)=4^x-\sin x$; | 5) $f(x)=8\cos x$; | 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y=x^4$; | 2) $y=\frac{x-1}{x+2}$; | 3) $y=x-\frac{20}{x}$; | 4) $y=x^2\ln x$;

5) $y=x^3\sin x$; | 6) $y=e^x\sin x$; | 7) $y=\frac{x+1}{4x^2}$; | 8) $y=2(10x-1)\sin x$.

123. Берілген функциялар үшін $f'(-\frac{\pi}{2})$, $f'(\frac{\pi}{4})$ сандарын есепте:

1) $f(x)=e^x\cos x$; 2) $f(x)=3x+1$; 3) $f(x)=2x^2+x+3$;

4) $f(x)=\sin x+x^2$; 5) $f(x)=\sin x+\cos x$; | 6) $f(x)=\sin x$;

7) $f(x)=\cos x+x^4$; | 8) $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$.

124. Материалдық нүкте $x(t)=-\frac{t^3}{6}+6t^2+15$ заңдылықпен әрекеттенуде.

1) тездігі нөл болған t_0 уақытты; 2) осы t_0 уақыттағы жылдамдығын тап.

125*. $f(x)=x^2-13x+2$ функция Ox оғы мен қандай бұрыш астында кесіседі?

126. $f'(0)$ санды тап: 1) $f(x)=x^6-4x^3+4$; | 2) $f(x)=(x+10)^6$.

127. $y'(x)$ ті тап: 1) $y(x)=\sin^2 x$; | 2) $y(x)=\cos^2 x$; | 3) $y(x)=\operatorname{tg}^2 x$.

128. Функцияның өсу және азаю аралығын тап:

1) $f(x)=3+7x$; | 2) $f(x)=x^3+17x$; 3) $f(x)=\frac{1}{4}x+18$;

4) $f(x)=\frac{x+21}{x}$; | 5) $f(x)=x^2+5x-14$; | 6) $f(x)=x(x^2+8)$;

7) $f(x)=-x^2-4x+6$; 8) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$;

9) $f(x)=x^3-12x^2-17x-23$; 10) $f(x)=3x^4+18x^3-6$;

11) $f(x)=x^3-5x^2+19x+22$; 12) $f(x)=x^4+7x^2$.

129. Функцияның стационар нүктесін тап:

1) $f(x)=3x^2-7x+9$; | 2) $f(x)=19x-\frac{1}{7}x^3$; 3) $f(x)=5x^3$;

4) $f(x)=8x^2$; 5) $f(x)=7x-14$; 6) $f(x)=27-x^3$;

7) $f(x)=12x^3+13x^2-16$;   8) $f(x)=x^3-6x^2+9$.

130. Функцияның локалдық максимумы мен локалдық минимумдарын тап:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$;   2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$;   4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Функцияның өсу, кемею аралықтары және локалдық максимумы мен минимумдарын тап:

1) $f(x)=x^3-64x$; | 2) $f(x)=2x^3-24$; | 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Функцияның ең үлкен және ең кіші дәрежетін тап:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4; 1]$; | 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1; 2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1; 5]$; | 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3; 4]$.

133. Функцияның графигін жаса:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; | 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; | 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Тіктөртбұрыш түріндегі еркін кеңістіктің жан-жағын орау үшін 1000 метр темір қора сатып алынды. Бұл темір қорамен ең көп дегенде қанша кв.метр кеңестікті орап алу мүмкін?

135. Жалпы 16 дм болған квадрат формасындағы картоннан үсті ашық құты дайындалады. Мұнда картонның ұштарынан білдей квадраттар кесіп алынды. Құты көлемі өте үлкен болуы үшін оның негізі неше сантиметр болуы тиіс?

136*. Консерва банкасы цилиндр тәрізді болып, оның толық сырты 512π см^2 қа тең. Банкаға өте көп су сыйғызу үшін банка негізінің радиусы және биіктігі қандай болуы қажет?

137. Тіктөртбұрыш түріндегі кеңістік жүзі 3600 м^2. Кеңістіктің жандары қандай болғанда оны орау үшін ең аз темір қора қажет болады?

138*. Радиусы 8 дм болған шарға ең кіші көлемдегі конус көрінісі сызылған. Осы конустың биіктігін тап.

139*. Негізі квадрат түрінде болған тікбұрышты параллелипипед формасындағы ашық металл ыдықса 32 *л* сұйықтық кетеді. Ыдыстың өлшемі қандай болғанда оны жасауға ең кем металл жұмсалады?

140. Материялдық нүкте $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 10t^3$ заңдылығымен әрекеттенуде ($s(t)$ метрде, t секундта өлшенеді).

1) ең үлкен тездікке ие (t_0) уақыт
2) t_0 уақытағы лездік жылдамдықты;
3) t_0 уақытта басып өтілген жолды тап.

141. Ауа шарына $t \in [0;10]$ минут аралығында $V(t) = t^3 + 3t^2 + 2t + 4$ м³ ауа пүркеледі.

1) бастапқы уақыттағы ауа көлемі;
2) $t = 10$ минуттағы ауа көлемі;
3) $t = 5$ минуттағы ауа бүрку жылдамдығын тап.

142. Акрам шалбар тігу үшін тапсырыс алды. Бір айда x шалбар тігілсе $p(x) = -2x^2 + 240x$ (мың сум) пайда көреді.

1) пайда көп түсу үшін қанша шалбар тігу керек?
2) ең үлкен пайда қанша сум болады?

143. Функцияның туындысын тап:

1) $y = e^{3x}$;	2) $y = e^{\sin x}$;	3) $y = \sin(3x+2)$;	4) $y = (2x+1)^4$;
5) $y = \frac{x-2}{x^2+1}$;	6) $y = \frac{\ln x}{x}$;	7) $y = \mathrm{arctg}2x$;	8) $y = x^2 \cdot \cos x$.

144. $f(x) = e^{2x}$ және $g(x) = 4x + 2$ функция үшін $F(x)$ күрделі функцияны түз:

1) $F(x) = f(g(x))$; 2) $F(x) = f(x)^{g(x)}$;

3) $F(x) = g(f(x))$; 4) $F(x) = \sqrt{g(g(x))}$.

145. Күрделі функция туындысын тап:

1) $y = (x^2+1)^5$; 2) $y = \ln\cos x$;

3) $y = \sqrt{5x-7}$; 4) $y = \sqrt{\mathrm{tg}(2x-3)}$;

5) $y=\mathrm{arctg}(3x-4)$;   6*) $y=\sin(\mathrm{arctg}2x)$;

7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$;   8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Функцияның өсу және азаю аралығын тап:

1) $y=2+x-x^2$;   2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geq 0)$;

3) $y=3x-x^3$;   4) $y=2x-\sin x$;

5) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;   6) $y=\dfrac{x^2}{2^x}$;

7) $y=(x-1)^3$;   8) $y=(x-1)^4$.

147. Функцияның стационар нүктелері, локалдық максимумы мен локалдық минимумдерін тап:

1) $y=x^3-6x^2+9x-4$;   2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

3) $y=x+\dfrac{1}{x}$;   4) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

148. Функцияның көрсетілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші дәрежесін тап:

1) $f(x)=2^x$, $[-1;\ 5]$;   2) $f(x)=x^2-4x+6$, $[-3;\ 10]$;

3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $[0{,}01;\ 100]$;   4) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1;\ 1]$;

5) $f(x)=\cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;   6) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$, $[-10;\ 10]$;

7) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;   8) $f(x)=\left|x^2+3x+2\right|$, $[-15;\ 10]$.

149. Функцияны тексер және графигін жаса:

1) $y=3x-x^3$;   2) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;   3) $y=(x+1)(x-2)^2$.

4) $y=x+\dfrac{1}{x}$;   5) $y=\sqrt{16-x^2}$;   6) $y=\sqrt{x^2-9}$;

7) $y=x^2-5|x|+6$;   8) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2$.

II ТАРАУ. ИНТЕГРАЛ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

37–39 БАСТАПҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АНЫҚ ЕМЕС ИНТЕГРАЛ ТҮСІНІКТЕРІ

Егер нүкте қозғалыс басталуынан басталып t уақыт ішінде $s(t)$ аралықтан өткен болса, оның лездік жылдамдығы $s(t)$ функцияның туындысына тең екенін білеміз: $v(t)=s'(t)$. Практикада *кері мәселе:* нуктенің берілген қозғалыс жылдамдығы $v(t)$ бойынша оның басып өткен жолы $s(t)$ ны табу мәселесі де кездеседі. Сондай $s(t)$ функцияны табу керек, оның туындысы $v(t)$ болсын. Егер $s'(t)=v(t)$ болса, $s(t)$ функция $v(t)$ функцияның *бастапқы функциясы* делінеді. Мүлдем, осындай ұсыныс кіргізу мүмкін:

Егер $(a; b)$ ға тиісті еркін x үшін $F'(x)=f(x)$ болса, $F(x)$ функция $(a; b)$ аралықтарда $f(x)$ ның *бастапқы функциясы* делінеді.

1-есеп. a – берілген бірер сан және $v(t)=at$ болса, $s(t)=\frac{1}{2}at^2$ функция $v(t)$ функцияның бастапқысы, себебі s $'(t)=(\frac{at^2}{2})'=at=v(t)$.

2-есеп. $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty; \infty)$, болса, $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ функция $f(x)$ тің $(-\infty; \infty)$ тегі бастапқы функциясы болады, себебі

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

3-есеп. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, осыдан $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, функция үшін $F(x)=\mathrm{tg}x$ бастапқы функция болады, себебі $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

4-есеп . $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$, болса, $F(x)=\ln x$ функция $\frac{1}{x}$ тің бастапқы функциясы болады, себебі $F'(x)=(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

1-есеп. $F_1(x)=\dfrac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\dfrac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\dfrac{x^4}{4}-25$ функцияны бір $f(x)=x^3$ функцияның бастапқы функциялары екенін дәлелде.

△ Туындылар кестесі арқылы жазамыз :

1) $F_1'(x)=(\dfrac{x^4}{4})'=4\cdot\dfrac{x^3}{4}=x^3=f(x);$

2) $F_2'(x)=(\dfrac{x^4}{4}+17)'=(\dfrac{x^4}{4})'+(17)'=4\cdot\dfrac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x);$

3) $F_3'(x)=(\dfrac{x^4}{4}-25)'=(\dfrac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\dfrac{x^3}{4}-0=x^3=f(x).$

Бұл мәселеден осындай қорытындыға келдік:

еркін $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+C$ функция (C – бірер тұрақты сан) да $f(x)=x^3$ үшін бастапқы функция болады. Шынында да,

$$F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)\ .▲$$

Бұл мәселеден және де осындай қорытындыға келу мүмкін: берілген $f(x)$ функция үшін бастақы функциясы бір мәнде анықталмайды .

Егер $F(x)$ функция $f(x)$ тің бірер аралықтарында бастапқы функциясы болса , $f(x)$ функцияның барлық бастапқылары $F(x)+C$ (C –еркін тұрақты сан) көрінісінде жазылады.
$F(x)+C$ көрінісіндегі барлық функциялар жиындысы $f(x)$ тің *анық емес интегралы* делінеді және $\int f(x)dx$ осылай белгіленеді.

Демек, $\int f(x)dx=F(x)+C.$

$\int$ – интеграл белгісі, $f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ интеграл астындағы функция дейіледі .

5-есеп. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, себебі туындылар кесте бойынша ,

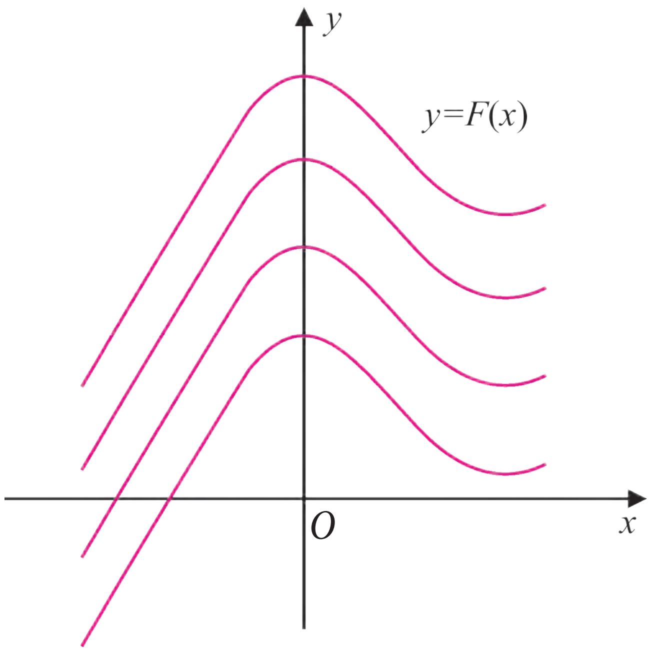
$$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x.$$

6-есеп. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$ себебі

$(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' = \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k.$ $k = -1$ болса, $x > 0$ де

4-есеп бойынша , $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

$y=F(x)+C$ функцияның графигі $y=F(x)$функция графигін Oy өсі бойымен жылжытуынан келіп шығады (1-сурет). Тұрақты сан C ті таңдау есебінен бастапқы функция графигінен берілген нүкте арқылы өтуіне жетуіміз мүмкін .



1-сурет.

2-есеп. $f(x)=x^2$ функцияның графигі $A(3;\ 10)$ нүктеден өтетін бастапқы функцияны тап .

△ $f(x)=x^2$функцияның барлық бастапқы функциялары

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ көрінісінде болады, себебі $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2.$

Тұрақты сан C ті $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ функцияның графигі (3; 10) нүктеден өтетіндей етіп таңдаймыз: $x=3$ де $F(3)=10$ болуы керек.Осыдан $10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$. Демек, ізделіп жатқан бастапқы функция $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ болады. *Жауабы:* $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

3-есеп. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функцияның графигі $A(8;\ 15)$ нүктеден өтетін бастапқы функцияны тап.

△ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ тің барлық бастапқы функциялары $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C$ көрінісінде болады, себебі

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Тұрақты сан C ті осындай таңдаймыз, $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ функцияның графигі $A(8,\ 15)$ нүктеден өтсін, яғни $F(8)=15$ теңдік орындалсын. $x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ екенінен $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, осыдан $C=3$. Демек, ізделген бастапқы функция $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$ болады. *Жауабы:* $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

4*-есеп. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ екенін көрсет.

△ $x>0$ da $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, себебі $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

$x<0$ da $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, себебі $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Бастапқы функция не? Мысалдар келтір.
2. Берілген $f(x)$ функция үшін бастапқы функция бір мәнді табылады ма? Неліктен?
3. Бастапқы функция $F(x)$ графигінің берілген нүктеден өтуіне қалай жетісу мүмкін? Мысалдар жәрдемінде түсіндір.

Жаттығулар

1. Анық сандар жиынтығы $R=(-\infty;\ \infty)$ да $f(x)$ функция үшін $F(x)$ функцияның бастапқы функция екенін дәлелде :

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $\quad f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2 x+3x$, $\quad f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2 x-7x$, $\quad f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Төмендегі функцияның барлық бастапқы функцияларын,туындылар кестесінен пайдаланып тап (**2 – 6**):

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; 2) $f(x)=6x^5$; 3) $f(x)=x^{10}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sin x$; | 6) $f(x)=\cos x$; | 7) $f(x)=\sin 2x$; | 8) $f(x)=\cos 2x$;

3. 1) $f(x)=4^x$; 2) $f(x)=\pi^x$; 3) $f(x)=e^x$; 4) $f(x)=a^x$;

5) $f(x)=a^{2x}$; 6) $f(x)=e^{\pi x}$; 7) $f(x)=10^{3x}$; 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;

4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;

4) $f(x)=\cos 5x$; 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; | 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; | 3) $f(x)=(3x+2)^2$; | 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Берілген $f(x)$ функция үшін оның көрсетілген A нүктеден өтетін бастапқы функциясын тап :

1) $f(x)=2x+3$, $A(1;\ 5)$; 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $A(0;\ 2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $A(0;\ 3)$; 4) $f(x)=\cos x$, $A(\frac{\pi}{2};\ 5)$.

Берілген $f(x)$ функция үшін оның осындай бастапқы функциясын табу керек,бұл бастапқы функцияның графигі y түзу сызықпен тек қана бір жалпы нүктеге ие болсын (**8 – 9**):

8. 1) $f(x)=4x+8,\ y=3;$ 2) $f(x)=3-x,\ y=7,$

3) $f(x)=4,5x+9,\ y=6,8;$ 4) $f(x)=2x-6,\ y=1.$

9*. $f(x)=ax+b,\ y=k.$

Нұсқау: $F(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+C,$ есеп шартынан және $\frac{ax^2}{2}+bx+C=k$ квадрат теңдеуден C ны тап . $C=\frac{2ak+b^2}{2a}=k+\frac{b^2}{2a}$ болады.

10*. $f(x)$ үшін оның осындай бастапқы функциясын табу керек, бұл бастапқы функцияның графигі көрсетілген нүктелерден өтетін болсын :

1) $f'(x)=\frac{16}{x^3},$ $A\,(1;\,10)$ және $B\,(4;\,-2);$

2) $f'(x)=\frac{54}{x^4},$ $A(-1;\,4)$ және $B\,(3;\,4);$

3) $f'(x)=6x,$ $A(1;6)$ және $B(3;30);$

4) $f'(x)=20x^3;$ $A(1;9)$ және $B(-1;7).$

Нұсқау: Берілген $f'(x)$ бойынша $f(x)+C_1$ табылады. Содан соң $f(x)+C_1$ үшін бастапқы функциясы $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$ табылады. Берілген нүктелер координаталардың соңын теңдікке қойып, C_1 және C_2 сандарын табу үшін сызықты теңдеулер жүйесіне келтіріледі.

11*. Берілген $f(x)$ функция үшін оның осындай бастапқы функциясын табу керек, бұл бастапқы функцияның графигімен $f(x)$ туындысының графигі абсциссасы көрсетілген нүктеде қиылыссын :

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}},\ x_0=1;$ 2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}},\ x_0=-1;$

3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}},\ x_0=1;$ 4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}},\ x_0=\frac{1-b}{k}.$

12. Берілген $f(x)$ функция үшін көрсетілген нүктеден өтетін бастапқы функцияны тап :

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$; 2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;

3) $f(x)=\cos x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\ 8)$; 4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;\ 10)$.

13. $F(x)$ функция осіне $f(x)$ функцияның бастапқы функциясы екенін көрсет:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;

2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – тұрақты сан;

3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – тұрақты сан;

4) $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. Берілген $f(x)$ функция үшін көрсетілген нүктеден өтетін бастапқы функцияны тап :

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{1}{3})$; 2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{4}{5})$;

3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $A(\dfrac{\pi}{3};\ 1)$; 4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$, $A(\pi;\ \dfrac{9}{2})$.

15. $f(x)$ функция үшін оның берілген теңдеулер жүйесінің шешімі $(x_0;\ y_0)$ нүктеден өтетін бастапқы функциясын тап :

1) $f(x)=3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15;\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\dfrac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi;\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{5x+e}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43 ИНТЕГРАЛДАР КЕСТЕСІ. ИНТЕГРАЛДЫҢ ЕҢ ҚАРАПАЙЫМ ЕРЕЖЕЛЕРІ

Интегралдар кестесін туындылар кестесі жәрдемінде түзуіміз мумкін.

№	Функция $f(x)$	Бастапқы функция $F(x)+C$
1	$x^p, \quad p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p, \quad p\neq -1, \quad k\neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\dfrac{1}{kx+b}, \quad k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b}, \; k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b), \; k\neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b), \quad k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Кез келген X аралығында анықталған $F(x)$ функция $f(x)$ функцияның бастапқы функциясы болуы үшін екі $F(x)$ және $f(x)$ функцияны да осы X аралығында анықталған болуы керек.

Мәселен, $\frac{1}{5x-8}$ функцияның $5x$–8>0, яғни x >1,6 аралығындағы интеграл, кесте бойынша, $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$-ға тең

Дифференциалдау ережесінен пайдаланып, *интегралдау ережесін* түсіндіру мүмкін.

$F(x)$ және $G(x)$ функциялар кез келген аралықта, сәйкес $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының бастапқы функциялары болсын. Осы ережелер орынды

1-ереже: $a\cdot F(x)$ функция $a\cdot f(x)$ функцияның бастапқы функциясы болады,яғни

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

2-ереже: $F(x)\pm G(x)$ функция $f(x)\pm g(x)$ функцияның бастапқы функциясы болады,яғни :

$$\int(f(x) \pm g(x))dx=\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=F(x) \pm G(x)+C.$$

1-есеп. $f(x)=5\sin(3x+2)$ функцияның интегралын тап .

△ Бұл функцияның интегралын 1-ереже және интегралдар кестесінің 9-бөлімі жәрдемінде табамыз:

$$\int f(x)dx = \int 5\sin(3x+2)dx = 5\int \sin(3x+2)dx =$$

$$= 5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C = -\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

себебі интегралдар кестесі жәрдемінде

$$\int \sin(3x+2)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

Жауабы: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

2-есеп. $f(x)=8x^7+2\cos 2x$ функцияның интегралын тап .

△ Бұл функцияның интегралын 1 және 2-ережелер мен интегралдар кестесінің 1 және 10-бөлім жәрдемінде табамыз :

$$\int f(x)dx=\int(8x^7+2\cos 2x)dx=8\int x^7dx+2\int\cos 2xdx$$

$$=8\cdot\frac{1}{8}x^8+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=x^8+\sin 2x+C.$$

Жауабы: $x^8+\sin 2x+C.$ ▲

3-есеп. $\int\frac{xdx}{x^2+8}$ интегралды есепте .

△ Бұл есепті шешуде *айнымалыны өзгерту* қолайлы.

Егер $x^2+8=u$ десек, $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$ болады. Ол жағдайда

$$\int\frac{xdx}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C.$$

Тексеру: Табылған бастапқы функциядан туындысы алынса, интеграл астындағы функция $\frac{x}{x^2+8}$ келіп шығуы керек. Шынында ,

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C\right)'=\frac{1}{2}(\ln(x^2+8))'+C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8}=\frac{x}{x^2+8}.$$

Жауабы: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8)+C.$ ▲

4-misol. $\int e^{\sin x}\cos xdx$ интегралды есепте.

△ $\sin x=t$ алмасуын орындаймыз.Ол жағдайда $dt=\cos xdx$ және берілген интеграл $\int e^tdt$ көрінісінде болады.Интегралдар кестесінің 3-бөліміне қарағанда $\int e^tdt=e^t+C$ болады. Демек, $\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+C.$

Тексеру. $(e^{\sin x}+C)'=(e^{\sin x})'+C'=e^{\sin x}(\sin x)'+0=e^{\sin x}\cos x$ – берілген интеграл астындағы функция келіп шықты.

Жауабы: $e^{\sin x}+C.$ ▲

5-есеп. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ интегралды есепте .

△ Мұнда $2\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$ тепе-теңдік жәрдем береді Ол жағдайда

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Жауабы: $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ ▲

6*-мысал. $\int \cos mx \cos nx dx$ интегралды есепте .

△ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ тепе-теңдік және интегралдау кестесінің 10-пунктіне тән:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Жауабы: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$ ▲

7-misol. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ интегралды есепте .

△ Интеграл астындағы функция үшін төмендегі теңдік орынды :

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Осыдан

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Жауабы: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$ ▲

8-есеп. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ интегралды есепте.

△ Бұл интегралды есептеу үшін $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ және $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=$ $\mathrm{tg}x+C$ екенінен пайдаланамыз.Ол жағдайда

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}=\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Тексеру: $(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\mathrm{tg}\frac{x}{2})'+C'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$

интеграл астындағы функция келіп шығады .

Жауабы: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$ ▲

9-есеп. $\int \sin^2 2x dx$ интегралды есепте.

△ Интегралды есептеу үшін $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$ тепе-теңдік пайдаланамыз .

$$\int \sin^2 2xdx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 4xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Жауабы: $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$ ▲

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Интегралдар кестесіннен өзің қалаған 4 есепті таңда және оны дәлелде .
2. Интегралдаудың қарапайым ережелерін айтып бер. Мысалдарда түсіндір .
3. Өзгеруші алмастыру әдісі не? $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ интегралды есептеуде сол әдісі қолда және мысалды шешу процесін түсіндір.

Жаттығулар

Берілген функцияның бастапқы функцияларынан бірін тап **(16 – 18)**:

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; | 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; | 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Берілген функцияның барлық бастапқы функцияларын тап **(19 – 20)**:

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^5}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Бетілген $f(x)$ функция үшін графигі $A(x;y)$ нүктеден өтетін бастапқы функциясын тап :

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};\ 7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};\ 4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ \ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{8})$;

6) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x-2\cos\frac{x}{2},\ A(2\pi;\ 2\pi)$;

7) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x,\ A(2;6)$; 8) $f(x)=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{2-x}},\ A(-2;\ 4)$.

Интегралды есепте. (**22 – 28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx$; 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx$;

3) $\int(x^2-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx$; 4) $\int(4x^3+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3})dx$.

23*. 1) $\int(\frac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx$; 2) $\int(\frac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx$;

3) $\int\sin 2x\cos 2x dx$; 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx$;

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx$; 6) $\int\cos^2 5x dx$.

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3x dx$; 2) $\int\cos 2x\cos 3x dx$; 3) $\int\sin 7x\sin 3x dx$.

25*. 1) $\int\frac{x}{x+1}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12}$; 3) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+3}$; 4) $\frac{(x+4)dx}{x^2-16}$.

26. 1) $\int\frac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx$; 2) $\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 3) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

4) $\frac{dx}{1-\cos 2x}$; 5) $\int\frac{dx}{4(x^2-4)}$; 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx$.

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx$; 2) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; 3) $\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^3 x}dx$;

4) $\int\frac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}dx$; 5) $\int\sin^3 x dx$; 6) $\int\cos^3 x dx$.

28*. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx$; 3) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)dx$; 5) $\int(\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x)dx$.

Берілген $f(x)$ функция үшін графигі $A(x;\ y)$ нүктеден өтетін бастапқы функцияны тап **(29 – 30)**:

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi;\ 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2};\ 3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};\ 0)$;

30. 1) $f(x)=3x^2-2x+8$, $A(1;\ 9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(-1;\ 4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(-2;\ 1)$.

31. Интегралды есепте

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$; 2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$; 3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$; 5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$; 7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Интегралды есепте 1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Үлгі: $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ интегралды есепте

△ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; $x+2=u$ дейілсе, $1+(x+2)^2=1+u^2$

$x'=u'$ және интегралдар кестесінің 14–15 ережелерге сәйкес $I=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C=\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

Тексеру:

$$(\operatorname{arctg}(x+2)+C)'=(\operatorname{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$$
$$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Жауабы: $\operatorname{arctg}(x+2)+C$. ▲

Интегралдау ережелерінен және бірі *бөлшектеп интегралдау*.

3-ереже*. Егер бірер X аралығында $f(x)$ және $g(x)$ функциялар үздіксіз $f'(x)$ және $g'(x)$ туындыға ие болса,ол жағдайда

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

формула орынды . Бұл формула *бөлшектеп интегралдау формуласы* дейіледі.

Бұл формуланың дәлелдемесі $f(x)$ және $g(x)$ функциялар көбейтіндісін дифференциалдау ережесі $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ және $\int f'(x)dx=f(x)+C$ екені келіп шығады.

Формуладан *пайдалану ережесі*: 1) интеграл астындағы өрнек $f(x)$ және $g'(x)$ көбейтіндісі көрінісінде жазып алынады; 2) $g'(x)$ және $g(x)f'(x)$өрнектің интегралдарын оңай (қолайлы) есептелетін етіп алу назарға алынған.

1-мысал. $\int x\cdot e^x dx$ интегралды есепте.

△ Бұл жерде $f(x)=x,$ $g'(x)=e^x$ деп алу қолайлы, себебі $g(x)=\int g'(x)dx=\int e^x dx=e^x,$ $f'(x)=1.$ Ол жағдайда (1) жәрдемінде,

$\int xe^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C.$

Демек , $\int xe^x dx = e^x\cdot(x-1)+C.$

Жауабы: $e^x(x-1)+C.$ ▲

2-мысал. $\int \ln x dx$ интегралды есепте.

∆ Интеграл астындағы $\ln x$ функцияны $f(x)=\ln x$ *және* $g'(x)=1$ осылардың көбейтіндісі деп есептейміз: $\ln x=f(x)\cdot g'(x).$

Ол жағдайда $f'(x)=\frac{1}{x},$ $g(x)=\int 1\cdot dx = x+C.$

(1) формулаға орай,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x\cdot(\ln x - \ln e) + C = x\cdot\ln\frac{x}{e} + C.$$

Демек, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Тексеру:

$$(x\ln\frac{x}{e}+C)' = (x\ln\frac{x}{e})' + C' = x'\cdot\ln\frac{x}{e} + x(\ln\frac{x}{e})' + 0 =$$

$$= \ln\frac{x}{e} + x\cdot\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e} = \ln x - \ln e + 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Жауабы: $x\cdot\ln\frac{x}{e}+C.$ ▲

3-мысал. $\int x\cos x dx$ интегралды есепте..

△ Интегралды есептеу үшін $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$ қолайлы.Ол жағдайда $f'(x)=1,\ g(x)=\int \cos x dx = \sin x$ (бұл жерде бастапқы функциялардан біреуін алдық, сондықтан тұрақты сан C ті жазбадық). Бөлшектеп интегралдау формуласына сәйкес,

$$\int x\cos x dx = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Жауабы: $x\sin x+\cos x+C$. ▲

Интегралдарды есепте (**33 – 35**):

33*. 1) $\int x\sin x dx$; 2) $\int x^2\cos x dx$; 3) $\int x\ln x dx$; 4) $\int 2x\ln x dx$.

34*. 1) $\int x\cos 2x dx$; 2) $\int x\sin 3x dx$; 3) $\int x\sin\frac{x}{3} dx$; 4) $\int x\cos\frac{x}{4} dx$.

35*. 1) $\int 2^x\cdot x dx$; 2) $\int 3^x\cdot x dx$; 3) $\int 5^x\cdot x dx$.

4) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 5) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; 6) $\int (3^x+4^x)^2 dx$;

7) $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx$; 8) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}-1}dx$; 9) $\int \frac{e^x dx}{\pi+e^x}$;

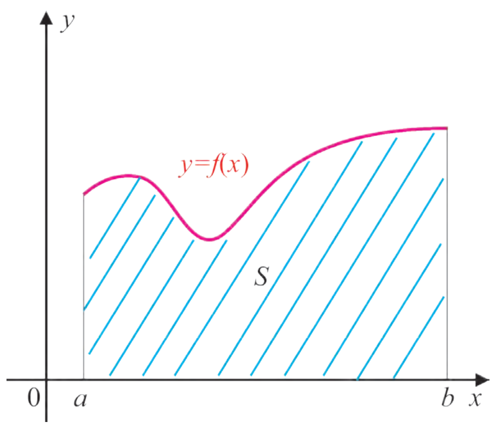
10) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$; 11) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 12) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

44–46 АНЫҚ ИНТЕГРАЛ. НЮТОН–ЛЕЙБНИС ФОРМУЛАСЫ

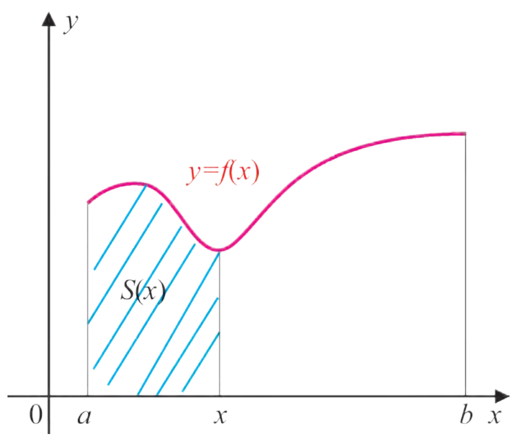
2-суретте көрсетілген пішін *қисық сызықты трапеция* деп аталады. Бұл пішін жоғарыдан $y = f(x)$ функцияның графигімен, төменнен $[a, b]$ кесіндімен, жан бүйірінен болса $x = a,\ \ x = b$ түзу сызықтарың кесінділерімен шекараланған. $[a; b]$ кесінді қисық сызықты трапецияның *негізі* деп аталады.

Қисық сызықты трапецияның ауданын қай формулаға сәйкес есептейміз, деген сұрақ туындайды.

Бұл ауданды S деп белгілейік. S ауданды $f(x)$ функцияның бастапқы функциясы жәрдемінде есептеу мүмкін. .



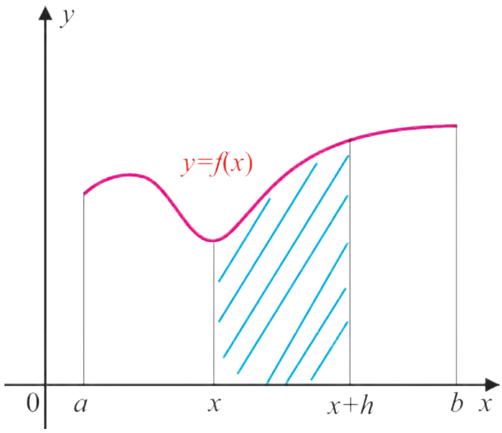
2-сурет.



3-сурет.

$[a; x]$ негізді қисық сызықты трапецияның ауданын $S(x)$ деп белгілейік (3-сурет), мұнда x сол $[a; b]$ кесіндідегі кез келген нүкте: $x=a$ болғанда $[a; x]$ кесінді нүктеге айналады, сондықтан $S(a)=0$; $x=b$ де $S(b) = S$.

$S\ (x)$ ті $f(x)$ функцияның бастапқы функциясы болуы, яғни $S'(x) = f(x)$ екенін көреміз.



4-сурет.

△ $S(x+h) - S(x)$ айырманы көрейік, мұнда $h>0$ ($h<0$ жағдай да дәл сондай болады). Бұл айырма негізі $[x;\ x+h]$ болған қисық сызықты трапецияның ауданына тең (4-сурет). Егер h сан кіші болса, онда бұл аудан шамамен $f(x)\cdot h$ қа тең, яғни $S(x+h)-S(x) \approx f(x)\cdot h$.

Демек, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$.

Бұл шамалы теңдіктің сол бөлімі $h\to 0$ де туындының анықтамасына сәйкес $S'(x)$ қа ұмтылады. Сондықтан $h\to 0$ де $S'(x)=f(x)$ теңдік келіп шығады. Демек, $S(x)$ аудан $f(x)$ функция үшін бастапқы функция. ▲

Бастапқы функция $S(x)$ дан еркін басқа бастапқы $F(x)$ функциясы өзгермейтін санға айрықшаланады, немесе

$$F(x)=S(x)+C.$$

Бұл теңдіктен $x=a$ да $F(a) = S(a)+C$ және $S(a) = 0$ болғандықтан $C=F(a)$. Ол жағдайда (1) теңдікті төмендегідей жазамыз:

$S(x)=F(x)-F(a)$. Бұдан $x=b$ да $S(b)=F(b)-F(a)$ екендігін табамыз.

Демек, *қисық сызықты трапецияның ауданын* (2-сурет) төмендегі формуламен есептейміз:

$$S=F(b)-F(a), \tag{2}$$

мұнда $F(x)$ – берілген $f(x)$ функцияның кез келген бастапқы функциясы.

Сондықтан, қисық сызықты трапецияның ауданын есептеу $f(x)$ функцияның $F(x)$ бастапқы функциясын табуға, яғни $f(x)$ функцияны интегралдауға келтіреді.

$F(b) - F(a)$ айырма $f(x)$ функцияның $[a; b]$ кесіндідегі *анық интегралды* деп аталады да былай белгіленеді: $\int_a^b f(x)dx$

(оқылуы: “*a* дан *b* ға дейінгі интеграл еф икс те икс“), яғни

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

(3) формула *Ньютон–Лейбнис формуласы* деп аталады.

(2) және (3) формулаға сәйкес:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Интегралды есептеуде, әдетте, төмендегі белгі кіргізілген:

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. Ол жағдайда (3) формуланы былай жазу мүмкін:

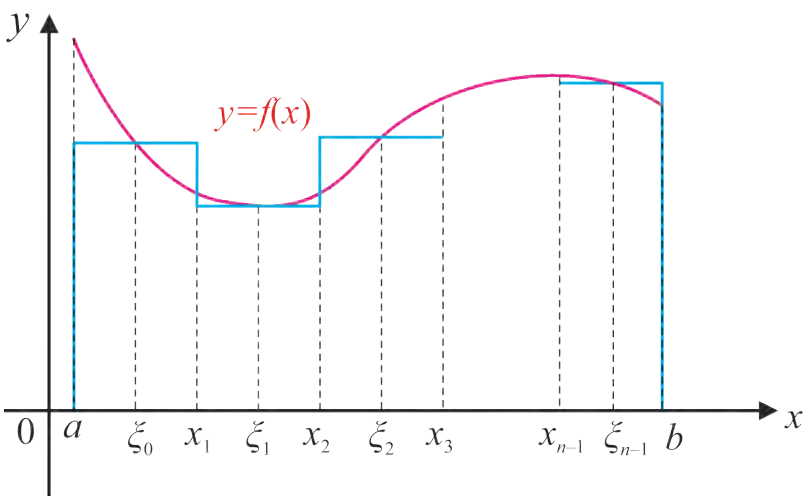
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (5)$$

Осы орында қысқа *тарихи мәліметтер*.

Қисық сызықтармен шекараланған пішін ауданын есептеу мәселесі анық интеграл түсінігіне алып келді. Үдіксіз $f(x)$ функция анықталған $[a; b]$ кесінді $a=x_0, x_1.., x_{n-1}, \dots x_n= b$ нүктелер жәрдемінде өзара тең $[x_k; x_{k+1}]$ (k=0, 1, ... n–1) кесінділерге бөлінген және әр бір $[x_k; x_{k+1}]$ кесіндіден еркін ξ_k нүкте алынған. $[x_k; x_{k+1}]$ кесінді ұзындығы $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ті берілген $f(x)$ функцияның ξ_k нүктедегі мәні $f(\xi_k)$ ке көбейтілген және осы

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \qquad (6)$$

жиынтығынан құралған, мұнда әрбір қосындының негізі Δx_k және биіктігі $f(\xi_k)$ болған тіктөртбұрыштың ауданы. S_n жиынды қисық сызықты трапецияның ауданы S ке шамамен тең: $S_n \approx S$ (5-сурет).



5-сурет.

(6) жынды $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндісіндегі *интеграл жиынтығы* дейіледі. Егер n шексіздікке ұмтылғанда ($n\to\infty$), Δx_k нөлге ұмтылса ($\Delta x_k\to 0$), ол жағдайда S_n интеграл жиынтығы бірер санға ұмтылады. Дәл сол сан $f(x)$ функцияның $[a;\ b]$ кесіндісіндегі *интегралы* дейіледі.

1-мысал. 6-суретте бейнеленген қисық сызықты трапецияның ауданын тап.

△ (4) формулаға сәйкес $S=\int_1^4 x^2dx$. Осы интегралды Ньютон-Лейбнис формуласы (3) жәрдемінде есептейміз. $f(x)=x^2$ функцияның бастапқы функцияларынан бірі $F(x)=\frac{x^3}{3}$ екені мәлім.

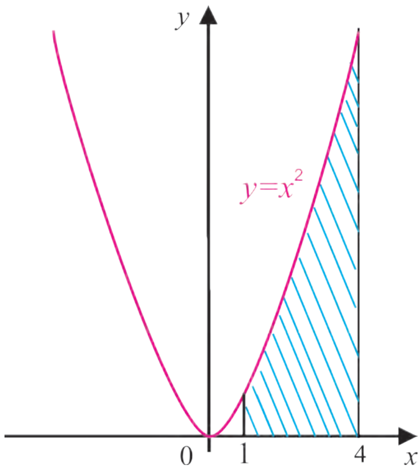
Демек,

$$S=\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_1^4=\frac{1}{3}(4^3-1^3)=\frac{1}{3}\cdot 63=21\ \text{(кв. бірлік).}$$

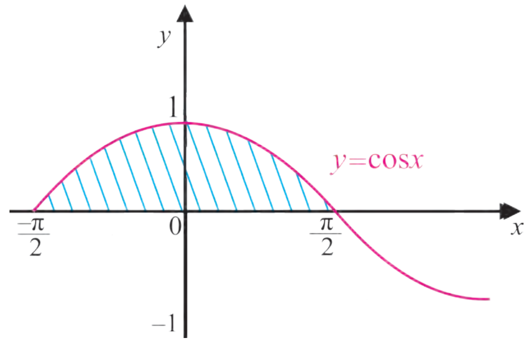
Жауабы: $S=21$ кв. бірлік. ▲

2-мысал. 7-суреттегі штрихталған ауданын тап.

△ Штрихталған бөлік қисық сызықты трапеция болып, ал жоғарыдан $y=\cos x$ функцияның графигі, төменнен болса $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндімен шектелген. $y=\cos x$ – кос функция, бөлік Oy оғына карата симметриялы. Осы мәліметке қарай, бөлүк беті $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ де бетінен екі есе тең деп атау мүмкін.



6-сурет.



7-сурет.

△ Ньютон-Лейбниc формуласы және (5) формулаға сәйкес:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{-\pi}{2})=1-(-1)=1+1=2 \text{ (kv. birlik).}$$

Жауабы. 2 кв.бірлік. ▲

3-мысал. $\int_0^{\pi}\cos x dx$ анық интегралды есепте.

△ Ньютон-Лейбниc формуласы және (5) формуласына сәйкес:

$$\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0.$$

Жауабы: 0. ▲

4-мысал. $\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx$ анық интегралды есепте

△ Ньютон-Лейбниc формуласы және (5) формуласына сәйкес :

$$\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx=(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{22}{3}-(-\frac{37}{6})=\frac{81}{6}=13,5(\text{кв.бірлік}).$$

Жауабы: 13,5 кв.бірлік. ▲

5-мысал. $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\,dx$ анық интегралды есепте

△ Ең алдымен анық емес интегралды табамыз:

$$\int \sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx = \frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Ол жағдайда $S = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3}) =$

$$= \frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Жауабы: $S=\frac{\pi}{6}$. ▲

6-мысал. $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$ анық интегралды есепте

△ Ең алдымен анық емес интегралды табамыз:

Интегралдар кестесіне сәйкес

$\int \sqrt{2x-3}dx = \frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$ Ол жағдайда

$$\int_2^6 \sqrt{2x-3}dx = \frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6 = \frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot2-3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\cdot(27-1) = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $8\frac{2}{3}$. ▲

Анық интеграл төмендегі қасиеттерге ие :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ Шынында да , $\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a) = 0.$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

△ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a);\ \int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b) = -\big(F(b)-F(a)\big).$

Демек, $-\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx.$ ▲

3. a, b, c – анық сандар болса, $\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (анық интегралдын аддитивтік қасиеті).

4. $f(x),\ x \in R,$ жұп функцияда болса, онда $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.

5. Егер $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$ болса, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ болады.

6. $x \in [a,b]$да $f(x) < g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ болады.

? Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Анық интегралды есепте. Анық интеграл деген не?

2. Қисық сызықты трапеция ауданын есептеу мәселесін айт. Мысаллармен түсінтір.

3. Нютон–Лейбнис формуласын айт? Оның маңызы неде?

4. Анық интегралдың қаситтерін айт. Мысалдармен түсіндір.

Жаттығулар

Анық интегралды есепте (**36 – 41**):

36. 1) $\int_0^2 3x^2dx;$ 2) $\int_0^2 2xdx;$ 3) $\int_{-1}^4 5xdx;$ 4) $\int_1^2 8 \cdot x^3dx;$

5) $\int_1^e \frac{1}{x}dx;$ 6) $\int_3^4 \frac{1}{x^2}dx;$ 7) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx;$ 8) $\int_0^1 \sqrt{2x}dx;$

9) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx;$ 10) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$ 11) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}};$ 12) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx.$

37. 1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx;$ 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx;$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos 3xdx;$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx.$

38. 1) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx;$ 2) $\int_0^2 e^{4x}dx;$ 3) $\int_1^3 (e^{2x}-e^x)dx.$

39. 1) $\int_{-1}^{1} (x^2+3x))(x-1)dx;$ 2) $\int_{-1}^{0} (x+2)(x^2-3)dx;$

3) $\int_1^3 (x+\frac{1}{x})^2 dx;$ 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx.$

40*. 1) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}};$ 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx.$

41*. 1) $\int_1^5 x^2\cdot\sqrt{x-1}dx;$ 2) $\int_1^5 \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx;$ 3) $\int_0^1 \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx.$

42*. 1) Сондай a және b сандарын тап, $f(x)=a\cdot 2^x+b$ функция $f'(1)=2,$

$\int_0^3 f(x)dx=7$ шартарын қанағаттандырсын.

2) $\int_1^b (b-4x)dx \geq 6-5b$ теңсіздік орындалатын барлық $b>1$ сандарды тап.

43*. 1) $\int_1^2 (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx \leq 12$ теңсіздік орындалатын барлық b сандарын тап.

2) Қандай $a>0$ сандар үшін $\int_{-a}^{a} e^x dx > \frac{3}{2}$ теңсіздік орындалады?

44. $f(x)$ функцияни a ның еркін дәрежесіндегі теңдіктер орындалатын етіп таңда:

1) $\int_0^a f(x)dx = 2a^2-3a;$ 2) $\int_0^a f(x)dx=4a-a^2;$

3) $\int_2^a f(x)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}x^2;$ 4) $\int_0^a f(x)dx=a^2+a+\sin a.$

Интегралдарды есепте (**45 – 46**):

45. 1) $\int_0^1 (e^{-x}+1)^2 dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} 10^x \cdot 2^{-x} dx$; 3) $\int_0^1 (e^{-x}-1)^2 dx$;

4) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx$; 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$; 6) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$.

46*. 1) $\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^{x+1}} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x} dx$; 3) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2xdx}{x^2-2}$; 5) $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{12^x} dx$; 6) $\int_0^2 4^{-x} \cdot 8^x dx$.

47. $x=a$, $x=b$ түзу сызықтар, Ox осі және $y=f(x)$ функция графигімен шегараланған қисық сызық трапетция бетін тап. Сәйкес сурет сыз:

1) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3$; 2) $a=2$, $b=4$, $f(x)=x^2$;

3) $a=-2$, $b=1$, $f(x)=x^2+2$; 4) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$.

48. Ox оғы және берілген параболамен шекараланған форма бетін тап:

1) $y=9-x^2$; 2) $y=16-x^2$; 3) $y=-x^2+5x-6$;

4) $y=-x^2+7x-10$; 5) $y=-x^2+4x$; 6) $y=-x^2-3x$.

Төмендегі сызықтармен шекараланған форма бетін тап. Сәйкес сурет сыз (**49 – 50**):

49. 1) $y=-x^2+2x$, $y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18$, $y=0$;

3) $y=2x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; 4) $y=-x^2+2x$, $y=x$.

50. 1) $y=-2x^2+7x$, $y=3,5-x$; 2) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$;

3) $y=x^2$, $y=0$, $y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2, y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2^x, y=2, x=0$;

7) $y=|\lg x|, y=0, y=2, x=0$.

Бақылау жұмыс үлгісі
І вариант

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-\cos 3x$ функцияның барлық бастапқы функцияларын тап.

2. Егер $F(\dfrac{3}{2})=1$ болса, $f(x)=\dfrac{6}{(4-3x)^2}$ функцияның бастапқы функция $F(x)$ ті тап.

3. Есепте: $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx$.

4. Есепте: $\int\limits_{0}^{\pi}\sin\dfrac{x}{3}dx$.

5. Ox оғы, $x=-1$ және $x=2$ түзу сызықтар және $y=9-x^2$ параболамен шекаралаңған қисық сызықты трапецияның бетін есепте.

ІІ вариант

1. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+\sin 4x$ функцияның барлық алғашқы функцияларын тап.

2. Егер $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ болса, $f(x)=\dfrac{3}{(2-5x)^3}$ функцияның алғашқы функциясы $F(x)$ ті тап.

3. Есепте: $\int\limits_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$.

4. Есепте: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\dfrac{x}{2}dx$

5. Ox оғы, $x=-2$ және $x=3$ түзу сызықтар және $y=x^2-1$ параболамен шекаралаңған қисық трапетциянын бетін есепте.

ЖАУАПТАР
І БӨЛІМ

1. *а*) Пульс жиілігі – бұл жүректің бір минутта қанша ұруын көрсететін белгі. Демек, бір минутта Мадинаның жүрегі 67 рет ұрады. *b*) 4020. **2.** *а*)$\approx 0{,}00150\ \dfrac{\text{қате}}{\text{сөз}}$. Сапсасы артады; *б*)$\approx 0{,}15$. **3.** Маруфтың жалпы орындаған жұмысы. **4.** ***а)*** $\approx 0{,}000177\ \dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$. **5.** $89\ \dfrac{\text{км}}{\text{сағат}}$ немесе $89\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. **6.** а) $0{,}1\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; б) $0{,}9\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; с) $0{,}5\ \dfrac{m}{s}$. **7.** а) $3{,}1\ \dfrac{\text{дана}}{g}$; $4{,}22\ \dfrac{\text{дана}}{g}$; б) доза 2 граммнан 8 граммға дейін асырылғанда жәндіктер саны тезірек кемиді, сосын кемеюі жай болады. **8.** а) 7; б) 7; с) 11; д) 16; е) 0; ф) 5. **9.** а) 5; б) 7; с) с. **10.** а) –2; б) 7; с) –1; д) 1. **11.** а) –3; б) –5; с) –1 д) 6; е) –4; ф) –8; г) 1; х) 2; и) 5. **13.** а) $3x^2$; б) $-\dfrac{1}{x^2}$; с) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; д) 0. **15.** а) 2; б) $6x+5$; с) $6x^2+8x+6$. **16*.** а) $f'(x)=a$; б) $f'(x)=2ax+b$; с) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\dfrac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$.

23. 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{4}$; 4) $2x-\dfrac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$.

27. 3) $-\dfrac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3-4$; 8) $7x^6+3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\dfrac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0. **32.** 2) $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi$, $n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\dfrac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\dfrac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) x^6+1.

39. x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\dfrac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\mathrm{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\dfrac{5\mathrm{ctg}x}{x}-\dfrac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. 8) $y=-\sin 1\cdot x+\sin 1+\cos 1$; $y=-x\cdot\sin 2+2\sin 2+\cos 2$; $y=1$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) шешімі жоқ; 4) 0 және $\dfrac{2}{3}$; 6) 0 және $\dfrac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$;

$y=-x+21$; $y=-x+1$. **49.** 2) 0,1 ; 0,331 . **50.** 2) а) 0,2718; б) 9,06; 4) а) 0,938127; б) 31,2709. **51.** 2) а) 0; б) 0; 4) а) 0,119401; б) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x-3$; 6) $18-2x$; 8) $48x^2+10x-2$. **54.** 1) а) 15; б) 15; с) 15; д) 15; 4) а) –29; б) 12; с) 5; д) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1-x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15 m/s. **58.** 3) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\text{tg}x+\dfrac{x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln 7+7^x\cdot 7x^6$; 12) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$; 14) $8-2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 және 2 . **62.** 2) $-2x^{-3}-1$. **63.** 2) 2,75. **64.** 2) $\dfrac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\dfrac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$.

66. 2) $e^{5x}(4\cos x-6\sin x)$; 4) $\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\dfrac{1}{\sin^2 1}-\dfrac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\dfrac{\text{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\dfrac{35\text{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x-10)\ln\cos x-(x^2-10x+7)\text{tg}x$.

69. 3) өсуі: $(-\infty;-3)\cup(3;-\infty)$ кемеюі: $(-3;3)$.
4) өсуі: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; кемеюі: Ø.
6) өсуі: $(-\infty;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; кемеюі: $-\sqrt{2};\sqrt{2}$.
8) өсуі: $(-\infty;0)$; кемеюі: $(0;+\infty)$.
9) өсуі: $(-1;0)\cup(1;+\infty)$; кемеюі: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
10) өсуі: $(2;+\infty)$; кемеюі: $(-\infty;2)$.
14) өсуі: $(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$; кемеюі: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.

71. 2) локалдық минимум $x=4$; локалдық максимум шешімі жоқ.
4) локалдық минимум $x=5$; локалдық максимум $x=-5$.
6) локалдық минимум $x=0{,}75$; локалдық максимум шешімі жоқ.
8) локалдық минимум $x=2n\pi, n\in\mathbb{Z}$; локалдық максимум $x=\pi+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$.

72. 2) өседі $(-1;1)$; азаяды: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
4) өседі: $(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$; азаяды: $(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi;\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$;
6) өседі: Ø ; азаяды: $(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$.

73. 2) ең үлкен мәні: 57; ең кіші мәні: –55.
4) ең үлкен мәні: 84; ең кіші мәні: $-\dfrac{28}{9}$.

76. 5625m^2. **80.** 80 m. **83.** 1) 5 s; 2) 250 m/s; 3) $\dfrac{1875}{4}$ m.

87. 1) 4м^3; 2) 5324 м^3; 3) 407 $\frac{m^3}{min}$;

89. 1) 30 ; 2) 1800000 сум .

91. d) 24,52, –0,1; e) 40,52, 9,86. **93.** g) 2,0004. **94.** e) 0,9302.

95. d) 0,526. **96.** d) 0,1247. **112.** 1) ең үлкен 13; ең кіші 13; 3) ең үлкен шешімі жоқ; ең кіші 5; 5) ең үлкен шешімі жоқ; ең кіші $\frac{11}{6}$.

113. 2) y=13x+4;y=13x+4; y=13x+4. **114.** 1) шешімі жоқ. **115.** 3) шешімі жоқ

117. 1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) –2x+1; 2) cos$x$+sin$x$; 4) 4^xln4–cos$x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) 4x^3; 3) $1+\frac{20}{x^2}$; 6) e^x(sin$x$+cos$x$);8) 20sin$x$+2(10x–1)cos$x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$; 0; 2) 3; 3; 3) –2π +1; π+1. 4) – π; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
7) $1-\frac{\pi^3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) –sin2x.

128. 2) өседі: (–∞; +∞); кемейеді: Ø.
4) өседі: Ø; кемейеді: (–∞; 0) ∪ (0; +∞).
6) өседі: (–∞; +∞); кемейеді: Ø.
8) өседі: (0; +∞); кемейеді: (–∞; 0).

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.

130. 2) локалдық минимум: x=9. локалдық максимум: шешімі жоқ

131. 2) ең үлкен: 81; ең кіші: –6. **134.** 62 500 м^2.

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) 3cos(3x+2); 4) 8(2x+1)^3;

144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.

145. 1) 10x(x^2+1)^4; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.

146. 1) өседі: (–∞; 0,5); кемейеді: (0,5; –∞);
3) өседі: (–1; 1); кемейеді: (– ∞; –1)∪(1;+ ∞).
4) өседі: (–∞; +∞); кемейеді: Ø.

7) өседі: $(-\infty; +\infty)$;   кемейеді: $\varnothing$.
8) өседі: $(1; +\infty)$;   кемейеді: $(-\infty; 1)$.

147. 1) стационар нүктелері: 1 және 3; локалдық максимум: 0; локалдық минимум: –4.

II БӨЛІМ

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.
6. 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x^2}{2}+3x+2{,}5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15{,}8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$.
12. 1) $5\ln|x-2|+7$; 2) $3\ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$. **14.** 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$.

17. 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$; 6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$. **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; 4) $x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$;

4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.
23. 2) $\frac{-1}{4}\cos 4x+C$. **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$. **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$; 4) $\ln|x-4|+C$.
26. 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$.
28. 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$. **31.** 4)

$x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x - x\cos x + C$; 2) $x^2\cdot\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + C$;

3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$; 4) $x\cdot\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)+C$; 3) $9\sin\frac{x}{3} - 3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

36. 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$. **38.** 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^8-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$; 2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$; 2) $f(x)=4-2x$; 3) $f(x)=x^2-3x$; 4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0{,}4}{\ln 5}+\frac{0{,}1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **48.** 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 121,5; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$.

50. 1) 9; 2) 9; 3) 4,5;

Пайдаланылған және ұсынылатын әдебиеттер

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 2 учебное пособие, Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.
5. *А.У. Абдухамидов* және т.б. Алгебра және математикалық анализ негіздері , 1- бөлім, Ташкент, “Оқытушы”, 2012.
6. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. *Г.К. Муравин и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. *Г.П. Бевз* и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
12. “Математика в школе” журналы.
13. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
14. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
16. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
17. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
18. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
19. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
20. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.

МАЗМҰНЫ

I тарау. **ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ 3**

1–2. Өзгеруші мөлшерлер өсуінің қатынасы және оның мағынасы. жанамаға сипаттама. Функция арттырушысы 3

3–4. Лимит туралы түсінік 12

5–6. Туынды, оның геометриялық және физикалық мәні............... 16

7–9. Туындыны есептеу ережелері 24

10–12. Күрделі функцияның туындысы 30

13–14. Функция графигіне өткізілген жанама және нормал теңдеулер 34

15–17. Мысалдар шешу 39

18–21. Туынды көмегінде функцияны тексеру және графиктер жасау 42

22–25. Геометриялық, физикалық, үнемдеу мазмұнды экстремал мәселелерді шешуде дифференциал есеп әдістері 50

26–28. Жуық-мәндес есептеулер 56

29–32. Туынды көмегінде модельдестіру 62

33–36. Мысалдар шешу 73

II тарау. **ИНТЕГРАЛ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ 79**

37–39. Бастапқы функция және анық емес интеграл түсінігі.............. 79

40–43. Интеграл кестесі. Интегралдастырудың ең оңай ережелері . 86

44–46. Анық интеграл. Ньютон–Лебнис формуласы 96

Жауаптар 106

ГЕОМЕТРИЯ

I ТАРАУ. КЕҢІСТІКТЕ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

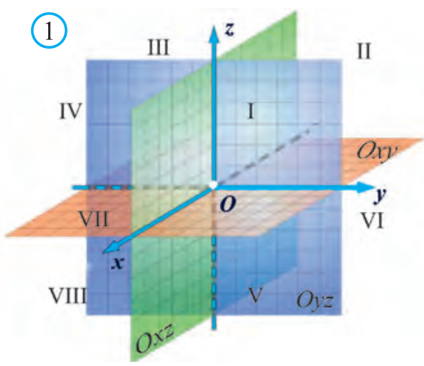
1. КЕҢІСТІКТЕ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ

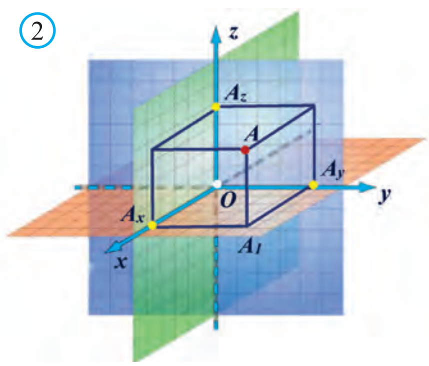
1.1. Кеңістікте декарт координаталар жүйесі

Жылдамдықта декарт координаталары жүйесімен төменгі сыныптарда танысқансындар. Кеңістікте координаталар жүйесі де жазықтықтағыға ұқсас енгізіледі. *O* нүктесінде қиылысатын және координата басы осы нүктеде болған өзара перпендикуляр үш *Ox*, *Oy* және *Oz* координата осьтеріні қараймыз.

Бұл түзу сызықтардың әр бір жұбы арқылы *Oxy*, *Oxz* және *Oyz* жазықтықтар өткіземіз (1- сурет). Кеңістікте тікбұрыш бұрышты декарт координаталары жүйесі осы тәрізде енгізіледі және онда

O нүкте – *координаталар басы*,
Ox, *Oy* және *Oz* тік сызықтар – *координата осьтері*,
Ox – *абсциսстар*, *Oy* – *ординаталар* және *Oz* оғы – *аппликаталар осі*,
Oxy, *Oyz* және *Oxz* жазықтықтар – *координаталық жазықтықтары* деп аталады.

1


2


Координаталық жазықтықтары фазаны сегіз осі *октантаға* (*бөлікке*) бөледі (1- сурет).

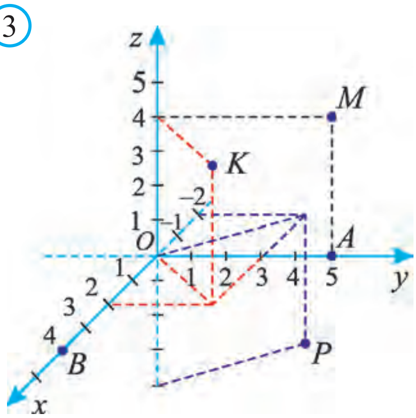
Кеңістікте кез келген *A* нүкте берілген болсын. Бұл нүктеден *Oxy*, *Oyz* және *Oxz* координата жазықтықтарына перпендикуляр жазықтықтар түсіреміз (2- сурет). Бұл жазықтықтардан бірі *Ox* осіні A_x нүктеде кесіп өтеді.

A_x нүктенің *x* осіндегі координатасы *A* нүктенің *x* – *координатасы немесе абсциссасы деп аталады*.

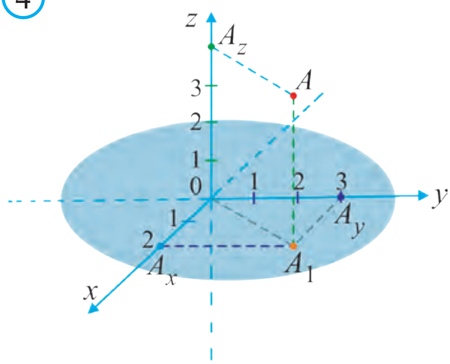
А нүктенің *y – координатасы* (*ординатасы*) немесе *z – координатасы* (*аппликатасы*) да осы тәрізді анықталады.

А нүктенің координаталары $A(x; y; z)$ немесе қысқаша $(x; y; z)$ тәрізде белгіленеді. 3- суретте бейнеленген нүктелер төмендегі координаталарға ие: $A(0; 5; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $M(0; 5; 4)$, $K(2; 3; 4)$, $P(–2; 3; –4)$.

3



4



1-мысал. Кеңістікте декарт координаталары жүйесі енгізілген. Ондағы $A(2; 3; 4)$ нүктенің орнын анықта.

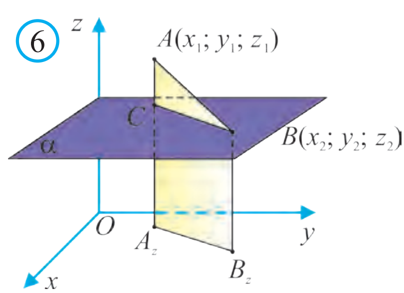
Шешу. Координата басынан *Ox* және *Oy* осьтерінің оң бағытында, сәйкес тәрізде, $OA_x = 2$ және $OA_y = 3$ кесінділерді қоямыз (4- сурет).

A_x нүктеден *Oxy* жазықтықта жатқан және *Oy* осіне параллел тік сызықтар жүргіземіз. A_y нүктеден *Oxy* жазықтықта жатқан және *Ox* осіне параллель түзу сызық жүргіземіз. Бұл түзу сызықтардың қиылысу нүктесін A_1 мен белгілейміз. A_1 нүктеден *Oxy* жазықтыққа перпендикуляр жүргіземіз де онда *Oz* осінің оң бағытында $AA_1 = 4$ кесінді қоямыз. Пайда болған $A(2; 3; 4)$ нүкте ізделіп жатқан нүкте болады. □

Заманалық цифр-дәстүрлі басқарылатын станоктар мен автоматтандырылған роботтар үшін координаталар жүйесінен пайдаланып дәстүрлер түзіледі де олар негізінде металлдарға өңдеу беріледі (5- сурет).

5

6



1.2. Екі нүкте ара қашықтығы

Екі $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері берілген болсын.

1. Алдымен AB түзу сызық Oz осіне параллель болмайтын жағдайды қарастырайық (6- сурет). A және B нүктелері арқылы Oz осіні параллель түзу сызықтар жүргіземіз. Олар Oxy жазықтығын A_z және B_z нүктелерінде қиып өтеді.

Бұл нүктелердің z координатасы 0-ге тең болып, x және y координаталары болса сәйкес тәрізде A, B нүктелерінің x және y координаталарына тең.

Енді B нүктесі арқылы Oxy жазықтыққа параллель α жазықтық жүргіземіз. Ол AA_z түзу сызықты бір C нүктесінде қиып өтеді.

Пифагор теоремасы бойынша: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Бірақ $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ va $AC = |z_2 - z_1|$.

сондықтан $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. AB кесіндісі Oz осіне параллель, яғни $AB = |z_2 - z_1|$ болғанда да жоғарыдағы формула орынды болады, себебі бұл жағдайда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Демек, *A және B нүктелер арақашықтық*:

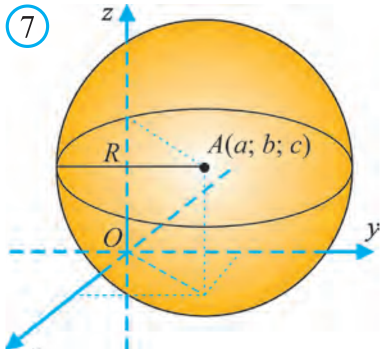
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Анықтама. (1) формула тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$ болғанда, оның диагоналының ұзындығын өрнектеген.

Сфера және шар теңдеуі. Белгілі, $A(a; b; c)$ нүктеден R қашықтықта жатқан барлық $M(x; y; z)$ нүктелер сфераны құрайды (7- сурет). Онда (1) формулаға қарағанда, орталығы $A(a; b; c)$ нүктеде радиусы R ге тең болған сферада жатқан барлық нүктелер координаталары $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ жазықтықты қанағаттандырады.

Онда, анық, орталығы $A(a; b; c)$ нүктеде, радиусы R ге тең болған шар теңдеуі $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$ тәрізде өрнектеледі.

7



2- мысал. Ұштары $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$ нүктелерде болған ABC үшбұрыштың периметрін тап.

Шешу: ABC үшбұрыштың периметрі $P=AB+AC+BC$. Екі нүкте арасындағы қашықтық формуласы $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ден пайдаланып үшбұрыштың бүйірін табамыз:

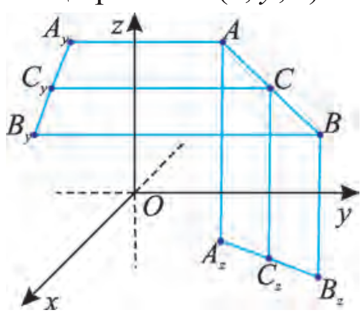
$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$
$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$
$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

Демек, ABC үшбұрыш тең бүйірлі және оның периметрі:
$P=3\cdot7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$. *Жауап:* $21\sqrt{2}$. □

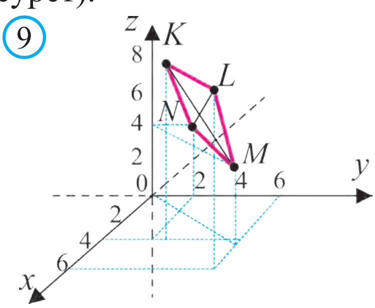
1.3. Вектор ортасының координаталары

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $B(x_2;\ y_2;\ z_2;)$ – еркін нүктесінде болатын, AB векторының ортасы $C(x;\ y;\ z)$ болсын (8- сурет).

8



9



A, B және C нүктелері арқылы Oz осіне параллель түзу сызықтар жүргіземіз. Олар Oxy жазықтықты $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$ және $C_z(x;\ y;\ 0)$ нүктелерде қиып өтсін.

Фале теоремасына қарағанда C_z нүкте A_zB_z вектордың ортасы болады.

Онда жазықтықта вектор ортасының координаталарын табу формуласына қарағанда $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

z ны табу үшін Oxy жазықтық орнына Oxz немесе Oyz жазықтықты алудың өзі жеткілікті.

Мұнда z үшін де жоғарыдағыларға ұқсас формула пайда болады

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Сонда ұқсас берілген AB кесіндіні λ қатынаста ($AP : PB = \lambda$) болатын $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нүктенің координаталары A және B нүктелерінің координаталары арқылы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

формулалар көмегінде табылады. Олардың дұрыс екендігін көрсет.

3-мысал. Ұштары $M(3;6;4), N(0;2;4), K(3;2;8), L(6;6;8)$ нүктелерде болған $MNKL$ төртбұрыштың параллелограмм екендігін дәлелде (9- сурет).

Дәлелдеу: Есепті шешуде диагоналдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінетін төртбұрыштың паралеллограмм екендігінен пайдаланамыз.

MK кесінді орталығының координаталары:

$$x = \frac{3+3}{2} = 3; \qquad y = \frac{6+2}{2} = 4; \qquad z$$

NL кесінді орталығыының координаталары:

$$x = \frac{0+6}{2} = 3; \qquad y = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

MK және NL кесінділер орталықтарының координаталары бірдей екенін көреміз. Бұл берілген кесінділер қиылысуын және қиылысу нүктесінде олар теңдей екіге бөлінгенін білдіреді.

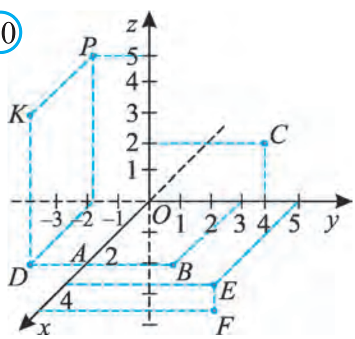
Демек, $MNLK$ төртбұрыш–параллелограмм.

Тақырыпқа тиісті есептер мен практикалық тапсырмалар

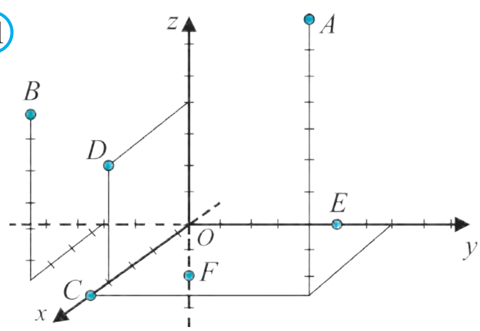
1. 10- суретте көрсетілген нүктелердің координаталарын анықта.

2. Кеңістікте декарт координаталары жүйесі енгізілген болып, онда $A(0;\ 3;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 8)$, $D(0;\ -9;\ 0)$, $E(5;\ -1;\ 2)$, $F(-6;\ 2;\ 1)$ нүктелер берілген. Бұл нүктелер қайсы *а*) координаталар өсінде; *б*) координаталар жазықтығында; *с*) октантта жатады?

10



11



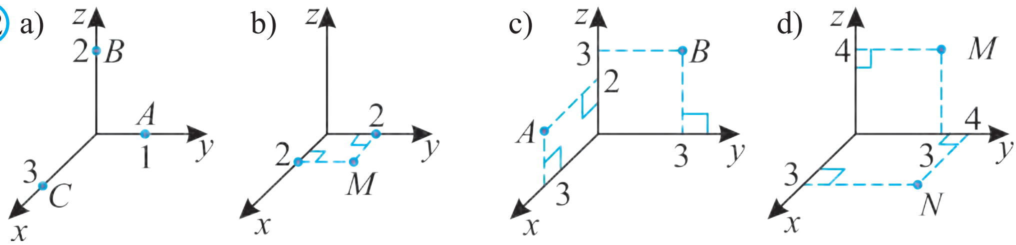
3. 11-суреттегі нүктелер координаталарын анықта.

4. 12- суретте белгіленген нүктелердің координаталарын анықта.

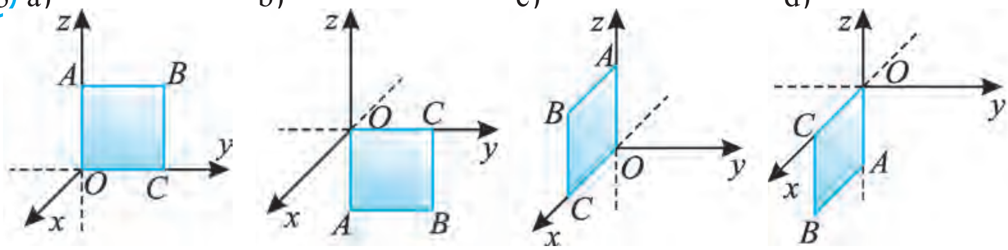
5. 13-суретте диоганалы $\sqrt{2}$ -ге тең болған квадрат бейнеленген.Оның ұштарының координаталарын анықта.

6. A (3; 2; 4) нүктенің координата жазықтығындағы проекциясының координаталарын анықта.

12 a) b) c) d)



13 a) b) c) d)



7.Кеңістікте декарт координаталары жүйесі енгізілген болып,онда $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 5)$, $D(-2; 2; 0)$, $E(5; -1; 0)$, $F(0; 2; 0)$, $G(9; 0; 0)$, $H(9; 0; 2)$, $I(6; 3; 1)$, $J(-6; 3; 5)$, $K(-6; -2; 3)$, $L(6; -2; 4)$, $M(6; 3; -9)$, $N(-6; 3; -8)$, $O(-6; -3; -6)$, $P(6; -3; -2)$ нүктелер берілген болсын. Бұл нүктелер қайсы координаталар осінде, координаталар жазықтығында және октантта жатады? Төменде берілген кестені үлгілер бойынша толтыр.

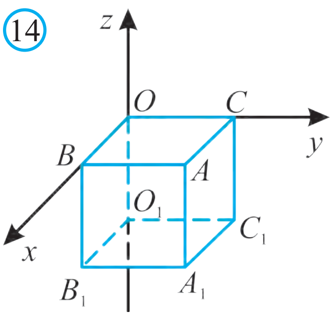
Нүкте орны	Нүкте координаталары қасиеті	Нүкте
Ox осі	$y=0$, $z=0$ тек x координата нөльден өзгеше	$G(9; 0; 0)$
Oy осі		
Oz өсы		
Oxz жазықтық	$z=0$, x және y координаталар нөльден өзгеше	$D(-2; 2; 0)$
Oyz жазықтық		
Oxz жазыктық жазықтық		
1-октант	$x>0$, $y>0$, $z>0$	$I(6; 3; 1)$
2-октант		
3-октант		
4-октант		
5-октант		
6-октант		
7-октант		
8-октант		

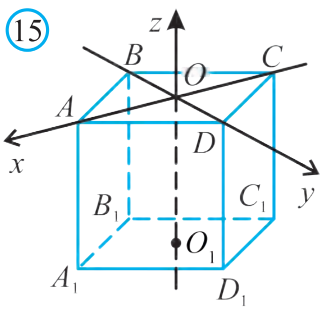
8. $A(2;\ 0;\ -3)$ және $B(3;\ 4;\ 0)$ нүктелер арасындағы арақашықтықты анықта.

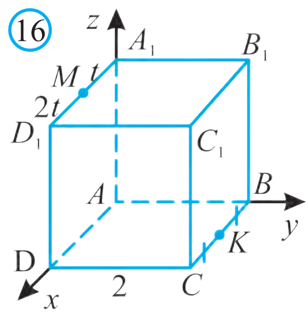
9. $A(3;\ 3;\ 3)$ нүктеден а) координата жазықтықтарына дейін; б) координата осьтеріне дейін; с) координата басына дейін болған ара қашықтықтарды анықта.

10. $M\ (2;\ -3;\ 1)$ нүктеден координата жазықтықтарға дейін болған арақашықтықтарды анықта.

11. Координата жазықтықтарының әрбіреуінен 3 бірлік арақашықтыққа алыстаған нүктенің орнын анықта.







12. Егер $OA=2\sqrt{2}$ болса, 14-суретте бейнеленген кубтың ұштарындағы координаталарын анықта.

13. $C(2;\ 5;\ -1)$ vа $D(2;\ 1;\ -6)$ нүктелердің қай бірі координата басына жақын орналасқан?

14. Ұштары $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ 2)$ нүктелерде болған үшбұрыштың периметрін анықта.

15. Ұштары $A(1;2;3)$, $B(2;3;4)$, $C(3;4;5)$ нүктелерде болған үшбұрыш бар ма?

16. $A(-2;\ 0;\ 5)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$, $C(1;\ 1;\ -3)$, $D(0;\ -1;\ -1)$ нүктелер параллелограмм ұштары екендігін дәлелде.

17. ABC үшбұрыш түрін анықта, оның периметрі және жүзін анықта: а) $A\ (3;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 3;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 3)$; b) $A\ (2;\ 0;\ 5)$, $B\ (3;\ 4;\ 0)$, $C\ (2;\ 4;\ 0)$; c) $A\ (2;\ 4;\ -1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 2)$, $C\ (5;\ 1;\ 2)$.

18. Oxy жазықтықта жататын және $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ -1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$ нүктелерден бірдей ұзақтықта жататын нүктенің координаталарын анықта.

19. $A\ (1;\ 1;1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 1)$, $C\ (-1;\ -1;\ 1)$, $C_1\ (-1;\ -1;\ -1)$ нүктелер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың ұштары болса, оның қалған ұштарының координаталарын анықта.

20. Ұштары $S\ (0;\ 0;\ 0)$, $A\ (2;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 2;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 2)$ нүктелерде болған $SABC$ пирамиданың тең екендігін дәлелде.

21. Орталығы координаталар басында, радиусы 5 ке тең болған сфера және шар теңдеулерін жаз.

22. Орталығы A (1; 2; 4) нүктеде, радиусы 3 ке тең болған шар теңдеуін жаз.

23. Диаметрі ұштары A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1) нүктелерде жатқан сфера теңдеуін жаз.

24. Қалың қағаздан куб моделін жаса. Оның бір ұшын координата басы, одан шығушы қырлары бірлік ретінде сыртқы жағы алынып , оның басқа ұштарының координаталарын анықта.

25. AB кесінді орталығының координаталарын анықта:
1) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$; 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$; 3) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$,
4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2})$.

26. 15-суретте бейнеленген куб қырлары орталарының және жақтар орталықтарынын координаталарын анықта.

27. $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$ нүктелер берілген. а) AB және CD; в) AC және BD кесінділер орталығының координаталарын анықта.

28. $M(1;-1;2)$ және $N(-3;2;4)$ нүктелер AB кесіндіні үш тең бөліктерге бөледі. AB кесінді ұштарындағы координаталарды анықта.

29. $ABCD$ төртбұрыштың қабырғалары және $A_1B_1C_1D_1$ тік төртбұрыштың қабырғаларына сәйкес түрде параллель. $ABCD$ – тік төртбұрыш екенін дәлелде?

30. $ABCD$ тіктөртбұрыштың A ұшынан оның жазықтыққа перпендикуляр AK түзу сызық өткізілген. K нүктеден тіктөртбұрыштың басқа ұштарына дейін болған арақашықтықтар 6 см , 7 см және 9 см. AK кесіндінің ұзындығын анықта.

31* Кеңістікте $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$ нүктелер берілген. Oyz жазықтықта A, B, C нүктелерден бірдей қашықтықта жатқан нүктені анықта.

32. $ABCD$ параллелограмның ұштары : а) $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4;2;-5)$; b) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$; c) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$ болса, D ұшының координаталарын анықта.

33. CK кесіндіні $CK{:}KM = \lambda$ шамада бөлетін $M(x; y; z)$ нүктенің координаталарын анықта. а) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ va $\lambda=2$; b) $C(1;-1; 2)$, $K(2;-4;1)$ va $\lambda=0{,}5$; c) $C(1;0;-2)$, $K(9;-3;6)$ және $\lambda=\frac{1}{3}$.

34. Ұштары $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ нүктелерде болған үшбұрыш медиандарының қиылысу нүктесі M нің координаталарын анықта.

35. Ұштары $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$ нүктелерде болған үшбұрыштың BL биссектрисасының L ұшы координаталарын анықта.

36*. Ұштары $A(4; 0; 1)$, $B(5; -2; 1)$, $C(4; 8; 5)$ нүктелерде болған үшбұрыштың AL биссектрисасының ұзындығын анықта.

37*. Ұштары $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(3;\ -1;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ -1)$ нүктелер болған ұшбұрыш берілген. Оның: а) үлкен бүйіріне түсірілген биіктігін; б) бұрыштарын; с) ауданын анықта.

38*. 16-суретте кескінделген куб туралы мәліметтерден пайдаланып MK кесіндінің ұзындығын анықта.

Тарихи мәліметтер

Әбу Райхан Беруни әйгілі ғұлама және математик Әбу Әли ибн Синаға хат арқылы төмендегі сұрақты береді: ,,Не үшін Аристотель және басқа философтар бүйірлерді алтау деп атайды?"

Беруни алты жақты кубты алып, ,,өзге сандағы бүйірлерге ие болған" денелер туралы сөйлейді және ,,шар сияқты дененің бүйірлері жоқтығын" қосып қояды.

Ибн Сино болса ,,барлық жағдайларда да бүйірлер алтау деп есептелу керек ,себебі әрбір денеде, оның пішініне қарамай үш өлшеулі – ұзындық, тереңдік және кеңдік бар" деп жауап береді.

Бұл жерде Ибн Сино ,,алты бүйір " деп таңбаларымен алынған үш координатаны ескереді.

Беруни ,,Заңды Маъсудий" шығармасында алты бүйірдің анық математикалық мағынасын келтіреді: ,,Бүйірлері алтау, себебі олар денелердің өлшеулері бойынша қозғалыстары шексіз. Өлшеулер үшеу, бұл ұзындық, кеңдік және тереңдік, олардың ұштары өлшеулерінен екі ес үлкен".

Шығарманың алдыңғы кітаптарында автор жарытқыштардың аспандағы жағдайын аспан сферасына шамалап екі координата – эклиптикалық кеңістік және ұзақтау арқылы немесе дәл солай координаталар арқылы, бірақ аспан экваторы немесе горизонтқа шамалап анықтайды. Бірақ жұлдыздар мен жарытқыштардың өзара жайғасқанын анықтау мәселесінде олардың бір-бірлерін тосып қалу жағдайларын да көңіл бөлуге тура келеді. Осындай жағдайда үшінші сфералық координатаға қажеттілік туылады.Осы қажеттілік Әбу Райхан Беруниді кеңістіктегі координаталар идеясын ілгері сүруге алып келген.

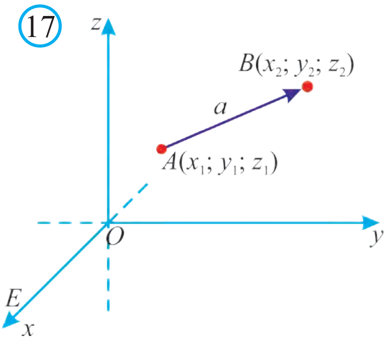
2. КЕҢІСТІКТЕ ВЕКТОРЛАР ЖӘНЕ ОЛАР ҮСТІНДЕ АМАЛ ТӘСІЛДЕР.

2.1. Кеңістікте векторлар

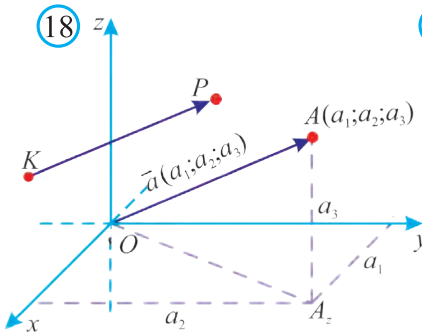
Кеңістікте вектор түсінігі жазықтықтағы сияқты кірітіледі.

Кеңістіктегі вектор деп бағытталған кесіндіге айтылады..

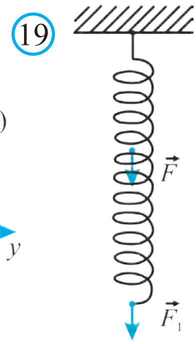
Кеңістіктегі векторларға тиісті негізгі түсініктер: вектордың ұзындығы (модулі), вектордың бағыты, вектордың теңдігі жазықтықтағы сияқты анықталады.



$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$



$\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$



Басы $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ нүктеде және соңы $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктеде болған *вектордың координаталары* *деп* $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ сандарға айтылады (17-сурет).

Векторлардың жазықтықтағыға ұқсас қасиеттері де бар, оларды дәлелсіз келтіреміз.

Дәл жазықтықтағыдай тең векторлардың сәйкес координаталары тең болады де керісінше, сәйкес координаталар тең болған векторлар тең болады.

Бұл векторды оның координаталарымен өрнектеуде негіз болады. Векторлар $\overline{AB}(a_1;a_2;a_3)$ немесе $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ немесе қысқа $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ осылай белгіленеді. (18-сурет).

Вектор координатасыз $\overline{AB}$ (немесе қысқаша $\overline{a}$) түрінде де белгіленеді. Мұнда оның басы бірінші орында, соңы болса екінші орында жазылады.

Координаталары нөлдерден тұратын вектор *нөлдік вектор деп аталады* және $\overline{0}(0;0;0)$ немесе $\overline{0}$ осылай белгіленеді де бұл вектордың бағыты болмайды.

Егер O координата басы мен a_1, a_2 және a_3 сандар A нүктенің координаталары, яғни $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ болса бұл сандар $\overline{OA}$ векторының координаталары болады: $\overline{OA}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Бірақ координаталар кеңістігінде басы $K(c_1;\ c_2;\ c_3)$ нүктеде, соңы $P\ (c_1+a_1;\ c_2+a_2;\ c_3+a_3)$ нүктеде болған $\overline{KP}$ вектор да осы координаталармен өрнектеледі: $\overline{KP}\,(c_1+a_1-c_1;\ c_2+a_2-c_2;\ c_3+a_3-c_3) = \overline{KP}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Осыдан келіп шығып, векторды координаталар кеңістігінде қалаған нүктеге қойылған етіп бейнелеу мүмкін. Геометрияда біз осындай еркін векторлармен жұмыс көреміз. Физикада болса, әдетте векторлар бірер нүктеге қойылған болады. Мәселен, 19-суреттегі F күш серіппенің қайсы нүктесіне қойылғанымен орынды есептеледі.

Вектордың ұзындығы деп оны бейнелеуші бағытталған кесіндінің ұзындығына айтылады (17-сурет). $\overline{a}$ вектордың ұзындығы $|\overline{a}|$ сияқты өрнектелелі.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ вектордың ұзындығы оның координаталары арқылы $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$ формуламен өрнектеледі.

1- мәселе. $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$ және $D(-2;\ 3;\ -1)$ нүктелер берілген. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ және $\overline{BD}$ векторлардан қайсылары өзара тең болады?

Шешілуі: Тең векторлардың сәйкес координаталары тең болады. Соның үшін векторлардың координаталарын табамыз:

$\overline{AB}=(1-2,\ 0-7,\ 3-(-3))=(-1,\ -7,\ 6);$

$\overline{DC}=(-3-(-2),\ -4-3,\ 5-(-1))=(-1,\ -7,\ 6).$

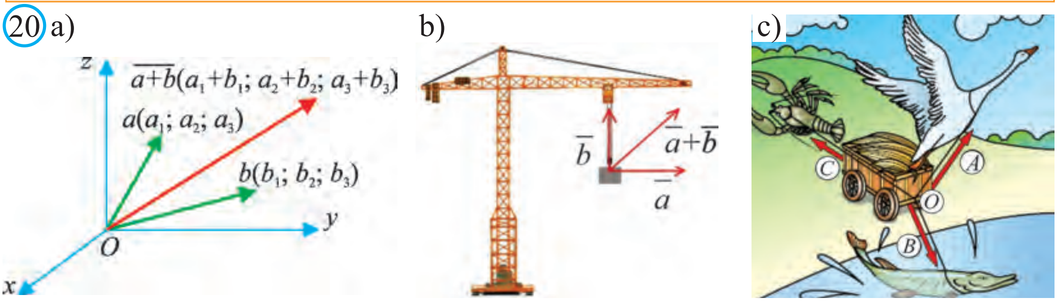
Демек, $\overline{AB}=\overline{DC}$. $\overline{BC}=\overline{AD}$ екендігін көрсет. □

2.2. Кеңістікте векторлар үстінде амал тәсілдер

Векторлар үстінде амалдар. Векторларды қосу, санға көбейту және скаляр көбейту амалдары осындай жазықтықтағыдай анықталады.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ және $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ *вектордың жиынтығы деп* $\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ векторға айтылады (20-сурет).

20 a) b) c)



20.b-суретте кран $\overline{a}$ вектор бойынша, жүк болса кранға шамалау $\overline{b}$ вектор бойынша қозғалып жатқан болсын. Нәтижеде жүк $\overline{a}+\overline{b}$ вектор бойынша қозғалады. Соның үшін, 20.c-суретте бейнеленген орыс жазушысы Крыловтың аңыз қаһармандары не себептен арбаны жайынан қозғата алмағанын сезген болсаңыз керек.

Векторлар жиынтығының қасиеттері.

Ерікті $\overline{a}$, $\overline{b}$ және $\overline{c}$ векторлар үшін төмендегі қасиеттер орынды:

а) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – векторларды қосудың орын ауыстыру заңы;

b) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ – векторларды қосудың үлестірімділік заңы.

Векторларды қосудың үшбұрышты ережесі

Ерікті A, B және C нүктелер үшін (21-сурет): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

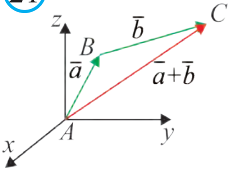
Векторларды қосудың параллелограмм ережесі.

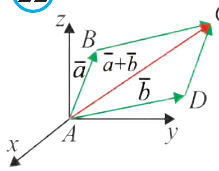
Егер $ABCD$ – параллелограмм (22-сурет) болса, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

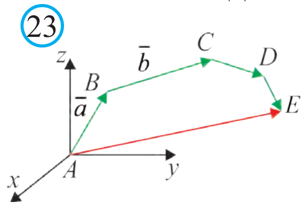
Векторларды қосудың көпбұрышты ережесі.

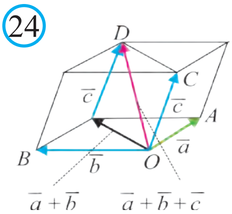
Егер A, B, C, D және E нүктелер көпбұрыш ұштары болса (23-сурет),

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$$ болады.

21


22


23


24


Бір жазықтықта жатқан үш векторларды қосудың параллелепипед ережесі. Егер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед (24-сурет) болса,

$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC}$$ болады.

$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ *вектордың* λ *санға көбейтіндісі деп* $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$ векторға айтылады. (25- сурет).

Ерікті $\overline{a}$, $\overline{b}$ векторлар және λ және μ сандар үшін

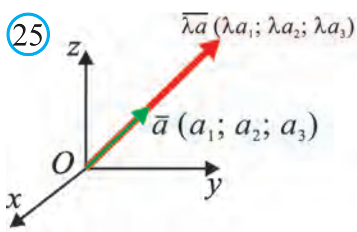
а) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

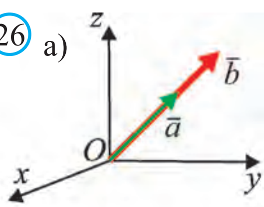
b) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

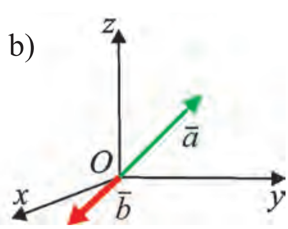
c) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ және $\lambda\overline{a}$ вектордың бағыты

$\lambda>0$ болғанда, $\overline{a}$ вектор бағытымен бірдей және

$\lambda<0$ болғанда, $\overline{a}$ вектор бағытына қарама-қарсы болады.

25


26 a)


b)


2.3. Коллинеар және компланар векторлар

Нольдік вектордан өзгеше $\overline{a}$ және $\overline{b}$ берілген болсын. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар бір жақты немесе қарама-қарсы беттеген болса, олар *коллинеар векторлар* деп аталады (26- сурет).

1- қасиеті. а және $\overline{b}$ векторлар үшін $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ $(\lambda \neq 0)$ теңдік орынды болса, олар өзара коллинеар болады және керісінше.

Егер $\lambda > 0$ болса, $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар бір жаққа ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), егер $\lambda < 0$ болса, қарама-қарсы жаққа ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$) беттеген болады.

2-қасиеті. $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ және $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ векторлар өзара коллинеар болса, олардың координаталары өзара пропорционал болады: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ және керісінше.

2-есеп. Басы A (1; 1; 1) нүктесінде және ұшы *Oxy жазықтығағы* B нүктеде болған және $\overline{a}$(1; 2; 3) векторға коллинеар векторды тап.

Шешу: B нүктенің координаталары $B(x; y; z)$ болсын. B нүкте Oxy жазықтықта жатқаны үшін $z=0$. Онда $\overline{AB}\,(x-1; y-1; -1)$ болады.

Шартқа қарағанда, $\overline{AB}\,(x-1; y-1; -1)$ және $\overline{a}(1, 2, 3)$ векторлар коллинеар. Демек, олардың координаталары өзара пропорционал болады.

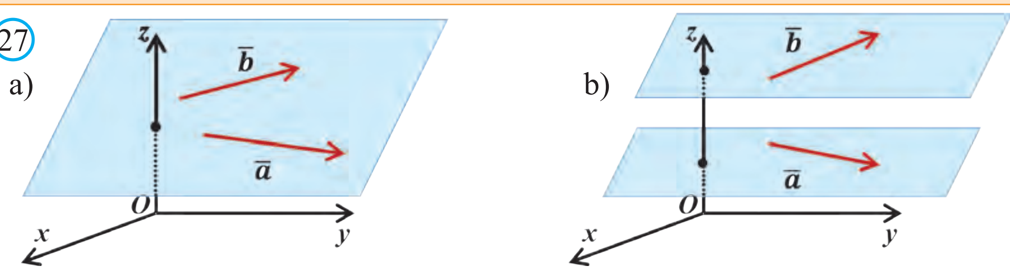
Бұдан $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{-1}{3}$ пропорционалды құраймыз.

Олардан $x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$ екендігіні табамыз.

Онда $\overline{AB}\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; -1\right)$ болады. □

Бір жазықтықта жататын немесе бір жазықтыққа параллель болатын үш вектор *компланар векторлар* деп аталады (27- сурет).

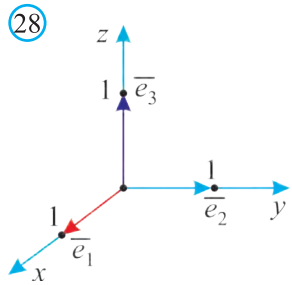
27



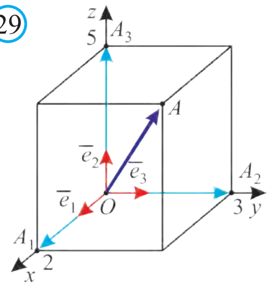
$\overline{e}_1$ (1; 0; 0), $\overline{e}_2$ (0; 1; 0) және $\overline{e}_3$ (0; 0; 1) векторлар *орттар* (бірлік координаталық векторлар) деп аталады (28-сурет).

Ерікті $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ векторды $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ түрінде, жалғыз күйде *орттар бойынша жіктеп жазу* мүмкін (29- сурет).

28



29



Сонымен, үш компланар болмаған $\overline{OA}, \overline{OB}$ және $\overline{OC}$ векторлар берілген болса, еріктi $\overline{OD}$ векторды төмендегі көріністе, жалғыз күйде өрнектеу мүмкін:

$$\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}.$$

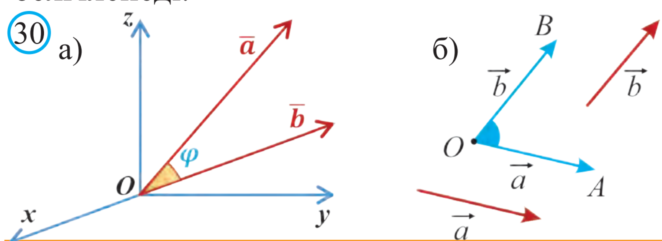
Бұл жерде a_1, a_2, a_3 қандай да анық сандар. Бұған *векторды берілген векторлар бойынша жіктеп жазу деп аталады*

2.4. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

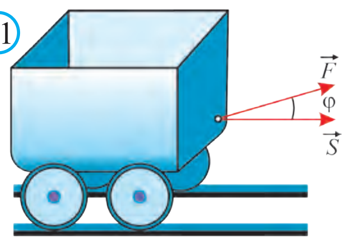
Нолдік вектордан айырмашылығы $\overline{a}$ және $\overline{b}$ *векторлар арасындағы бұрыш* деп O нүктеден шығатын $OA = \overline{a}$ және $OB = \overline{b}$ векторлардың бағыттаушы кесінділері арасындағы бұрышты айтады (30- сурет).

$\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар арасындағы бұрыш $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ тәрізде де белгіленеді.

30



31



$\overline{a}$ және $\overline{b}$ *векторларының скаляр көбейтіндісі* деп, векторлар арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенде шығатын санды айтады.

Егер векторлардың бірі нөлге тең болса, онда бұл екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Скаляр көбейтінді $\overline{a} \cdot \overline{b}$ немесе $(\overline{a}; \overline{b})$ түрінде белгіленеді. Аныктамаға қарағанда

$$(\overline{a}; \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Аныктамадан көрініп тұрғанындай, $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса,олар перпендикуляр болады немесе керісінше.

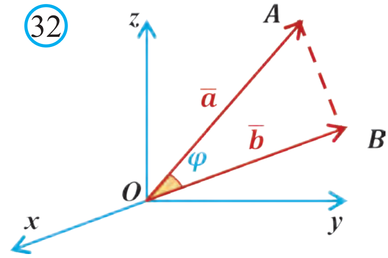
Физикада денені $\overline{F}$ күш ықпалы астында $\overline{s}$ арақашықтыққа жылжытуда атқарылған A жұмыс (31-сурет) $\overline{F}$ және s векторларының скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Қасиет. $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ және $b(b_1; b_2; b_3)$ векторлар үшін $(\overline{a}; \overline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Анықтама. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларды координата басы O нүктеге қоямыз (32-сурет). Онда $\overline{OA} = (a_1; a_2; a_3)$ және $\overline{OB} = (b_1; b_2; b_3)$ болады. Егер берілген векторлар коллинеар болмаса, ABO үшбұрыштан пайда болады да ол үшін косинустар теоремасы орынды болады:

32



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi.\text{Онда}$$

$OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$ болады. Бірақ, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$,

$OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ және $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$.

$$\text{Демек, } (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 -$$

$$- (b_3 - a_3)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

Берілген векторлар коллинеар болған ($\varphi=0°$, $\varphi=180°$) жағдайда да бұл теңдік орынды болуын өз бетіңше көрсет.

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасы

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ – орын алмастыру заңы.
2. $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$ – ажырату заңы.
3. $\lambda \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\lambda \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda \cdot \overline{b})$ – топтау заңы.
4. Егер a және b векторлар бір түрлі бағыттағы коллинеар векторлар болса, $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|$ болады, себебі $\cos 0° = 1$.
5. Егер қарама-қарсы бағытталған болса, $\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}|\,|\overline{b}|$, себебі $\cos 180° = -1$.
6. $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}| \cos 0° = |\overline{a}|^2 \Rightarrow \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.
7. $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$ векторға перпендикуляр болса, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ болады.

Нәтижелер:

а) $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ вектордың ұзындығы: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; (1)

б) $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ және $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ векторлар арасындағы бұрыш косинусы:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}; \qquad (2)$$

c) $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ және $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ векторлардың перпендикулярлық шарты:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \qquad (3)$$

3- есеп. $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$, $D(2; -3; 1)$ нүктелер берілген. $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлар арасындағы бұрыштың косинусыны тап.

Шешу. $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлардың координаталарын сосын ұзындықтарыны табамыз: $\overline{AB} = (1-0;\ -1-1;\ 2-(-1)) = (1, -2, 3)$,

$$\overline{CD} = (2-3;\ -3-1;\ 1-0) = (-1, -4, 1).$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Демек, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|} = \dfrac{1\cdot(-1) + (-2)(-4) + 3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}.$ $\square$

4- есеп. $\overline{a}(1; 2; 0)$, $\overline{b}(1; -\frac{1}{2}; 0)$ векторлар арасындағы бұрышты тап.

Шешу: $$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}} = 0.$$

Демек, $\varphi = 90°$. $\square$

5- есеп. $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$ және бұл векторлар арасындағы бұрыш $\frac{2\pi}{3}$ ке тең болса, $|\overline{a} + \overline{b}|$ ны тап.

Шешуі:

$$|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} + \overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + 2(\overline{a}\cdot\overline{b}) + \overline{b}^2} = \sqrt{|\overline{a}|^2 + 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi + |\overline{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 25 + 2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{34 - 15} = \sqrt{19}$$

6-есеп. Егер $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$ және $\overline{b} = -\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ болса, 1) $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$; 2) $\overline{d} = 2\overline{a} - \overline{b}$ векторларының координаталарын және ұзындығыны тап.

Шешуі: $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар жазық координаталарын жіктеу түрінде вектор көрінісіне қоямыз: 1) $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} - \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$.

Демек, $\overline{c} = \overline{(1;2;-2)}$. Онда $|\overline{c}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$;

2) $\overline{d} = 2\overline{a} - \overline{b} = 2(2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}) - (-\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) = 4\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k} + \overline{i} + \overline{j}2\overline{k} =$
$= 5\overline{i} + 7\overline{j} - 10\overline{k}$.

Демек, $\overline{d} = (5;7;-10)$. Онда $|\overline{d}| = \sqrt{5^2+7^2(-10)^2} = \sqrt{174}$. □

7- есеп. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар арасындағы бұрыш 30° қа тең және $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}|=2$ болса, $(2\overline{a} + 3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})$ көбейтіндісін есепте.

Шешуі: Алдымен $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлар көбейтіндісін есептейміз:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 30° = \sqrt{3}\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Содан кейін көбейтіндісінің үлестірімділік заңына қарағанда, берілген векторлар өрнектерін көпмүшені көпмүшеге көбейту сияқты көбейтеміз:

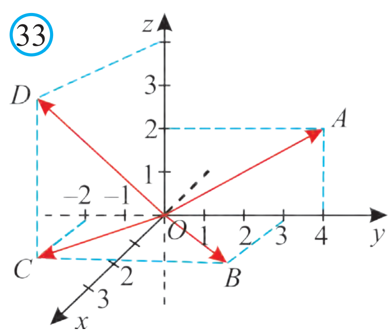
$$(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\overline{a}^2+2(\overline{a},\overline{b})-6(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2=-4\overline{b}^2-4(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2.$$

$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=9$, $\overline{b}=|\overline{b}|^2=4$, $(\overline{a},\overline{b})=3$ екендігіні есепке алсақ, іздеп жатқан көбейткіш $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36$. □

Тақырыпқа сәйкес мысалдар мен практикалық тапсырмалар

39. 33- суреттегі векторлардың координаталарын анықта.

40. $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ және $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктелер берілген. $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ және $\overline{AB}$ векторлар координаталарын анықта.



41. $\overline{AB}$ $(a;\ b;\ c)$ болса, $\overline{BA}$ вектор координаларын айт.

42. Егер а) $A(1;2;3)$, $B(3;7;6)$; b) $A(-3;2;1)$, $B(1;\ -4;\ 3)$ болса, $\overline{AB}$ вектор координаталарын тап.

43. $\overline{a}(1;\ -1;\ 1)$, $\overline{b}(0;\ 2;\ -4)$, $\overline{c}(2;\ 3;\ -1)$, $\overline{d}(1;\ 2;\ 5)$ векторлардың ұзындығын тап.

44. Егер $\overline{a}(2;\ 1;\ 3)$ және $\overline{b}(-1;\ x;\ 2)$ векторлар ұзындығы тең болса, x ты тап.

45. Ұзындығы $\sqrt{54}$ ке тең болған $\overline{a}(c;\ 2c;\ -c)$ вектордың координаталарын тап.

46. A, B, C, D, E және F нүктелер әрдайым алтыбұрыштың ұштары болса, олар арқылы: а) екі тең; б) екі бір түрлі бағытталған; с) екі қарама-қарсыбағытталған және тең; д) екі қарама-қарсы бағытталған және тең болмаған векторларға мысал келтір.

47. k нің қандай мәнінде: а) $\overline{a}(4;\ k;\ 2)$; б) $\overline{a}(k-1;1;4)$; с) $\overline{a}(k;\ 1;\ k+2)$;

d) $\overline{a}(k-1;\ k-2;\ k+1)$ вектордың ұзындығы $\sqrt{21}$ ге тең болады?

48. Үш нүкте берілген: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$. Осындай $D(x;\ y;\ z)$ нүктені табу керек $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлар тең болсын.

49. Үш нүкте берілген: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Егер a) $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлар тең; b) $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторлардың жиынтығы нөлге тең болса, $D\ (x;\ y;\ z)$ нүктені тап.

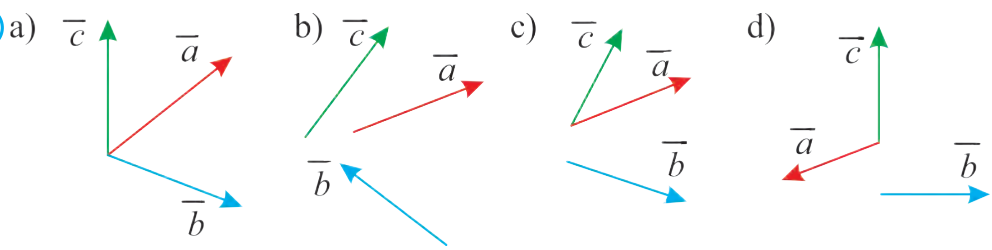
50*. $(2;\ n;\ 3)$ және $(3;\ 2;\ m)$ векторлар берілген. m және n ның қандай мәндерінде бұл векторлар коллинеар болады?

51. Басы $A(1;\ 1;\ 1)$ нүктеде және ұшы Oxy жазықтықтағы B нүктеде болған тағы да $a(1;-2;\ 3)$ векторға коллинеар векторды тап.

52*. $ABCD$ параллелограммның ұштары a) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B\ (3;\ 1;\ 7)$, $C\ (4;\ 2;\ -5)$; b) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$; c) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$; d) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$ болса, D ұшының координаталарын тап.

53. 34-суретте бейнеленген векторлардың параллелепипед заңы бойынша жиынтығын тап.

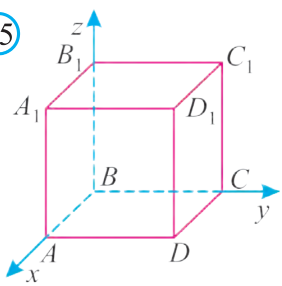
34



54. Егер $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ және $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$ болса, $ABCD$ және $MNPK$ төртбұрыштардан қайсысы ромб, қайсысы квадрат болады?

55. 35- суретте бейнеленген $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубта: a) $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$ векторларға тең; б) $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$ векторларға қарама-қарсы бағытталған; c) $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$ векторларға коллинеар; д) $\overline{AB}$ және $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ va $\overline{A_1C}$ векторлар жұбына компланар векторларды анықта.

35



56. Егер 1) $\overline{a}(1;-\ 4;0)$, $\overline{b}(-\ 4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;\ \ 3;\ \ 0)$ болса, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ вектордың координаталарын және ұзындығын тап.

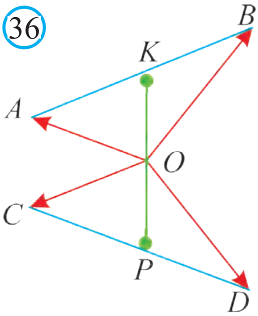
57. Егер 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$ болса, $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ вектордың координаталарын және ұзындығын тап.

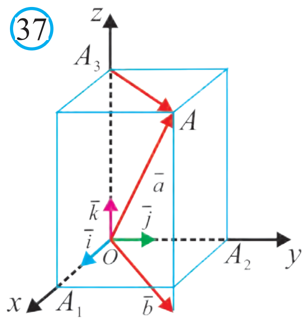
58. Егер $\overline{b}(-4; 8; 2)$ болса, а) $2\overline{b}$; б) $-3\,\overline{b}$; с) $-1{,}5\,\overline{c}$; д) $0\cdot\overline{b}$ вектордың координаталарын және ұзындығын тап.

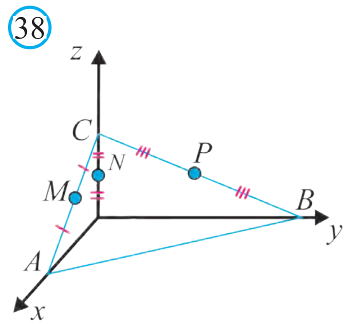
59. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ векторларды орттар бойынша жіктеп жаз.

60*. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}\,(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ векторлар берілген. $|\overline{a}+2\overline{b}|$, $|\overline{a}-3\overline{b}|$, $|\overline{c}-2\overline{d}|$, $|3\overline{a}+4\overline{d}|$ ны тап.

61*. K және P нүктелер айқас түзу сызықтарда жатқан AB және CD кесінділерінің ортасы әрі O нүкте KP кесіндінің ортасы болса (36-сурет), $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{0}$ екендігіні дәлелде.

36


37


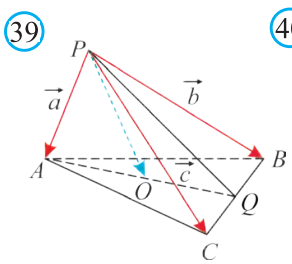
38


62. 37- суретте $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$. $\overline{a}$, $\overline{b}$ және $\overline{A_3A}$ векторлардың координаталарын анықта.

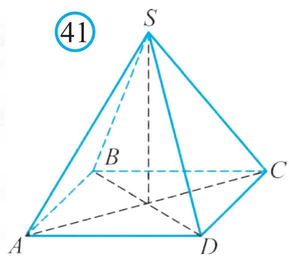
63. 38- суретте $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, M, N және P нүктелер сәйкес түрде, AC, OC және CB кесінділердің ортасы. $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ және $\overline{CN}$ векторлардың координаталарын тап.

64. Q нүкте $PABC$ тетраедрдың BC қырының ортасы және O нүкте AQ кесінді ортасы болса (39- сурет), $\overline{PO}$ векторды $\overline{PA}=\overline{a}$, $\overline{PB}=\overline{b}$ және $\overline{PC}=\overline{c}$ векторлар арқылы өрнекте.

65*. 40- суретте бейнеленген қайыққа теңіз ағымы $\overline{F_1} = 120\ N$ күшпен және жағадан есіп тұрған жел $\overline{F_2} = 100\ N$ күшпен ықпал етіп жатыр. Қайықтың теңізде жайынан қозғалмай тұруы үшін оны қандай күшпен ұстап тұру керек?

39


40


41


66. Скаляр көбейтіндісі: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; с) 0; д) $-\frac{1}{2}$; е) б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ға тең болған бірлік векторлар арасындағы бұрышпен тап.

67. а) $\overline{a}$ (1; –1; 1), $\overline{b}$ (0; 2; –4); б) $\overline{c}$(2; 3; –1), $\overline{d}$ (1; 2; 5); с) $\overline{e}$(1; –1; 1), $\overline{f}$(0; 2; – 4); д) $\overline{g}$(2; 3; –1), $\overline{h}$(1; 2; 5) векторлардың скаляр көбейтіндісіні тап.

68. ABC үшбұрышта $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. а) $\overline{BA}$ және $\overline{BC}$; б) $\overline{CA}$ және $\overline{AB}$; с) $\overline{AB}$ және $\overline{BA}$ векторлар арасындағы бұрышты тап.

69. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлардың ұзындықтары және олар арасындағы бұрыш сәйкес түрде а) 5, 12, 50°; б) 3, $\sqrt{2}$, 45°; с) 5, 6, 120°; д) 4, 7, 180° болса, олардың скаляр көбейтіндісін тап.

70. n ның қандай мәнінде векторлар перпендикуляр болады?

а) $\overline{a}(2; -1; 3)$, $\overline{b}(1; 3; n)$; б) $\overline{a}(n; -2; 1)$, $\overline{b}(n; -n; 1)$;

с) $\overline{a}(n; -2; 1)$, $\overline{b}(n; 2n; 4)$; д) $\overline{a}(4; 2n; -1)$, $\overline{b}(-1; 1; n)$.

71. $\overline{a}(1;-5;2)$, $\overline{b}(3;1;2)$ векторлар берілген. а) $\overline{a} + \overline{b}$ және $\overline{a} - \overline{b}$; б) $\overline{a}+2\overline{b}$ және $3\overline{a} - \overline{b}$; с) $2\overline{a} + \overline{b}$ және $3\overline{a}$b – $2\overline{b}$ векторлар скаляр көбейтіндісін тап.

72. $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$ нүктелер берілген. Oz координаталар осінде сондай D нүктені табу қажет, ол $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$ векторларына перпендикуляр болсын.

73*. $(\overline{a}, \overline{b}) \leq |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$ екендігіні дәлелде. Бұл векторлар қандай болғанда теңдік орынды болады?

74*. $SABCD$ пирамиданың барлық қырлары өзара тең (41- сурет) және негізі квадраттан тұрады. а) $\overline{SA}$ және $\overline{SB}$; b) $\overline{SD}$ және $\overline{AD}$; c) $\overline{SB}$ және $\overline{SD}$; d) $\overline{AS}$ және $\overline{AC}$; e) $\overline{AC}$ және векторлар арасындағы бұрыштарды тап

75*. Ұзындықтары бірге тең $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлар жұп-жұбымен 60° ты бұрышты құрайды. а) $\overline{a}$ және $\overline{b} + \overline{a}$; b) $\overline{a}$ және $\overline{b} - \overline{c}$ векторлар арасындағы бұрышты тап.

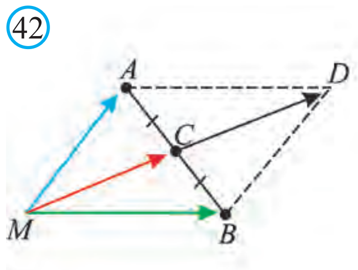
76. O нүкте $ABCD$ квадраттың диаганалдарының қиылысу нүктесі. Квадратың B ұшынан диагоналға параллель және DA түзу сызықпен F нүктеде қиылысатын тік сызық өткізілген. $\overline{BF}$ векторды $\overline{DO}$ және $\overline{DC}$ векторлар арқылы өрнекте.

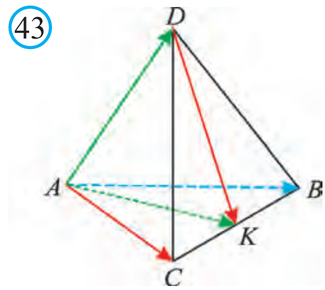
77. O нүкте ABC үшбұрыштың медианалары қиылысу нүктесі болса, $\overline{OC}$ векторды $\overline{AB}$ және $\overline{AC}$ векторлар бойынша жіктеп жаз.

78*. C нүкте AB кесіндінің ортасы болса (42- сурет), ондаерікті M нүкте үшін $\overline{MC}=\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MB})$ болуыны дәлелде.

79. K нүкте $ABCD$ тетраедр BC бүйірінің ортасы болса (43- сурет), $\overline{DK}$ векторды $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ және $\overline{AC}$ векторлар бойнша жіктеп жаз.

80*. Дененің жылжу бағытына қатысты 30° ты бұрыш астына қойылған $\overline{F}=20N$ күш ықпалында дене 3 м ге жылжиды. Бұл жағдайда орындалған жұмысты тап.





81*. Дененің жылжу бағытына қарағанда 60°-ты бұрыш астына қойылған $\overline{F}$ =50 N күш ықпалында дене 8 м-ге жылжиды. Бұл жағдайда орындалған істі тап.

82*. (Коши – Буняковский теңсіздігі) Ерікті $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ сандары үшін $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$ теңсіздіктің орынды болуын векторлардан пайдаланып дәлелде.

3. КЕҢІСТІКТЕ АЛМАСТЫРУЛАР ЖӘНЕ ҰҚСАСТЫҚТАР

3.1. Кеңістікте геометриялық алмастырулар

Кеңістікте берілген F пішінінің әрбір нүктесі бірде бір әдісте көшірілсе, яғни F_1 пішіні пайда болады. Егер бұл көшіруде (бейнеленуде) бірінші пішіннің әр түрлі нүктелері екінші пішіннің әр түрлі нүктелеріне көшсе, бұл көшуге *геометриялық пішін алмастыру* деп аталады.

Бүкіл кеңістікті геометриялық пішін ретінде карастырсақ, кеңістіктегі пішін алмастыру туралы айту мүмкін.

Көріп тұрғанымыздай, кеңістікте геометриялық алмастырулар түсінігі жазықтықтағы сияқты кіргізіледі. Сондай-ақ оның төменде қаралатын тізбек түрлерінің қасиеттері және олардың дәлелі де жазықтықтағыға ұқсас. Соның үшін бұл қасиеттердің дәлелдеуіне тоқтаймыз және оларды өз бетінше орындауды ұсынамыз.

3.2. Қозғалыс және параллель орын алмастыру

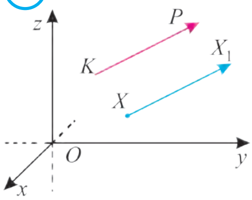
Нүктелер арасындағы ара қашықтықты сақтайтын пішін алмастырулар *қозғалыс* дейіледі. Қозғалыстың төмендегі қасиеттерін келтіру мүмкін.

Қозғалыста түзу сызық түзу сызыққа, сәуле-сәулеге, кесінді оған тең кесіндіге, бұрыш оған тең бұрышқа,үшбұрыш оған тең үшбұрышқа, жазықтық оған тең жазықтыққа және тетраедр оған тең тетраедрге көшеді (бейнеленеді).

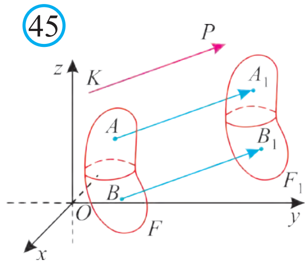
Кеңістікте бірер қозғалыс жәрдемінде біреуін екіншісіне көшіру мүмкін болған пішіндер *тең пішіндер* делінеді.

Қозғалысқа ең карапайым мысал бұл параллель көшіру.

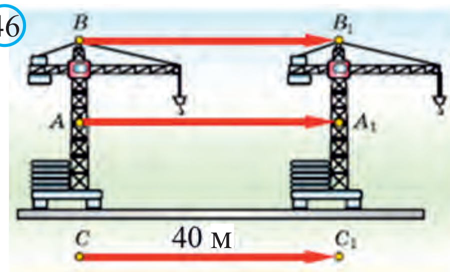
44



45



46



Кеңістікте кез келген $\overline{KP}$ вектор және ерікті X нүкте берілген болсын (44-сурет). Егер X_1 нүкте $\overline{XX_1} = \overline{KP}$ шартын қанағаттандырса, *X нүкте X_1* нүктеге $\overline{KP}$ вектор бойымен *параллель көшірілген* дейіледі.

Егер кеңістікте берілген F пішіннің әр бір нүктесі $\overline{KP}$ вектор бойымен көшірілсе (45-сурет), яғни F_1 пішіні пайда болады. Бұл жағдайда *F пішін F_1 пішінге параллель көшірілген* дейіледі. Параллель көшіруде F пішіннің әрбір нүктесі бірдей бағытта бірдей ара қашықтыққа көшірілген болады.

46-суретте бейнеленген көтеру кранының әр бір нүктесі бастапқы жағдайға қарағанда 40 м-ге параллель көшкен.

Белгілі, параллель көшіру қозғалысы. Соның үшін праллель көшіруде түзу сызық түзу сызыққа, сәуле-сәулеге, жазықтық жазықтыққа, кесінді оған тең кесіндіге көшеді және басқалар.

Айтайық $\overline{KP} = (a;\ b;\ c)$ вектор бойымен параллель көшуде F пішінінің $X\,(x;\ y;\ z)$ нүктесі F_1 пішіннің $X_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нүктесіне өтсін. Онда анықтамаға орай, төмендегілерге иеміз:

$x_1 - x = a,\ \ y_1 - y = b,\ \ z_1 - z = c$ немесе $x_1 = x + a,\ \ y_1 = y + b,\ \ z_1 = z + c.$
Бұл теңдіктер *параллель көшіру формулалары* делінеді.

1- есеп. $\overline{p} = (3;\ 2;\ 5)$ вектор бойымен параллель көшуде $P\,(-2;\ 4;\ 6)$ нүкте қайсы нүктеге көшеді?

Шешуі. Жоғарыда параллель көшіру формулаларынан пайдаланамыз: $x_1 = -2 + 3 = 1,\ \ y_1 = 4 + 2 = 6,\ \ z_1 = 6 + 5 = 11.$ *Жауабы:* $P_1(1;\ 6;\ 11).$ □

3.3. Кеңістікте орталық симметрия

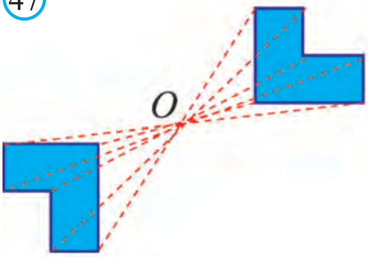
Кеңістікте берілген A және A_1 нүктелер O нүктеге қарағанда симметриялы дейіледі, егер $\overline{AO} = \overline{OA_1}$ болса, яғни O нүкте AA_1 кесіндінің ортасы болса.

Егер кеңістікте берілген F пішіннің әрбір нүктесі O нүктеге қарағанда симметриялы нүктеге көшірілсе (47- сурет), осындай алмастыруға *O нүктеге қарағанда симметриялы* делінеді. 48, 49- суреттерде O нүктеге қарағанда симметриялы пішіндер бейнеленген.

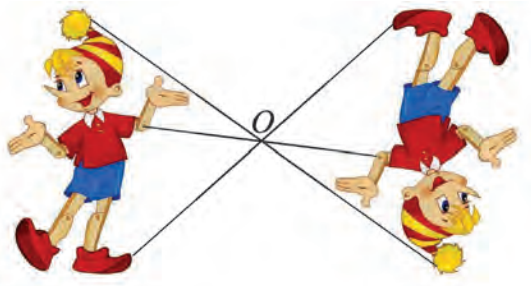
Нүктеге қарағанда симметрия – қозғалыс екен.

Егер F пішін O нүктеге қарағанда симметриялы алмасуда өзіне көшсе, осындай пішінге *орталық симметриялы пішін* делінеді.

47

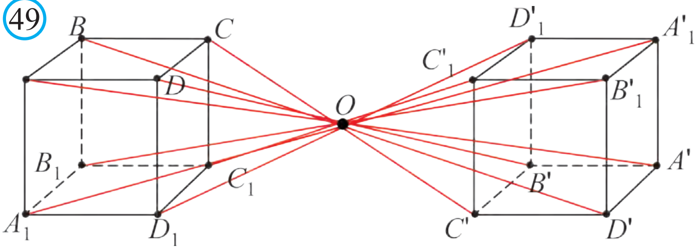


48

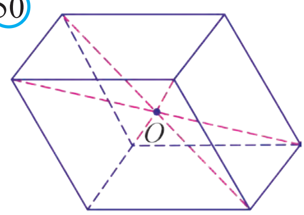


Мысалы, параллелепипед (50-сурет) диоганалдарының қиылысу нүктесі O ға қарағанда орталық симметриялы пішін есептеледі.

49



50



2- есеп. O (2; 4; 6) нүктеге қарағанда орталық симметрияда A = (1; 2; 3) нүкте қайсы нүктеге жатады?

Шешуі. $A_1 = (x; y; z)$ табылатын нүкте болсын. Анықтамаға орай , O нүкте AA_1 кесіндінің ортасы. Демек, $2 = \frac{x+1}{2}$, $4 = \frac{y+2}{2}$, $6 = \frac{z+3}{2}$.

Бұл теңдіктерден $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$, $z = 12 - 3 = 9$.

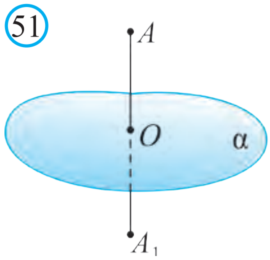
Жауабы: $A_1(3; 6; 9)$.□

3.4. Кеңістікке қарағанда симметрия

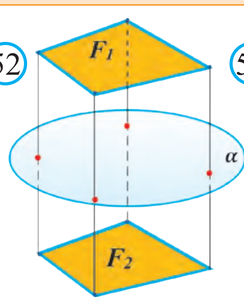
Кеңістікте берілген A және A_1 нүктелер *жазықтыққа қарағанда симметриялы* делінеді, егер жазықтық AA_1 кесіндіге перпендикуляр болып,оны тең екіге бөлсе (51-сурет). 52-суретте жазықтыққа қарағанда симметриялы болған F_1 және F_2 пішіндер келтірілген. Белгілі, кеудеміз және бейнеміз айна жазықтығына қарағанда симметриялы болады (53-сурет).

Жазықтыққа қарағанда симметрия – қозғалыс, демек.

51

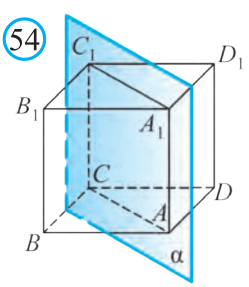


52



53

54



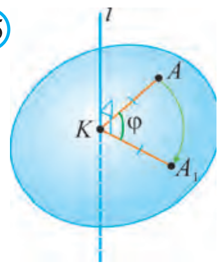
Демек, жазықтыққа қарағанда симметрияда кесінді өзіне тең кесіндіге, түзу сызық – түзу сызыққа және жазықтық – жазықтыққа бейнеленеді.

Егер F пішін жазықтыққа қарағанда симметриялы алмастырылуында өзіне көшсе, осындай пішінге *жазықтыққа қарағанда симметриялы пішін* делінеді.

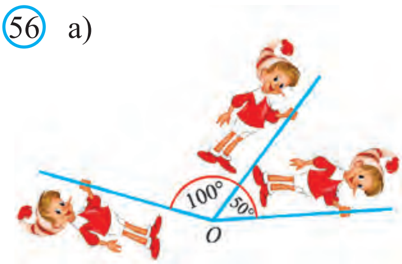
Мысалы, 54-суретте бейнеленген куб AA_1 және CC_1 қырларынан өтетін α жазықтыққа қарағанда симметриялы пішін болады.

3.5. Бұрыш және оське қарағанда симметрия.

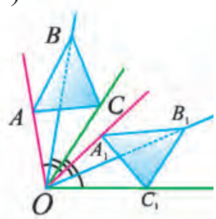
55



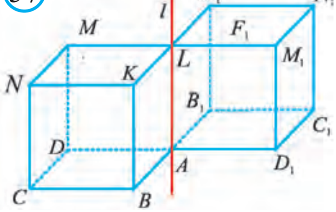
56 а)



б)



57



Айталық, кеңістікте A және A_1 нүктелер және l тік сызық берілген болсын. Егер l тік сызыққа түсірілген AK және A_1K перпендикулярлар тең және өзара φ бұрыш құрайтын болса, бұл жағдайда *l тік сызыққа қарағанда φ бұрышқа бұрылу нәтижесінде* A нүкте A_1 нүктеге өтті дейіледі. (55- сурет).

Егер кеңістікте берілген F пішіннің әрбір нүктесі l түзу сызыққа қарағанда φ бұрышқа бұрсақ, жаңа F_1 пішін пайда болады. Мұнда F пішін l *түзу* сызыққа қарағанда φ бұрышқа бұрылуда F_1 пішінге өтті дейіледі. 56-суретте осындай бұрылудан пайда болған пішіндер көрсетілген.

Мысалы, 57- суретте бейнеленген кубты l түзу сызыққа қарағанда 180° бұрышқа бұруда жаңа кубты құраймыз.

Түзу сызыққа қарағанда бұрылыс қозғалыс болады.

l түзу сызыққа қарағанда 180° бұрышқа бұрылу *l түзу сызыққа қарағанда симметриялы* дейіледі.

Пішіннің симметриялық орталығы, осі, жазықтығы оның *симметриялық элементтері* дейіледі.

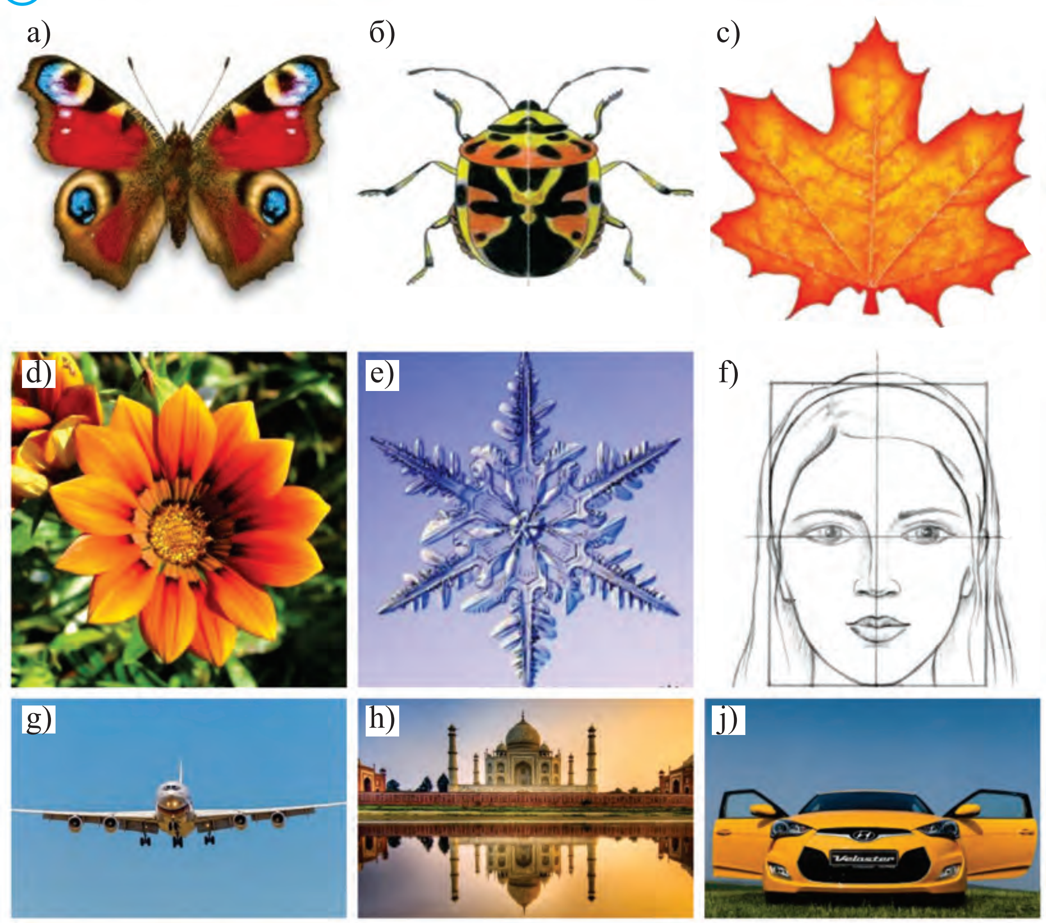
$A(x;\ y;\ z)$ нүктеге координата жазықтықтары, координата осьтері және координата басына қарағанда симметриялық нүктелер төмендегі координаталарға ие болады:

Симметрия элементтері	**Симметриялы нүкте координаталары**
Oxy жазықтық	$(x;\ y;\ -z)$

Oxz жазықтық	$(x; -y; z)$
Oyz жазықтық	$(-x; y; z)$
Ox осі	$(x; -y; -z)$
Oy осі	$(-x; y; -z)$
Oz осі	$(-x; -y; z)$
O нүкте	$(-x; -y; -z)$

3.6. Табиғат мен техникадағы симметрия

58

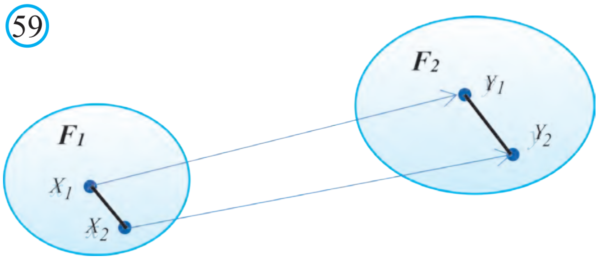


Табиғатта симметрияны жиі кездестіру мүмкін. Мысалы, тірі жәндіктердің көпшілігі, әсіресе адам мен жануарлар кеудесі, өсімдіктердің жапырақтары және гүлдері симметриялы түзілген (58-сурет). Сондай-ақ, өлі табиғат құрамдас бөліктері де бар, мысалы, қар бөлшектері, тұз кристалдары, заттың молекулярлық құрылысы да керемет симметриялы пішіндерден түзілген. Бұл бекерге емес, әрине, симметриялы пішіндер әдемі болуымен бірге, қандайда мағынада ең қолайлы және жан-жақты есептеледі. Сондай екен, табиғаттағы әдемілік және толық симметрия негізінде түзілген, деп айтуымыз мүмкін. Табиғаттағы бұл әдемілік және толық өлшеуіш алған құрушы, инженер және архитекторлар сияқты жаратушылар жаратқан көптеген ғимараттар мен мұнаралар, құрылыс және механизмдер, техника және транспорт құрылғылары да симметриялы жаратылған. Бұл жұмыста оларға геометрия пәнінің жәрдемі шексіз.

3.7. Кеңістіктегі пішіндердің ұқсастығы

Кеңістікте $k \neq 0$ және F_1 пішінді F_2 пішінге бейнелеуші алмастыру берілген болсын. Бұл бейнелеуде F_1 пішіннің еркіті X_1 және X_2 нүктелері мен олар бейнеленген F_2 көріністің Y_1 және Y_2 нүктелері үшін $X_1Y_1 = k \cdot X_2Y_2$ болса, бұл алмастыру *ұқсастық алмастыруы деп аталады* (59- сурет).

59



60

Көріп тұрғанымыздай, кеңістікте ұқсастық айырбастау түсінігі жазықтықтағыдай енгізіледі. Сондай-ақ, оның төменде көрілетін қатар түрлерінің анықтамасы, олардың қасиеттері және бұл қасиеттердің дәлелденуі де жазықтықтағыға ұқсас. Соның үшін, бұл қасиеттердің дәлелдеуіне тоқтамай және оларды өз бетінше орындауды ұсынамыз.

Кеңістіктегі ұқсастық алмастырылуы түзу сызықты түзу сызыққа, сәулені сәулеге, кесіндіні кесіндіге және бұрышты бұрышқа бейнелейді. Сондай-ақ, бұл алмастыру жазықтықты да жазықтыққа бейнелейді.

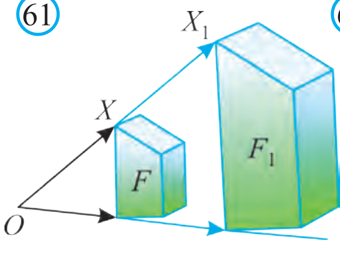
Кеңістікте берілген екі пішіннің біреуі екіншісіне ұқсастық алмастыру арқылы бейнеленсе, олар *ұқсас пішіндер* дейіледі.

Кеңістікте F пішін, O нүкте және k нөлден өзгеше ($k \neq 0$) сан берілген болсын. F пішіннің өзгеше X нүктесін $OX_1 = kOX$ шартын қанағаттандыратын X_1 нүктеге бейнелеуші алмастыру *O нүктеге қарағанда k коэффициенті гомотетия* деп аталады (61-сурет). O нүктеге гомотетия орталығы, k санына *гомотетия коэффициенті* дейіледі.

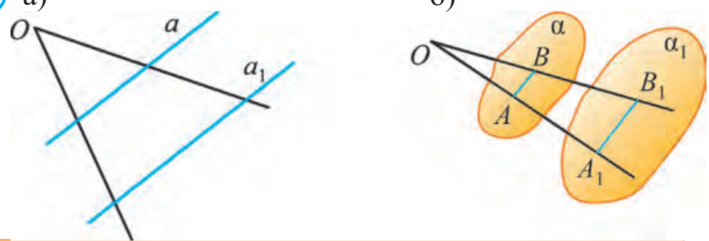
F пішіннің әрбір нүктесі осы әдісте бейнеленсе, нәтижеде F_1 пішіні пайда болады да бұл *гомотетияда F пішін F_1 пішінде бейнеленеді* дейіледі.

Көріп тұрғанымыздай, кеңістікте гомотетия анықтамасы жазықтығысымен бірдей. Сондай-ақ, оның қатар қасиеттері де бар, оларда, олардың дәлелдемелері де жазықтықтағыға ұқсас. Соның үшін, бұл қасиеттердің дәлелдеулеріне тоқтамай және оларды өз бетінше орындауды ұсынамыз.

61



62 а) б)



О нүктеге қарағанда k коэффициентті гомотетия ұқсастық алмастыру.

GГомотетия коэффициенті k ерікті нөльден өзгеше сан болып, k=1 де F пішін өзіне өзі көрінеді, k=–1 де F пішін O нүктеге қарағанда симметриялы F_1 пішінде көрінеді. Басқа жағдайларда гомотетия нүктелер арасындағы арақашықтықты сақтамайды, яғни ол қозғалыс болмайды. Гомотетия нәтижесінде нүктелер арасындағы арақашықтық бірдей k санға көбейеді, яғни пішіннің өлшемдері өзгереді, бірақ оның пішіні өзгермейді.

Гомотетияда гомотетия орталығынан өтпейтін а) түзу сызық оған параллель түзу сызыққа (62.а- сурет); б) жазықтық болса оған параллель жазықтықта көрінеді (62.б-сурет).

Гомотетияда гомотетия орталығынан өтетін түзу сызық немесе жазықтық өзіне өзі көрінеді.

Тақырыпқа сай есептер мен практикалық тапсырмалар

83. $\overline{p}$ = (–2; 1; 4) вектор бойымен параллель көшіруде , а) (3; –2; 3); b) (0; 2; –3); c) (2; –5; 0) нүкте қайсы нүктеге көшеді?

84. Параллель көшіруде A(4; 2; –8) нүкте (3; 7; –5) нүктеге көшті. Параллель көшіру қайсы вектор бойымен амалға асырылды?

85. Параллель көшіруде: а) түзу сызық - түзу сызыққа; б) сәуле сәулеге; с) жазықтық жазықтыққа; д) кесінді оған тең кесіндіге көшуін дәлелдейді.

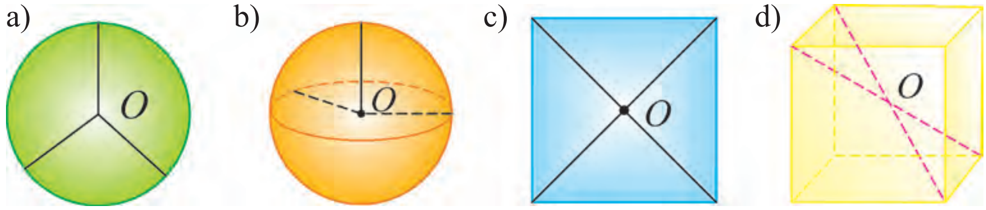
86. O (–2; 3; –1) нүктеге қарағанда орталық симметрияда A (4; 2; –3) нүкте қайсы нүктеге өтеді?

87. 63-суретте бейнеленген пішіндерде O нүкте симметрия орталығы екенін дәлелде.

88. (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) нүктелер координата басына қарағанда орталық симметрияда қайсы нүктелерде жатады?

89*. Орталық симметрияның қозғалыс екенін дәлелде.

63



90*. Жазықтыққа қарағанда симметрияның қозғалыс екендігін дәлелде.

91. Параллелепипедтің (50-сурет) диоганалдарының қиылысу нүктесі *O* ге қарағанда орталық симметриялы пішін екендігін дәлелде.

92. (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) нүктелер координата жазықтықтарға қарағанда симметрияларда қайсы нүктелерден өтеді?

93. (2; 4; –1) нүкте координата жазықтығына қарағанда симметриялы көріністе (2; –4; –1) нүктеге өтті. Көрініс қай координата жазықтығына қарағанда амалға асырылады?

94. Төмендегі кестеде берілген 1- үлгі негізінде бос жерлерді толықтыр.

№	Берілген нүкте	Симметриялық нүкте	Неге қарағанда симметриялы?
1	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	*Oxy* жазықтығына қарағанда
2	(2; 4; –1)		*Oxz* жазықтығына қарағанда
3		(1; 2; 3)	*Oyz* жазықтық
4	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5	(–1; 6; 3)		*Oy* осі
6		(–3; 8; –2)	*Oz* осі
7	(4; 1; –2)		*O* нүкте

95. 49- суретте бейнеленген пішіндерде *O* нүкте симметриялы орталық екендігін дәлелде.

96*. Түзу сызыққа қарағанда бұру қозғалыс екендігін көрсет.

97. *O* нүктеге қарағанда *k* коэффициенті гомотетия ұқсастық алмастыру екендігін көрсет.

98. *Oxy* жазықтыққа қарағанда симметрияда ерікті (x; y; z) нүкте (x; y; $-z$) нүктеге өтуін көрсет.

99. *Oxz* жазықтыққа қарағанда симметрияда ерікті (x; y; z) нүкте (x; $-y$; z) нүктеге өтуін көрсет.

100. Параллель көшіруде (1; 2; –1) нүкте (1; –1; 0) нүктеге өтті. Координата басы бұл алмастыруда қайсы нүктеге өтеді?

101. Параллель көшіруде (3; 4; –1) нүкте (2; –4; 1) нүктеге өтеді. Бұл алмасуда координата басы қай нүктеге өтеді?

102*. $A(2;\ 1;\ 0)$ нүкте $B\ (1;\ 0;\ 1)$ нүктеге, $C\ (3;\ –2;\ 1)$ нүктесіне болса $D\ (2;\ –3;\ 0)$ нүктеге өтетін параллель көшіру бар ма?

103*. $A\ (–2;\ 3;\ 5)$ нүкте $B\ (1;\ 2;\ 4)$ нүктеге, $C\ (4;\ –3;\ 6)$ нүктесіне $D(7;\ –2;\ 5)$ нүктеге өтетін параллел көшіру бар ма?

104. 58- суретте бейнеленген жанды-жансыз объекттер ауа кеңістігіндегі зат сипатында қандай симметриялық форма болуы мүмкіндігін анықта. Онық (егер болмаса) симметриялик орталығы, симметрия осі немесе симметрия жазығын сызып көрсет.

105. 60- суретте бейнеленген матрёшкалардың (ана-бала) үлкен ана матрёшкалардың сәйкес ұқсас коэффицентін анықта.

106. Қалыпты тетраедр қырларының ұзындығы 12 см тең. Бұл тетраедр: а) 3; б) –4; с) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$; коэффиценті гомотетикалық болған тетраедр қырларының ұзындығы неге тең?

107. Кез келген ABC ұшбұрыш сызығы және әлдебір O нүктені белгіле. Орталық O нүкте және коэффиценті: а) 2; б) –3; с) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ ға тең болған гомотетияда ABC ұшбұрыш өтетін ұшбұрышты құра.

108. Кез келген $SABC$ тетраедр сыз. Орталық S нүкте және коэффиценті: а) 1,5; б) –2; с) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ ға тең болған гомотетияда $SABC$ тетраедр өтетін тетраедр құра.

109. Кез келген куб сыз. Орталық кубның бір қыраты және коэффиценті: а) 2; b) –2; с) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$ ға тең болған гомотетияда бұл куб өтетін ауадағы геометриялық пішін құра.

110. Орталық координата басында және коэффиценті: а) 2,5; б) –2,5; с) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$ ға тең болған гомотетияда $A(–2;\ 3;\ 5)$ нүкте өтетін ауадағы геометриялық пішін құра.

111. Орталық $O(–1;2;2)$ нүктеде және коэффиценті: а) 0,5; б) –2; с) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$ ге тең болған гомотетияда $A(2;\ 4;\ 0)$ нүктеден өтетін нүктенің координаталарын тап.

112. Ұштары $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$ нүктелерінде болған тетраедр: а) орталығы O нүктеде, коэффиценті –1 ге тең; б) орталығы A нүктеде, коэффиценті 2 ге тең болған гомотетияда өтетін тетраеданың ұштарының координаттарын тап.

113*. Гомотетияда оның орталығымен өтпейтін: а) тік сызық өзіне параллель тік сызыққа, б) жазықтыққа есе өзіне параллель жазыққа керісіншесін көрсет.

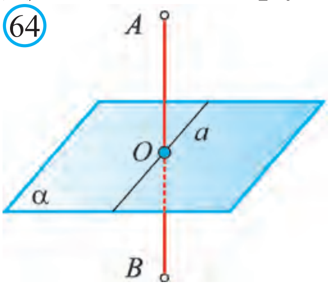
114*. Гомотетияда оның орталығынан өтетін тік сызыққа немесе жазықтық өзіне-өзі керісіншесін көрсет.

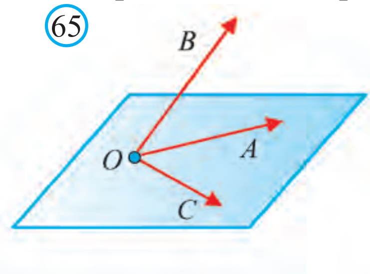
4. ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР

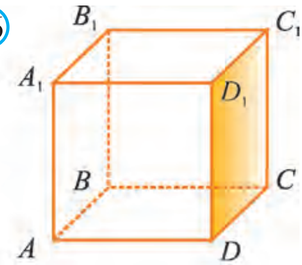
4.1. 1- тест сынағы

1. $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері берілген. z_2-z_1 нені білдіреді?
А) AB кесінді ортасының координатасын; Б) AB кесінді ұзындығын; С) $\overline{AB}$ вектор ұзындығын; Д) $\overline{AB}$ вектор координаталарынан бірін.

2. 64- суретте $AB\perp\alpha$, $a\subset\alpha$, $AO=OB$ болса,
А) A және B нүктелер O нүктелеріне қарағанда симметриялық болады;
Б) A және B нүктелер a түзу сызыққа қарағанда симметриялық болады;
С) A және B нүктелер α жазықтыққа қарағанда симметриялық болады;
Д) AB кесінді a түзу сызыққа қарағанда симметриялық болады.

64


65


66


3. 65- суретте B нүкте AOC жазықтыққа жатпайды. Онда $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ және $\overline{OC}$ векторлар …
А) коллинеар; Б) компланар;
С) біркелкі бағытта; Д) компланар емес.

4. $M(-7; 1; 4)$ және $N(-1; -3; 0)$ нүктелер берілген. MN кесінді ортасының координаталарын тап.
А) $(-4; -1; 4)$; Б) $(-4; -1;2)$; С) $(-4; -2; 2)$; Д) $(-3; 2; 2)$.

5. $A(0; -3; 2)$ және $B(4; 0; -2)$ нүктелер берілген. AB кесінді ортасы неге тиісті?
А) Ox осіне; Б) Oy осіне; С) Oz осіне; Д) Oxy жазықтығына.

6. $A(3; 4; -3)$ нүктелерден Oz осіне дейін болған қашықтықты тап.
А) 3; Б) 5; С) $2\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{34}$.

7. $\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$ векторлар жиынтығын тап.
А) $\overline{O}$; Б) $\overline{CF}$; С) $\overline{DF}$; Д) $\overline{CE}$.

8. m ның қайсы дәрежесінде $\overline{a}(m; 4; -3)$ және $\overline{b}(4; 8; -6)$ векторлар коллинеар болады?
А) 2; Б) 5; С) 1; Д) 3.

9. O нүкте α жазықта жатпайды. Орталығы O нүктеде болған гомотетияда α жазықтығы одан айырмашылығы болған β жазыққа өтеді. Егер a тік сызық α жазыққа тиісті болса, …

А) $\alpha \parallel \beta$ болады; Б) α жазыққа β жазықтықпен қиысады;
С) $a \subset \beta$ болады; Д) $\alpha \perp \beta$ болады.

10. *AB* түзу сызық *BCD* жазықтыққа перпендикуляр. Қайсы вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады?

А) $\overline{CA}$ және $\overline{CB}$; Б) $\overline{BD}$ және $\overline{AD}$; С) $\overline{AC}$ және $\overline{BC}$; Д) $\overline{AB}$ және $\overline{CD}$.

11. Қыры 1-ге тең болған $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берілген (66- сурет). $(\overline{AB}+\overline{BC}) \cdot \overline{BB}$ ны тап.

А) 1; Б) 0; С) –1; Д) 0,5.

12. p дің қай дәрежесінде $\overline{a}(1; 1; 0)$ және $\overline{b}(0; 4; p)$ векторлар арасындағы бұрыш 60°-қа тең болады?

А) 4; Б) 4 немесе –4; С) 16; Д) 16 немесе –16.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берілген. Параллель көшіруде A_1D кесінді D_1C кесіндіге өтеді. Бұл көшіруде AA_1B_1 жазықтың қай жазығынан өтеді?

А) DB_1B; Б) DCC_1; С) AA_1C_1; Д) ABC.

14. α жазықтық онда өтпейтін *ABC* үшбұрыштың симметриялық жазығы. Қайсы пікір дұрыс?

А) $(ABC)\perp\alpha$; Б) *ABC* үшбұрыш тең бүйірлі;
С) *ABC* үшбұрыштың симметриялық орталығы бар;
Д) *ABC* үшбұрыштың симметриялық осі бар.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берілген. $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$ ді тап.

А) $\overline{A_1C}$; Б) $\overline{BD_1}$; С) $\overline{B_1D}$; Д) $\overline{AC_1}$.

16. Қайсы геометриялық көшу екі айыр түзу сызықтан бірін екіншісіне өткізді?

А) параллел көшу; Б) жазықтыққа қарағанда симметрик;
С) бұру; Д) гомотетия.

17. $M(-1; 2; -4)$ нүктеге *Oyz* жазықтыққа қарағанда симметриялық болған нүктені тап. А) (1; –2; 4); Б) (1; 2; –4); С) (–1; –2; –4); Д) (–1; 2; 4).

18. Параллель көшуде $\overline{AB}$ вектор $\overline{DC}$ векторға өтеді. Қайсы пікір бұрыс?

А) $\overline{AB}=\overline{DC}$; Б) *AC* және *BD* кесінді ортасы қабат-қабат түседі;
С) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ және $\overline{DC}$ векторлар компланар; Д) *ABCD* параллелограмм.

19. *B* (-3; 2; –5) нүкте *Oxz* жазықтығынан қандай қашықтықта жатыр.

А) 2; Б) 5; С) 3; Д) $\sqrt{34}$.

20. *А* (1; –2; 0), *Б* (1; –4; 2), *С* (3; 2; 0) нүктелер *ABC* үшбұрыштың ұштары. *CM* медиана ұзындығын тап.

А) $2\sqrt{3}$ Б) $3\sqrt{2}$ С) $\sqrt{6}$ Д) 18

21. Егер $a(1; m; 2)$ және b (0,5+1; 3; 1) векторлар коллинеар болса, $m+n$ ны тап.

А) 3; Б) 5; С)–4; Д) 9.

22. A (–1; –9; –3) және B (0; –2; 1) нүтелер берілген векторды координата векторлары (орттар) бойынша жайындар.

А) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - \overline{k}$; Б) $(\overline{BA}) = \overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$;

С) $(\overline{BA}) = -\overline{i} - 9\overline{j} - 4\overline{k}$; Д) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - 4\overline{k}$.

23. A (1; –2; 2) B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) және D (–5; –5; 3) нүктелер берілген. AC және BD векторлар арасындағы бұрышты тап.

А) 150°; Б) 30°; С) 45°; Д) 90°.

24. $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{a}+\overline{b}| = 11$, $|\overline{a}-\overline{b}| = 7$ екендігі анық болса, $|\overline{b}|$ ны тап.

А) 11; Б) 18; С) 20; Д) 7;

25. Негіздері BC және AD болған $ABCD$ трапеция берілген. Егер AB (–7; 4; 5), АС (3; 2; –1), (20; –4; –12) M және N сай тәрізде AB және CD жақтар ортасын болса, MN вектор координаталары жиынтығын тап.

А) 1; Б)2; С) 3; Д) 4;

4.2. Есептер

115. Ұштары $A(1; –2; 4)$ және $B(3; –4; 2)$ нүктелерде болған кесінді ортасының координаталарын тап.

116. $A(x; 0; 0)$ нүкте $B(1; 2; 3)$ және $C(–1; 3; 4)$ нүктелерден тең ұзақтықтығы белгілі болса, x-ті тап.

117. Егер кесіндінің бір ұшы $A(1; –5; 4)$, ортасы $C(4; –2; 3)$ нүктеде болса, екінші ұшы координаталары қандай болады?

118. Oxz жазықтыққа қарағанда $A(1; 2; 3)$ координаталарын симметриялық болған нүктені тап.

119. Координаталар басына қарағанда $A(1; 2; 3)$ нүктеге симметриялық болған нүктені тап.

120. Oxy жазықтыққа қарағанда (1; 2; 3) нүктеге симметриялық болған нүктені тап.

121. Oy осіне қарағанда (2; –3; 5) нүктеге симметрик болған нүктені тап.

122. Төмендегі нүктелерден қайсысы Oyz жазықтыққа жатады?
$A(2; –3; 0)$; $B(2; 0; –5)$; $C(1; 0; – 4)$; $D(0; 9; –7)$; $E(1; 0; 0)$.

123. Төмендегі нүктелерден қайсысы Oxz жазықтыққа жатады:
$A(– 4; 3; 0)$; $B(0; –7; 0)$; $C(2; 0; –8)$; $D(2; –4; 6)$; $E(0; – 4; 5)$?

124. $A(-3; 8; 3\sqrt{33})$ нүктеден Ox осіне дейін болған қашықтығын тап.

125. $A(3; –2; 5)$ жіне $B(–4; 5; –2)$ нүктеден берілген. $\overline{AB}$ вектордың координаталарын тап.

126. $\overline{a}(1; –2; 3)$ вектордын соңғы $B(2; 0; 4)$ нүктесі болса, бұл вектордын ұшын тап.

127. $B(0; 4; 2)$ нүкте $\overline{a}(2; –3; 1)$ вектордын соңы болса, бұл вектор ұшының координаталарын тап.

128. $\overline{a}(x; 1; 2)$ вектордың ұзындығы 3 ке тең. x тің дәрежесін тап.

129. $\overline{a}(4; -12; z)$ вектордың модулі 13 ке тең.. z тің дәрежесін тап.

130. Егер $\overline{a}(6; 2; 1)$ және $\overline{b}(0; -1; 2)$ болса, $\overline{c}= 2\overline{a}-\overline{b}$ вектордың ұзындығын тап.

131. Егер $\overline{p}(2; 5; -1)$ және $\overline{q}(-2; 2)$ болса, $\overline{m}= 4\overline{p}+2\overline{q}$ вектордың ұзындығын тап

132. $\overline{a}(2; -3; 4)$ және $\overline{b}(-2; -3; 1)$ вектордын скаляр көбейтіндісін тап.

133. $\overline{m}(-1; 5; 3)$ va $\overline{n}(2; -2; 4)$ вектордын скаляр көбейтіндісін тап.

134. m ның қандай дәрежесінде $\overline{a}(1; m; -2)$ және $\overline{b}(m; 3; -4)$ векторлар перпендикуляр болады?

135. n ның қандай дәрежесінде $\overline{a}(n; -2; 1)$ және $\overline{b}(n; n; 1)$ векторлар перпендикуляр болады?

136. m ның қандай дәрежесінде $\overline{a} = m\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ v және a $\overline{b}=4\overline{i}+m\overline{j}-7\overline{k}$ векторлар перпендикуляр болады?

137. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ va $D(-5; -5; 3)$ нүктелер берілген. $\overline{AC}$ және $\overline{BD}$ векторлар орасындағы бұрыштын тап.

138. n ның қандай дәрежесінде $\overline{a}(2; n; 6)$ және $\overline{b}(1; 2; 3)$ векторлар коллинеар болады?

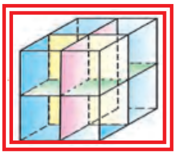
139. m ның қандай дәрежесінде $\overline{a}(2; 3; -4)$ және $\overline{b}(m; -6; 8)$ векторлар параллел болады?

140. m va n ның қандай дәрежесінде $\overline{a}(-1; m; 2)$ және $\overline{b}(-2; -4; n)$ векторлар коллинеар болады?

141. $A(2; 7; -3)$ va $B(-6; -2; 1)$ нүктелер берілген. $\overline{BA}$ векторды координаталар векторлары (ортасы) бойынша жайыңдар.

4.3. 1- бақылау жұмыс үлгісі

1. Oxy жазықтығына қарағанда (1; 2; 3) нүктеге симметриялық болған нүктені тап.
2. Егер $\overline{a}(6; 2; 1)$ және $\overline{b}(0; -1; 2)$ болса, $\overline{c}= 2\overline{a}-\overline{b}$ векторды ұзындығын тап.
3. $A(2; -1; 0)$ және $B(-2; 3; 2)$ нүктелер берілген. Координата басында AB кесінді ортасына дейін болған қашықтықты тап.
4. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ va $D(-5; -5; 3)$ нүктелер берілген. $\overline{AC}$ және $\overline{BD}$ векторлар ортасындағы бұрышты тап.
5. *(Дарынды оқушылар үшін қосымша есептер)*. Ұштары $A(4; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$ және $C(2; 1; -1)$ нүктелерінде болған үшбұрыштың BD медианасының ұзындығы тап.



II ТАРАУ. ПРИЗМА ЖӘНЕ ЦИЛИНДР

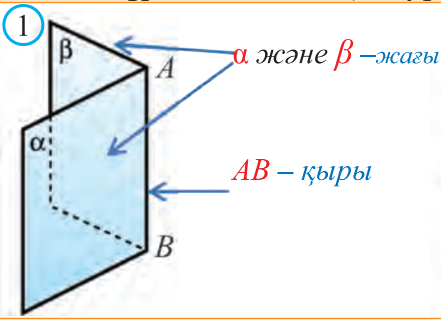
5. КӨПЖАҚТЫ БҰРЫШТАР ЖӘНЕ КӨПЖАҚТАР

5.1. Көпжақты бұрыштар

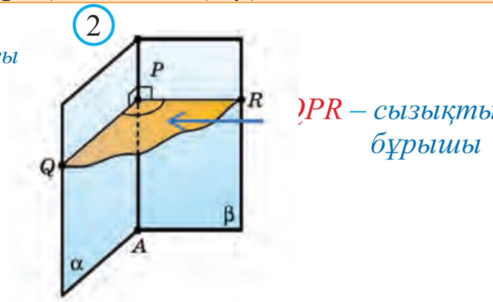
Екі жақты бұрышпен 10-сыныпта танысқансың.

Екі α және β жартылай жазықтық (жақтары) және оларды шекаралап тұрған жалпы AB тік сызық (қыры)тан тұратын геометриялық пішін екі жақты бұрыш дейіледі (1- сурет) және де (α β) сияқты белгіленеді.

1



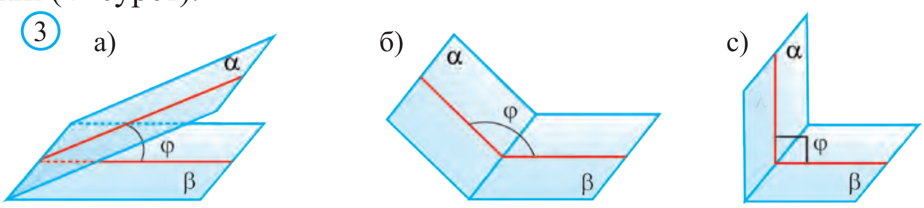
2



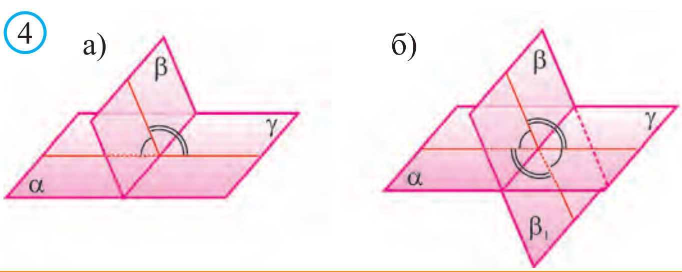
Екі жақты бұрыш қырының еркін P нүктесінен оның жақтарында жатқан бұл қыры перпендикуляр болған PR және PQ нүктелерді шығарамыз. *ZQPR* – екі жақты бұрыштың бұрышы сызық бұрышы деп аталады (2- сурет).

Екі жақты бұрыштар жазық бұрыштар сияқты сызықты бұрышының үлкендігіне қарап өткір, өтпес, тік және жайық болады (3- сурет). Жазық бұрыштар сияқты екі екі жақты бұрыштар көрші және вертикал болуы мүмкін (4- сурет).

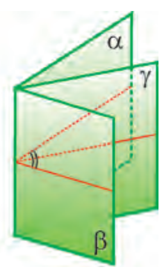
3



4



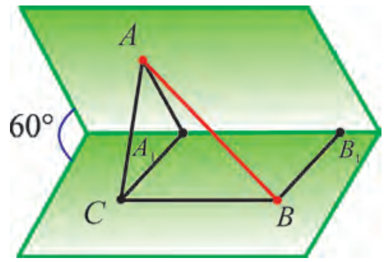
5



Екі жақты бұрышты тең екіге бөлетін жартылай жазықтық оның *биссекторы* деп аталады (5-сурет).

1- есеп. Сызықты бұрышы 60°-қа тең болған екі жақты бұрыштың жақтарында жатқан A және B нүктелерден (6-сурет) оның қырына AA_1 және BB_1 перпендикулярлар түсірілген. Егер $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ және $A_1B_1 = 13$ болса, AB *кесіндіні* тап.

6



Шешілуі. $BB_1 || CA_1$ және $A_1B_1 || CB$ түзу сызықтарды өткіземіз. Пайда болған A_1B_1BC төртбұрыш параллелограмм болады. A_1B_1 түзу сызық A_1AC үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр болады,себебі ол жазықтықта жатқан екі A_1A және A_1C тік сызықтарға перпендикуляр. Олай болса BC түзу сызықта бұл жазықтыққа перпендикуляр болады.

Демек, ABC үшбұрыш тікбұрышты ұшбұрыш екен.

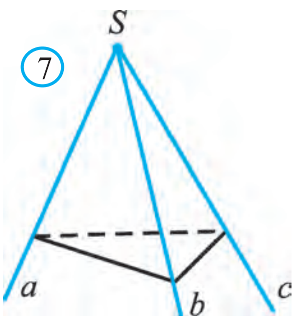
Косинустар теоремасына орай:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 124.$$

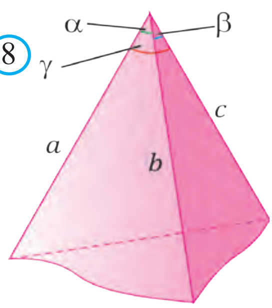
Пифагор теоремасына орай: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}.$

Жауабы: $AB = \sqrt{293}$. □

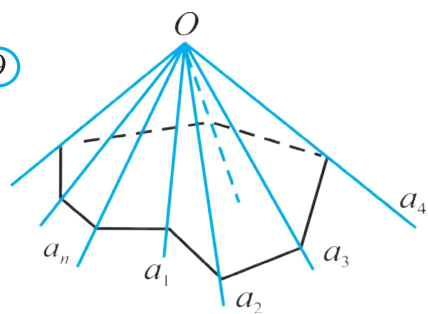
7



8



9



Кеңістікте бір нүктедеден шығатын a, b және c сәулелер үш жазық (ab), (bc) және (ac) бұрыштардан құралған (7- сурет). Бұл жазық бұрыштардан құралған (abc) пішінге үш жақты бұрыш дейіледі. Жазық бұрыштарға үш жақты бұрыштың жақтары,олардың бүйірлеріне үш жақты бұрыштың қырлары, жалпы ұшына үш жақты бұрыштың ұшы дейіледі. Үш жақты бұрыштың жақтарынан құралған екі жақты бұрыштар үш жақты бұрыштың екі жақты бұрыштары дейіледі.

Үш жазық (ab), (bc) және (ac) бұрыштар үш жақты бұрыштың с бір қалыпты бұрыштары деп жүргізіледі.

Үш жақты бұрыштың бір қалыпты бұрыштарын, сәйкес, α, β, γ деп белгілесек (8-сурет), олар үшін үшбұрыш теңсіздігі орынды болады, яғни олардың еріктісі қалған екеуінінің жиынтығынан кіші болады: $\alpha+\beta<\gamma$, $\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ және бір қалыпты бұрыштардың жиынтығы 360^o тан кіші болады: $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

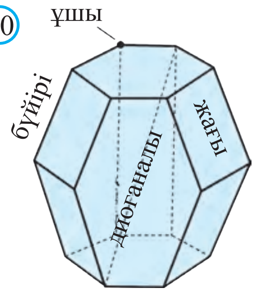
Көпжақты бұрыш түсінігі де осыған ұқсас кіргізіледі (9- сурет).

5.2. Көпжақтар

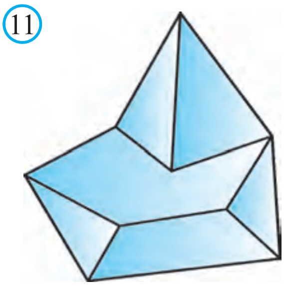
Мән берген болсаң , осы уақыттқа дейін кеңістіктегі пішін ретінде қатар денелердің, әсіресе көпжақтардың қасиеттерін үйреніп келдік. Бұл кеңістіктегі пішіндердің *дене* деп аталуы себебі, оларды кеңістіктің бір материялдық денеге ие болған және сыртымен шекараланған бөлшегі ретінде болжам жасалуы мүмкін. Төменде көп жақтарға тиісті түсініктерді еске салып өтеміз.

Көпжақ деп жазық көпбұрыштармен шекараланған дене айтылады (10- сурет).

10

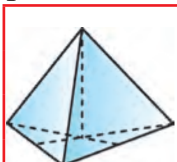
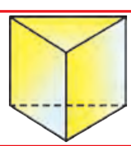
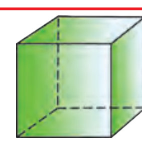


11



Көпжақ кез келген жағы жатқан жазықтықтың бір жағында жатса, мұндай көпжақ *қисық көпжақ* деп аталады. 10-суретте дөңес, 11-суретте дөңес емес көпжақтар бейнеленген.

Кез келген дөңес көпжақтың жақтарының саны Y, ұштарының саны U және қырларының саны Q деп белгілейміз.Бізге белгілі көпжақтар үшін төмендегі кестені толтыр:

	Көпжақ аты	Y	U	Q	
	Үшбұрышты пирамида	4	4	6	
	Төртбұрышты пирамида	5	5	8	
	Үшбұрышты призма	5	6	9	
	Төртбұрышты призма	6	8	12	
	n- бұрышты пирамида	$n+1$	$n+1$	$2n$	
	n-бұрышты призма	$n+2$	$2n$	$3n$	

Кестеден әр бір көпжақ үшін $Y+U-Q=2$ болуын көру мүмкін. Белгілі болғанша, бұл қатынас барлық дөңес көпжақтар үшін дұрыс болады.Бұны бірінші рет 1752 жылы шведциялық математик Леонард Эйлер анықтаған.

Эйлер теоремасы. Ерікті дөңес көпжақ үшін: $Y + U - Q = 2$ қатынас орынды болады, бұл жерде Y – көпжақтың жақтары, U – ұштары , Q – қырлары саны.

Бұл теореманың дәлелдеуіне тоқтаймыз. Осыдан төмендегі нәтижелер келіп шығады. Оларды Эйлер теоремасынан пайдаланып дәлелде.

1-нәтиже. Көпжақ бір қалыпты бұрыштардың саны оның қырлары санынан екі есе көп.

2-нәтиже. Көпжақ бірқалыпты бұрыштар саны әрдайым жұп болады.

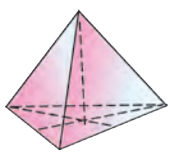
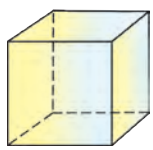
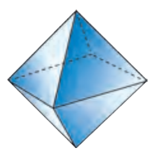
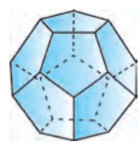
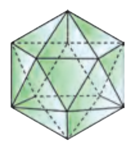
3- нәтиже. Егер көпбұрыштың әр бір ұшында бірдей k санындағы қырлары қиылысса, $U \cdot k = 2Q$ біркелкі орынды болады.

4-нәтиже. Егер көпжақтың барлық жақтары бірдей *n-бұрыштардан* құралған болса, $Y = 2Q$ біркелкі орынды болады.

5-нәтиже. Көпжақтың бірқалыпты бұрыштар жиынтығы $360°(Y - Q)$ қа тең.

Жақтары бір-біріне тең біркелкі көпбұрыштардан тұратын және әр бір ұшынан бірдей сандағы қырлар шығатын дөңес көпжақты *бір-келкі көпжақты* деп аталады.

Белгілі болуынша біркелкі көпжақтылардың бес түрі болар екен (осыны өз бетінше тексеріп көр). Бұлар төмендегілер:

Бейнесі					
Аты және оның түсініктемесі	біркелкі тетраедр (төрт жақты)	куб гексаедр (алты жақты)	Октаедр (сегіз жақты)	Додекаедр (он екі жақты)	Икосаедр (жиырма жақты)
Жақтары	біркелкі үшбұрыш	біркелкі төртбұрыш	біркелкі үшбұрыш	біркелкі бес бұрыш	біркелкі үшбұрыш
Жақтары саны	4	6	8	12	20
Қырлар саны	6	12	12	30	30
Ұштар саны	4	8	6	20	12
Әрбір ұшынан шығатын қырлар саны	3	3	4	3	5

Тарихи деректер

Барлық тұрақты көпжақтылар Ежелгі Грецияда мәлім еді. Евклидтің әйгілі "Негіздер"дің XIII кітабы тұрақты көпжақтыларға арналған. Бұл көпжақтарды көбінесе Платон денелері деп атайды. Ежелгі Грецияның ұлы ғалымы Платон (эрамыздан алдынғы 427–347- жылдар) айқындаған әлемнің идеалистік көрінісінде бұл денелерден төртеуі әлемнің төрт элементіне ұқсатылған: тетраедр – өрт, гексаедр – Жер: икосаедр – су, октаедр – ауа, бесінші көпжақ – додекаедр болса бүтін әлем түзілісінің белгісі ("бесінші маңыз") деп атаған.

XVIII ғасырда көпжақтар практикасына Леонард Эйлер (1707–1783) салмақты үлес қосқан. 1758 жылда хабарланған шұңқыр көпжақтардың ұштары, бұрыштары және жақтар саны арасындағы қатынасы жайлы Эйлер теоремасы мен оның дәлелі түрлі-түсті көпжақтар дүниесіне тартып орнатты және оның сұлу геометриялық әсемдігін алгебралық көзқарасынан мәлімдеді

Тақырыпқа қатысты мәселелер мен практикалық тапсырмалар

142. Екі жазықтық арасындағы бұрыш 47°. Бұл жазықтықтар қиылысудан пайда болған екіжақты бұрыштардың градус өлшемін тап.

143. Екіжақты бұрыштың градус өлшемі 52°-қа тең. Бұл бұрышқа көрші болған екіжақты бұрыштың градус өлшемі неге тең болады?

144. Жазық бұрышы 100° болған екіжақты бұрыштың жақтарына перпендикуляр болған тік сызықтар арасындағы бұрышты тап.

145. Көрші екіжақты бұрыштардың биссекторлары арасындағы екіжақты бұрыштың градус өлшемі неге тең?

146. *A* нүкте градус өлшемі 60° болған екіжақты бұрыштың биссекторында жатыр. Егер бұл нүкте екіжақты бұрыш ұшынан 10 см қашықтықта жатқан болса: онда екіжақты бұрыштың жақтарына дейін болған қашықтықты тап.

147. *A* нүкте градус өлшемі 30° болған екіжақты бұрыштың бір жағына тиісті болып, екінші жағынан 6 см қашықтықта жатыр. Бұл нүктеден екіжақты бұрыштың ұштарына дейін болған қашықтықты тап.

148*. *A* нүкте тік екіжақты бұрыштың жақтарынан 3 дм және 4 дм қашықтықта жатыр. Бұл нүктеден екіжақты бұрыштың ұштарына дейін болған қашықтықты тап.

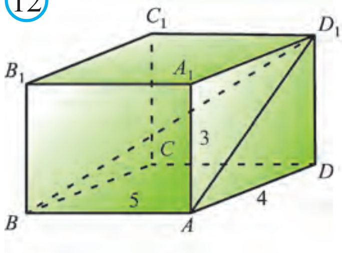
149*. Жүйелі түрдегі тетраедрдың барлық екіжақты бұрыштары тең екендігін дәлелде және олардың градус өлшемін тап.

150. Жазық бұрыштары: a) 30°; 60°; 20°; b) 45°; 80°; 130°; c) 30°; 60°; 20°; d) 20°; 60°; 70°; e) 76°; 34°; 110° болған үш жақты бұрыш бар ма?

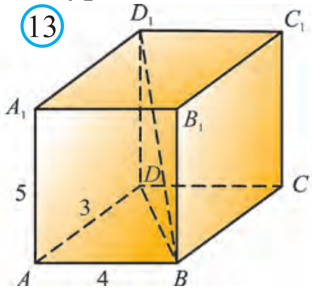
151*. Шұңқыр көпжақты бұрыштың барлық жазық бұрыштар жиындысы 360°-тан кіші екенін дәлелде.

152. Тік бұрышты параллелипипедте $AB=5$, $AD=4$ және $AA_1=3$ болса, ABD_1 бұрышты тап (12- сурет.

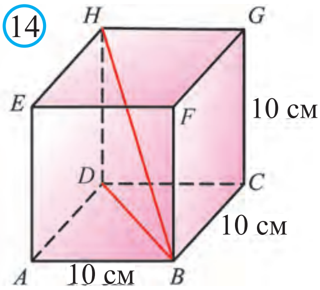
12



13



14



153. Тік бұрышты параллелипипедте $AB=4$, $AD=3$ және $AA_1=5$ болса, DBD_1 бұрышты тап (13- сурет).

154. 14- суретте берілген кубтағы DBH бұрышты тап.

155*. n ұшы бар шұңқыр көпжақтың барлық жазық бұрыштар жиынтығы $360°(n-2)$ ге тең екендігін дәлелде.

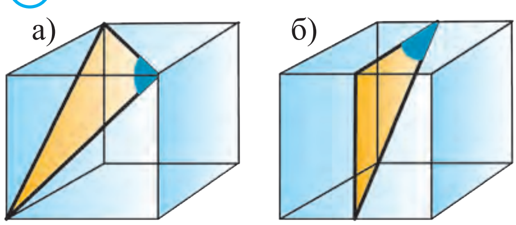
156*.Көпжақты жазық бұрыштардың саны оның ұштары санынан екі есе көп болуын дәлелде.

157* Көпжақ жазық бұрыштар саны әр кез жұп болуын даледе .

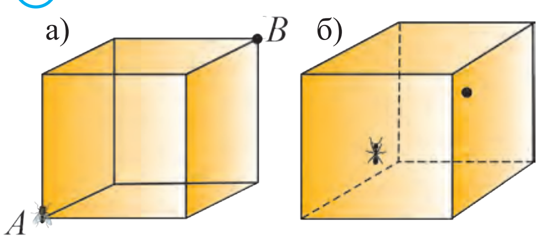
58*.Көпжақтың жазық бұрыштар жиындысы $360°\ (Y-Q)$-ге тең болуын дәлелде.

159. 15- суреттегі кубтарда ажыралып көрсетілген бұрыштар үлкендігін анықта.

15



16



160*. 16- суреттердегі кубтың сыртындағы шыбынға: а) A ұшынан B ұшына; б) куб жағының ортасынан қарама-карсы жағының ортасына алып баратын ең қысқа жолды көрсет (анықтама: кубтың жайылмасынан пайдалан).

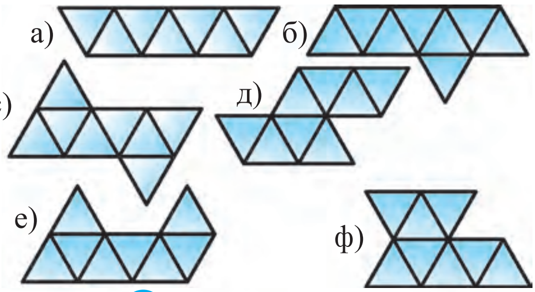
161. 17- суретте көрсетілген кеңістік пішіні шұңқыр көпжақты болады ма? Оның сырты неше квадрадтан құралған? Оның неше ұшы және қыры бар?

162. 18- суретте көрсетілген жайылмалардың қайсы бірі октаедрге тиісті?

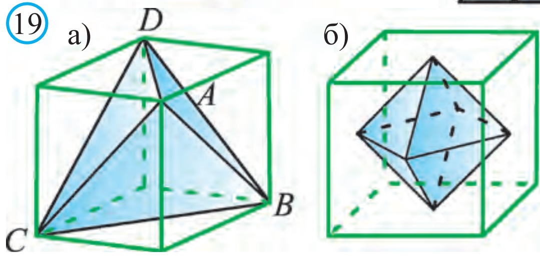
163. 19- суретте көрсетілген, кубқа іші сызылған көпжақтың: а) шұңқыр тетраедр; b) октаедр екендігін негізде.

17

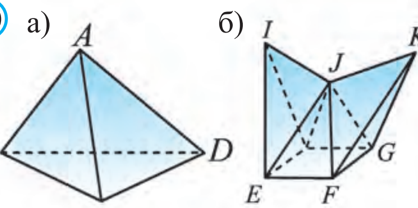
18



19



20



164. 20- суретте көрсетілген көпжақтардың ұштары, қырлары және жақтар санын анықтап, оларды Эйлер теңдеуіне қойып тексер.

165. Шұңқыр көпжақтың әрбір ұшынан үшеуден қыр шығады. Егер бұл көпжақтың қырлар саны: а) 12; б) 15-ке тең болса, оның неше ұшы және жағы бар?

166*. 13 жағы және әр бір жағында 13-ке тең жағы қыры болған көпжақ болуы мүмкін ба?

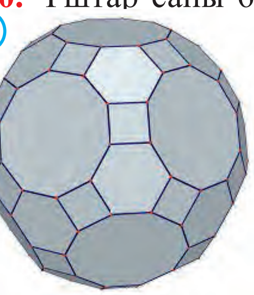
167. Шұңқыр көпжақтың әр бір ұшынан төртеуден қыр шығады. Егер бұл көпжақтың қырлар саны 12-ге тең болса, оның неше ұшы және жағы бар?

168. а) Шұңқыр тетраедр; б) куб; с) октаедр; д) додекаедр; е) икосаедрдың ұштары, қырлары мен жақтар санын тап және бұл көпжақтар ұшын Эйлер теңдеуінің орынды болуын тексер.

169. Ұштар саны 8, қырлар саны есе 12 болған шұңқыр көпжақтың жақтар санын тап және оның атын тап.

170. Ұштар саны 6 , қырлар саны есе 12 болған шұңқыр көпжақтың жақтар санын тап және оның атын анықта.

21



171. Ұштар саны 10, жақтар саны есе 7-еу болған көпжақтың қырлар санын тап.

172. Ұштар саны 14, бұрыштар саны есе 21 болған көпжақтың жақтар санын тап.

173. 21- суреттегі көпжақтың 62 жағы және 120 ұшы бар болса, оның бұрыштарының санын тап.

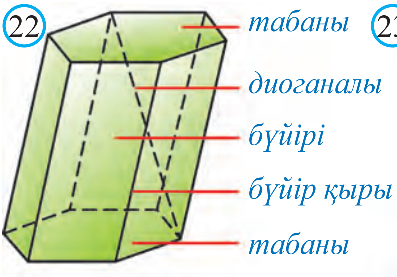
6. ПРИЗМА ЖӘНЕ ОНЫҢ СЫРТЫ

6.1. Призма және оның кесінділері

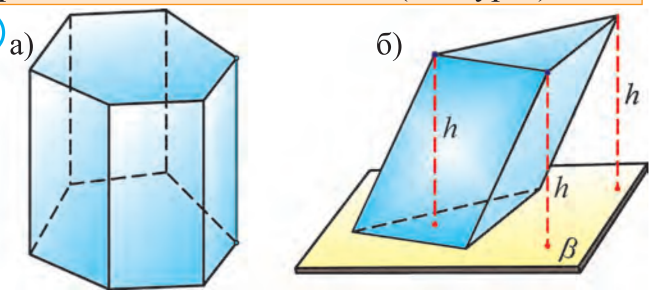
Призмалармен төменгі сыныптардан таныссың. Сондай болса да, оларға тиісті кейбір түсініктерін және қасиеттерін естетіп өтеміз.

Призма деп екі жағы (негізі) тең *n бұрыштан*, қалған *n* жақтары болса параллелограммалардан құралған көпжаққа айтылады (22- сурет).

22

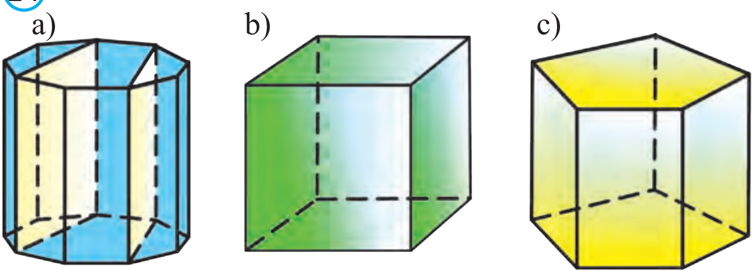


23

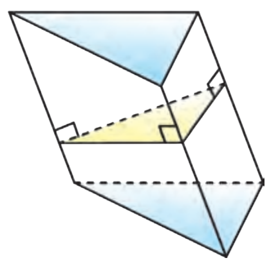


Призма жан жақтарының негізіне перпендикуляр немесе перпендикуляр еместігіне қарап тік немесе *көлбеу призмаларға* бөлінеді. 23.а- суретте тік алты бұрышты призма, 23.б-суретте болса аума үшбұрышты призма көрсетілген. Белгілі, тік призманың жан жақтары тік төртбұрыштардан құралған болады.

24



25



Негізі шұңқыр көпбұрыштан құралған тік призма шұңқыр *призма* деп аталады (24- сурет). Шұңқыр призманың жан жақтары бір-біріне тең тік төртбұрыштардан құралған болады.

Призма негізінің бір нүктесінен екінші негізіне түсірілген перпендикуляр призманың биіктігі не деп аталады (23.б- сурет).

Призманың *диагонал кесіндісі деп*, призма негіздерінің сай диагоналдары арқылы өткізілген кесіндіге айтылады (24.а- сурет). Призма диагонал кесінділерінің саны призма бір негізінің диагоналдар санына тең.

Призманың перпендикуляр кесінді деп, оның барлық жан бұрыштарына перпендикуляр кесіндіге айтылады (25- сурет).

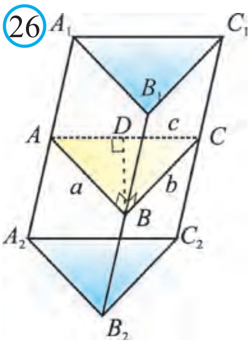
Шұңқыр n-бұрыштың $\frac{n(n-3)}{2}$ диоганалы бар болғанын есепке алсақ, n-бұрышты призма диагонал кесінділері саны да $\frac{n(n-3)}{2}$ болады.

Әрбір диагонал кесімде призманың екі диагоналын өткізу мүмкін n. Демек, n-бұрышты призманың барлық $n(n-3)$ диагоналы бар.

1- мәселе. Үшбұрышты көлбеу призма жан бұрыштары арасындағы қашықтықтар, сәйкес түрде, 7 см, 15 см және 20 см. Призманың ең үлкен жүзді жан жағынан оның қарсысындағы жан бұрышына дейін болған қашықтықты тап

Шешуі. Параллель түзу сызықтар арасындағы қашықтық бұл тік сызықтар кейбір нүктесінен екіншісіне өткізілген перпендикулярдың ұзындығына тең. Онда берілген призманың ABC перпендикуляр кесімі жақтарының ұзындығы сол қашықтықтарға тең болады (26-сурет). Призманың ең үлкен жүзді жағында ең үлкен AC=20 см жағына жатады. B_2B_1 *бұрыштан* $A_2A_1C_1C_2$ жазықтыққа дейін болған қашықтық ABC үшбұрыштың BD биіктігіне тең болады. Онда Герон формуласына қарай:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+15+20}{2} = 21 \quad .$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21\cdot14\cdot6\cdot1} = 42$$

Екінші жағынан, $S_{ABC} = \frac{AC\cdot BD}{2}$.

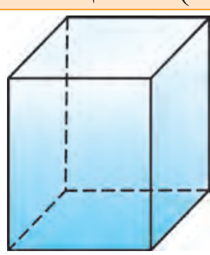
Бұдан, $42 = \frac{AC\cdot BD}{2}$ немесе $BD = 4{,}2$ см. *Жауап:* 4,2 см.

6.2. Параллелепипед және куб

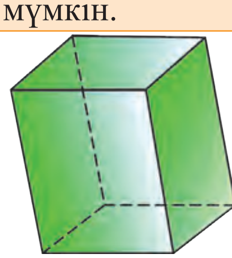
Табандары параллелограмнан болған призма *параллелепипед* деп аталады (27- сурет). Параллелепипедтер де призма сияқты тік (27.а- сурет) және қиғаш (27.б- сурет) болуы мүмкін.

27

а)



б)



Параллелепипедтің жалпы ұшқа ие болмаған жақтары *қарама-қарсы жақтар* деп аталады.

Параллелепипедтің

– 12 қыры болып, олардың әр төртеуі тең кесінділерден құралады (28.а- сурет),

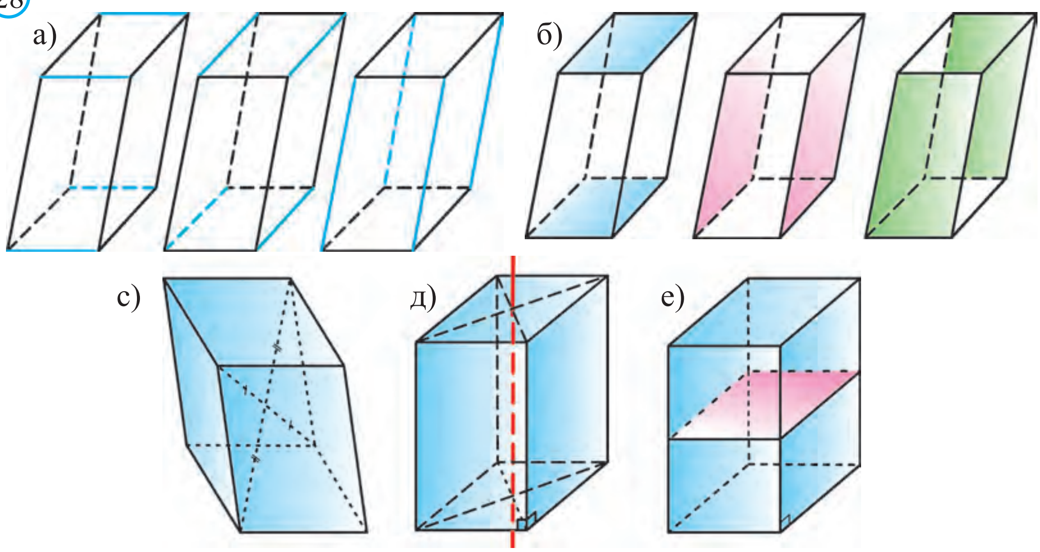
– 6 қырлары болып, оның қарама-қарсы жақтары өзара параллель және тең болады (28.б- сурет),

– 4 диагоналы болып, олар бір нүктеде қиылысады де қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді (28.с-сурет),

– диагоналдар қиылысу нүктесі оның симметрия ортасы болады (28.с- сурет).

Тік параллелепипедтің симметрия осі (28.д- сурет) және симметрия теңдігі бар (28.е -сурет).

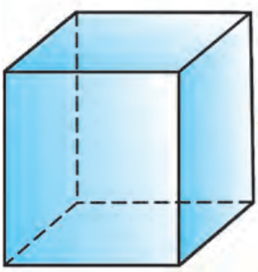
28



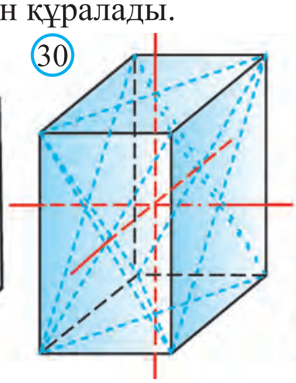
Табандары тік төртбұрыштан болған тік паралеллепипед *тік бұрышты параллелепипед* деп аталады (29- сурет).

Анық, тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тік төртбұрыштардан құралады.

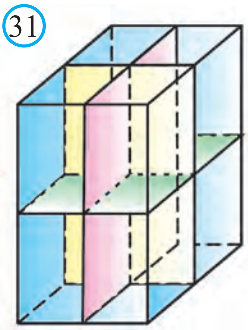
29



30

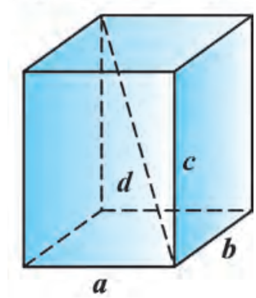


31



32

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Тік бұрышты параллелепипедтің үш симметрия осі (30- сурет) және үш симетрия жазықтығы бар (31- сурет).

Тік бұрышты параллелепипедтің бір ұшынан шығатын үш қырын оның *өлшемдері* деп айтылады.

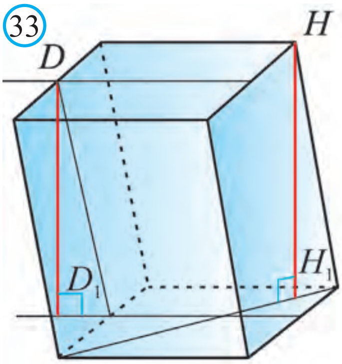
Қасиеті: Тік бұрышты параллелепипед d диагоналының квадраты оның өлшемдері: a, b және c-ның квадраттарының қосындысына тең (32- сурет):
$$\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}.$$

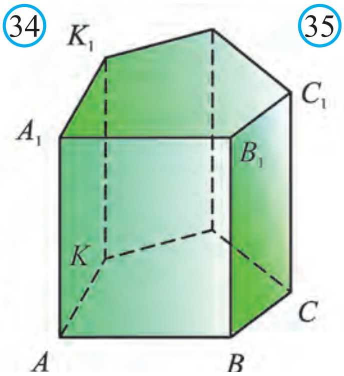
Өлшемдері тең болған тік бұрышты параллелепипед *куб* деп аталады. Белгілі, кубтың барлық жақтары тең квадраттардан құралады. Куб бір симметрия орталығында, 9 симметрия осіне және 9 симметрия жазықтығына ие.

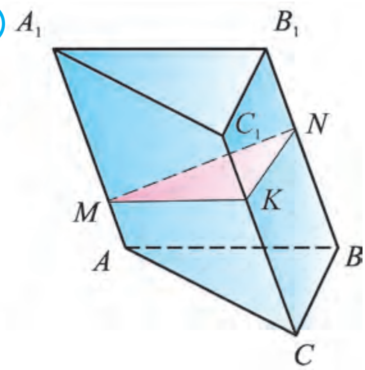
Жоғарыда берілген призмалардың қасиеттерін санап өттік. Олардың кейбіреулері “10-сыныпта” дәлелденген еді. Қалған қасиеттерінің дәлелденуіне қатысты қарапайым болғандығы үшін оларды еркін дәлелдеу үшін қалдырдық.

6.3. Призманың бүйірі және толық сырты

33- суретте $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ призманың HH_1 және DD_1 биіктіктері суреттелген. Белгілі, призманың биіктігі оның бүйір қырына тең болады.

33


34


35


Призма *бүйір сырты* (анығырағы, *бүйір сыртқы ауданы*) оның бүйір жақтары ауданының қосындысына тең, *толық сырты болса* бүйір сырты және екі табанының бет қосындысына тең.

$$\boldsymbol{S_{толық} = S_{жаны} + 2S_{негіз}}.$$

Теорема. Тік призманың бүйір жағы табанының периметрімен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$\boldsymbol{S_{жаны} = P_{негіз} \cdot h}.$$

Дәлел. Берілген призманың биіктігі h, табанының периметрі

$P = AB + BC + ... + KA$ болсын (34- сурет). Белгілі, тік призманың әрбір жағы тік төртбұрыш. Бұл тік төртбұрыштың табаны призманың сәйкес қабырғасына, биіктігі болса призма биіктігіне тең.

Демек, $S_{жаны} = AB \cdot h + BC \cdot h + ... + KA \cdot h = (AB + BC + ... KA) \cdot h = P \cdot h$. □

Теорема. Призманың бүйір жағы оның перпендикуляр сызығы периметрі мен бүйір қыры ұзындығының көбейтіндісіне тең:

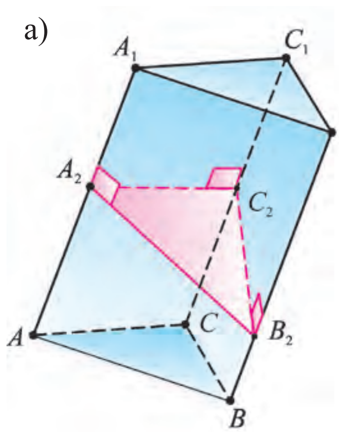
$$\boldsymbol{S_{жаны} = P \cdot l}.$$

Дәлел. Перпендикуляр сызықтың периметрі P-ға тең болсын (35-сурет). Кесінді призманы екі бөлекке ажыратады (36.а- сурет). Бұл бөліктердің бірін алып, призма табандары үсті-үстіне түсетін етіп параллель көшіреміз. Нәтижеде жаңа тік призма пайда болады (36.б-сурет). Белгілі, бұл призманың бүйірі берілген призманың бүйіріне тең . Оның табаны берілген перпендикуляр сызықтан құралған болып, бүйір қыры l ге тең болады.

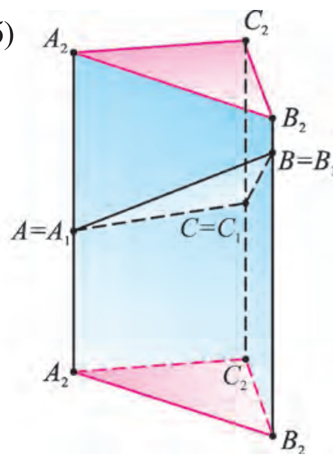
Демек, жоғарыда дәлелденген теоремаға қарағанда: $S_{жаны} = P \cdot l$ □

36

а)



б)



Тақырыпқа сай мәселелер мен практикалық тапсырмалар

174. Тетраедрдің бір жағының беті 6 см^2 болса, оның толық сыртын тап.

175. Октаедрдің бір жағының беті 5,5 см^2 болса, оның толық сыртын тап.

176. Додекаедрдің бір жағының беті 6,4 см^2 болса, оның толық сыртын тап.

177. Кубтың толық сыртқы беті 105,84 см^2 болса, оның әрбір жақ бетіні және бүйірінің ұзындығын тап.

178. Октаедрдің толық сыртқы беті $32\sqrt{3}$ см^2 болса, оның әрбір жақ бетіні және бүйірінің ұзындығын тап.

179. Тікбұрышты параллелепипед табанының жақтары 7:24 қарағанда, диагонал сызығының беті 50 дм^2-ге тең. Бүйір сыртының бетін тап.

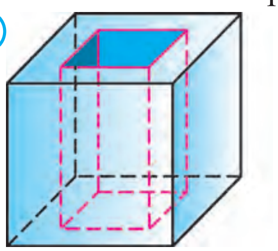
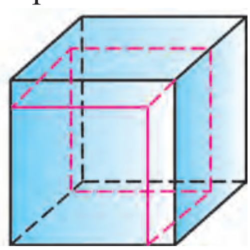
180*. Тік параллелепипедтің бүйір қыры 1 м-ге, табандарының жақтары 23 м және 11 м-ге тең. Табан диагоналдарының қатысы 2:3 . Диагонал кесімдерінің бетін тап.

181. Тік параллелепипед табанының жақтары 3 см және 5 см, табанының диагоналдарының бірі 4 см-ге тең. Параллелепипед кіші диагоналдарынан бірі табан жазықтығымен 60°-ты бұрыш құрайды.Оның диагоналдарының ұзындығын тап.

182. Тік параллелепипедтің бүйір қыры 5 м, табанының жақтары 6 м және 8 м, табанының диагоналдарының бірі 12 м-ге тең. Параллелепипед диагоналдарын тап.

183*. Үшбұрышты призманың қыры 3-ке тең. Табанының жағы және осінің ортасы арқылы жазықтық өткізілген. Сызықтың бетін тап.

184. Үшбұрышты тік призманың биіктігі 50 см, табанының жақтары 40 см, 13 см және 37 см. Призманың толық сыртын тап.

37

38


185*. 37- суретте бейнеленген бірлік кубтан табанының жақтары 0,5 ке бүйір қыры 1 ге тең болған жүйелі түрдегі төртбұрышты призма ойып алынды. Кубтың қалған бөлігінің толық сыртқы бетін есепте.

186. Егер кубтың қыры 1 бірлік арттырылса, оның толық сырты 54 бірлікке артады. Кубтың қырыны тап (38- сурет).

187. $ABCC_1B_1A_1$ призманың табаны ABC тең бүйір үшбұрыш болып, онда $AB=AC=10$ см және $BC=12$ см. A_1 ұшы A, B және C ұштарынан тең қашықтықта жатады әрі $AA_1 = 13$ см ге тең. Призманинг толық сыртын тап.

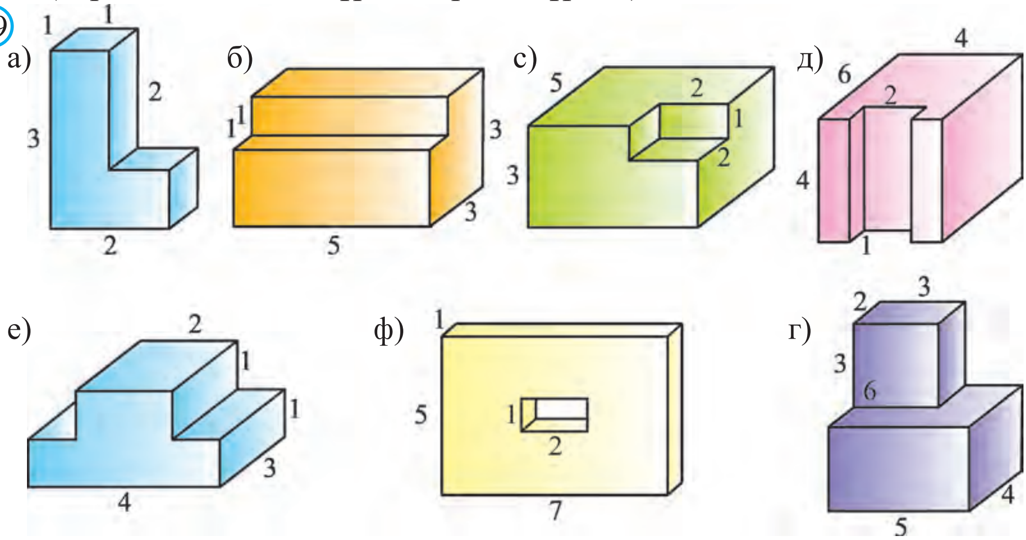
188. Жүйелі түрде төртбұрышты призманың бүйір сырты 160 қа, толық сырты 210 ға тең. Призма диагоналыны тап.

189. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырлары жатқан параллель түзу сызықтар арасындағы қашықтық 2 см, 3 см және 4 см, бүйір қырлары болса 5 см ге тең. Призманың бүйір сыртын тап.

190. Кубтың қырларының ұзындықтары қосындысы 96 ға тең. Оның бүйір сыртын тап.

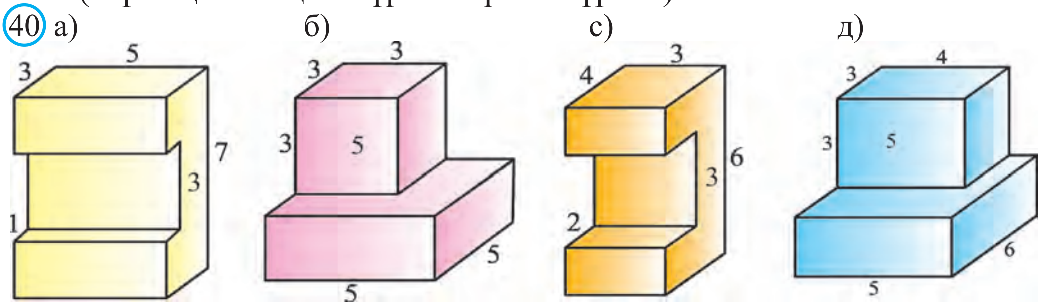
191. 39- суреттерде бейнеленген көпжақтардың толық сыртын есепте (барлық екіжақты бұрыштар тік бұрыш).

39



192. 40- суреттерде бейнеленген көпжақтардың толық сыртын есепте (барлық екіжақты бұрыштар тік бұрыш).

40



193. Алтыбұрышты жүйелі призманың бүйір қыры 8 см, табанының жақтары болса 3 см. Призманың барлық қырларының ұзындықтарының жиынтығын тап.

194. Төртбұрышты жүйелі призма табанының жақтары 6 см, призманың биіктігі болса 5 см. Оның диагонал сызығының ауданын тап.

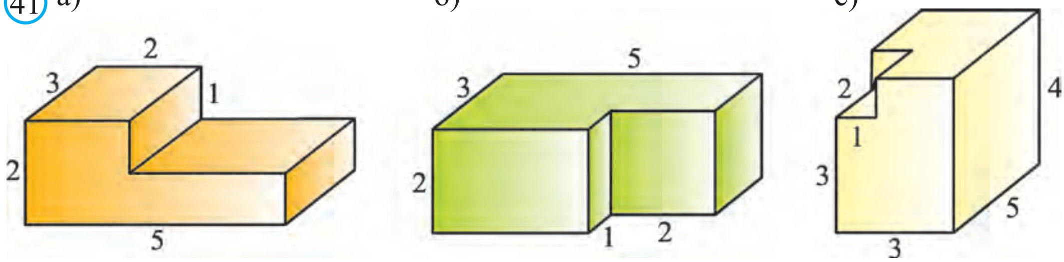
195. Үшбұрышты жүйелі призма табанының жақтары 6 см, бүйір қыры болса 12 см. Призма бүйір сыртының ауданын тап.

196. 41- суреттерде бейнеленген көпжақтардың толық сыртын есепте (барлық екі жақты бұрыштар тік бұрыш).

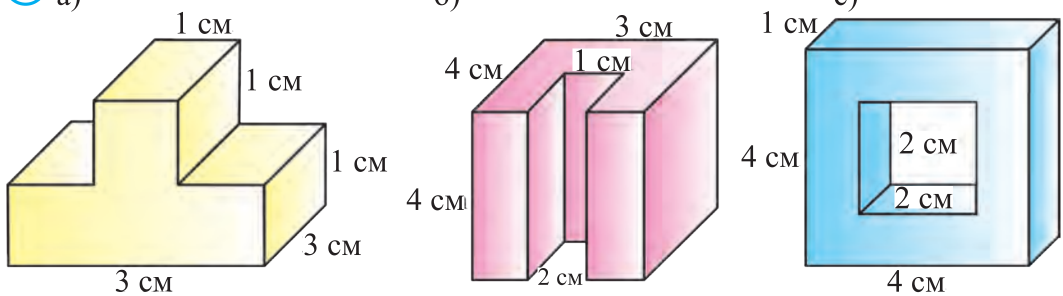
197. 42- суретте бейнеленген көпжақтардың толық сыртын есепте (барлық екіжақты бұрыштар тік бұрыштар).

198*. 43- суреттегі үй табанының өлшемі 6 м × 8 м. Оның төбесі табанына 45° ты бұрыш астында орналасқан. Төбенің сыртқы ауданын тап.

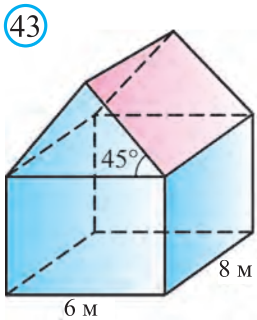
41 а) б) с)



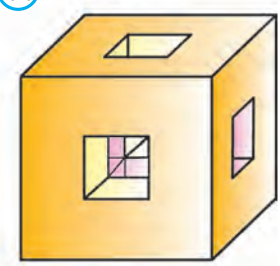
42 а) б) с)



43



44



45

199. Параллелепипедтің бір ұшынан шығатын қырлары, сәйкес түрде, 6 см, 8 см және 12 см. Параллелепипед барлық қырлары ұзындықтарының жиынтығын тап.

200. Параллелепипедтің бір ұшынан шығатын жақтарының ауданы 6 см^2, 12 см^2 және 16 см^2. Параллелепипед толық сыртының ауданын тап.

201*. Қыры 3 см ға тең болған кубтың әрбір жағынан көлденең сызығы - табаны 1 см ға тең квадрат көрінісіндегі тесіктер ойылған (44-сурет). Кубтың қалған бөлігінің толық сыртқы ауданын тап.

202*. Футбол добының сыртқы қыры 5 см ге тең болған 12 жүйелі бесбұрыштан және 20 жүйелі алтыбұрыштан тұрады (45- сурет). Футбол добының толық сыртын тап. Доп квадрат антиметрі 60 сум тұратын теріден істелген және оның 10 пайызы тігіс және шығынға шығуы белгілі болса, допқа кеткен тері қаражатының бағасын тап.

7. ПРИЗМАНЫҢ ҚҰРАМЫ

7.1. Өлшем түсінігі

Кеңістікте геометриялық денеге сәйкес болған ерекшелігінің бірі бұл өлшем түсінігі. Әр қандай предмет (дене) кеңістіктің бір қалай да бөлігін орынды иелейді. Мысалы, кірпіш сіріңке қорабына қарағанда көлемділеу жайды иелейді. Бұл денелерді өзара салыстыру үшін өлшем түсінігін енгізеді.

Өлшем – кеңістік дененің төмендегі қасиеттерге ие болған санды көрсеткіштер:

1. Әр қандай дене тұрақты сандарда өрнектеуші тұрақты өлшемге ие.

2. Тең денелер өлшемі де тең.

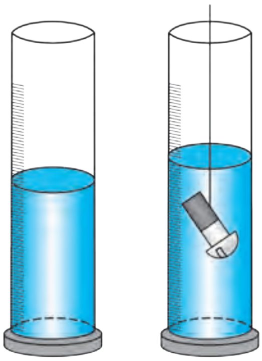
3. Егер дене бірнеше бөлшекке бөлінген болса, оның өлшемі бөлшектер өлшемінің жиынтығына тең.

4. Қыры бір бірлік ұзындыққа тең кубтың өлшемі бірге тең.

Өлшем – ұзындық және аудан сияқты санды өлшем бірлік. Ұзындық өлшем бірлігінің таңдауына қарап *бірлік* (қыры бірлік ұзындыққа ие) *куб* тың өлшемі 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3 тағы басқа өлшем бірліктерімен өлшенеді.

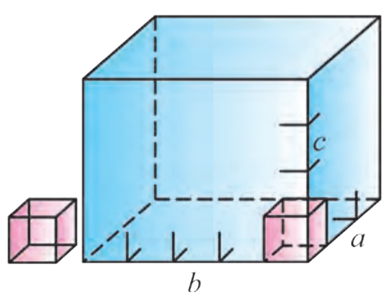
Денелер өлшемін түрлі әдістермен өлшейді болмаса есептейді. Мысалы, кішірек деталдың өлшемін бөлшектерге (шкалаға) ие болған ыдыс (мензурка) жәрдемінде өлшеу мүмкін (46- сурет). Шелек өлшемін болса оған бірлік өлшемге ие болған жәрдемінде су құйып, толтыру арқылы өлшеу мүмкін (47- сурет). Бірақ барлық денелердің де өлшемін бұндай әдістермен өлшеп болмайды. Мұндайда дене түрлі әдістермен есептелінеді. Төменде осы әдістер туралы тоқталамыз және олардың кейбіреулеріне дәлелдер келтіреміз.

46

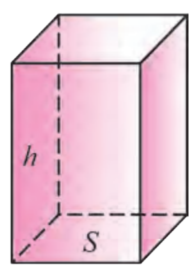


47

48



49



7.2. Параллелепипедтің өлшемі

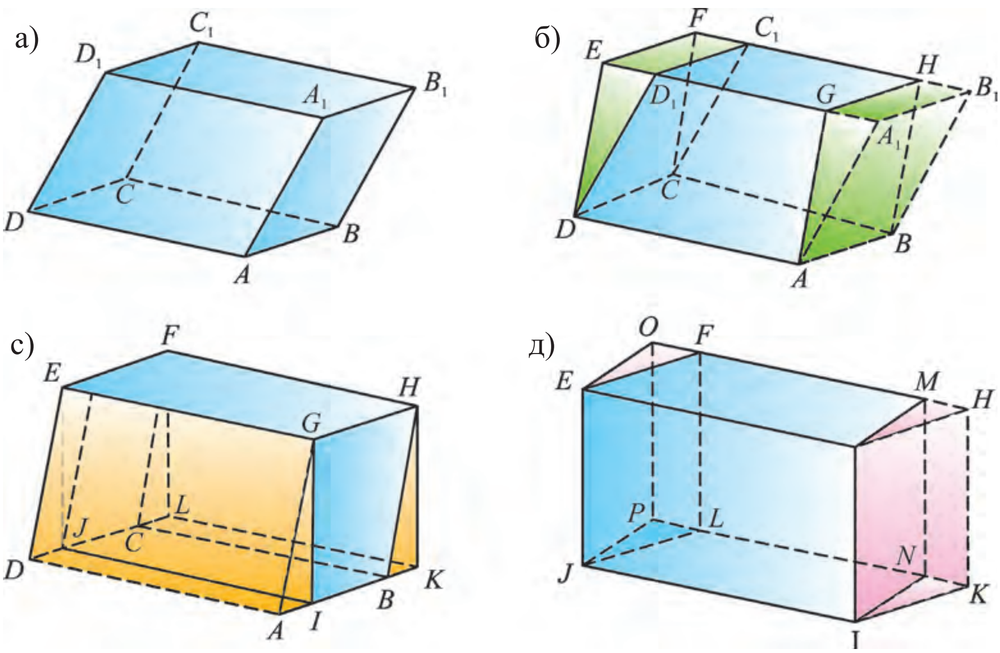
Теорема. Тік бұрышты параллелепипедтің көлемі оның үш өлшемдерінің көбейтіндісіне тең (48- сурет): $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$.

Нәтиже. Тік бұрышты параллелепипедтің көлемі табан бетінің ауданымен биіктігінің көбейтіндісіне тең (49- сурет): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Теорема. Еркін параллелепипедтің өлшемі негізінің бетімен биіктігінің көбейтіндісіне тең (50- сурет): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Төмендегі өрнек жоғарыдағы нәтижеден келіп шығады. Төмендегі 50-суреттерде берілген параллелепипед қалай тік бұрышты параллелепипедке толтырылуы бейнеленген. Бұдан пайдаланып қасиетін өз бетіңше дәлелде.

50



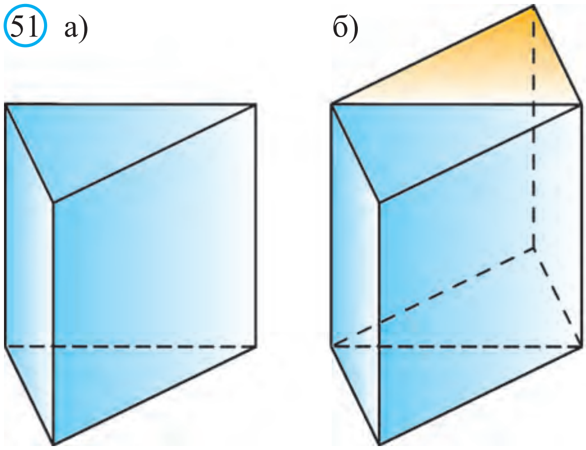
7.3. Призманың құрамы

Теорема. Тік призманың құрамы табанда ауданымен биіктігінің көбейтіндісіне тең (51- сурет): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

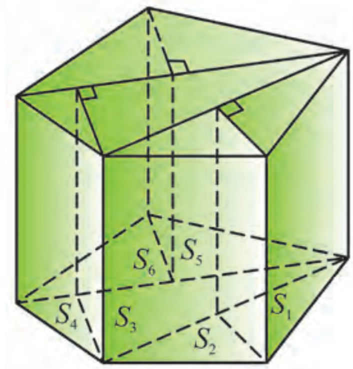
Дәлел. 1- дәреже. Табандар тікбұрышты үшбұрыштан құралған тік призма берілген болсын (51.а-сурет). Бұл призманы оған тең болған призма мен тік бұрышты параллелепипедке толтыру мүмкін (51.b- сурет).

Берілген призманың құрамы, табандарының ауданы және биіктігіне, сай, V, S және h болса, пайда болған тік бұрышты параллелепипедтің құрамы, табанының ауданы мен биіктігіне, сай, $2V$, $2S$ және h болады.

51 а) б)



52



Демек, $2V=2S \cdot h$ болмаса $V=S \cdot h$ болады.

2- жағдай. Ерікті тік n-бұрышты призма берілген болып, оның табанының беті S, биіктігі болса h қа тең болсын. Призманың табаны – n-бұрышты оның диагоналдарымен үшбұрыштарға, үшбұрыштардың әрбірін болса тік бұрышты үшбұрыштарға бөлу мүмкін (52- сурет). Нәтижеде, берілген призманы шекті сандағы табаны тік бұрышты үшбұрыштардан болған тік призмаларға ажырату мүмкіндігін анықтаймыз. Бұл призмалардың биіктігі h қа тең болып, олардың ауданы берілген призма беттерінің аудандарының қосындысына тең болады: $S = S_1 + S_2 + ... + S_k$.

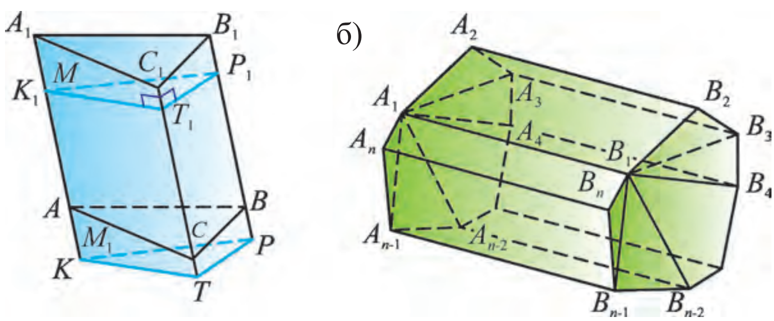
Берілген призманың көлемі оны құраушы үшбұрышты призмалар көлемдерінің қосындысына тең болады:

$$V = S_1 h + S_2 h + ... + S_k h = (S_1 + S_2 + ... + S_k)\, h = S \cdot h, \quad \text{яғни} \quad V = S \cdot h. \ \square$$

Теорема. Кез келген призманың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең: $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Бұл теореманы 5.3-суреттен пайдаланып, алдын үшбұрышты призма үшін (5.3.а-сурет), соң еркін призма үшін (5.3.б-сурет) өз бетіңше дәлелде.

53 а) б)



1- мысал. Тік параллелепипед табандарының жақтары a және b ға тең болып, олар өзара 30° ты бұрыш құрайды. Егер параллелепипедтің бүйір сырты S ке тең болса, оның өлшеміні тап.

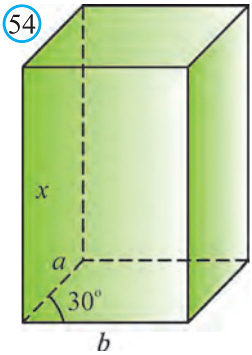
Шешуі: Параллелепипед биіктігін h пен белгілейміз (54-сурет). Онда шартқа қарай:

$$S = (2a+2b)\,h \text{ yoki } h = \frac{S}{2(a+b)}.$$

$$S_{\text{негіз}} = ab\sin 30^\circ = \frac{ab}{2}.$$

$$V = S_{\text{негіз}} \cdot h = \frac{ab}{2} \cdot \frac{S}{2(a+b)} = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

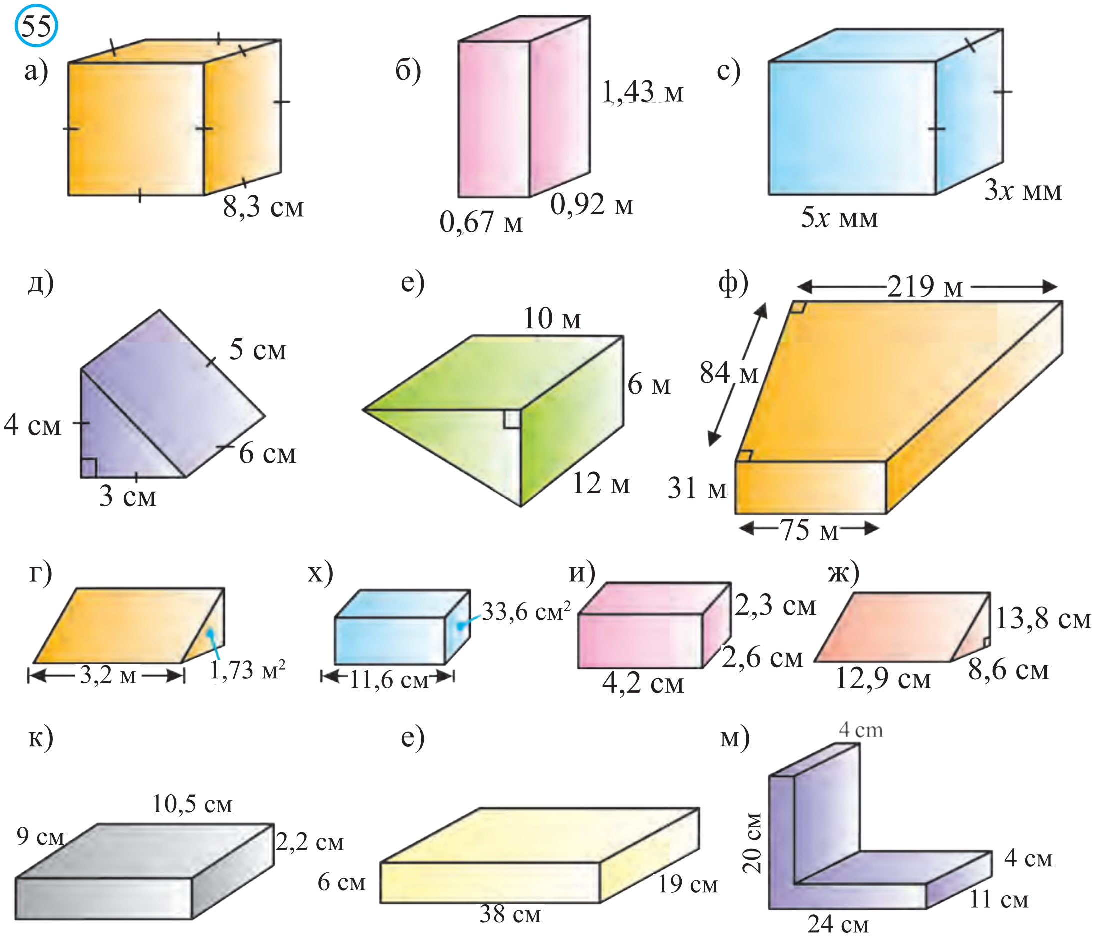
54



Тақырыпқа қатысты мәселелер және практикалық тапсырмалар

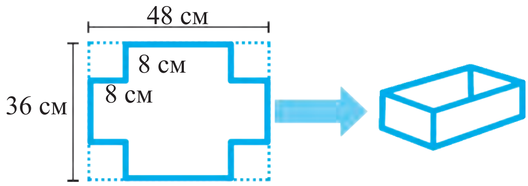
203. 55- суретте бейнеленген көпжақтылардың өлшемін тап.

55

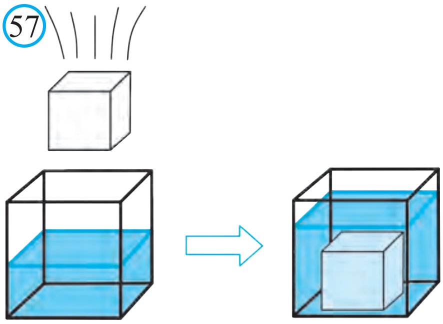


204. 56- суретте берілген жайылмаға орай жасалған ыдыстың өлшемін тап.

56



57



58

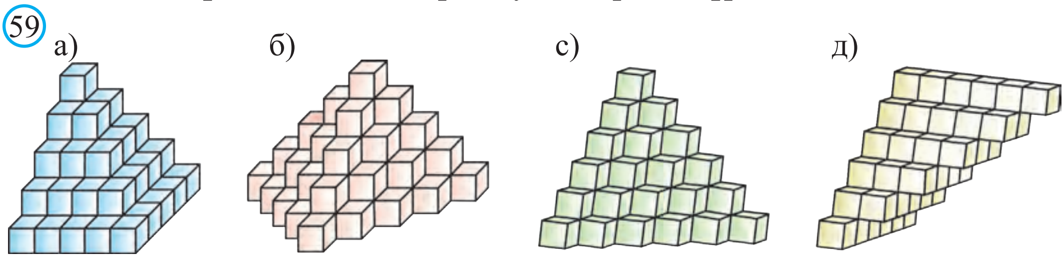
205*. 57- суретке орай мысал түз және оны шеш.

206. 58- суретте келтірілген дене 88 бірлік кубиктен жасалған. Дененің толық сыртын тап.

207. Тік бұрышты параллелепипед бүйірінің ауданы 12 ге және оған перпендикуляр қырының ұзындығы 12-ге тең. Параллелепипедтің өлшемін тап.

208. 59- суретте бейнеленген ауадағы көріністерден қайсысының өлшемі үлкен, яғни көбірек кубиктерден құралған?

59



209. Тік бұрышты параллелепипед өлшемі 24-ке тең және қырларының бірінің ұзындығы 3-кетең. Параллелепипедтің бұл қырына перпендикуляр жағының бетін тап.

210. Тік бұрышты параллелепипед өлшемі 60 қа тең және бүйірлерінің бірінің беті 12-ге тең. параллелепипедтің бұл бүйіріне перпендикуляр қырының ұзындығын тап.

211. Параллелепипедтің бір ұшынан шығатын үш қырлы ұзындықтары 4, 6 және 9-ға тең. Оған тең куб қырыны тап.

212. Кубтың толық сырт беті 18-ге тең болса, оның диагоналын тап.

213. Кубтың өлшемі 8 ге тең болса, оның толық сыртының бетін тап.

214. Егер кубтың қырларын 1 бірлікке арттырса, оның өлшемі 19 бірлікке артады. Кубтың қырын тап.

215. Кубтың толық сыртының ауданы 24-ке тең. Оның өлшемін тап.
216. Кубтың диаганалы $\sqrt{12}$ -ге тең болса, оның өлшемін тап.
217. Кубтың өлшемі $24\sqrt{3}$ -ке тең болса, оның диагоналын тап.
218. Бірінші кубтың өлшемі екіншісінен 8 есе үлкен. Бірінші кубтың толық сыртқы беті екіншісінікінен неше есе үлкен?
219. Қыры 30 см болған куб пішініндегі қысқа (систернаға) неше литр су кетеді?
220. Тікбұрышты параллелепипедтің бір ұшынан шығатын қыры 2 және 6-ға тең. Тікбұрышты параллелепипед өлшемі 48-ге тең. Параллелепипедтің осы ұшынан шығатын үшінші қырын тап.
221. Тік параллелепипед табанының бүйірлері ұзындығы $2\sqrt{2}$ см және 5 см, олардың арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Егер параллелепипедтің кіші диагоналы 7 см-ге тең болса, оның өлшемін тап.
222*Тік бұрышты параллелепипед табанының a және b қабырғалары 30°-ты бұрыш құрайды. Толық сырты S ке тең. Оның өлшемін тап.
223. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 15 м, 50 м және 36 м. Оған теңдес кубтың қырын тап.
224. Үшбұрышты тік призма табанының қабырғалары 29, 25 және 6-ға, қыры болса негізінің жоғары биіктігіне тең. Призманың өлшемін тап.
225. 39- суреттерде бейнеленген көпжақтардың өлшемін есепте (барлық екіжақты бұрыштар тік бұрыш).
226. 40- суреттерде бейнеленген көпжақтардың өлшемін есепте (барлық екіжақты бұрыштар тік бұрыш).
227. Тік параллелепипед табанының ауданы 1 м^2 тең болған ромбтан құралған. Диагонал сызықтарының ауданы сәйкес түрде, 3 м^2 және 6 м^2. Параллелепипедтің көлемін тап.
228. 41- суреттерде көрсетілген көпжақтардың өлшемін есепте (барлық екі жақты бұрыштар тікбұрыш).
229. 42- суреттерде бейнеленген көпжақтардың өлшемін есепте (барлық екіжақты бұрыштар тікбұрыш).
230. Кеңдігі 3 м және ұзындығы 20 м болған жолаққа қалыңдығы 10 см болған асфальт жатқызылды. Жолақ үшін қанша мөлшердегі асфальт істетілді?
231*. Көлбеу параллелепипедтің табаны – қабырғасы 1 м-ге тең болған квадрадтан құралған. Бүйір қырының бірі 2 м-ге тең және табанының өзіне жапсырылған әрбір жағымен 60°-ты бұрыш құрайды. Параллелепипедтің өлшемін тап.
232*.Параллелепипедтің бүйір жағыны a-ға тең және сүйір бұрышы 60° болған рең ромбтардан құралған. Параллелепипедтің өлшемін тап.

233. Параллелепипедтің әрбір қырының 1 см-ге тең. Параллелепипедтің бір ұшындағы үш жалпақ бұрышы сүйір болып, әр бірі $2a$-ға тең. Параллелепипедтің өлшемін тап.

234*. Параллелепипедтің бір ұшынан шығарылған үш қырының ұзындықтары a, b, c ға тең. a және b қырлары өзара перпендикуляр, c қыры болса әр біреуімен α бұрыш құрайды. Параллелепипедтің өлшемін тап (60- сурет).

235. а) Үшбұрышты; б) төртбұрышты; с) алтыбұрышты дұрыс призма табандарының бүйірі a және бүйір қыры b бойынша өлшемін тап.

236. Тік параллелепипед табандарының бүйірі a см және b см-ге тең болып, олар өзара α бұрыш құрайды. Параллелепипедтің кіші диагоналы d ға тең болса, оның өлшемін тап.

237. Үшбұрышты қиғаш призманың бүйір қырлары 15 м-ге, олар арасындағы қашықтық болса 26 м, 25 және 17 м-ге тең. Призманың өлшемін тап.

238. Төртбұрышты дұрыс призманың диагоналы 3,5 см-ге, бүйір жанының диагоналы 2,5 см-ға тең. Призманың өлшемін тап.

239. Үшбұрышты қалыпты призма табанының қабырғасы a-ға, бүйір сырты табандарының ауданы жиынтығына тең. Оның өлшемін тап.

240. Үшбұрышты табандары призмада ең үлкен диагонал сызықтың беті 4 $м^2$-ға екі қарама-қарсы бүйір қырлары арасындағы қашықтық 2 м-ге тең. Призманың өлшемін тап.

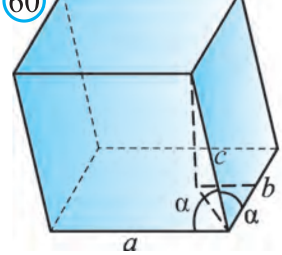
241*. Жеті рет кір жуғаннан кейін сабынның өлшемдері екі есе кемейеді (61-сурет). Егер кір жуғанда бір өлшемдегі сабын істетілгені мәлім болса, сабын тағы да неше рет кір жууға жетеді?

242*. Қиғаш призма бүйір қырларына перпендикуляр және барлық бүйір қырларын кесіп өтетін жазықтық өткізілген. Пайда болған кесінді беті Q, бүйір қырлары болса l-ге тең болса, призманың өлшемін тап (62-сурет).

243. Үшбұрышты тік призма табанының қабырғалары 4 см, 5 см, 7 см-ге, бүйір қыры болса табанының жоғары биіктігіне тең. Призманың өлшемін тап.

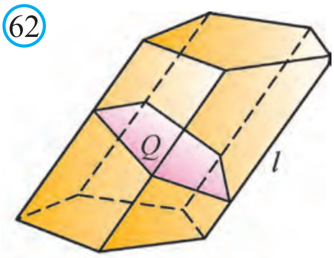
244. 63- суреттерде бейнеленген копжақтардың өлшемін есепте.

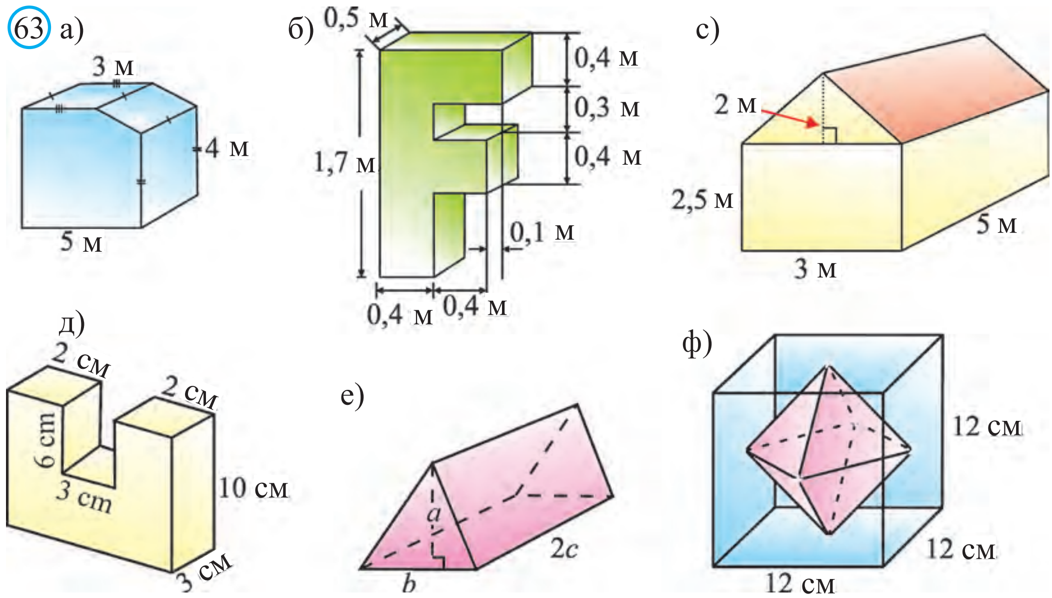
60



61

62





245. Үшбұрышты тік призма табанының беті 4 см^2-ге, бүйір жақтарының беттері 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2-ге тең болса, оның өлшемін тап.

246*. Призманың негізі тең бүйірлі бұрыш болып, оның бір жағы 2 см, қалған екі жағы 3 см-ге тең. Призманың бүйір қыры 4 см-ге тең және негіз тегістігімен 45°-ты бұрыш құрайды. Бұл призмаға құрамдас кубтың өлшемін тап.

247. Көлбеу призма табанынын a-ға тең болған тең жақты үшбұрыш. Бүйір жақтарының бірі табанына перпендикуляр және кіші диагоналы s қа тең болған ромбтан құралған. Призманың өлшемін тап.

248. Егер төртбұрышты тік призманың биіктігі h, диагоналдары табан жазықтығымен α және β бұрыштар құрайды. Егер табанның диагоналдары арасындағы бұрыш γ ге тең болса, призманың өлшемін тап.

249*. Кесінді табаны 1,4 биіктігі 1,2 м болған тең бүйірлі үшбұрыш көрінісіндегі су шығаратын құбырдың су өткізу қуатын (1 сағатта ағып өтетін су мөлшері) есепте. Судың ағу жылдамдығы 2 м/с.

250*. Теміржол көтергішінің кесіндісі трапеция көрінісінде болып, оның төменгі негізі 14 м, жоғарғы негізі 8 м және биіктігі 3,2 м. 1 км көтергішті құру үшін қанша куб метр топырақ керек болады?

251*. Жақтары 3,2 см және қалыңдығы 0,7 см болған қалыпты сегіз-бұрыш көрінісіндегі ағаш плитканың массасы 17,3 г. Ағаштың тығыздығын тап.

252. Өлшемдері 30×40×50 (см) болған тік бұрышты параллелепипед көрінісіндегі құтыдан нешеуінің өлшемдері 2×3×1,5 м болған машина кузовына орналасуы мүмкін?

253*. Өлшемдері 420 мм × 240 мм × 90 мм болған тікбұрышты параллелепипед көрінісіндегі, тығыздығы 7,8 г/см^3 болған болат плиталардың нешеуін жүк көтергіш қуаты 3 т болған жүк машинасында тасу мүмкін?

254. Өлшемдері 250 мм × 120 мм × 65 мм болған тік бұрышты параллелепипед көрінісіндегі, тығыздығы 1,6 г/см^3 болған кірпіштің нешеуін жүк көтеру қуаты 3 т болған жүк машинасына жүктеу мүмкін?

255*. Өлшемдері 820 мм × 210 мм × 120 мм болған тік бұрышты параллелепипед көрінісіндегі, тығыздығы 7,3 г/см^3 болған шоян плитаны жүк көтеру қуаты 2 т болған көтерме кран жәдемінде көтеру мүмкін ба?

256. Бойы 105 м және көлденең кесім өлшемдері 30 см × 40 см болған тіктөртбұрыштан құралған ағаштан, бойы 3,5 м, ені 20 см және қалыңдығы 20 мм болған неше тақта бөлегі шығады?

257. Кірпіштің өлшемдері 25 × 12 × 6,5 (см). Егер 1 м^3 өлшемдегі кірпіштің массасы 1700 кг болса, бір дана ғыштың массасыны граммдарда анықта.

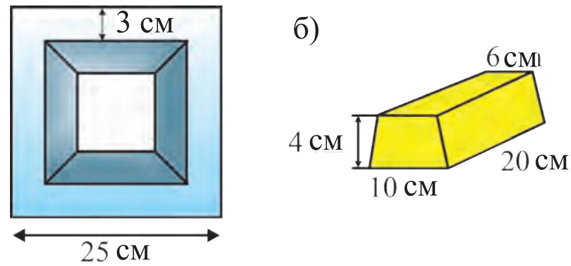
258. Санитария талабына сәйкес, сыныптағы әрбір оқушыға 7,5 м^3 ауа тура келеді. Егер сынып бөлмесінің биіктігі 3,5 м және ол 28 оқушыға молжалданған болса, сынып бөлмесінің майданын тап.

259*. Бойы 100 м, ені болса 10 м болған тіктөртбұрыш көрінісіндегі территорияның қалыңдығы 5 с болған асфальтпен қаптау керек. Егер 1 м^3 көлемдегі асфальттың массасы 2,4 тонна және бір жүк машинасының жүк көтеру қуаты 5 тонна болса, бұл майданды асфальттау үшін неше машина асфальт керек болады?

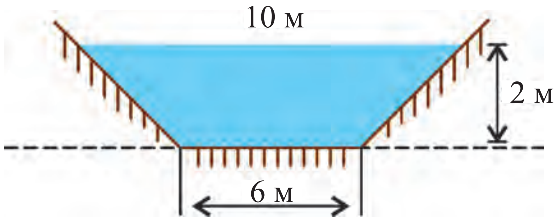
260*. Өлшемдері 3 см, 4 см, 5 см болған, тік бұрышты параллелепипед көріністегі темір сынықтарына өңдеу берілді. Мұнда оның әр бір қыры бірдей кемейіп, толық сырты 42 см^2 ге кемейгені мәлім. Бұл темір сынықтарының көлемі өңдеу берілгеннен кейін қанша болады?

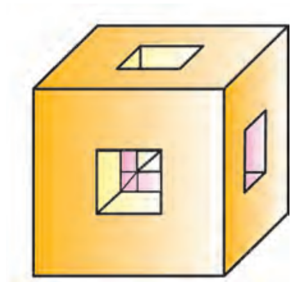
261*. 64.a- суретте шоян құбыр кесімі бейнеленген. Суретте берілген мәліметтерге сүйене бір метр ұзындықтағы мұндай құбырдың массасын анықта (шоянның тығыздығы – 7,3 г/см^3).

262. Өлшемдері 64.b- суретте берілген алтын плитканың массасы 12,36 кг болса, оның тығыздығын анықта.

64


263*. Каналдың көлденең кесіндісінің негізі 10 м, 6 м және биіктігі 2 м болған тең бүйірлі трапециядан құралған (65-сурет). Су ағымы жылдамдығы 1 м/с болса, бір минутта бұл каналдан қанша мөлшердегі су ағып өтеді?

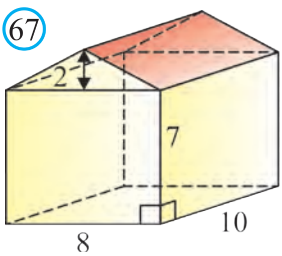
65


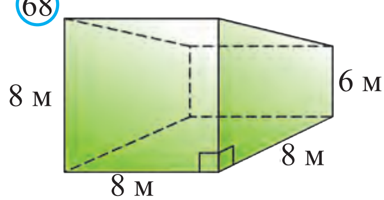
66


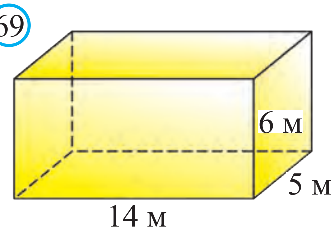
264*. Қыры 6 см ге тең болған, мыстан істелген кубтың әр бір жағынан көлденең кесіндісі 2 см-ге тең квадрат көріністегі тесіктер ойылған (66- сурет). Егер мыстың салыстырма тығыздығы 0,9 г/см^3 болса, кубтың қалған бөлігінің массасын тап.

265. Тік бұрышты параллелепипед көріністегі металл блок негізінің өлшемдері 7 см және 5 см. Блоктың массасы 1285 г және металдың тығыздығы 7,5 г/см^3 болса, блоктың биіктігін тап.

266. 67- суретте берілген мәліметтер негізінде гараждың өлшемін тап.

67


68


69


267. Гүл өсірілетін үлкен түбек шұңқырлығы 2 фут, кеңдігі 12 фут және ұзындығы 15 фут болған тік бұрышты параллелепипед көрінісінде. Түбектің өлшемін тап және куб метрлерде көрсет (1 фут = 30,48 см).

268. Жүк қоймасы 68- суретте бейнеленген трапециялы призма көрінісінде. Суретте берілген мәліметтер негізінде қойманың сыйымдылығын анықта.

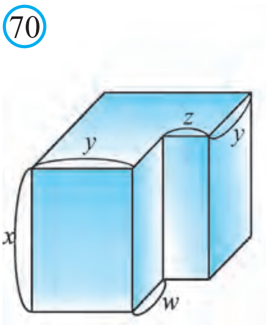
269*. 69-суретте құтының өлшемдері берілген. Құтының негіздері 1 квадрат метрі 1000 сум, бүйір жақтары болса 1 квадрат метрі 2000 сум болған материалдан істелген. Құтыны жасауда неше сумдық материал кеткен?

270. Кубтың өлшемі V ға тең болса, оның диагоналын тап.

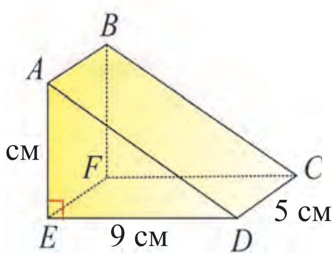
271. Үлкен тік бұрышты параллелепипедтен 70- суретте көрсетілгендей етіп кіші төрт бұрышты параллелепипед қырқып алынған. Берілген мәліметтер негізінде пайда болған дененің өлшемін тап.

272. 71- суретте бейнеленген пирамида өлшемін тап.

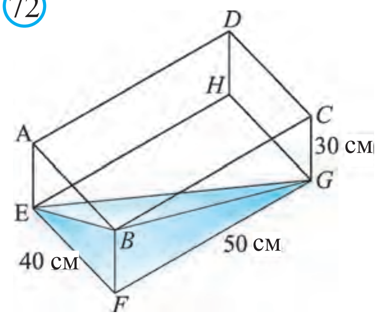
70



71



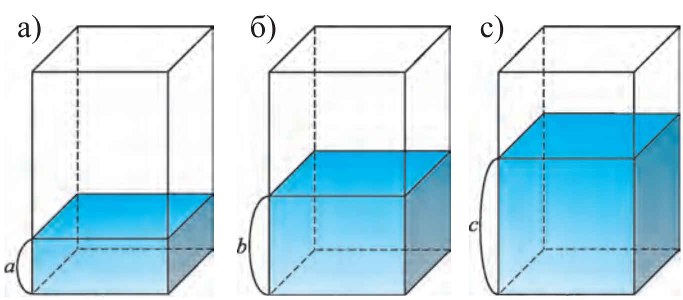
72



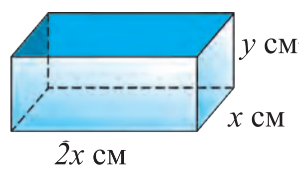
273*. 72- суретте бейнеленген тік бұрышты параллелепипед көрінісіндегі аквариумда қанша су бар?

274*. Тік бұрышты параллелепипед көрініснадегі бір түрлі аквариумдарда 73- суретте көрсетілгендей, түрлі деңгейлерде су құйылған. Бұл аквариумдарға құйылған су мөлшерлерінің қатынасы қандай болады?

73



74



275*. **Қорытындылау.** Қызмет орны сыйымдылығы 1 литр, негізгі өлшемдер қатнасы 1:2 болған тік бұрышты параллелепипед көрінісіндегі үсті ашық құтыларды істеп шығармақшы (74- сурет). Құтыны үнемді істеп шығару, яғни оған кететін материал ең кем болу үшін оның өлшемдері қандай болуы керек? (x қа мәндер беріп, құтының өлшемін тап және оларды салыстырумен шешеуге ұрынып көр болмаса дифференциалдық есептен пайдалан)

276*. **Проблемалық жағдай.** Геологтар тас тауып алды және оның өлшемін болжамдап болса да анықтамақшы. Олар көл жағасында тұр және олардың еркінде тас сиятын үлкен металл бак, бірнеше сыйымдылығы беймәлім шелектер мен сиымдылығы 1 литр болған шиша бар. Геологтар бұл істі қандай орындайды?

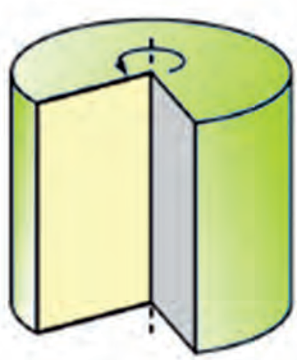
8. ЦИЛИНДРДІҢ СЫРТҚЫ ЖӘНЕ ІШКІ КӨЛЕМІ

8.1. Цилиндрдің сырты

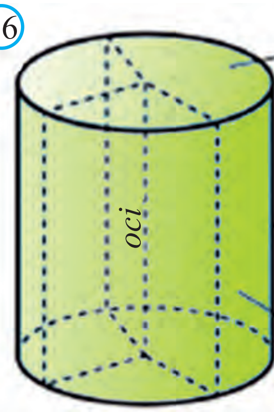
Ауа кеңістігінің және негізгі қасиетінің бірі – бұл айлану денелері. Цилиндр айналу денелерден бірі болып онымен төменгі сыныптарда танысқансындар. Цилиндр қасиеттері призманың қасиеттеріне ұқсағаны үшін оларды кетпе-кет үйренеміз.

Тік төртбұрышты бір жақ айналасына айналдырудан пайда болған денеге *цилиндр* (анығырағы, тік дөңгелек цилиндр) деп айтады (75-сурет). Бұл айналуда тік төртбұрыштың бір жағы қозғалыссыз қалады. Оны цилиндрдің осі деп атаймыз. Төртбұрыштың бұл жаққа қарама-қарсы жатқан жағының айналуынан пайда болған сырт – *цилиндрдің бүйір сырты*, жақтарының осі – *цилиндрдің жасаушысы* деп аталады. Тік төртбұрыштың қалған жақтары бұл айналуда екі тең шеңбер пайда болады, оларды *цилиндрдің негіздері* деп атаймыз (76- сурет).

75



76



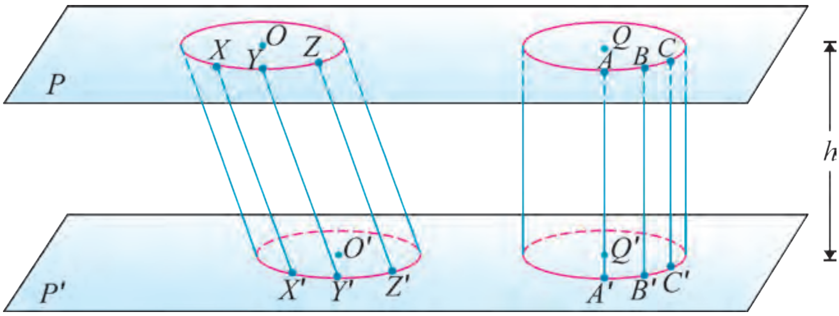
Ескерту. Тік төртбұрыштың бір қабырғасының айналасында айналдырудан пайда болған дене *дөңгелек цилиндр* деп жүргізіледі. Цилиндр түсінігі болса кең мәнінде төмендегідей енгізіледі.

Айталық, кеңістікте әдепкі F_1 көрініс бірер параллель көшіруде F_2 көрінісіне өтсін. Бұл екі көрініс және осы параллель көріністе бір-біріне өткен нүктелерді тұтастырушы сызықтардан тұратын денеге *цилиндр* деп аталады (77- сурет).

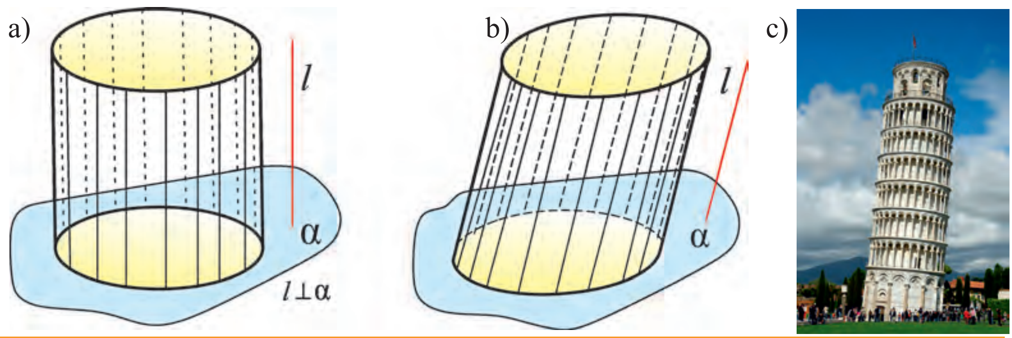
Егер параллель көшіру жалпақ F_1 көрініс жазықтығына перпендикуляр болса, цилиндр *тік цилиндр* (78.а- сурет) деп, керісінше *қиғаш цилиндр* (78.b- сурет) деп жүргізіледі.

78.c- суретте бейнеленген Пиза мұнарасы көлбеу цилиндр пішінде.

77



78



Егер F_1 пішінде дөңгелектен тұратын болса цилиндр *дөңгелекті цилиндр* деп аталады.

Дұрыс дөңгелекті цилиндр ғана шеңбер дене болады. Кейіншелік дұрыс дөңгелекті цилиндрмен жұмыс алып барамыз және оларды қысқаша цилндр деп атаймыз.

Цилиндрдің табандары өзара тең дөңгелектен құралған болып, олар параллель жазықтықта жатады. Цилиндрдің бір табаны нүктесінен екінші табаны жазықтыққа түсірілген перпендикуляр оның *биіктігі* деп аталады.

Бұл параллель жазықтықтар арасындағы қашықтық цилиндрдің биіктігіне тең болады. Цилиндрдің осі оның биіктігі де.

Цилиндрдің жасаушылары болса, өзара параллель және тең болады. Сондықтан, цилиндр осі жасаушылары мен биіктігі ұзындықтары өзара тең болады.

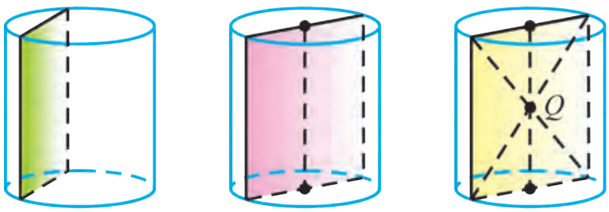
Цилиндрді оның осіне параллель жазықтықпен қиылысқанда пайда болған сызық тік төртбұрыштан құралады (79.а-сурет). Оның екі қабырғасы цилиндрдің жасаушылары, қалған екі қабырғасы болса сәйкес түрде табанының параллель хордалары.

Жалпы айтқанда, *ось сызығы* да тік төртбұрыш болады. Ол цилиндрдің осі арқылы өткен жазықтықпен қиылысқанда пайда болған кесінді (79.б- сурет).

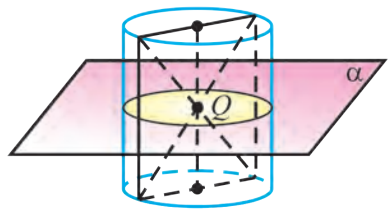
Ось сызықтарының диагоналдары табан орталығын тұтастырушы кесіндінің ортасы Q нүктеден өтеді. Сонын үшін бұл Q нүкте цилиндрдің симметриялық орталығынан тұрады (79.с- сурет).

Q нүктеден өтетін және цилиндр осіне перпендикуляр болған жазықтық цилиндрдің симметриялық жазықтығынан құралады (80- сурет). Цилиндрдің осінен өтуші жазықтықтарда оның симметриялық жазықтықтары болады (81- сурет).

79 a) b) c)



80



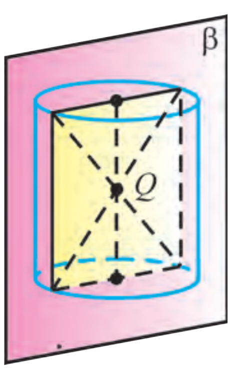
1- мысал. Цилиндр ось сызығының ауданы Q ға тең квадраттан тұрады. Цилиндр табанының ауданын тап.

Шешуі. Квадраттың қабырғасы $\sqrt{Q}$ ға тең. Ол цилиндр табанының диаметріне тең. Онда цилиндр табанының ауданы: $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$ ға тең. □

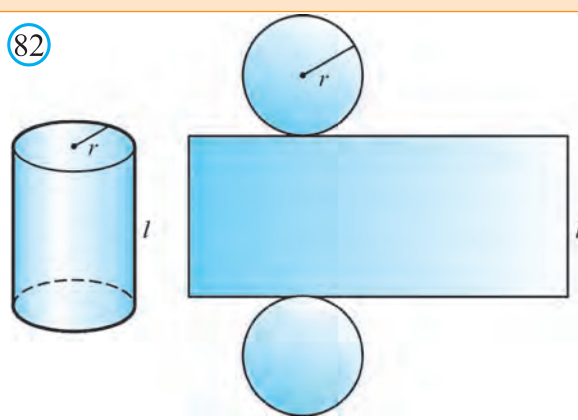
Теорема. Цилиндрдің бүйір сырты табанының шеңбер ұзындығымен жасаушының көбейтіндісіне тең: $\boldsymbol{S_{жаны} = 2\pi rl}$.

Осы теореманы төмендегі 82- сурет негізінде өз бетіңше дәлелде.

81



82



Нәтиже. Цилиндр толық сырты оның бүйір сыртымен екі табанының аудан қосындысына тең: $\boldsymbol{S_{толық} = S_{жаны} + 2S_{негіз}}$ немесе $\boldsymbol{S_{толық} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(\,l + r\,).}$

Кез келген цилиндр берілген болсын. Оның табандарының біріне ішкі $A_1A_2...A_{n-1}$ көпбұрышты сызамыз (83- сурет). Көпбұрыштың $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ va A_n ұштары арқылы цилиндрдің A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$ және A_nB_n жасаушыларын жүргіземіз және жасаушының басқа B_1, B_2, ..., B_{n-1} және B_n ұштарын тізбектеп сызықтар арқылы тұтастырып шығамыз. Нәтижеде $A_1A_2...A_{n-1}A_n\ B_1B_2...B_{n-1}B_n$ призманы құраймыз. Бұл призма берілген *цилиндрге іштей сызылған призма* деп аталады. Цилиндр болса *призмаға сырттай сызылған цилиндр* деп жүргізіледі. Егер призма цилиндрге іштей сызылған болса онда призманың табаны цилиндр табанына іштей сызылған болады да призманың бүйір қырлары цилиндр бүйір жағында жатады.

Белгілі егер призма табанына сырттай шеңбер сызу мүмкін болса, призмаға сырттай цилиндр де сызыу мүмкін.

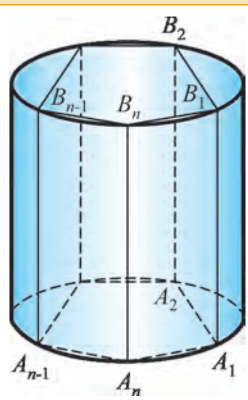
Сонда ұқсас *цилиндрге сырттай сызылған призма* және *призмаға іштей сызылған цилиндр* түсінігі де кіргізіледі (84- сурет). Егер призма цилиндрге сырттай сызылған болса, онда призманың табаны цилиндр табанына сырттай сызылған болады да призманың бүйір жақтары цилиндр бүйір сыртына жанасады.

Белгілі, егер призма табанына сырттай шеңбер сызылу мүмкін болса, призмаға сырттай цилиндр де сызылуы мүмкін.

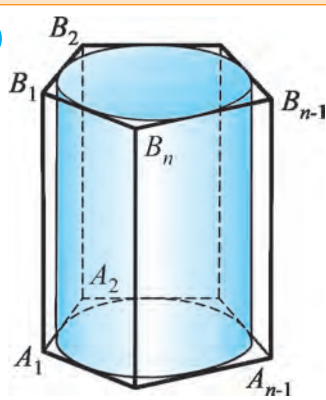
8.2. Цилиндрдің көлемі

Теорема. Цилиндрдің көлемі табанынан ауданымен бүйірінің көбейтіндісіне тең: $\boldsymbol{V = S_{жаны} \cdot l.}$

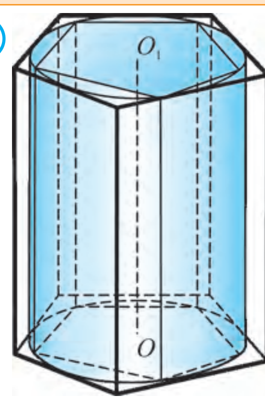
83



84



85



Дәлелдеу. Осі OO_1 болған цилиндр берілген болсын (85- сурет).

Онда ішкі $A_1A_2 ... A_{n-1}A_n\ B_1B_2 ... B_{n-1}B_n$ және сыртқы $C_1C_2 ... C_{n-1}C_n$ $D_1D_2 ... D_{n-1}D_n$ призмаларды сызамыз. Цилиндр көлемін V, ішкі және сыртқы сызылған призмалар көлемін V_1 және V_2 мен белгіледік, онда $V_1 < V < V_2$ қос теңсіздік орынды болады. Призмалар көлемі төмендегі формулалардан табылады:

$$V_1 = S_{A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{және} \qquad V_2 = S_{C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

Призмалар табаны жағынан саны n болған сайын асырып барамыз. Онда ішкі сызықтан призма мөлшері көбейеді, сыртқы сызылған призманың мөлшері болса кемейеді. Егер жақтар саны n шексіз үлкейсе, бұл мөлшерлер арасындағы айырмашылық нөлге ұмтылады. Цилиндрге ішкі және сыртқы сызылған призмалар көлеміне жанасқан сан берілген цилиндрдің көлемі ретінде алынады.

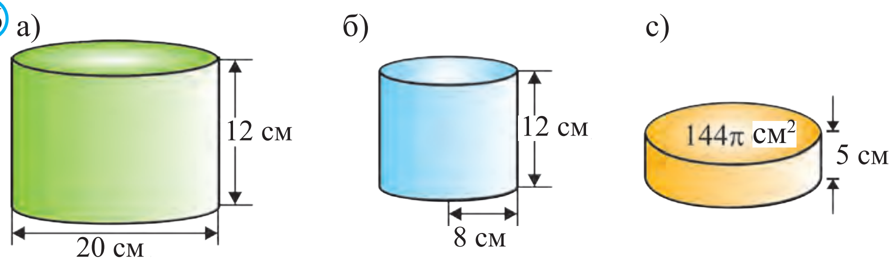
Бұл жерде $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ және $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$ көпбұрыштар ауданы цилиндр табанында жатқан шеңбер ауданы S қа жақындайды.

Демек, $V = S_{\text{негіз}} \cdot l.$ $\square$

Тақырыпқа қатысты мәселелер және практикалық тапсырмалар

277. 86- суретте келтірілген цилиндрлердің бүйір және толық сыртыны тап.

86



278. Цилиндр табанының радиусы 6 см, оның биіктігі 4 см. Цилиндр ось сызығының ауданын есепте.

279. Цилиндр табанының радиусы 2 м, биіктігі 3 м. Ось сызығының диагоналын тап.

280. Цилиндр табанының ауданы 64 π см^2, оның биіктігі 8 см. Цилиндр ось сызығының ауданын тап.

281. Цилиндрдің ось сызығы – ауданы Q ға тең квадрат. Цилиндр табанының ауданын тап.

282. Цилиндрдің ось сызығы ауданы 36 см^2 болған квадрадтан тұрады. Цилиндр бүйір сыртының ауданын есепте.

283. Цилиндр ось сызығының ауданы 4 ке тең. Оның бүйір сырты аууданын тап.

284. Цилиндрдің биіктігі 6 см, табанының радиусы 5 см. Цилиндрдің осіне параллель түрде одан 4 см қашықтықта өткізілген сызықтың ауданын тап.

285. Цилиндр табанының радиусы 2 ге, биіктігі 3 ке тең. Цилиндр бүйір сыртының ауданын тап.

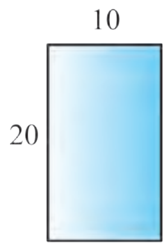
286. Цилиндр табанының айнала ұзындығы 3π ге, биіктігі 2 ге тең. Цилиндрдің бүйір сыртының ауданын тап.

287. Цилиндр жайылмасының ауданы 24π $дм^2$, цилиндрдің биіктігі 4 дм. Оның табан радиусын тап.

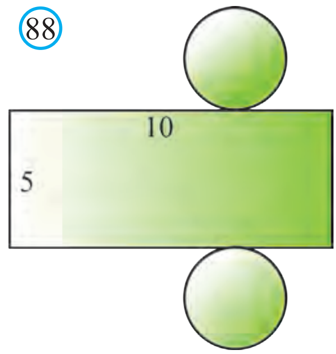
288. Цилиндр табанының радиусы 5 см, оның биіктігі 6 см. Цилиндр ось сызығының диагоналыны тап.

289. Цилиндрдің биіктігі 8 дм, табанының радиусы 5 дм. Цилиндр жылдамдықпен кесілгендігі солай, сызықта квадрат пайда болған. Бұл сызықтан цилиндр осіне дейін болған қашықтықты тап.

87



88



290*.87- суретте берілген цилиндрдің ось сызығына қарағанда, оның бүйірінің ауданын тап.

291*.88- суретте берілген цилиндрдің жайылмасына қарағанда, оның бүйір және толық сыртының ауданын тап.

292. Цилиндр табанының радиусы 3 см, биіктігі болса табан радиусынан 2 см артық. Цилиндрдің көлемін есепте.

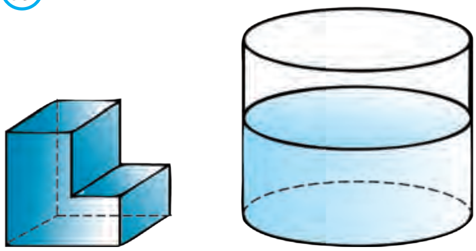
293. Цилиндрдің көлемі 64 π $см^3$, биіктігі 4 см. Цилиндр табанының ауданын есепте.

294*.Цилиндр көріністегі ыдысқа 2000 $см^3$ су салынғанда судың деңгейі 12 см болды. Ыдысқа деталь батырылғанда су деңгейі тағы да 9 см ге көтерілді. Деталь көлемін анықтап жауапты $см^3$ лерде көрсет.

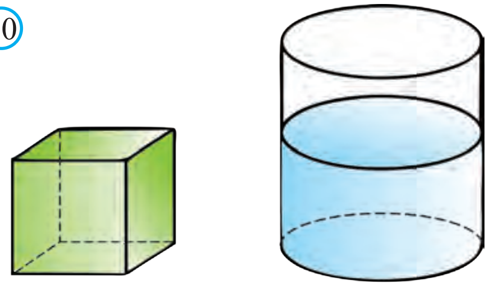
295. Цилиндрр көрінісіндегі ыдысқа 3 литр су салынғанда судың деңгейі 15 см болды (89-сурет). Ыдысқа деталь батырылғанда су деңгейі 4 см-ге көбейді. Деталь көлемін анықта және жауапты $см^3$ лерде көрсет.

296*.Цилиндр көріністегі ыдысқа 4 литр су салынғанда судың деңгейі 20 см болды (90-сурет). Ыдысқа деталь батырылғанда су деңгейі тағы да 5 см-ге көтерілді. Деталь көлемін анықта және жауабыны $см^3$-лерде көрсет.

89



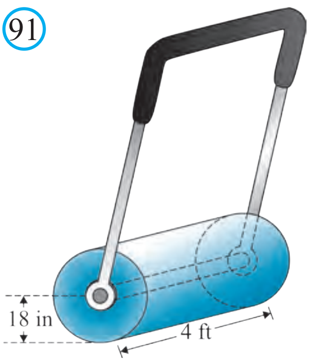
90



297*.91- суретте цилиндр көрінісіндегі жол тегістейтін құрылғылар бейнеленген. Суретте берілгендерден пайдаланып, ол бір рет айналғанда қанша аумақтағы жолды тегістеуін анықта.
(Ескерту: 1 фт (фут) = 12 ин. (дюим) = 30,48 см).

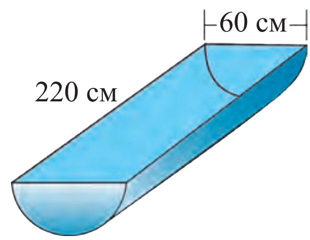
298*.92- суреттегі су себуге арналған резина құбырдың ішкі диаметрі 3 см, сыртқы диаметрі 3,5 см, ұзындығы 20 м болса, оған неше литр су кететінін тап. Егер резинаның тығыздығы 7 г/см^3 екендігі мәлім болса, бұл резина құбыр орамының массасын тап.

91



92

93



299*.93- суретте бүйір сырты жарты цилиндр көрінісінде болған ыдыс берілген. Егер 1 см^2 ауданы сыртты бояу үшін 6 г бояу талап етілсе, бұл ыдыстың да ішкі, әрі сыртқы жағын бояу үшін қанша бояу керек болады? Ыдысқа неше литр су кетеді?

94

95

96

300*. Цилиндр көрінісіндегі ыдыстардың бірі екіншісінен екі есе кеңірек, бірақ үш есе төмен (94- сурет). Бұл ыдыстардың қайсы бірінің сыйымдылығы үлкен?

301*. Табанының радиусы 5 см, биіктігі болса 20 см болған көрінісіндегі апельсин шырыны ыдысының табандары металдан, бүйір сырты болса картоннан істелінген (95- сурет). Егер 1 см^2 металл құны 5 сум, 1 см^2 картон құны 2 сум болса, бұл ыдысты даярлау үшін неше сумдық материал керек болады? Ыдысқа қанша апельсин шырыны сияды?

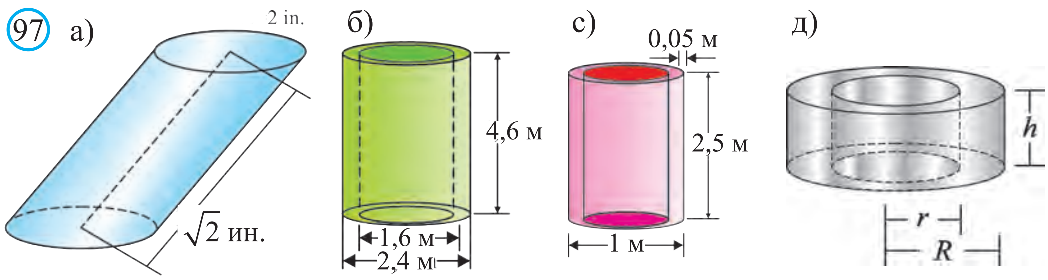
302*. Табанының радиусы 1,5 дюим, биіктігі 4,25 дюим болған цилиндр көрінісіндегі консерва банкасы берілген (96- сурет). Банканың толық сыртқы көлемін тап. Егер 1 см^2 металл құны 5 сум болса, бұл ыдысты дайындау үшін қанша сумдық материал керек болады? (Ескерту: 1 ин. (дюим) = 2,54 см.)

303*. Мұнай сақталатын ыдыс (систерна) биіктігі 16 фут, табанының радиусы 10 фут болған цилиндр көрінісінде. Егер 1 фут 7,5 галлонға тең болса, бұл цистернаның галлондардағы сыйымдылығын анықта. (Ескерту: 1 амеика галлоны = 3,785 литр. 1 америка бареллі = 42 америка галлоны = 159 литр.)

304*. Фермердің жанармай багі цилиндр көрінісінде. Бактің биіктігі 6 фут, табанының радиусы 1,5 фут. Бактің галлондардағы сыйымдылығын анықта.

305. 97- суретегі мәліметтерден пайдаланып , бейнеленген кеңістік дененің көлемін анықта.

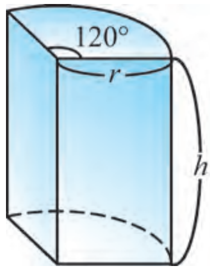
97



306*. Цилиндр көрінісіндегі ыдысқа 6 см^3 су салынды. Ыдысқа деталь толық енгізілгенде, су денгейі 1,5 рет көтеріледі. Детал көлемін анықта және жауабын см^3 лерде көрсет.

307*. Цилиндр көрінісіндегі ыдыстағы судың денгейі 16 см. Ыдысқа табанының диаметрі бұл ыдысқа қарағанда 2 есе кіші болған цилиндр көрінісіндегі екінші ыдыс батырылғанда ондағы судың деңгейі қанша болады?

98



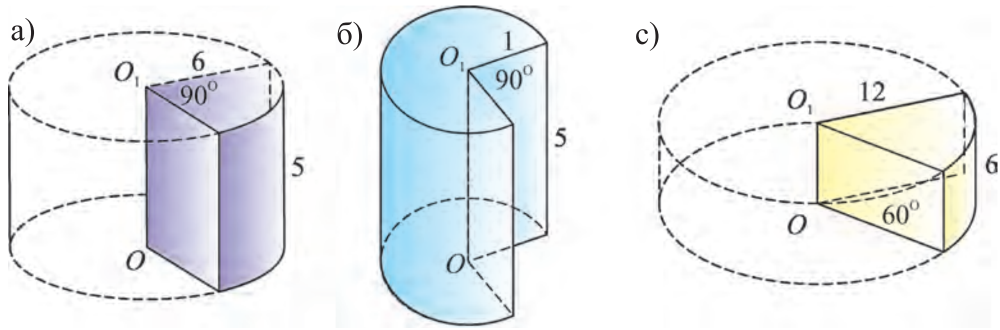
308. Бірінші цилиндр көлемі 12 м³. Екінші цилиндрдің биіктігі бірінші цилиндрге қарағанда 3 есе үлкен, табанының радиусы болса 2 есе кіші. Екінші цилиндр көлемін тап.

309*. Цилиндр көрінісіндегі ыдыс екіншісінен 2 есе биік, бірақ 1,5 есе кеңірек. Бұл ыдыстар көлемінің қатынасын есепте.

310. 98- суретте бейнеленген кеңістік дене көлемін тап.

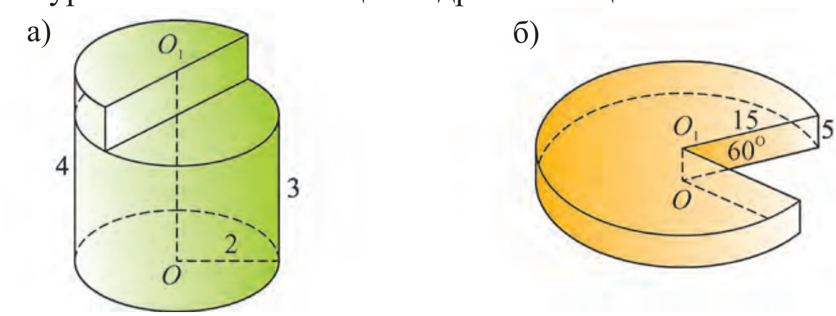
311. 99- суретте бейнеленген цилиндр бөлігінің көлеміні тап.

99



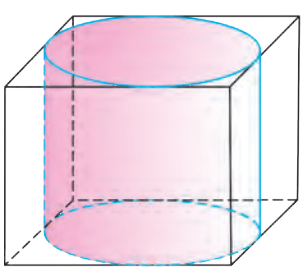
312. 100- суретте бейнеленген цилиндр бөлігінің көлемін тап.

100

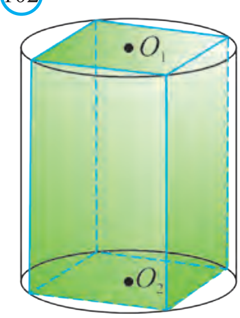


313. Тік бұрышты параллелепипед табанының радиусы және биіктігі 1 га тең болған цилиндрге сырттай сызылған (101- сурет). Параллелепипед көлемін тап.

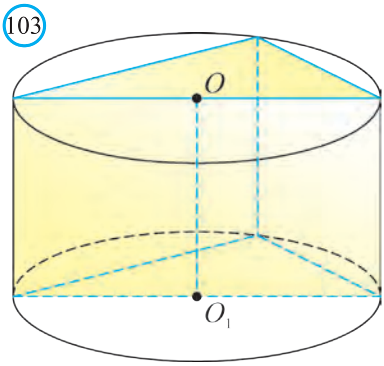
101



102



103



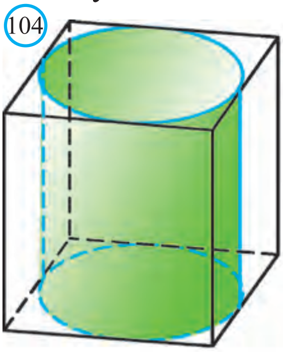
314. Тік бұрышты параллелепипед табанының радиусы 4-ке тең болған цилиндрге сырттай сызылған (102- сурет). Параллелепипед көлемі 16 ға тең болса, цилиндрдің биіктігін тап.

315. Тік призманың табан катеттері 6 және 8 болған тік бұрышты үшбұрыштан құралған, бүйір қырлары болса 5-ке тең (103- сурет). Бұл призмаға сырттай сызылған цилиндр көлеміні тап.

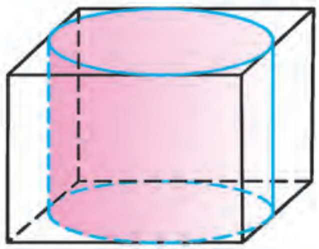
316. Тік призманың табаны – жақтары 2-ге тең болған квадрадтан тұрады, бүйір қырлары болса 2-ге тең. Бұл призмаға сырттай сызылған цилиндр көлемін тап.

317. Төртбұрышты тік призма табанының радиусы 2-ге тең болған цилиндрге сырттай сызылған (104- сурет). Призма бүйір сыртының ауданы 48-ге тең болса, цилиндрдің биіктігін тап.

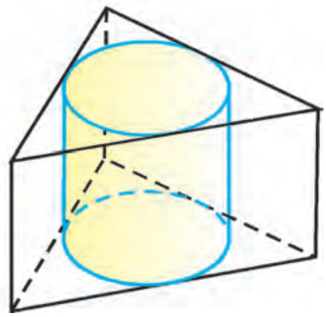
104



105



106

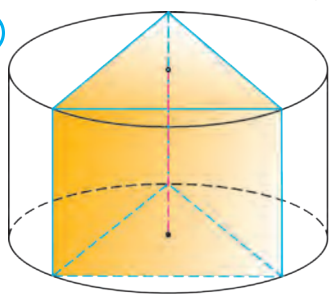


318. Дұрыс төртбұрышты призма табанының радиусы және биіктігі 1 ге тең болған цилиндрге сырттай сызылған (105- сурет). Призма бүйір сыртының ауданын тап.

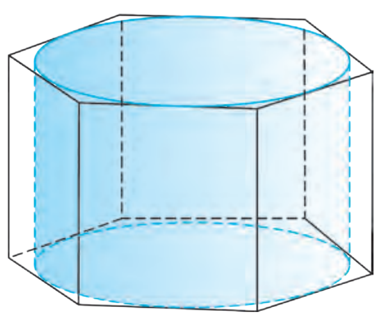
319. Үшбұрышты тік призма табанының радиусы $\sqrt{3}$ -ке және биіктігі 2-ге тең болған цилиндрге сырттай сызылған (106- сурет). Призма бүйір сыртының ауданын тап.

320. Үшбұрышты дұрыс призма табанының радиусы $2\sqrt{3}$ -ке және биіктігі 2-ге тең болған цилиндрге іштей сызылған (107- сурет). Призма бүйір сыртының ауданын тап.

107



108



321. Алтыбұрышты дұрыс табанының радиусы $\sqrt{3}$-ке және биіктігі 2-ге тең болған цилиндрге сырттай сызылған (108- сурет). Призма бүйір сыртының ауданын тап.

322*. 109- суретте бейнеленген деталдың көлемін тап.

323*. Ұзындығы 10 м, табанының диаметрі 1 м болған цилиндр көрінісіндегі құбырдың сыртын 1 мм қалыңдықтағы бояумен сырлау үшін қанша бояу керек болады?

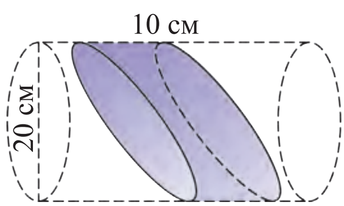
324*. 110- суретте бейнеленген тірсекті құбырдың: а) бүйір сыртының ауданын; б) көлемін тап ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

325*. Шоян құбырлардың ұзындығы 2 м, сыртқы диаметрі 20 см. Құбыр қабырғасының қалыңдығы 2 см және шоянның салыстырма тығыздығы 7,5 г/см^3 болса, оның массасын тап.

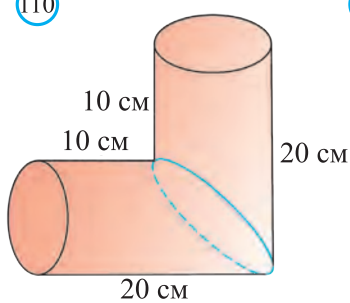
326*. 111- суреттен пайдаланып, көлбеу цилиндр үшін $S \cdot h = Q \cdot l$ теңдік орынды болуын дәлелде.

327*. 112- суретте бейнеленген цилиндр сыртынан A нүктеден B нүктеге алып баратын ең қысқа жолдың ұзындығыны тап. (Нұсқау: цилиндр жайылмасынан пайдалан.)

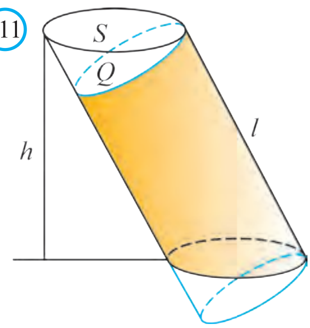
109



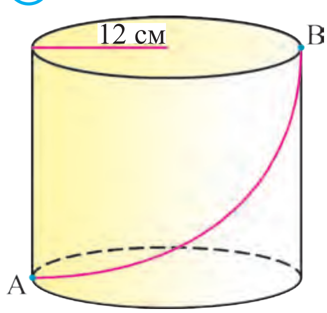
110



111



112



Тарихи мағлұмотлар

Абу Райхан Берунидің "Астрономия өнерінен алғашқы мағлұмат беретін кітап" (қысқаша "Астраномия") атты еңбегінің геометрияға тиісті бөлімінде стереометрияға кіру үшін кеңістік көріністерінің төмендегі сипаттары келтіріледі.

Куб – физикалық пішін болып, нарданың сақкысыны ұқсайды, алты жағынан алты квадратпен шекараланған.

Призма – өрнектелген форма болып, бүйір жағынан квадрат болмаса тік төртбұрыш көрінісіндегі жазықтықтармен, асты және үстінен екі үшбұрышпен шекараланған.

Беруни берген бұл сипатта призманың арнайы жағдайы, яғни үшбұрышты призманың сипаты келтірілген.

Әбу Райхан Берунидің "Қонуний Маъсудий" (Заң заңды болып табылады) кітабы 1037 жылда жазылған болып, онда параллелепипед, призманың көлемін табу ережелері: "Егер дене төртбұрышты болмастан немесе басқа түрлі болса, оның өлшемі төмендегідей: оның ауданын білгін, оны тереңірек көбейткін, нәтижеде көлем пайда болады" сияқты берілген.

Әбу Райхан Беруни

Ғиёсиддин Әл Коший

Әбу Әли ибн Сина "Донишнома" (Қайырымдылық) атты шығарманың "Геометриялық денелерге тиісті негіздер" тарауында дененің және үшбұрышты призманың сипатын береді де екі призманың өзара тең болу шарттарын баяндайды. Ибн Сина призманы төмендегідей сипаттайды: "Призма екі үшбұрышты тегіс пішіндер мен аспекттері өзара параллель үш тегіс көріністермен шекараланған денелер".

Ғиясиддин Жамшид ибн Маъсуд ал-Кошийдің "Хисоб китоби" (Есеп кітабы) атты шығармасында сыртқы ауданыны және денелердің көлемдерін есептеудің көптеген ережелері келтірілген. Ол математика, геометрия, тригонометрия, техника және астрономия сияқты пәндерді терең білгендігі үшін Ұлықбектің назары мен құрметіне ие болған. Әл-Коший көпбұрыштармен бір қатарда призмалар, пирамидалар, цилиндрлер, конустар, кесік конустарды да сынға алған.

9. ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР

9.1. 2- тест сынағы

1. Кубтың неше симметриялық жазығы бар?
А) 8;   Б) 9;   С) 7;   Д) 10.

2. Егер куб диоганал кесіндінің ауданы $2\sqrt{2}$ ге тең болса, оның көлемін тап.
А) $2\sqrt{2}$;   Б) $\sqrt{7}$;   С) $4\sqrt{2}$;   Д) $5\sqrt{2}$.

3. Тікбұрышты параллелепипед табандарының бүйірлері 7 см және 24 см. Параллелепипедтің биіктігі 8 см. Диоганал кесіндінің ауданын тап.
А) 168;   Б) 1344;   С) 100;   Д) 200.

4. Тұрақты төртбұршты призманың диоганалы 4-ке тең бүйірімен 300 дік бұрышты құрайды. Призманың бүйірімен тап.
А) $16\sqrt{2}$;   Б) 16;   С) 18;   Д)$18\sqrt{2}$.

5. Тұрақты төртбұршты призма табандары бүйір $\sqrt{2}$ ге, диоганалымен арасындағы бұрышы 300-ге тең. Призманың көлемін тап.
А) $8\sqrt{2}$;   Б) 4;   С) 16;   Д) $4\sqrt{2}$.

6. Призманың жалпы бүйір қыры 36 болса, оның неше бүйіржағы бар?
А) 12;   Б) 16;   С) 9;   Д) 10.

7. Қиғаш призманың қыры 20 ға тең және табандары тегістігімен 300° ты бұрыш құрайды. Призманың биіктігін тап.
А) 12;   Б) $10\sqrt{3}$;   С) 10;   Д) $10\sqrt{2}$.

8. Үшбұрышты тік призманың табандары 15, 20 және 25 ге, бүйір қыры табанының биіктігіне тең. Призманың көлемін тап.
А) 600;   Б) 750;   С) 1800;   Д) 1200.

9. Тұрақты алтыбұрышты призманың ең үлкен диоганалы 8 ге тең және ол бүйір қырымен 300° ты бұрыш жасайды. Призманың көлемін тап.
А) 72;   Б) 64;   С) 76;   Д) 80.

10. Ось кесіндісінің ауданы 10 ға тең болған цилиндр бүйір сыртының ауданын тап.
А) 10π;   Б) 20π;   С) 30π;   Д) 15π.

11. Цилиндрдің биіктігін 8 ге бүйір сыртының жайынтық диоганалы 10 ға тең. Цилиндр бүйір сыртының ауданын тап.
А) 48;   Б) 48π;   С) 24;   Д) 48π.

12. Бүйірлері 2 және 4 ке тең болған тік төртбұрыш өзінің үлкен бүйірі төңірегінде айланады. Пайда болған құрылманың тола сыртын тап.
А) 22π;   Б) 23π;   С) 24π;   Д) 20π.

13. Цилиндрдің бүйір сырты ауданы 72 π ге тең және ол жайылғанда құралған тік төртбұрыш диоганалы табанымен 45° бұрышты құрайды. Цилиндр табанының радиусын тап.

А) 5; Б) 4; С) 6; Д) 8.

14. Цилиндр табанымен радиусы екі рет арттырылса, оның құрамы қанша рет артады?

А) 4; Б) 2; С) 3; Д) 6.

15. Цилиндрдің құрамы 120π ге, бүйір сырты 60π ге тең. Цилиндр табанымен радиусын тап.

А) 4; Б) 5; С) 6; Д) 4; 2.

16. Цилиндрдің биіктігі 5 ке, табанымен ішкі сызылған тұрақты ұшбұрыштың бүйірі $3\sqrt{3}$ ке тең. Цилиндрдің құрамын тап.

А) 25π; Б) 35π; С) 45π; Д) 40π.

17. Цилиндрдің осі кесіндісі диоганалы 12-ге тең болған квадраттан жасалған. Оның құрамын тап.

А) $108\sqrt{2}\pi$; Б) $54\sqrt{2}\pi$; С) $36\sqrt{2}\pi$; Д) $216\sqrt{2}\pi$.

18. Цилиндрдің толық сырты 24π ге, бүйір сырты 6π ге тең. Осы цилиндрдің құрамын тап.

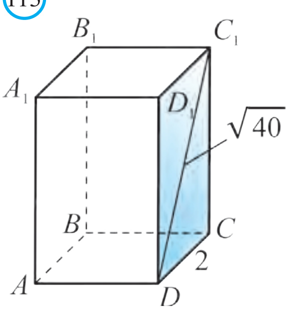
А) 7π; Б) 11π; С) 8π; Д) 9π.

9.2. Есептер

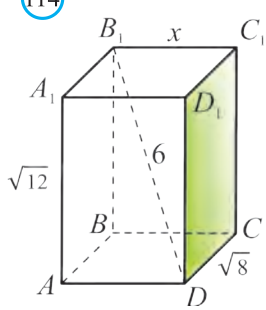
328. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік бұрышты параллелепипедте (113- сурет) $DC_1=\sqrt{40}$, $DC = 2$, $P_{ABCD}=10$. Параллелепипедтің диоганалын тап.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік бұрышты параллелепипед. 114- суретте берілген тұжырымға қарағанда B_1C_1 қырының ұзындығын тап.

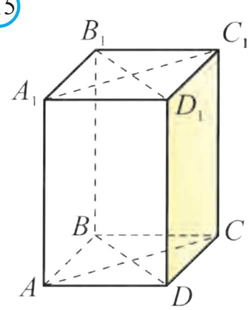
113



114



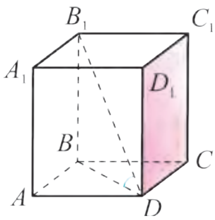
115



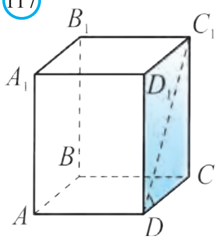
330. Тік призманын табандары $ABCD$ ромб (115- сурет). Призманын диоганал кесіндісінің ауданы 60 және 80 ге, биіктігі 10 ға тең. Призманың бүйір сыртын тап.

331. Тік призманың табандары $ABCD$ ромб. Призманың диоганал кесіндісінің ауданы 24 және 32-ге, биіктігі 4-ке тең. Призманың бүйір сыртын тап.

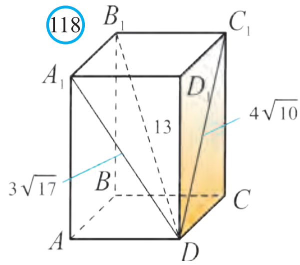
116



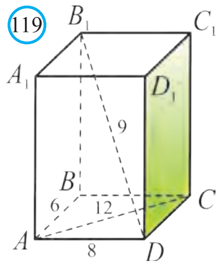
117



118



119



332. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дұрыс призма (116-сурет) $\angle B_1DB = 45°$, $S_{толық} = 32(2\sqrt{2}+1)$. AD ны тап.

333. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призма (117-сурет)$\angle C_1DC = 60°$, $S_{толық} = 128(2\sqrt{3}+1)$. AD ны тап.

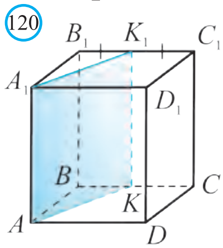
334. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед (118- сурет) $DB_1 = 13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4\sqrt{10}$. Параллелепипедтің бүйір сыртының ауданын тап.

335. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік параллелепипед (119- сурет) $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$. Параллелепипед бүйір сыртының ауданын тап.

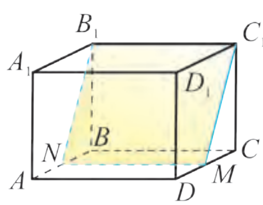
336. K нүкте BC қырының ортасы (120- сурет). $ABKA_1B_1K_1$ призма құрамының $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед құрамына салыстыр.

337. N және M нүктелер параллелепипед қырының ортасы (121- сурет). $AA_1B_1NDD_1C_1M$ призма құрамының $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед құрамына сәйкестігін тап.

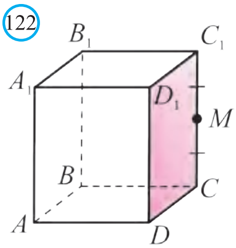
120



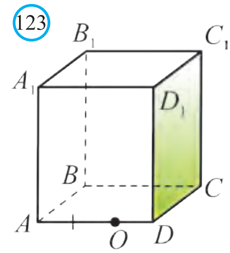
121



122



123



338. Төртбұрыштың тік призма бүйір сыртының ауданын 72 см^2 ге, табандарын ауданын 64 см^2 қа тең. Призманың көлемін тап.

339. Төртбұрыштың тік призма табандарының периметрі 12 см, бүйір жағының периметрі 18 см ге тең. Призманың көлемін тап.

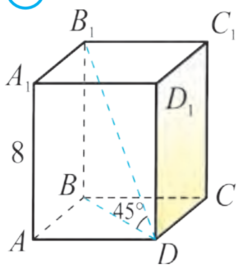
340. Куб берілген (122- сурет). $CM = MC_1$ және ADM жазықтық кубын екі бөлекке ажыратады. Кубтың үлкен бөлігі көлемінің кіші бөлігінің құрамын тап.

341*. Куб берілген (123- сурет). $AO : OD = 2 : 1$ және BB_1O жазықтық кубын екі бөлекке ажыратады. Егер кубтың кіші бөлігінің көлемі 6-ға тең болса, кубтың көлемін тап.

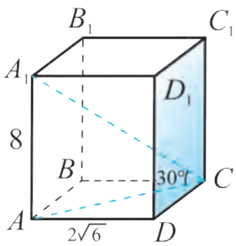
342*. Төртбұрышты түзу призманың биіктігі 8 ге, диоганалдарынын табандары жазықтыққа қиялығы 45° ге тең (124- сурет). Призманың көлемін тап.

343*. Төртбұрышты дұрыс призмада табандарының $2\sqrt{6}$-ға, диоганалы табан жазықтығымен 30°-ты бұрыш құрайды (125-сурет). Призманың құрамын тап.

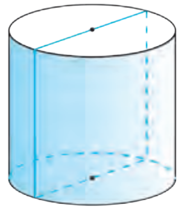
124



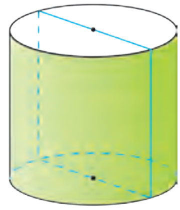
125



126



127



344. Цилиндр бүйір сыртының ауданы 91π-ге тең (126- сурет). Цилиндр осі кесіндісінің ауданын тап.

345. Цилиндр осі кесімінің ауданы 173-ке тең болған квадрат (127- сурет). Цилиндр бүйір сыртының ауданын тап.

346. Цилиндр биіктігі 24-ке, осі кесімі диоганалы 26-ға тең. Цилиндр көлемін тап.

347. Цилиндр осі ауданы 10-ға. Табандарының айланасының ұзындығы 8-ге тең. Цилиндр көлемін тап.

348. Цилиндр радиуси 3-ке, бүйір сыртының ауданы 200-ге тең. Цилиндр көлемін тап.

9.3. 2-бақылау жұмыс үлгісі

1. Екі жақты бұрыш A нүктесі оның қыры 10 см, бүйірінен 5 см қашықтықта орналасқан. Екі жақты бұрыштың градус өлшемін тап.

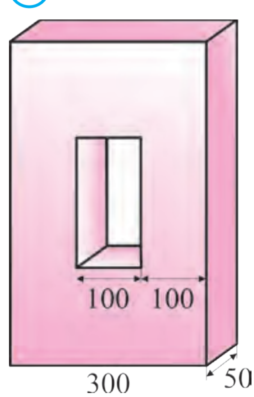
2. Алтыбұрышты дұрыс призманың барлық қырлары 2-ге тең болса, оның толық сыртқы ауданын тап.

3. Табанының диаметрі 18 м және биіктігі 7 м болған цилиндр пішініндегі цистерна мұнаймен толған. Егер мұнайдың тығыздығы 0,85 г/см болса, бұл цистернадағы мұнай неше тонна?

4. Әрбір қырының ұзындығы 4 см-ге тең болған дұрыс алтыбұрышты призманың ішкі сызылған цилиндр көлемін тап.

5. (*Дарынды оқушылар үшін қосымша есептер.*) 128- суретте өлшемдер мм лерде берілген деталдың толық сыртын және көлемін тап.

128



Тригономитриялық функциялардың жуықтау мәндер кестесі

A	sin A	tg A	A	sin A	tg A	A	sin A	tg A
0^{o}	0	0	30^{o}	0,50	0,58	60^{o}	0,87	1,73
1^{o}	0,0175	0,0175	31^{o}	0,52	0,60	61^{o}	0,87	1,80
2^{o}	0,035	0,035	32^{o}	0,53	0,62	62^{o}	0,88	1,88
3^{o}	0,05	0,05	33^{o}	0,54	0,65	63^{o}	0,89	1,96
4^{o}	0,07	0,07	34^{o}	0,56	0,68	64^{o}	0,90	2,02
5^{o}	0,09	0,09	35^{o}	0,57	0,70	65^{o}	0,91	2,15
6^{o}	0,10	0,11	36^{o}	0,59	0,73	66^{o}	0,91	2,25
7^{o}	0,12	0,12	37^{o}	0,60	0,75	67^{o}	0,92	2,36
8^{o}	0,14	0,14	38^{o}	0,62	0,78	68^{o}	0,93	2,48
9^{o}	0,16	0,16	39^{o}	0,63	0,81	69^{o}	0,93	2,61
10^{o}	0,17	0,18	40^{o}	0,64	0,84	70^{o}	0,94	2,78
11^{o}	0,19	0,19	41^{o}	0,66	0,87	71^{o}	0,95	2,90
12^{o}	0,21	0,21	42^{o}	0,67	0,9	72^{o}	0,95	3,08
13^{o}	0,23	0,23	43^{o}	0,68	0,93	73^{o}	0,96	3,27
14^{o}	0,24	0,25	44^{o}	0,69	0,97	74^{o}	0,96	3,49
15^{o}	0,26	0,27	45^{o}	0,71	1,00	75^{o}	0,97	3,73
16^{o}	0,28	0,29	46^{o}	0,72	1,04	76^{o}	0,97	4,01
17^{o}	0,29	0,31	47^{o}	0,73	1,07	77^{o}	0,97	4,33
18^{o}	0,31	0,32	48^{o}	0,74	1,11	78^{o}	0,98	4,71
19^{o}	0,33	0,34	49^{o}	0,75	1,15	79^{o}	0,98	5,15
20^{o}	0,34	0,36	50^{o}	0,77	1,19	80^{o}	0,98	5,67
21^{o}	0,36	0,38	51^{o}	0,78	1,23	81^{o}	0,99	6,31
22^{o}	0,37	0,40	52^{o}	0,79	1,28	82^{o}	0,99	7,12
23^{o}	0,39	0,42	53^{o}	0,80	1,33	83^{o}	0,992	8,14
24^{o}	0,41	0,45	54^{o}	0,81	1,38	84^{o}	0,994	9,51
25^{o}	0,42	0,47	55^{o}	0,82	1,43	85^{o}	0,996	11,43
26^{o}	0,44	0,49	56^{o}	0,83	1,48	86^{o}	0,998	14,30
27^{o}	0,45	0,51	57^{o}	0,84	1,54	87^{o}	0,999	19,08
28^{o}	0,47	0,53	58^{o}	0,85	1,60	88^{o}	1,00	28,64
29^{o}	0,48	0,55	59^{o}	0,86	1,66	89^{o}	1,00	57,29

ЖАУАПТАР

1- тарау жауаптары

3. $A(5; 7; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$, $E(0; 5; 0)$, $F(0; 0; -2)$. **6.** (3; 2; 0), (3; 0; 4), (0; 2; 4). **8.** $\sqrt{26}$. **9.** a) 3, 3, 3; b) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** (3; 3; 3), (–3; 3; 3), (3; –3; 3), (3; 3; –3), (–3; –3; 3), (–3; 3; –3), (3; –3; –3), (–3; –3; –3). **12.** $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $A(2; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O_1(0; 0; -2)$, $B_1(2; 0; -2)$, $A_1(2; 2; -2)$, $C_1(0; 2; -2)$. **13.** D нүкте. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** жоқ. **17.** *c)* тең бүйірлі, $P=6\ (1+\sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. **18.** (–0,25; 0,25; 0). **19.** $D_1(1; -1; 1)$, $A_1(1; 1; -1)$, $B_1(-1; 1; -1)$, $D_1(1; -1; -1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2\le 25$. **22.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$; $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\le 9$. **23.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$. **25.** 1)(0; 1; 0); 2) (1; 1; 1); 3) (0; 0; 2), 4) (–0,7; 0,1; 0,6); 5) $(2\sqrt{3};\ 1,5;\ 1)$. **28.** $A(5;-4;0)$, $B(-7;5;6)$, **31.** $K\left(0;-5;\dfrac{17}{2}\right)$. **32.** a) $D(-1; -3; -9)$. **33.** *a)* $M(-1; 2; 0)$; *c)* $M(3;\frac{3}{4}; 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8};\frac{33}{8};\frac{9}{4})$. **36.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **37.** a) $\sqrt{2}$; b) 30°; 30°; 120°; c) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\frac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5; 4; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1; 1; 1)$, $\overline{OB}=(-1; 0; 1)$, $\overline{OC}=(0; 1; 1)$, $\overline{BO}=(1; 0; -1)$, $\overline{CO}=(0; -1; -1)$, $\overline{AB}=(-2; -1; 0)$. **42.** a) $\overline{AB}=(2; 5; 3)$, b) $\overline{AB}=(4; -6; 2)$. **43.** $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$, $|\overline{c}|=\sqrt{14}$, $|\overline{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ±3. **45.** a) $\overline{a}(3; 6; -3)$, b) $\overline{a}(-3; -6; 3)$. **46.** a) 1 немесе –1; b) 3 немесе –1; c) 2 немесе –4; d) 3 немесе 5/3. **48.** $D(-2; 0; 1)$. **50.** $n=\frac{4}{3}$; $m=\frac{3}{2}$. **52.** a) $D(3; 0; 0)$. **56.** $\overline{c}(-3; -4; 8)$, $|\overline{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\overline{c}(4; 5; 5)$, $|\overline{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\overline{c}(-3; 4; 0)$, $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}(0; 2; 6)$, $|\overline{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{d}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(-4; 0; 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0; 9; 2)$; $AB = AO + OB = -4i + 9j$, $AB(-4; 7; 0)$. **65.** ≈180N. **66.** a) 60°; б) 30°; c) 90°; д) 60°; e) 45°. **67.** a) –6; б) 3; c) –6; d) 3. **68.** a) 40°; б) 140°; c) 150°. **69.** a) 30; б) 3; c) 15; д) –28. **70.** a) 1/3; b) –1; c) 2; д) 4. **71.** a) 16. **75.** a) 1; b) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}-\overline{DC})$. **77.** $\frac{1}{3}(2\overline{AC}-\overline{AB})$. **78.** $\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})-\overline{AD}$. **83.** a) (1; –1; 7); б) (–2; 3; 1); c) (0; –4; 4). **84.** $\overline{p}(-1; 5; 3)$. **86.** $B(-8; 4; 1)$. **88.** (2; –5; 9); (–2; –2; 7); (6; –12; 2). **93.** Oxz жазықтыққа қарағанда. **100.** (0; –3; 1). **106.** a) 36 см; b) 48 см; c) 6 см; д) 4 см. **110.** a) $B(-5; 7,5; 12,5)$; б) $B(5; -7,5; -12,5)$; c) $B(-0,5; 0,75; 1,25)$; d) $B(0,5; -0,75; -1,25)$. **111.** a) $B(-2,5; 1; 3)$; б) $B(-7; 2; 6)$. **112.** a) $O_1(0; 0; 0)$, $A_1(-4; 0; 0)$, $B_1(0; -4; 0)$, $C_1\ (0; 0; -4)$; b) $O_1(-4; 0; 0)$, $A_1(4; 0; 0)$, $B_1(-4; 8; 0)$, $C_1\ (-4; 0; 8)$. **115.** (2; –3; 3). **116.** –3. **117.** (7; 1; 2). **118.** (1; –2; 3). **119.** (–1; –2; –3). **120.** (1; 2; –3). **121.** (–2; –3; –5). **122.** $D(0; 9; -7)$. **123.** $C(2; 0; -8)$. **124.** 19. **125.** (–7; 7; –7). **126.** (1; 2; 1). **127.** (–2; 7; 1). **128.** ±2. **129.** ±3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** –2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4. **139.** –4. **140.** –2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}-4\vec{k}$.

1- тест сынағы жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	D	D	B	D	B	B	A	A	D	B	B	B	C	A	C	B	D

1- бақылау жұмыс жауабы

1) (1; 2; -3); 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

2- тарау жауаптары

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 см, 5 см. **147.** 12 см. **148.** 5 см. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **165.** а) 4, 10; б) 5, 12. **166.** Жоқ. **170.** 6, куб. **171.** 15. **172.** 9. **173.** 180. **174.** 24 см^2. **175.** 44 см^2. **176.** 76,8 см^2. **177.** 17,64 см. **178.** $4\sqrt{3}$см^2 , 4 см. **179.** 124 дм^2. **180.** 20 м^2, 30 м^2. **181.** 8 см, 8 см. **182.** 13 см, 9 см. **184.** 4500 см^2. **185.** 7,5. **186.** 4. **187.** 480 см^2. **188.** $5\sqrt{2}$. **189.** 45 см^2. **190.** 144. **191.** а)18; б)76; с) 110; д) 132; е) 48; ф) 96; г) 124. **192.** а) 146; б) 126; с) 108; д) 146. **193.** 84 см. **194.**$3\sqrt{2}$ см^2. **195.** 216 см^2. **196.** а) 58; б) 62; с) 94. **197.** а) 38; б) 92; с) 48. **198.** ≈68 м^2. **199.** 104 см. **200.** 68 см^2. **201.** 78 см^2. **204.** 5120 см^3. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **219.** 27 литр. **220.** 4. **221.** 60 см^2. **222.** $\frac{(S-ab)ab}{4(a+b)}$. **223.** 30 м. **224.** 1200. **225.** а) 4; б) 40; с) 71; д) 88; е) 18; ф) 33; г) 78. **226.** а) 90; б) 77; с) 54; д) 96. **227.** 6 м^3. **228.** а) 21; б) 26; с) 58. **230.** 6 м^3. **231.** $\sqrt{2}$ м^3. **232.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **233.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **234.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** а) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; б) a^2b; с) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$. **237.** 3060 м^3. **238.** 3 см^3. **239.** $\frac{a^3}{8}$. **240.** $3\sqrt{3}$ м^3. **241.** 1 рет. **243.** 24 см^3. **245.** 12 см^3. **246.** 2 см. **247.** $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$. **248.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$. **249.** 6048 м^3/уақыт. **250.** 35200 м^3. **251.** 0,5 г/см^3. **252.** 150. **253.** 42. **254.** 961. **255.** 13. **256.** 90. **257.** 3315 г. **258.** 60 м^2. **259.** 24. **260.** 24 см^3. **261.** 1927,2 г. **262.** 1927,2 г. **263.** 960 м^3. **264.** 144 г. **265.** 19,3125 г/см^3. **266.** 440 м^3. **267.** 0,0127 м^3. **271.** $(y+w+z)yx$. **274.** a:b:c. **277.** 240π см^2 , 280π см^2. **278.** 48 см^2. **279.** 5 см. **280.** 128 см^2. **281.** πQ/4. **282.** 36π см^2. **283.** 4π. **284.** 36 см^2. **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 дм. **288.** $2\sqrt{34}$ см. **289.** 3 дм. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 +50/π. **292.** 45π см^3. **293.** 16π см^2. **294.** 1500 см^3. **295.** 800 см^2. **296.** 1000 см^2. **297.** 5574 см^2, 1824 см^2. **298.** 1375π см^3, 11,375 кг. **299.** 141900 г, 310860 см^2. **300.** Біріншісінің. **301.** 2041 сум, 15700 см^2. **302.** 349,45 см^2, 492 см^3, 1747 сум. **303.** 37680 галлон. **304.** 318 галлон. **306.** 3 см^3. **307.** 4 см . **308.** 9 м^3. **309.** 1,125. **311.** а) 45π; б) 3,75π; с) 144π. **312.** а) 14π; б) 937,5π. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 м^3. **323.** ≈3000 см^3. **324.** а) ≈1050 см^2; b) ≈2250 см^3. **325.** ≈162 кг. **328.** 7. **329.** 4. **330.** 200. **331.** 160. **332.** 4. **333.** 8. **334.** 168. **336.** 1/3. **337.** 1/3. **338.** 144 м^3. **339.** 56 см^3. **340.** 6. **341.** 2. **342.** 256. **343.** 96. **344.** 91. **345.** 173 π. **346.** 600π. **347.** 20. **348.** 300.

2- тест сынағы жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	D	A	B	A	C	C	A	A	A	C	C	A	A	C	A	D

2- тест сынағы жауаптары

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}$ +24; 3) 1513 l; 4) 64π см^3; 5) 35 дм^2, 6,5 дм^3.

Ескерту. *Геометрияға күрделі есептер рет санымен жұлдызшамен, үйде орындалатын ұсынылатын мәселелер қызыл реңмен берілген.*

Оқулықты құрастыруда пайдаланылған және қосымша үйренуге ұсынылған оқу-әдістемелік әдебиеттер мен электронды ресурстар

1. *А.В. Погорелов* “Геометрия 10–11”, учебник, Москва. “Просвешение”, 2009.
2. *Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский.* “Математика 11”, учебник, Минск, 2013.
3. *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов* Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
4. *О.Я. Билянина и др.* “Геометрия 11” учебник, Киев, “Генеза”, 2010.
5. *Daniel C.Alexander,* Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
6. *Mal Coad and others,* Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. *Norjigitov X., Mirzayev Ch.* Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. –T., 2004.
8. *Israilov I., Pashayev Z.* Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. –T.: O‘qituvchi, 2005.
9. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
10. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
11. http://www.ixl.com – Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
12. http://www.mathkang.ru – “Kenguru” xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
13. http://www.khanakademy.org – “Xon akademiyasi” masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
14. http://www.brilliant.org – Matematikadan masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).

МАЗМҰНЫ

I ТАРАУ. КЕҢІСТІКТЕ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛАР

1. Кеңістікте координаталар жүйесі 113
2. Кеңістікте векторлар және олар үстінде амал тәсілдер 122
3. Кеңістікте алмастырулар және ұқсастықтар 133
4. Тарауларды қайталауға арналған практикалық жаттығулар 142

II ТАРАУ. ПРИЗМА ЖӘНЕ ЦИЛИНДР

5. Көпжақты бұрыштар және көпжақтар 146
6. Призма және оның сырты.. 153
7. Призманың көлемі... 161
8. Цилиндрдің сыртқы және ішкі көлемі.................................. 172
9. Тарауларды қайталауға арналған практикалық жаттығулар 184

Algebra va analiz asoslari: **M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.**

Geometriya: B.Q. Xaydarov.

MATEMATIKA 11

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI, GEOMETRIYA

I QISM

Орта білім мекемелерінің 11-сынып оқушылары үшін оқулық

1- басылым

Аудармашы:	Е. Сабитова
Редактор:	А. Саттарова
Компьютерде беттеуші:	С. Абдусаломов

Баспа лицензияси AI № 296. 22.05.2017
Басуға рұқсат етілді 31.07.2018. Пішімі 70×100 1/16
“TimesNewRoman” гарнитурасы.
Көлемі: шартты баспа таб. 12,0. Есептік баспа таб. 11,0.
Таралымы 5190 дана
Оригинал-макет “Zamin Nashr” ЖШҚ-да
дайындалды. 100053, Ташкент қ.
Боғишамол көшесі, 160. Тел: 235 44 82
Тапсырыс № 1954.

“Credo Print Group” ЖШҚ-да баспаханасында басылды.
Ташкент қ. Боғишамол көшесі, 160.
Тел: 234 44 01