

**SH. A. ALÍMOV, O. R. XOLMUHAMEDOV,
M. A. MÍRZAAHMEDOV**

ALGEBRA

**ULUWMA BILIM BERIW MEKTEPLERİNİŃ
8-KLASÍ USHÍN SABAQLÍQ**

Qayta islengen 4-basılımı

*Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriliw ministrligi
tárepinen usinis etilgen*

**«O'QITUVCHI» BASPA-POLIGRAFIYALÍQ DÓRETIWSHILIK ÚYI
TASHKENT – 2019**

Pikir bildiriwshiler :

- M. M. Shaniyozova** – Tashkent qalası Sergeli rayonındaǵı 300-mekteptiń matematika páni oqıtılıshısı;
- I. B. Soibova** – Tashkent qalası Yashnabod rayonındaǵı pánlerge qánigelestirilgen 307-mekteptiń matematika páni oqıtılıshısı;
- G. P. Muhamedova** – Nizamiy atındaǵı TMPI ultiwma matematika kafedrasi dotsenti, pedagogika ilimleri kandidati;
- N. Sh. Qarshiboyeva** – Nizamiy atındaǵı TMPI oqıw-metodikalıq basqarması metodisti.

Sabaqlıqtaǵı shártlı belgiler:

- | | | | |
|--------------------|---|--|---|
| | – máseleni sheshiw baslandı | | – bilimlerdi tekseriw ushın óz betinshe jumıs |
| | – máseleni sheshiw tamamlandı | | – sınaq shınıǵıwları – testler |
| | – matematikalıq tastıyıqlawdı tiykarlaw yaki formulani keltirip shıǵarıw baslandı | | – tariyxıy máseleler |
| | – tiykarlaw yaki keltirip shıǵarıw tamamlandı | | – tariyxıy maǵluwmatlar |
| | – qızıqlı máseleler | | – ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanıslı máseleler |
| 16, 18, ... | – quramalıraq máseleler | | |
| | – biliw zárúrlı hám este tutıw paydalı tekst | | |

Respublika maqsetli kitap qori qarjıları esabınan basıp shıǵarıldı.

7-KLASS «ALGEBRA» KURSÍN TÁKIRARLAW

Áziz oqıwshi! Siz 7-klass «Algebra» kursınan algan bilimleriňizdi eske túsırıw maqsetinde, Sizge birneshe máselelerdi usınıs etemiz.

1. Ańlatpanıń san mánisin tabıń:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, bunda $a=5$, $b=4$, $c=10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, bunda $h=12$, $a=10$, $b=8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, bunda $a=10$, $b=40$, $n=16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, bunda $a=30$, $b=20$, $h=25$.

2. Qawsırmalardı ashıń hám ápiwayılastırıń;

1) $7a - (5a + 4b)$;

2) $9x - (7y - 4x)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$;

4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Eger:

1) $v = 60$;

2) $v = 75$;

3) $v = 90$;

4) $v = 100$;

5) $v = 20,4$;

6) $v = 28,5$

bolsa, $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$ ańlatpasınıń san mánisin tabıń.

4. Hárbir durıs juwap ushın: ana tili hám ádebiyatınan n ball, matematikadan k ball, inglez tilinen m ball qoyıladı. Nadira ana tili hám ádebiyatınan c , matematikadan a , inglez tilinen b sorawına durıs juwap berdi.

1) Nadira toplaǵan jámi balldı esaplaw ushın ańlatpa dúziń;

2) eger $a=35$, $b=34$, $c=36$; $k=3,1$; $m=2,1$ hám $n=1,1$ bolsa, ol barlıǵı bolıp qansha ball toplaǵan?

5. Teńlemeni sheshiń (5–6):

1) $2x + 15 = 3x - 11$;

2) $7 - 5x = x - 2$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$;

4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3,2x + 1,8x = 6x - 3,5$;

2) $7,5x - 2,5x = 7x - 10$;

3) $0,5(0,4x - 8) = 5(0,2x - 1)$;

4) $2,4(5x - 3) = -0,8(10 - 5x)$.

7. Sayaxatshı 3 km hám qalǵan joldıń $\frac{1}{3}$ bólmin ótkennen keyin esaplap kórse, jámi joldıń yarımina jetiw ushın jáne 1km aralıq qalıptı. Barlıǵı bolıp jol neshe kilometr eken?
8. Uzınlığı 9,9 m bolǵan sımdı eki bólekke bóldı. Eger:
- 1) bóleklerdiń biri ekinshisinen 20% ke qısqa bolsa;
 - 2) bóleklerdiń biri ekinshisinen 20% ke uzın bolsa, hárbir bólektiń uzınlıǵıń tabıń.
9. 1) Bir san ekinshi sanniń 45% in quraydı. Sanlardıń biri ekinshisinen 66 ga kóp bolsa, usı sanlardı tabıń.
 2) Bir san ekinshi sanniń 30% in quraydı. Sanlardıń biri ekinshisinen 35 ke kem bolsa, usı sanlardı tabıń.
10. Bir awıldan ekinshi awılgá piyada 4 km/saat tezlik penen jolǵa shıqtı. Aradan 2 saat ótkennen keyin, piyadaniń sońinan 10 km/saat tezlik penen velosipedshi jolǵa shıqtı. Ol ekinshi awılgá piyadadan 1 saat burın jetip keldi. Awıllar arasındaǵı aralıqtı tabıń.
11. Esaplań:
- 1) $\frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{2^{15}}$;
 - 2) $\frac{2^3 \cdot (4 \cdot 3^{15} - 7 \cdot 3^{14})}{3^{16} + 5 \cdot 3^{15}}$;
 - 3) $\frac{2^{15} \cdot a^{16}}{4^7 \cdot a^{15}}$.
12. Bir aǵzalını standart túrinde jazıń hám san mánisin esaplań:
- 1) $ba + 8ac$, bunda $a = \frac{1}{2}, b = -3, c = 2$;
 - 2) $\frac{4}{5}x \cdot 8y^2 \cdot \frac{5}{16}x^2y$, bunda $x = 3, y = \frac{1}{9}$.
13. Kóp aǵzalını standart túrine keltiriń:
- 1) $1,2ab + 0,8b^2 - 0,2ab + 2,2b^2 + 2ab$;
 - 2) $3a^2 2a^2 + 3b^2 4a^2 - 2a^2 5b^2 - 3a2ab^2 - a^3 2a$.
14. Ámellerdi orınláń (**14–15**):
- 1) $(3a^2 - 2ab - b^2) - (2a^2 - 3ab - 2b^2)$;
 - 2) $(7a^2 - 13ab + 10b^2) + (-3a^2 + 10ab - 7b^2)$;

3) $(a^2 + 3ab - b^2) \cdot ab;$ 4) $abc \cdot (2a^2b - 3abc).$

- 15.** 1) $(x+y)(a-b);$ 2) $(a-b+c)(a-c);$
3) $(a^2 - b^2)(a+b);$ 4) $(a-3)(a-2) - (a-1)(a-4).$

16. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $4a^3 : a - (2a)^2 + a^4 : 3a^2;$
2) $(5a^4 + \frac{1}{3}a^3) : a^2 - (4a^3) : (2a) + (2a)^2;$
3) $(0,1b^4 - 2b^3 + 0,4b^2 + 0,02b) : (0,1b);$
4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2 + \frac{9}{10}a^2b^3 - \frac{15}{16}ab^4\right) : \left(\frac{3}{4}ab^2\right).$

17. Kóbeytiwshilerge jikleń (**17–18**):

1) $5a^2 - 15a^4 + 10a^6;$ 2) $9a^3 + 12a^2 - 6a;$
3) $a(x+y) - b(x+y);$ 4) $(x-1) - a(1-x);$
5) $4(a-3) + a(3-a);$ 6) $a^2(1-a) + 4(a-1).$

- 18.** 1) $ay + zy - 2ap - 2zp;$ 2) $5ac - 6bd + 5ad - 6bc;$
3) $a(5a - 4b) - 10a + 8b;$ 4) $4ab - 6cd - 12ad + 2bc.$

19. Esaplań:

1) $49^2 + 51 \cdot 98 + 51^2;$ 2) $58^2 - 116 \cdot 33 + 33^2;$
3) $\frac{19^2 + 38 \cdot 11 + 11^2}{19^2 - 11^2};$ 4) $\frac{53^2 - 53 \cdot 94 + 47^2}{53^2 - 47^2};$
5) $\frac{183^3 - 93^3}{183^2 + 183 \cdot 93 + 93^2};$ 6) $\frac{43,73^2 - 43,73 \cdot 56,27 + 56,27^2}{43,73^3 + 56,27^3}.$

20. Sawdager islep shıǵarǵan óniminiń 1 kilogramın 19 800 somnan satsa, 162 800 som payda kóredi. Eger, usı ónimniń 1 kilogramın 16 500 somnan satsa, 81 400 som ziyan kóredi. Ónim neshe kilogramm eken?

21. Sınawda oqıwshıǵa 60 soraw berildi. Hárbir durıs juwap 5 ballǵa ba-halandı. 4 nadurıs juwap ushın járiyma sıpatında bir durıs juwap biykar

etildi. Bul sınawda sorawlardı belgilegen 1 oqıwshı 225 ball toplaǵan bolsa, ol neshe sorawǵa durıs juwap bergen?

22. Úsh tańbalı sannıń cifrları birewden kemeyip baradı. Usı sannan cifrları óğan keri tártipte jazılǵan sandı ayırıw nátiyjesinde payda bolǵan san 2 ge, 9 ága, 11 ge bólinedi. Dálilleń.
23. Avtomobil 60 km/saat tezlik penen 4 saat júrdı. Usı jolǵa 1 saat kem waqıt sarplaw ushın ol tezligin neshe procentke arttırıwı kerek?
24. Eki awıl aralığındaǵı aralıqtı bir sayaxatshı 2 saatta, ekinshi sayaxatshı bolsa, 3 saatta júrip ótedi. Eger olar bul awillardan bir-birine qarap bir waqıtta jolǵa shıqsa, qansha waqıttan soń ushırasadı?
25. Ónimniń bahası a som edi. Bul baha $q\%$ ke arzanlastırıldı. Biraz waqıt ótkennen keyin onıń sońǵı bahası $p\%$ ke kóterildi. Házirgi waqıttá ónim qansha swmnan satılıp atır?
26. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eni a ága, boyı b ága teń. Onıń eni $p\%$ ke uzaytirıldı, boyı bolsa $q\%$ ke kemeytirıldı. Payda bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń betin esaplań.
27. Mashina v_1 km/s tezlik penen n saat, v_2 km/s tezlik penen m saat jol júrdı.
1) Mashina jámi neshe kliometr jol júrgen?
2) Onıń ortasha tezligi qanday bolǵan?
28. 5 tonna hám 10 tonna júk kóteretuǵın 50 mashina menen 405 tonna júkti tasıdı. Júk tasıwdı neshe 5 tonnalıq hám neshe 10 tonnalıq mashinalar qatnasqan?

1-§. ALGEBRALÍQ AÑLATPALAR

Tómendegi máseleni qaraymız.

1-másele. Bir san oylań, onı 3 ge kóbeytiń, payda bolǵan sanǵa 6 ni qosıń, tabılǵan qosındını 3 ke bóliń hám oylaǵan sandı ayırıń. Qanday san payda boladı?

△ Aytayıq, oylanǵan san 8 bolsın. Barlıq esaplawlardı másele shártinde kórsetilgen tártipte orınlaymız:

$$1) 8 \cdot 3 = 24; \quad 2) 24 + 6 = 30; \quad 3) 30 : 3 = 10; \quad 4) 10 - 8 = 2.$$

2 sanı payda boldı.

Bul sheshimdi mánisi 2 ge teń bolǵan $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$ sanlı ańlatpa túrinde jazıwımız mümkin.

Eger de 5 sanı oylanǵan bolsa, onda jáne mánisi 2 ge teń bolǵan $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$ sanlı ańlatpa payda etilgen bolar edi.

Bız qanday sandı oylasaqtı, nátiyjede 2 sanı payda bola beredi eken, degen pikir tuwiladı. Bunu tekserip kóremiz. Oylaǵan sandı a háribi menen belgileymız hám esaplawdı jáne másele shártinde kórsetilgen tártipte jazamız:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Arifmetikalıq esaplawlardıń bizge belǵan qásiyetlerinen paydalanıp, bul ańlatpanı ápiwayilastrıramız:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \triangle$$

Máseleni sheshiwde qálegen sandı bildiriwshi a háribi, 3 hám 6 sanları, esap belgileri hám qawsırmalardan ibarat $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ ańlatpa payda etildi. Bul algebralıq ańlatpaǵa mísal bolıp, ol másele shártin matematikalıq tilge ótkiziw úlgisi bolıp esaplanadı.

Jáne algebralıq ańlatpalarǵa mísallar keltiremiz:

$$2(m+n), \quad 3a+2ab-7, \quad (a+b)(a-b), \quad \frac{x+y}{a}.$$



Algebralıq ańlatpa sanlar hám hárıplerden dúzilip, esaplaw belgileri menen birlestilgen ańlatpa bolıp esaplanadı.

Eger, algebralıq ańlatpaǵa kirgen hárıpler ornına bir san qoyılsa hám kórsetilgen esaplaw islense, nátiyjede payda bolǵan san berilgen algebralıq ańlatpanıń san mánisi delinedi.

Máselen, $a=2$, $b=3$ bolǵanda

$$3a+2b-7$$

algebralıq ańlatpanıń mánisi 5 ke teń, sebebi $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5$; usı algebralıq ańlatpanıń mánisi $a = 1$; $b = 0$ bolǵanda - 4 ke teń, sebebi

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4.$$

a niń qálegen mánisinde

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$$

algebralıq ańlatpanıń mánisi 2 ge teń.

2-másеле. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ ańlatpanıń mánisin $a = 10$, $b = 5$ bolǵanda tabıń.

$$\Delta \quad \frac{(3 \cdot 10 + 7) \cdot 5}{10 - 5} = \frac{37 \cdot 5}{5} = 37. \blacktriangle$$



Qosıw, alıw hám kóbeytiw belgileri járdeminde birlestirilgen bir neshe kóp aǵzalıdan ibarat ańlatpa pútin ańlatpa delinedi.

Qálegen pútin ańlatpa standart kórinisindegi kóp aǵzalığa keltiliwi mümkin.

Mısalı: $P(a,b) = 30a^3b^2 - (6a^2b + a)(5ab - 2)$ pútin ańlatpanı standart kórinisindegi kóp aǵzalığa keltiriń.

$$\begin{aligned} \Delta \quad P(a,b) &= 30a^3b^2 - 30a^2b \cdot ab - 5ab \cdot a + 12a^2b + 2a = \\ &= 30a^3b^2 - 30a^3b^2 - 5a^2b + 12a^2b + 2a = 7a^2b + 2a. \end{aligned}$$

Juwapi: $7a^2b + 2a. \blacktriangle$

Shiniǵıwlar

1. Algebralıq ańlatpanıń mánisin tabıń:

- | | |
|---|--|
| 1) $3a - 2b$, bunda $a = \frac{1}{3}, b = 1$; | 3) $0,25a - 4c^2$, bunda $a = 4, c = 3$; |
| 2) $2a + 3b$, bunda $a = 3, b = -2$; | 4) $\left(2a^2 - \frac{1}{3}b\right)$, bunda $a = 2, b = 9$. |

2. Algebralıq ańlatpanıń mánisin tabıń:

- 1) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{7}y$, bunda $x = 8, y = -14$;
- 2) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y$, bunda $x = 9, y = -10$;
- 3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, bunda $a = 4, b = -2$;
- 4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, bunda $a = 3, c = -1$.

3. Neft trubasınan 1 saatta 7 t neft aǵadı, m saatta trubadan neshe tonna neft aǵadı? Bir sekundta - she?

4. 1) m saatta; 2) p sekundta; 3) m saat l minut hám p sekundta neshe minut bar?

5. x hám y sanlar ayırmasınıń kórsetkishin jazıń. Usı ańlatpanıń:

- | | |
|---|---------------------------------|
| 1) $x = -0,37, y = -0,42$; | 2) $x = -2,98, y = -4,48$; |
| 3) $x = -\frac{5}{6}, y = -\frac{9}{4}$; | 4) $x = \frac{2}{15}, y = -0,7$ |

bolǵanda san mánisin tabıń.

6. x hám y qosındısı menen olar ayırmasınıń kóbeymesin jazıń. Payda bolǵan algebralıq ańlatpanıń:

- | | |
|--|--|
| 1) $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{1}{4}$; | 2) $x = -\frac{5}{8}, y = \frac{3}{4}$; |
| 3) $x = 0,15, y = -0,75$; | 4) $x = 1,32, y = -1,28$ |
- bolǵanda san mánisin tabıń.

Algebraqliq ańlatpalardıń san mánisin tabiń (7–8):

7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, bunda $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+1)\cdot 2p}{p-l} + \frac{1}{3}$, bunda $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, bunda $x=8,31$; $y=2,29$; $p=2,01$; $q=2$;

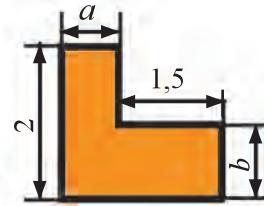
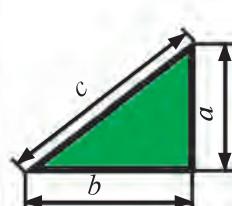
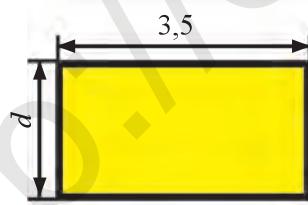
2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, bunda $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.

9. Taq san formulası $n=2k+1$ den paydalanıp, $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$ bolǵanda n niń mánisin tabiń.

10. Algebraqliq ańlatpa túrinde jazıń:

1) kishisi n ǵa teń bolǵan eki izbe-iz natural sanniń qosındısı; 2) úlke-ni m ǵa teń bolǵan eki natural sanniń kóbeymesi; 3) kishisi $2k$ ǵa teń bolǵan úsh izbe-iz jup natural sanniń qosındısı; 4) kishisi $2p+1$ ge teń bolǵan úsh izbe-iz taq natural sanniń kóbeymesi.

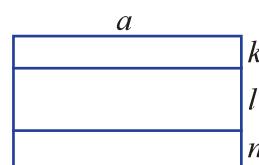
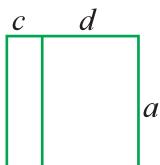
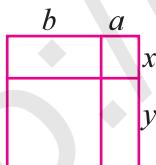
11. Figuralardıń perimetri hám betin algebraqliq ańlatpa kórinisinde jazıń (1-súwret):



1-súwret.

12. Úydi ısitıw ushın p tonna kómır ǵamlandı; usıdan q tonna sarplandı. Neshe tonna kómır qaldı? 1) $p = 20$, $q = 15$ bolǵanda esaplań; 2) q sanı p sanınan úlken bolıwı mümkin be? p ǵa teń bolıwı-she?

- 13.** Gúres jarısın kóriw ushın hárkı 400 somnan n bilet hám hárkı 500 somnan m bilet satıldı. Barlıq biletlerden qansha pul túskeni? Sáykes ańlatpa dúziń hám onı $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ bolǵanda esaplań.
- 14.** Bir albomníń bahası 200 som, bir dápterdiń bahası 40 som, bir ruchkaníń bahası 60 som. c albom, a dápter hám b ruchkaníń ulıwma(swımlardaǵı) bahasın p hárkı menen belgilep, onı formula túrinde jazıń. Eger, $c = 9$, $a = 21$, $b = 4$ bolsa, bul formula boyıńsha p ni esaplań.
- 15.** İssılıq uzatıw stanciyası ushın arnalǵan gaz trubası arqalı hár minutta 26 m^3 gaz ótedi. 5 sutkada; m sutkada trubadan neshe kub metr gaz ótedi?
- 16.** Geologlar óz jónelisi boyıńsha hárket etip, atta saatına c kilometr tezlik penen 3 saat 10 minut júrdı; aǵımınıń tezligi saatına a kilometr bolǵan dáryada aǵım boyıńsha 1 saat 40 minut salda júzdi hám saatına b kilometr tezlik penen 2 saat 30 minut piyada júrdı. Jónelistiń (km degi) uzınlığın s hárkı menen belgilep, geologlar basıp ótken jol formulasın jazıń. Eger $a=3,3 \text{ km/saat}$, $b=5,7 \text{ km/saat}$, $c=10,5 \text{ km/saat}$ bolsa, jónelistiń uzınlığın esaplań.
- 17.** Aralas san $a + \frac{b}{c}$ kórinisinde jazılǵan. Aralas sandı nadurıs bolshekke aylandırıw qaǵıydasin hárıpler járdeminde jazıń.
- 18.** 1) 2-súwrettegi figura (tuwrı tórtmúyeshlik) betin hám perimetrin esaplaw ushın formulalar dúziń:



2-súwret.

2) Figura járdeminde:

- a) $(a+b)(x+y) = ax + bx + ay + by$;
- b) $a(c+d) = ac + ad$;

c) $a \cdot (k + l + n) = ak + al + an$

teńliklerdi dálilleń. Bul formulalar mánisin ashıń.

19. Usı teńliklerge alıp keliwshi turmıslıq máseleler dúziń:

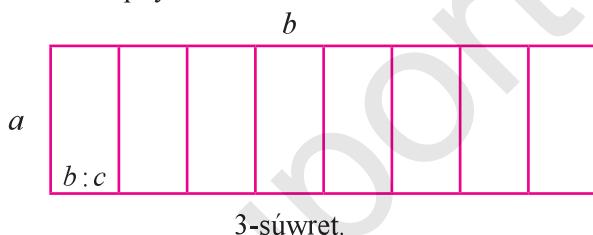
1) $a - (b + c + d) = a - b - c - d;$

2) $a - (b - c) = a - b + c;$

3) $(ab)c = a(bc);$

4) $a - (b - c + d) = a - b + c - d.$

20. $(ab):c = a \cdot (b:c)$ formulasın dálilleń. Geometriyalıq oy júritiwden hám 3-súwrettegi firuradan paydalaniń.



2- §. ALGERBRALÍQ BÓLSHEK. BÓLSHEKLERDI QÍSQARTÍRÍW

1-másele. Katerdiń turǵan suwdaǵı tezligi saatına a kilometrge, dárya aǵımınıń tezligi saatına b kilometrge teń. Katerdiń dárya aǵımı boyınsha háreket tezligi, onıń dárya aǵımına qarsı háreket tezliginen neshe esege artıq?

△ Katerdiń dárya aǵımı boyınsha tezligi saatına $(a+b)$ kilometrge teń; aǵımǵa qarsı saatına $(a-b)$ kilometrge teń. Sonıń ushın dárya aǵımı boyınsha háreket tezligi aǵımına qarsı háreket tezliginen

$$\frac{a+b}{a-b}$$

ese artıq boladı. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ ańlatpa algerbralıq bólshék delinedi. Bul bólshektiń alımı $a+b$, bólimi bolsa $a-b$.

Ulívma alımı hám bólimi bolǵan algebralıq ańlatpalar algebralıq bólshek delinedi.

Algebralıq bólsheklerge baylanıshı jáne bir neshe mísallar keltiremiz:

$$\frac{a}{b}; \quad \frac{2}{x+y}; \quad \frac{a-b}{c}; \quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Eger algebralıq bólshekke kiriwshi háripler ornına bir san qoyılsa, onda belgilengen esaplawlar islengennen keyin, usı algebralıq bólshektiń san mánisi payda boladı.

Máselen, $a=10$, $b=8$ bolǵanda $\frac{a+b}{a-b}$ algebralıq bólshektiń san mánisi

$$\frac{10+8}{10-8} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ge teń boladı.}$$

$\frac{a+b}{a-b}$ algebralıq bólshekte a hám b ornına óz ara teń bolmaǵan ($a \neq b$) qálegen sanlardı qoyıwǵa boladı, sebebi $a=b$ bolǵanda bólshektiń bólimi nolge aylanadı, nolge bóliwdıń bolsa ilajı joq..

Bunnan keyin algebralıq bólshekke kiriwshi háripler jol qoyılǵan mánislerdi ǵana, yaǵníy usı bólshektiń bólimi nolge teń bolmaytuǵın mánilerdi ǵana qabil etedi, dep shártlesemiz.

Máselen, $\frac{a}{a(a-1)}$ bólshek ushın múmkın bolǵan mániler a niń $a=0$ hám $a=1$ den basqa barlıq mánileri boladı.



Bólshektiń tiykarǵı qásiyetin bılayinsha jazıwǵa boladı:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

Bul jerde $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Bul qásiyet bólsektein alımı hám bólimi birdey algebralıq ańlatpaǵa kóbeytirilse yaki bólinsel, oǵan teń bólshek payda bolıwın bildiredi, máselen:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \cdot c}{bc}.$$

Bólshektiń tiykarǵı qásiyetinen paydalanıp, algebralıq bólshekti onıń alımı hám bólmine bir waqıtta kiriwshı ulıwma kóbeytiwshige qısqartırıw mümkin, máselen:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c}, \quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}.$$

Bólsheklerdi ápiwayılastırıw ushın dáslep olardıń alımı hám bólminin kóbeytiwshisine jiklep alıw kerek. Soğan tiyisli mísallar keltiremiz.

2 - másеле. Bólsheklerdi qısqartırıw:

$$1) \frac{12a^2b}{4ab^2}; \quad 2) \frac{m^2-n^2}{m^2+mn}.$$

△ 1) $12a^2b$ hám $4ab^2$ biraǵzalılar $4ab$ ulıwma kóbeytiwshige iye. Bólshektiń alımı hám bólmin $4ab$ ga bólemiz:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2} = \frac{4ab \cdot 3a}{4ab \cdot b} = \frac{3a}{b}.$$

2) m^2-n^2 hám m^2+mn kópaǵzalılar $m-n$ ulıwma kópeytıwshige iye, sebebi $m^2-n^2=(m+4)(m-n)$, $m^2+mn=m(m+n)$. Bólshektiń alımı hám bólmin $m+n$ ga bólemiz:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn} = \frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m}. \quad \blacktriangle$$



Bólsheklerdi qısqartırıw ushın bul bólsheklerdiń alımı hám bólmin ulıwma kópeytıwshige boliw kerek.

Eger $\frac{a}{b}$ bólshektiń alımı yaki bólmindegi kórsetkish qarama-qarsısına ózgertirilse, onda berilgen bólshekke qarama-qarsi bólshek payda bolıwin tastıyıqlap ótemiz.

$\frac{-a}{b}$ hám $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ hám $\frac{a}{b}$ – qarama-qarsi bólshekler. Sonıń menen birge

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Máselen, $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a} = -\frac{a}{1-a} = \frac{a}{a-1}$.

3- m ásele. $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$ b ólshekti qısqartıń:

$$\Delta \quad \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}. \quad \blacktriangle$$

Shiniǵıwıar

21. Alımı x hám y sanlarınıń kóbeymesine, b ólimi olardıń qosındısına teń algebralıq b ólshekti jazıń.
22. Alımı p hám q sanlarınıń ayırmasına, b ólimi olardıń kóbeymesine teń algebralıq b ólshekti jazıń.
23. Alımı a hám b kvadratlarınıń ayırmasına, b ólimi olardıń sanlar ayırmasınıń kvadratına teń algebralıq b ólshekti jazıń.
24. Alımı c hám d sanlar kubınıń qosındısına, b ólimi usı sanlar kóbeymesiniń ekilenwine teń bolǵan algebralıq b ólshekti jazıń.
25. Algebralıq b ólshektiń san mánisın tabıń:

$$1) \frac{1}{a}, \text{ bunda } a = 2\frac{3}{5}; \quad 4) \frac{a-b}{a+2b}, \text{ bunda } a = 16, b = -3;$$

$$2) \frac{b+1}{b-1}, \text{ bunda } b = 1,5; \quad 5) \frac{5a+b^2}{a^2-5b}, \text{ bunda } a = 2, b = 8;$$

$$3) \frac{a^2+1}{2a}, \text{ bunda } a = -3; \quad 6) \frac{-7ab}{3b^2-a^3}, \text{ bunda } a = 3, b = 4.$$

26. 1) $S=vt$ formuladan v ni; 2) $p=\frac{m}{V}$ formuladan V ni;
 3) $C=2\pi R$ formuladan R dı; 4) $P=2(a+b)$ formuladan a ni tabıń.
27. H árbir j úk mashinasına a tonnadan kartoshka j úklewge bolsa, h árbirinde p kilogrammnan kartoshka bolǵan n qap kartoshkanı tasıw ushın neshe j úk mashinası (x) kerek boladı? x ti $n = 90$, $p = 50$, $a = 1,5$ bolǵanda tabıń.

28. Mashina saatına ortasha c metr linoluem linoleum islep shıgaradı. Eger mashina kúnine n saattan islese, ol a metr linoleumdı neshe künde islep shıgaradı? Tabıw kerek waqtı t menen belgilep, t ni $c = 47$, $a = 11280$ hám $n = 16$ bolǵanda tabıń.

29. Berilgen eki bolshektiń teńligin kórsetiń:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{6}{7} \text{ hám } \frac{18}{21}; & 3) \frac{2}{3} \text{ hám } \frac{2a}{3a}; & 5) \frac{m-n}{m+n} \text{ hám } \frac{m^2 - n^2}{(m+n)^2}; \\ 2) \frac{-3}{5} \text{ hám } \frac{27}{-45}; & 4) \frac{2a}{7b} \text{ hám } \frac{2a^2 b}{7ab^2}; & 6) \frac{a+3b}{c} \text{ hám } \frac{(a+3b)c}{c^2}. \end{array}$$

Bolshekti qısqartıń: (30–45):

$$30. \quad 1) \frac{-48}{-56}; \quad 2) \frac{-64}{-80}; \quad 3) \frac{-121}{55}; \quad 4) \frac{28}{-14}.$$

$$\begin{array}{lll} 31. \quad 1) \frac{12a}{20}; & 2) \frac{2c}{3c}; & 3) \frac{7b}{21b}; \\ 4) \frac{4ab}{8ac}; & 5) \frac{a^2}{2a}; & 6) \frac{5x}{x^3 y}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 32. \quad 1) \frac{a^2}{a^3}; & 2) \frac{b^3}{b^7}; \\ 3) \frac{a^5}{a^4}; & 4) \frac{b^6}{b^4}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 33. \quad 1) \frac{6ab}{4a}; & 2) \frac{14c}{49c}; & 3) \frac{a^4 b}{ab^3}; \\ 4) \frac{3a^2 b}{9a^3}; & 5) \frac{12a^4 b^2}{18a^3 b^3}; & 6) \frac{25a^3 bc^2}{125ac^3}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 34. \quad 1) \frac{4(m+n)}{5(m+n)}; & 3) \frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}; & 5) \frac{2(a-b)}{b-a}; \\ 2) \frac{7a(a-b)}{5(a-b)}; & 4) \frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}; & 6) \frac{5(x-y)}{15(y-x)}. \end{array}$$

$$35. \quad 1) \frac{(a-b)^2}{a-b};$$

$$3) \frac{m-n}{(n-m)^2};$$

$$5) \frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2};$$

$$2) \frac{m+n}{(m+n)^4};$$

$$4) \frac{(2x-3y)^2}{3y-2x};$$

$$6) \frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}.$$

$$36. \quad 1) \frac{3x+3y}{6c};$$

$$3) \frac{2a+2b}{4a-4b};$$

$$5) \frac{ac-bc}{ac+bc};$$

$$2) \frac{8a}{4m-4n};$$

$$4) \frac{12a-3}{6a+9};$$

$$6) \frac{a+ab}{a-ab}.$$

$$37. \quad 1) \frac{a^2}{a^2+ab};$$

$$3) \frac{7a+14b}{3a+6b};$$

$$5) \frac{3a-6b}{12b-6a};$$

$$2) \frac{pq^3}{p^2q-pq^2};$$

$$4) \frac{2m^2-mn}{2mn-n^2};$$

$$6) \frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}.$$

$$38. \quad 1) \frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy};$$

$$2) \frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab};$$

$$3) \frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3};$$

$$4) \frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}.$$

$$39. \quad 1) \frac{a^2-b^2}{a+b};$$

$$3) \frac{4c^2-9x^2}{2c-3x};$$

$$5) \frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)};$$

$$2) \frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$4) \frac{25-x^2}{5-x};$$

$$6) \frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}.$$

$$40. \quad 1) \frac{8-3c}{9c^2-64};$$

$$3) \frac{2y-10}{25-y^2};$$

$$5) \frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n};$$

$$2) \frac{100-49b^2}{7b+10};$$

$$4) \frac{5y-y^2}{25-y^2};$$

$$6) \frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}.$$

$$41. \quad 1) \frac{d^2-6d+9}{d-3};$$

$$2) \frac{b+7}{b^2+14b+49};$$

$$3) \frac{9-6a+a^2}{3-a};$$

$$4) \frac{1-2p}{1-4p+4p^2}.$$

$$42. \quad 1) \frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1};$$

$$3) \frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2};$$

$$2) \frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1};$$

$$4) \frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}.$$

$$43. \text{ 1) } \frac{1-a^2}{(a-1)^2}; \quad 2) \frac{(m-n)^2}{n-m}; \quad 3) \frac{4y^2-4y+1}{2-4y}; \quad 4) \frac{5-2x}{4x^2-20x+25}.$$

$$44. \text{ 1) } \frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}; \quad 4) \frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c};$$

$$2) \frac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2};$$

$$3) \frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2};$$

$$45. \text{ 1) } \frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)};$$

$$2) \frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)};$$

$$5) \frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b};$$

$$6) \frac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}.$$

$$3) \frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5};$$

$$4) \frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}.$$

3- §. BÓLIMLERDI ULÍWMA BÓLIWSHIGE KELTIRIW

Ápiwayı bólsheklerdi qosıwda ulıwma bóliniwshige keltirip alındı. Máse-len, $\frac{1}{4}, \frac{3}{25}, \frac{7}{10}$ bólshekler ushın ulıwma bóliniwshi 100 sanı boladı, bul bolsa 4, 25, 10 sanlarınıń eń kishi ulıwma túri bolıp esaplanadı.



Algebralıq bólsheklerdiń ulıwma bólimi usı bólshek bólminiń eń kishi túri bolıp esaplanadı. Bólsheklerdi ulıwma bólime keltiriwde bólshektiń tiykaǵı qásiyetinen paydalanıladı.

1 - m ásele. $\frac{m}{3a^2b}, \quad \frac{n}{6ab^2}$ hám $\frac{p}{4ac}$ algebralıq bólsheklerdi ulıwma bóliniwshige keltiriń.

△ Berilgen bólsheklerdiń bólimi hárbir bólshektiń bólime bóliniwi kerek. Demek, ol 3 ke, 6 ǵa, 4 ke, yaǵníy 12 ge; a^2 ǵa, a ǵa, yaǵníy a^2 qa; n ǵa hám b^2 qa, yaǵníy b^2 qa; c ǵa bóliniwi kerek.

Solay etip, bólsheklerdiń ulıwma bólimi 12 , a^2 , b^2 hám c kóbeytiwshilerin óz ishine alıwı kerek. Ulıwma bólimi sıpatında $12a^2b^2c$ kóbeytiwdi alıw kerek boladı. Bul ulıwma bólimdi birinshi bólshektiń bólimine bólip, onıń alımı hám bólimin kóbeytiw kerek bolǵan bir aǵzalını tawamız. Bul berilgen bir aǵzalı bólshektiń qosımsha kóbeytiwshisi delinedi. Birinshi bólshek ushın bunday bir aǵzalı $4bc$ ǵa teń. Tap usınday jol menen ekinshi hám úshinshi bólshekler ushın qosımsha kóbeytiwshilerdi tabamız: $2ac$ hám $3ab^2$.

Birinshi, ekinshi hám úshinshi bólsheklerdiń alımı hám bólimi túrinde, $4bc$, $2ac$ hám $3ab^2$ ǵa kóbeytip, olardı $12a^2b^2c^2$ ulıwma bólimge kel-tiremiz:

$$\frac{m}{3a^2b} = \frac{4mbc}{12a^2b^2c}, \quad \frac{n}{6ab^2} = \frac{2nac}{12a^2b^2c}, \quad \frac{p}{4ac} = \frac{3pab^2}{12a^2b^2c}. \quad \blacktriangle$$

2- másele. Bólsheklerdiń ulıwma bólimge keltiriń:

$$\frac{a}{x^2 - y^2}; \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2}; \quad \frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2}.$$

△ Bólsheklerdiń bólimin kóbeytiwshige jikleymiz. Ulıwma bólim berilgen bólsheklerdiń hárbiriniń hárbiriniń bóliniwi kerek:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2;$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x + y)^2.$$

Ulıwma bólimi birinshi bólshektiń bóliniwi ushın onıń quramında $(x - y)$ $(x + y)$ kóbeyiw bolıwı kerek.

Soń ulıwma bólim ekinshi bólshektiń bólimine bóliniwi kerek hám sonıń ushın onda $2(x - y)^2$ kóbeytiwshi bolıwı kerek. Demek, birinshi bólshek bólimine jáne $2(x - y)$ kóbeytiwshisin de jazıp qoyıw kerek, yaǵníy ulıwma bólim quramına

$$2(x - y)^2(x + y)$$

kóbeytiw bolıwı kerek.

Ulıwma bólimi úshinshi bolshektiń $3(x+y)$ bólmine bóliniwi ushın payda etilgen kóbeymege $3(x+y)$ kóbeytiwshini jazıp qoyıw kerek. Demek, úsh bolshektiń de ulıwma bólimi

$$6(x-y)^2(x+y)^2$$

qa teń boladı.

Bolsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw ushın olardıń alımı hám bólmin qosımsha kóbeytiwshilerge kóbeytiw kerek, olar ulıwma bólimdi hárbir bólimge bólıw jolı menen tabıladı; berilgen bolshekler ushın sáykes túrde tómendegilerge teń:

$$6(x-y)(x+y), \quad 3(x+y)^2, \quad 2(x-y)^2.$$

Demek, berilgen bolsheklerdi bunday jazıp alıw mümkin:

$$\frac{a}{x^2 - y^2} = \frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2}; \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2} = \frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2} = \frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}. \quad \blacktriangle$$



Algebralıq bolsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw ushın:

- 1) berilgen bolshektiń ulıwma bólmin tabıw;
- 2) hárbir bolshek ushın qosımsha kóbeytiwshini tabıw;
- 3) hárbir bolshektiń alımın, onıń qosımsha kóbeytiwshisine kóbeytiw;
- 4) hárbir bolshekti tabılǵan alımı hám ulıwma bólmi menen jazıw kerek.

Shınıǵıwlар

Tómendegi shınıǵıwlarda bolsheklerdi ulıwma bólimge keltiriń (**46–53**):

46. 1) $\frac{1}{2}$ hám $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ hám $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ hám $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ hám $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ hám $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ hám $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}, \frac{1}{5b}$ hám $\frac{7}{20ab}$; | 2) $\frac{3x}{4y}, \frac{6}{xy}$ hám $\frac{4y}{3x}$; | 3) $\frac{7}{a^2}$ hám $\frac{8}{a^3}$; | 4) $\frac{a}{2x}$ hám $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a hám $\frac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ hám $\frac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 hám $\frac{c}{2ab}$; | 4) $\frac{b}{3a}, \frac{3c}{2b}$ hám ab .

49. 1) $\frac{1}{2p^2}, \frac{1}{6pk}$ hám $\frac{1}{3k^2}$; | 3) $\frac{2a}{b^2}, \frac{4}{15a^2b}$ hám $\frac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\frac{1}{6b^2}, \frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ hám | 4) $\frac{7}{20x^4y}, \frac{31}{6xy^3}$ hám

50. 1) $\frac{3}{x+y}$ hám $\frac{3-a^2}{18ab^2}$; | 3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ hám $\frac{5x}{x-1}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ hám $\frac{2}{a}$; | 4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ hám $\frac{2a^2}{3(a+1)}$

51. 1) $\frac{1}{x-y}$ hám $\frac{1}{x+y}$; | 3) $\frac{5x}{2x-2}$ hám $\frac{3}{4x-4}$.

2) $\frac{7a}{3x-y}$ hám $\frac{6b}{3x+y}$; | 4) $\frac{3x}{4x+4y}$ hám $\frac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\frac{3b}{b-2}$ hám $\frac{4}{b^2-4}$; | 3) $\frac{1}{1-a}, \frac{2a}{1+a}$ hám $\frac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ hám $\frac{a}{x+3}$; | 4) $\frac{6x}{x-y}, \frac{7xy}{x+y}$ hám $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\frac{m}{2m+2n}, \frac{n}{8m-8n}$ hám $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$; | 2) $\frac{2c}{5b-5c}, \frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ hám $\frac{7b}{14b+14c}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}, \frac{1}{3a^2+6ab}$ hám $\frac{1}{2ab-a^2}$; | 4) $\frac{5}{4x-4}, \frac{4x}{1-x^2}$ hám $\frac{1}{3x^2+3x}$.



No 1

Bir qurt jerden terektiň terektiň basına shıqpaqshı bolıptı. Terek boylap №1 keshte ol 2 m biyiklikke shıqqannan keyin, kündizi bolsa 1 m páske túsedi eken. 9-keshede ol terektiň basına shıgıp aliptı. Terektiň biyikligi neshe metr eken?

4- §. ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLERDI QOSÍW HÁM ALÍW

Birdey bólimalı bolsheklerdi qosıw hám alıw qágiydarın bılayınsıha jazıwǵa boladı:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m};$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

1- m ásele. $\frac{a-b}{a+b}, \frac{2a-b}{a+b}$ hám $\frac{a-2b}{a+b}$ bolsheklerdi qosıń.

$$\Delta \frac{a-b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} + \frac{a-2b}{a+b} = \frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b} = \frac{4a-4b}{a+b} = \frac{4(a-b)}{a+b}.$$
 ▲

2- m ásele. $\frac{a^2}{a+b}$ hám $\frac{b^2}{a+b}$ bolsheklerdiń ayırmasın tabıń.

$$\Delta \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b.$$
 ▲



Hár túrli bólime iye bolsheklerdi qosıw yaki alıwdı ushın bul bolsheklerdi ulıwma bólime keltiriw hám birdey bólimalı bolsheklerdi qosıw yaki alıw qágiydasınan paydalaniw kerek.

3- m ásele. $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{2a^2b}$ hám $\frac{1}{3ab^2}$ bolsheklerdi qosıń

△ Berilgen bolsheklerdiń ulıwma bólimi $6a^3b^2$ kóbeyme boladı. Demek,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{3ab^2} = \frac{6b^2}{6a^3b^2} + \frac{3ab}{6a^3b^2} + \frac{2a^2}{6a^3b^2} = \frac{2a^2 + 3ab + 6b^2}{6a^3b^2}.$$
 ▲

4- m ásele $\frac{a}{3b^2c}$ hám $\frac{c}{15ab^2}$ bolsheklerdiń alımın tabıń.

$$\Delta \frac{a}{3b^2c} - \frac{c}{15ab^2} = \frac{5a^2}{15ab^2c} - \frac{c^2}{15ab^2c} = \frac{5a^2 - c^2}{15ab^2c}.$$
 ▲

5-másele. $\frac{3}{x^2-1}$ hám $\frac{1}{x^2-x}$ bólsheklerdi qosıń.

△ Bólsheklerdiń bólimalerinde turǵan kóp aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$x^2 - x = x(x-1), x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Bólsheklerdiń ulıwma bólimi $x(x-1)$ ($x+1$) kóbeytiw boladı. Bólsheklerdi ulıwma bólime keltirip, tabamız:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-1} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x^2-1)} + \frac{3x}{x(x^2-1)} = \\ &= \frac{x+1+3x}{x(x^2-1)} = \frac{4x+1}{x(x^2-1)}. \end{aligned}$$

! Túrli bólime iye bólsheklerdi qosıw yaki alıw usı tártipte orınlawǵa boladı:

- 1) bólsheklerdiń ulıwma bólimi tabıladı;
- 2) bólshekler ulıwma bólime keltiriledi;
- 3) payda bolǵan bólshekler qosıladi;
- 4) ilajı bolsa, nátiyje ápiwayılastırıladı.

6-másele. $\frac{1}{a^2+4a+4} - \frac{4}{a^4+4a^3+4a^2} + \frac{4}{a^3+2a^2}$ ańlatpanıń san mánisin $a = 0,5$ bolǵanda esaplań.

△ Berilgen ańlatpanı tómendegishe almastırıwǵa boladı:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a^2+4a+4)} + \frac{4}{a^2(a+2)} &= \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a+2)^2} + \frac{4}{a^2(a+2)} = \\ &= \frac{a^2 - 4 + 4(a+2)}{a^2(a+2)^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2(a+2)^2} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Demek, ańlatpanıń izlenip atırǵan san mánisi:

$$\frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = \frac{100}{25} = 4.$$

Shiniǵıwlar

Ámellerdi orınlań (**54 – 60**):

$$54. \quad 1) \frac{p}{q^2} + \frac{3p}{q^2}; \quad 2) \frac{8a}{b^3} - \frac{3a}{b^3}; \quad 3) \frac{a}{a+b} + \frac{c}{a+b}; \quad 4) \frac{x}{n+a} - \frac{y}{n+a}.$$

$$55. \quad 1) \frac{c+d}{2a} + \frac{2c-d}{2a}; \quad 2) \frac{a+2b}{3c^2} + \frac{5a-2b}{3c^2}; \quad 3) \frac{a+b}{2c} - \frac{a-b}{2c}; \\ 4) \frac{10a-b}{a^3} - \frac{3a-b}{a^3}; \quad 5) \frac{(1+b)^2}{5d} + \frac{(1-b)^2}{5d}; \quad 6) \frac{(2+a)^2}{a^2b} - \frac{(2-a)^2}{a^2b}.$$

$$56. \quad 1) \frac{2}{5} + \frac{3}{7}; \quad 3) \frac{2}{3a} + \frac{1}{a}; \quad 5) \frac{c}{15a} + \frac{d}{3}; \\ 2) \frac{4}{7} - \frac{5}{28}; \quad 4) \frac{1}{b} - \frac{2}{5b}; \quad 6) \frac{a}{4} - \frac{b}{12d}.$$

$$57. \quad 1) \frac{m}{2} - \frac{1}{n}; \quad 2) \frac{3}{a} + \frac{b}{5}; \quad 3) 5 - \frac{1}{a}; \quad 4) \frac{2}{b} + 7.$$

$$58. \quad 1) 5 - \frac{2}{b} + \frac{3}{b^2}; \quad 2) \frac{2}{c} + 4 - \frac{3}{c^2}; \\ 3) d - \frac{c}{d} + \frac{c^2}{d^2}; \quad 4) \frac{m}{n} - k + \frac{m^2}{n^2}.$$

$$59. \quad 1) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}; \quad 3) \frac{a}{bc} - \frac{a}{bd}; \quad 5) \frac{3}{m^2} + \frac{4}{mn}; \\ 2) \frac{1}{mn} - \frac{1}{mk}; \quad 4) \frac{b}{ac} + \frac{b}{cd}; \quad 6) \frac{2}{mn} - \frac{3}{n^3}.$$

$$60. \quad 1) \frac{3c}{4a^3b} + \frac{5d}{6ab^3}; \quad 3) \frac{2}{3y^3} - \frac{1}{6x^2y} + \frac{5}{12xy^2}; \quad 5) \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}; \\ 2) \frac{2a}{9b^4} - \frac{7c}{6a^3b}; \quad 4) \frac{5}{7x^2y} - \frac{3}{4xy^2} + \frac{11}{14x^2y^2}; \quad 6) \frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2};$$

Algebralıq bolsheklerdi qosıń hám alıń (61–72):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)} + \frac{x}{a-b}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)} - \frac{5x}{x-1}$;

62. 1) $\frac{5}{2x-2} + \frac{3}{4x-4}$;

2) $\frac{7}{5b+5} - \frac{3}{10b+10}$;

63. 1) $\frac{3}{a^2+a} + \frac{5a}{ab+b}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$;

64. 1) $\frac{3}{x+y} - \frac{5}{x}$;

2) $\frac{6}{a} - \frac{10}{a-1}$;

65. 1) $\frac{a}{1-b^2} + \frac{1}{1+b}$;

2) $\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3}$;

66. 1) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{16-x^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

67. 1) $\frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)}$;

4) $\frac{4y}{5(y-3)} - \frac{5x}{2(y-3)}$.

3) $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2a}{6a+6b}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y} - \frac{x}{8x+8y}$.

3) $\frac{y+a}{b^2+ba} + \frac{y-b}{ab+a^2}$;

4) $\frac{y-b}{a^2-ab} - \frac{y-a}{ab-b^2}$.

3) $\frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)}$;

4) $\frac{4}{5(a-b)} - \frac{7}{8(a+b)}$.

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36} - \frac{p}{6+p}$;

4) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{x^2-16}$.

3) $\frac{c^2-8}{2c+3} - \frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2} - \frac{y}{3y-1}$.

2) $\frac{a}{(3a+1)^2} + \frac{4}{3a+1}$.

$$68. \quad 1) \frac{2y+8}{y^2-4y+4} - \frac{7}{y-2};$$

$$2) \frac{4-5x}{1+6x+9x^2} - \frac{2}{3x+1};$$

$$3) \frac{7}{(a-b)^2} - \frac{5}{b-a};$$

$$69. \quad 1) a + \frac{a}{a-1};$$

$$3) c+1 - \frac{c^2}{c-1};$$

$$70. \quad 1) \frac{7}{a+b} + \frac{8}{a-b} - \frac{16b}{a^2-a^2};$$

$$2) \frac{6x}{x^2-y^2} - \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y};$$

$$71. \quad 1) \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-ab};$$

$$2) \frac{5b-1}{3b^2-3} + \frac{b+2}{2b+2} - \frac{b+1}{b-1};$$

$$3) \frac{6a}{9a^2-1} + \frac{3a+1}{3-9a} + \frac{3a-1}{6a+2};$$

$$72. \quad 1) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1};$$

$$2) \frac{a^2+4}{a^3+8} - \frac{1}{a+2};$$

$$4) \frac{4}{(m-n)^2} - \frac{7}{n-m};$$

$$5) \frac{2a}{25-10a+a^2} + \frac{10}{a^2-25};$$

$$6) \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{(x+3)^2}.$$

$$2) b - \frac{b}{b-2};$$

$$4) \frac{a^2}{a+1} - a + 1.$$

$$3) \frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a} - \frac{6}{a^2-9};$$

$$4) \frac{3}{4a^2-9} - \frac{8}{2a+3} - \frac{7}{3-2a}.$$

$$4) \frac{7}{m} - \frac{4}{m-2n} - \frac{m-n}{4n^2-m^2};$$

$$5) x - \frac{xy}{x+y} - \frac{x^3}{x^2-y^2};$$

$$6) a - 2 + \frac{4a}{2+a} - \frac{a^3+b}{a^2+2a}.$$

$$3) \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a+b};$$

$$4) \frac{m^2-3m+9}{m^3-27} - \frac{1}{m-3}.$$

73. Ańlatpanı ápiwayılastırıp, san mánisin tabiń:

$$1) \frac{8a^2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1}, \text{ bunda } a = 2;$$

$$2) \frac{3c^2-c+3}{c^3-1} - \frac{c-1}{c^2+c+1} + \frac{2}{1-c}, \text{ bunda } c = 1\frac{1}{2}.$$

5- §. ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLERDI KÓBEYTIW HÁM BÓLIW

Algebralıq bólsheklerdi kóbeytiw hám bóliw de ápiwayı bólsheklerdi kóbeytiw hám bóliw qaǵıydarları boyınsha orınlanaǵdı:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

1-másele. Bólsheklerdi kóbeytiń:

$$\frac{1}{2xy} \cdot \frac{4x^2y^3}{5z} \text{ hám } \frac{10z^2}{3x^3}.$$

$$\Delta \frac{1}{2xy} \cdot \frac{4x^2y^3}{5z} \cdot \frac{10z^2}{3x^3} = \frac{1 \cdot 4x^2y^3 \cdot 10z^2}{2xy \cdot 5z \cdot 3x^3} = \frac{4y^2z}{3x^2}. \blacktriangle$$

$$2- \frac{a-b}{a^2+ab} \text{ hám } \frac{b^2+ab}{(a-b)^2} \text{ bólsheklerdi kóbeytiń.}$$

Δ Kóbeytiwshilerge jiklep, tabamız:

$$\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{b^2+ab}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2} = \frac{b}{a(a-b)}. \blacktriangle$$

$$3- \frac{m+n}{9m^2n^3} \text{ hám } \frac{m^2-n^2}{27mn^2} \text{ bólsheklerdi bóliń.}$$

$$\Delta \frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2} = \frac{(m+n) \cdot 27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)} = \frac{(m+n)3}{mn(m-n)(m+n)} = \frac{3}{mn(m-n)}. \blacktriangle$$

Algebraqliq bólshekti dárejege kóteriwde usı $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ formuladan paydalaniwdı esletip ótemiz.

Máselen,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}; \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Bólsheklerdi kóbeytiń (**74–75**):

74. 1) $\frac{85}{24} \cdot \frac{72}{17};$ 2) $\frac{256}{169} \cdot \frac{13}{64};$ 3) $50 \cdot \frac{7}{625};$ 4) $\frac{5}{26} \cdot 39.$

75. 1) $\frac{a^3b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^4};$ 3) $\frac{6a}{5b} \cdot \frac{15c}{2d};$ 5) $\frac{2a}{3b} \cdot 3c;$

2) $\frac{m^2n^2}{k} \cdot \frac{k^3}{m^3n^3};$ 4) $\frac{4m}{9n} \cdot \frac{27k}{16d};$ 6) $14a^2 \cdot \frac{b^2}{7c^3}.$

76. Bólsheklerdi bóliń:

1) $\frac{3}{5} : \frac{3}{7};$ 3) $\frac{a}{8} : \frac{1}{3};$ 5) $\frac{2}{a} : \frac{6}{7};$

2) $\frac{11}{12} : \frac{2}{5};$ 4) $\frac{6}{c} : \frac{m}{13};$ 6) $\frac{9}{35} : \frac{b}{5}.$

77. Bólsheklerdi bóliń:

1) $\frac{8}{17} : \frac{8}{17};$ 3) $\frac{3a}{7b} : \frac{a}{b};$ 5) $\frac{2a}{3b} : \frac{a^2}{bc};$

2) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b};$ 4) $\frac{c}{2d} : \frac{4c^2}{5d};$ 6) $\frac{5m}{n^2} : \frac{10m^3}{n}.$

78. Bólsheklerdi bóliń:

1) $\frac{17}{12} : \frac{34}{39};$ 3) $\frac{4}{13} : 5;$ 5) $12 : \frac{8}{9};$

2) $\frac{54}{25} : \frac{81}{75};$ 4) $\frac{a}{b} : c;$ 6) $a : \frac{b}{c}.$

79. Bólsheklerdi bólin:

$$1) \frac{a^2 b}{c} : \frac{a^4}{c^2};$$

$$3) \frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d};$$

$$5) \frac{6a}{5b} : (5c);$$

$$2) \frac{mn}{k} : \frac{m^2 n^2}{k^3};$$

$$4) \frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d};$$

$$6) 12a^2 : \frac{4d}{5c^2}.$$

Berilgen ámellerdi orınlanań (**80–86**):

$$80. \quad 1) \left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3};$$

$$2) \left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4};$$

$$3) \frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2};$$

$$4) \frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b};$$

$$5) \left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd;$$

$$6) abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2.$$

$$81. \quad 1) \frac{8a^2 b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3 b};$$

$$3) \frac{16x^2 y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2};$$

$$5) \frac{18m^3 n^5}{7k} : (9n^2);$$

$$2) \frac{7b^4}{9c^5 y} : \frac{35b^4 c^2}{18c^4 y^2};$$

$$4) \frac{46d^3 c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3};$$

$$6) 24k^2 : \frac{12m^4 k^2}{11p^3 n}.$$

$$82. \quad 1) \frac{3x^2 y}{4a^2 b} \cdot 4a^2 b;$$

$$3) 15xy : \frac{30xy}{7a^2 b};$$

$$2) \frac{5a^2 b}{7xy^2} \cdot 14xy^2;$$

$$4) \frac{7x^2 y}{2a^2 b} : (14x^2 y).$$

$$83. \quad 1) \frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x};$$

$$3) \frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d};$$

$$5) \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b}{a};$$

$$2) \frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y};$$

$$4) \frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2};$$

$$6) \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b}{a}.$$

$$84. \quad 1) \frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2 - 1};$$

$$4) \frac{5m}{m^2 - n^2} : \frac{15m^3}{m-n};$$

$$2) \frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2};$$

$$5) \frac{3(x+y)}{4y^2(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2};$$

$$3) \frac{a^2 - b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b};$$

$$6) \frac{5(a-b)}{3(a^2 + b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2}.$$

85. 1) $\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} \cdot \frac{3a^2}{5b - 5a};$

2) $\frac{5x^2 - 5y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{3x^2}{10y - 10x};$

3) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a+5}{9-a^2};$

86. 1) $\frac{a-5}{a^2 + 6a + 9} \cdot \frac{(a+3)^2}{a^2 - 25};$

2) $\frac{b^2 - 8b + 16}{b + 3} : \frac{(b-4)^2}{b^2 - 9};$

4) $\frac{3n^2 - 3m^2}{n^2 + np} \cdot \frac{6m - 6n}{n + p};$

5) $\frac{a^2 + b^2}{x^3 + x^2 y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{a^4 - b^4};$

6) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - ab} : \frac{a^4 b - b^5}{a^2 b - ab^2}.$

3) $\frac{a^2 - 49}{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \frac{a+b}{a-7};$

4) $\frac{a^2 - 2a + 1}{2a + 1} : \frac{a-1}{4a^2 - 1}.$

6- § BÓLSHEK-RACIONAL AŃLATPALARDÍ ONLÍQ BÓLSHEKLERGE ALMASTÍRÍW



Arifmetikalıq esaplawlar belgileri menen birlestirilgen bir neshe algebralıq bólsheklerden düzilgen ańlatpa rational bólshek ańlatpası delinedi. Racional-bólshek ańlatpanıń bólimindegi kóp aǵzalı nolge teń bolmawı kerek

Racional-bólshek ańlatpanı algebralıq bólshekler boysınatúğın qaǵıydalardan paydalanıp ápiwayılastırıw, olardı onlıq bólsheklerge almastırıwǵa boladı.

1-másele. Racional-bólshek ańlatpanı ápiwayılastırıń:

$$R(x, y) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{6}{x} + \frac{6}{y} + \frac{12}{xy}} - \frac{xy}{2x + y + 1}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

△ Algebralıq bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw hám qosıw qaǵıydalaraına muwapıq:

$$R(x, y) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}} - \frac{\frac{xy}{6}}{\frac{2x+y+1}{xy}} =$$

Algebraqliq bolsheklerdi boliw qagyidası boyinsha:

$$= \frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)} - \frac{xy}{6(2x+y+1)} =$$

Nolden basqa ($x \neq 0$), soń qisqartamız hám qawsırmalardı ashamız:

$$= \frac{(x+1)y}{12x+6y+6} - \frac{xy}{12x+6y+6} =$$

Algebraqliq bolsheklerdi aliw qagyidası boyinsha:

$$= \frac{xy+y-xy}{12x+6y+6} =$$

Uqsas aǵzalılardı ıqshamlastırıramız hám bólümidegi ulıwma kóbeytiwshini qawsırmadan sırtqa shıgaramız:

$$= \frac{y}{12x+6y+6} = \frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Juwap: $R(x, y) = \frac{y}{6(2x+y+1)}$. 

2-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} \right) \cdot \frac{2a+2}{a+2}$.

 Qawsırma ishindegi ańlatpalardı ápiwayılastırıq:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} &= \frac{a+1}{2(a-1)} - \frac{1}{2(a^2-1)} = \frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)} = \\ &= \frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)} = \frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}. \end{aligned}$$

Kóbeytiwdi tabamız:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)} \cdot \frac{2a+2}{a+2} = \frac{a(a+2)2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)} = \frac{a}{a-1}. \quad \blacktriangle$$

3- m ásele. Kórsetilgen ámellerdi orınlamań:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right).$$

\blacktriangle Birinshi qawsırma ishindegi esaptı orınlaymız:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2 - b^2} = \\ &= \frac{2a \cdot 2b}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Ekinshi qawsırma ishndeji esaptı orınlaymız:

$$\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{a+b-a+b}{a-b} = \frac{2b}{a-b}.$$

Bólemiz:

$$\frac{4ab}{a^2 - b^2} : \frac{2b}{a-b} = \frac{4ab(a-b)}{(a^2 - b^2)2b} = \frac{2a}{a+b}. \quad \blacktriangle$$

4- m ásele. Házıw birinshi truba arqalı a saatta, ekinshisi arqalı b saatta toladı. Eger, bir waqitta eki truba ashıp qoyılsa, házıw neshe saatta toladı?

\blacktriangle Házıwdıń kólemi V dep alayıq. Bir saatta birinshi trubá $\frac{V}{a}$ gá teń kólemdi, ekinshisi $\frac{V}{b}$ gá teń kólemdi toltırıdı, eki truba bolsa bir saatta $\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$ gá teń kólemdi toltırıdı. Tawıw kerek bolǵan waqıt t bolsıń t saatta eki truba házıwdı tolıq toltırıwı kerek, yaǵníy

$$\left(\frac{V}{a} + \frac{V}{b} \right) t = V.$$

teńliktiń eki bólomin V ága bólip,

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) t = 1$$

di payda etemiz. Qawsırma ishinde turǵan bolsheklerdiń qosındısı $\frac{a+b}{ab}$ ága teń. Soniń ushın $\frac{a+b}{ab}t=1$, bunnan $t=\frac{ab}{a+b}$. 

Shiniǵıwlar

Berilgen ámellerdi orınlanań (**87–92**):

87. 1) $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3} \right) \cdot \frac{1}{a^2};$ 3) $\frac{a-b}{a+b} \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5} \right);$ 5) $1 : \left(1 + \frac{1}{a} \right);$

2) $\frac{a^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2} \right);$ 4) $\frac{ab}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right);$ 6) $b : \left(b + \frac{1}{b} \right).$

88. 1) $\left(1 + \frac{1}{a} \right) : \left(1 - \frac{1}{a} \right);$ 3) $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2 \right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right);$
 2) $\left(a + \frac{a}{b} \right) \left(a - \frac{a}{b} \right);$ 4) $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2 \right) \left(1 + \frac{m-n}{m+n} \right).$

89. 1) $\left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \left(2 + \frac{2b}{a-b} \right);$ 3) $\left(\frac{6}{a-b} - \frac{5}{a+b} \right) \cdot \frac{a-b}{a+11b};$
 2) $\left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right) \left(2 - \frac{2a}{a+b} \right);$ 4) $\left(\frac{3}{c} + \frac{3}{c+d} \right) \cdot \frac{c}{18(2c+d)}.$

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5};$ 3) $\frac{y-1}{y} : \left(\frac{y^2+1}{y^2+2y} - \frac{2}{y+2} \right);$
 2) $\left(\frac{z+6}{3z+9} - \frac{1}{z+3} \right) : \frac{z+2}{27z};$ 4) $\frac{m-2}{m-5} : \left(\frac{m^2+24}{m^2-25} - \frac{4}{m-5} \right).$

91. 1) $\frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right);$ 3) $\left(\frac{c+d}{c} - \frac{2c}{c-d} \right) \cdot \frac{d-c}{c^2 + d^2};$
 2) $\frac{ab - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right);$ 4) $\left(\frac{2c}{c+d} + \frac{d-c}{c} \right) \cdot \frac{c+d}{c^2 + d^2}.$

92. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-1} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2-4}{3};$
 2) $\left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab};$
 3) $\frac{a^2-c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ac+c^2} \cdot \left(a + \frac{ac}{a-c} \right);$
 4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right).$

93. Kólemi V bolǵan muz bóleginiń massası p kilogrammǵa teń. Kólemi V_1 bolǵan bólektiń massası neshege teń?

94. Avtomobil saatına v kilometr tezlik penen háreketlenip, s kilometr jol basıp ótti. Eger, motocikldi tezligi saatına u kilometr bolsa, usı waqt ishinde ol qansha jol basıp ótedi?

95. Motorlı qayıqtıń turǵan suwdaǵı tezligi saatına v kilometr, dárya aǵımınıń tezligi bolsa v_1 kilometr. Qayıq aǵım boyınsha háreketlenip, s kilometr ótti. Motorlı qayıq aǵımına qarsı waqt ishinde qansha aralıqtı basıp ótedi?

96. (*Abu Rayyan Beruniy máselesi.*) Eki buyımnan biriniń 10 i bir dinar (pul birligi) hám ekinshisiniń 15 i bir dinar. Bir dinarǵa eki buyımnan birdey muğdarda neshewden satıp alıwǵa boladı??

7- §. $y = \frac{k}{x}$ FUNKCIYÁ QÁSIYETLERİ, GRAFIGI

1 - m ásele. $y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń grafigin jasań.

Δ 1) anıqlaw tarawı – nolden basqa barlıq haqıyqıy sanlar;

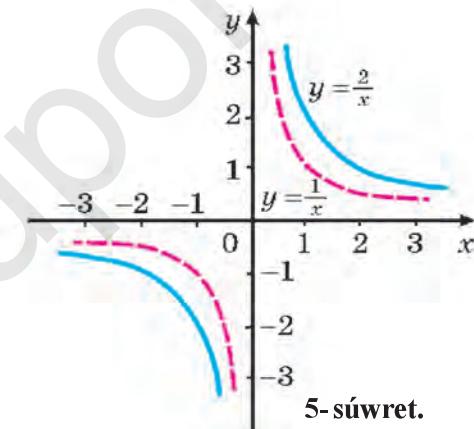
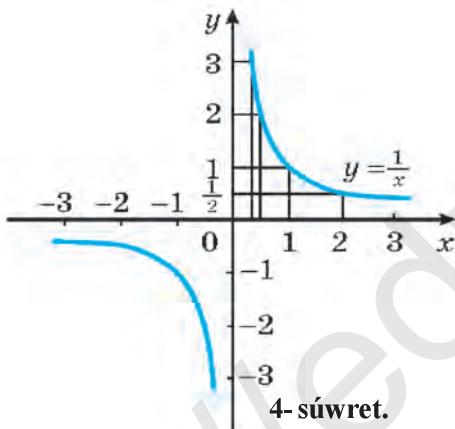
2) funkciya – taq, sebebi $x \neq 0$ bolǵanda $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x};$

3) funkciya $x > 0$ aralıqta keri kórsetkishli dáreje funkciyasınıń qásiyetine baylanışlı kemeyedi, sebebi $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

4) $x > 0$ bolǵanda funkciya oń mánilerdi qabil etedi;

5) grafikke tiyisli bir neshe, máselen, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ noqatların tawıp, $x > 0$ diń mánileri ushın grafikiń bir bólimin jasaymız hám soń simmetriya járdeminde $x < 0$ ushın qalǵan bólegen jasaymız (4-súwret). ▲

$y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń grafigi giperbola delinedi. Ol tarmaqlar dep atalıwshı eki bólimnen dúzilgen. Tarmaqlardan biri birinshi sherekte, ekinshisi úshinshi sherekte jaylasqan.



2 - m ásele. $k = 2$ hám $k = -2$ bolǵanda $y = \frac{k}{x}$ funkciyanıń grafigin soǵıń.

▲ Argumentiniń tap birdey mánilerinde $y = \frac{2}{x}$ funkciyanıń mánleri $y = \frac{1}{x}$ funkciya mánilerin 2 ge kóbeytiw menen payda etiliwin eskertemiz. Bul $y = \frac{2}{x}$ funkciyanıń grafigin $y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń grafigin abscissalar kósherinen ordinatalar kósheri boylap eki ese sozıw menen payda etiledi (5-súwret).

$y = -\frac{2}{x}$ funkciyanıń mánileri $y = \frac{2}{x}$ funkciya mánilerinen tek kórsetkishi menen ǵana ayırılıp turadı. Demek, $y = -\frac{2}{x}$ funkciyanıń grafigi $y = \frac{2}{x}$ funkciya grafigine abscissalar kósherine qaraǵanda simmetriyalı (6-súwret). ▲

Qálegen $k \neq 0$ de $y = \frac{k}{x}$ funkciyanıń grafigi de giperbola delinedi. Giperbola eki tarmaqqqa iye. Olar eger $k > 0$ bolsa, birinshi hám úshinshi shereklerde, eger $k < 0$ bolsa úshinshi hám tórtinshi shereklerde jatadı.

! $y = \frac{k}{x}$ (bunda $k > 0$) funkciya $y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń barlıq qásiyetlerine iye, sebebi, bul funkciya:

- 1) $x \neq 0$ bolǵanda aniqlanǵan;
- 2) Nolden basqa barlıq haqiqiy mánilerdi qabil etedi;
- 3) taq;
- 4) $x > 0$ bolǵanda oń mánilerdi hám $x < 0$ bolǵanda teris mánilerdi qabil etedi;
- 5) $x < 0$ va $x > 0$ oraliqlarda kemeyedi.

Eger $k < 0$ bolsa, onda $y = \frac{k}{x}$ funkciya 1 -3 – qásiyetlerge iye boladı; 4-5-qásiyetler bulayınsha beriledi:

- 4') $x < 0$ bolǵanda oń mánilerdi hám $x > 0$ bolǵanda teris mánilerdi qabil etedi;
- 5') $x < 0$ hám $x > 0$ aralıqta ósedi.

$y = \frac{k}{x}$ funkciya $k > 0$ bolǵanda x hám y arasındaǵı keri proporsional baylanısti bildiredi, delinedi. Muǵdarlar arasındaǵı bunday baylanıslar kóbinshe fizika, texnika hám basqa tarawlarda ushıraydı.

Máselen, v ózgermeytuǵın tezlik penen sheńber boylap tegis háreketlenip atırǵan dene $a = \frac{v^2}{r}$ ge teń (bul jerde r – sheńber radiusı) orayǵa umıtılıwshı tezlik penen háreketlenedi, yaǵníy bunda tezleniw sheńber radiusına keri proporsional.

3 - m ásele. Ay Jerden $3,84 \cdot 10^8$ m aralıqtá. Ay 27,3 sutka dawamında Jer átiprapın bir ret aylanıp shıǵadı. Aydín orayǵa umitılıwshı tezligin esaplań.

△ a tezlikti $a = \frac{v^2}{r}$ formula menen esaplaymız, bunda $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$ s, $r = 3,84 \cdot 10^8$.

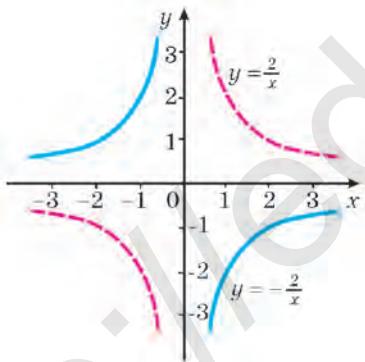
Onda:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3}.$$

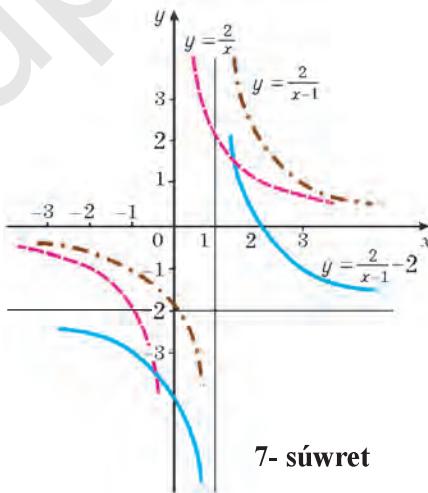
Juwapi: $2,72 \cdot 10^{-3}$ m/s². ▲

4 - m ásele. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funkciya grafigin jasań.

△ $y = \frac{2}{x}$ funkciya grafigin (6-súwret) Ox kósher boylap onǵa bir birlilik hám Ay kósheri boylap eki birlik páske túsiriw menen $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funkciyanıń grafigin payda etiwge boladı (7-súwret). ▲



6--súwret



7- súwret

Shiniǵıwlar

97. $y = \frac{2}{x}$ funkciya grafigin jasań. x tiń qanday mánilerinde:

- 1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$
bolıwın anıqlań.

- 98.** Bir koordinata tegisliginde $y = \frac{1}{x}$ hám $y = x$ funkciyalar grafiklerin jasań. x tiń qanday mánilerinde
- 1) bul funkciyalardıń grafikleri kesiwiń anıqlań;
 - 2) birinshi funkciyanıń grafigi ekinshi funkciya grafiginen joqarida (tómente) jatiwin anıqlań.
- 99.** Funkciyalardıń grafiklerin jasamastan, olardıń kesiwiń noqatların tabıń:
- 1) $y = \frac{12}{x}, y = 3x$;
 - 2) $y = -\frac{8}{x}, y = -2x$;
 - 3) $y = \frac{2}{x}, y = x - 1$;
 - 4) $y = \frac{6}{x+1}, y = x + 2$.
- 100.** Funkciyalardıń grafiklerin jasap, olardıń kesiwiń noqatların tabıń:
- 1) $y = \frac{3}{x}, y = x + 1$;
 - 2) $y = -\frac{3}{x}, y = 1 - x$;
 - 3) $y = \frac{2}{x}, y = x^2 + 2$;
 - 4) $y = \frac{1}{x}, y = x^2 + 4x$.
- 101.** Cilindrde porshen astında gaz turaqlı temperaturada tur. Gazdiń V (litrlerde) kólemi p (atmosfera) basımda $V = \frac{12}{p}$ formula boyınsha esaplanadı.
- 1) basım 4 atm; 5 atm; 10 atm bolǵanda gazdiń iyelegen kólemin tabıń;
 - 2) qanday basımda gaz 3 l; 5 l; 15 l kólemdi iyelewin esaplań; 3) gazdiń kólemi onıń basımına baylanıslı grafigin jasań.
- 102.** Reostattaǵı I tok kúshi (amperlerde) $I = \frac{U}{R}$ formula menen ólshenedi, bunda U – kúshleniw (voltlarda), R – qarsılıq (omlarda).
- 1) $U = 6$ bolǵanda $I(R)$ baylanıstiń grafigin jasań.
 - 2) Grafik boyınsha juwıq mánisin tawıń: a) R qarsılıq 6, 12, 20 Ω bolǵanda tok kúshin; b) tok kúshi 10, 5, 1,2 A bolǵanda reostattıń qarsılığıń
- 103.** Avtomobil joldıń radiusı 150 m bolǵan aylanba bólegi boyınsha 60 km/saat tezlik penen háreket etpekte. Avtombildiń orayǵa umtılıwshi tezligin tabıń. Eger, avtombildiń tezligi aldingisinda qalıp, joldıń

aylanba bólegi radiusı artsa, orayǵa umtılıwshı tezligi arta ma yaki kemeye me?

104. Funkciyanıň grafigin jasań:

$$1) \ y = \frac{3}{x} - 2; \quad 2) \ y = \frac{2}{x} + 1; \quad 3) \ y = \frac{2}{x+2} - 1; \quad 4) \ y = \frac{3}{1-x} + 1.$$

8-§. NATURAL KÓRSETKISHLI DÁREJENIŇ ARIFMETIKALÍQ KORENI HÁM ONÍŇ QÁGÝYDALARÍ

Orta Aziyalı belgili matematik hám astronom **Jamshid ibn Masud ibn Mahmud Ğiyosiddin al-Koshiy** (shama menen 1430-jılı álemenen ótken) sanlardan qálegen n-dárejeli koren shıgariw esabın oylap taptı. Onıń “Arifmetika gilti” atlı shıgarmasınıń 5-babında bul haqqında pikir júritiledi.

Tómendegi máseleni qarayıq.

1 - m ásele. Teńlemeni sheshiń: $x^4 = 81$.

△ Teńlemeni $x^4 - 81 = 0$ yaki $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$ kórinisinde jazıp alamız. $x^2 + 9 \neq 0$ bolǵanı ushın $x^2 - 9 = 0$ boladı, bunnan

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3. \quad \blacktriangle$$

Solay etip, $x^4 = 81$ teńleme eki haqıqıy korenge iye: $x_1 = 3, x_2 = -3$. Olar 81 sanınıń 4-dárejeli korenleri, ón koren (3 sanı) 81 sanınıń 4-dárejeli korenleri delinedi hám bılayınsha jazıldı: $\sqrt[4]{81}$. Yaǵníy, $\sqrt[4]{81} = 3$.

$x^n = a$.teńleme (bunda n – natural san, a – teris emes san) jalǵız teris emes korenge iye ekenligin dálillewge boladı. Bul koren a sanınıń n -dárejeli arifmetikalıq koreni dep ataladı.



Anıqlama: *a teris emes sannıń $n \geq 2$ natural kórsetkishli arifmetikalıq koreni dep, n-dárejesi a ga teń bolǵan teris emes sanına aytıladı.*

a sanınıń n-dárejeli arifmetikalıq koreni bılay jazıldı: $\sqrt[n]{a}$. a san koren astındaǵı kórsetpe delinedi. Eger n = 2 bolsa, onda $\sqrt[2]{a}$ ornına \sqrt{a} jazıldı.

Ekinshi dárejeli arifmetikalıq koren *kvadrat koren* dep, 3-dárejeli koren bolsa *kub koren* delinedi.

n -dárejeli koren haqqında aytılǵanda, qısqasha “ n – dárejeli koren” delinedi.



Anıqlamadan paydalanyip, $\sqrt[n]{a}$ niń b ǵa teń ekenin dálillew ushin:

1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ ekenin kórsetiw kerek.

Máselen, $\sqrt[3]{64} = 4$, sebebi, $4 > 0$ hám $4^3 = 64$.



Arifmetikalıq korenniń anıqlamasınan, eger $a \geq 0$ bolsa, onda

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

boliwi kelip shıǵadı.

Máselen, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

n – dárejeli korendi tabıw n – dárejeli koren shıǵarıw ámeli delinedi. Ol n – dárejeli kóteriw ámeline keri ámel bolıp esaplanadı.

2-másele. $x^3 = -8$ teńlemeni sheshiń.

△ Bul teńlemeni $-x^3 = 8$ yaki $(-x)^3 = 8$ etip jazıwǵa boladı. $-x = y$ dep belgileymiz, onda $y^3 = 8$ boladı.

Bul teńleme bir korenge iye $y = \sqrt[3]{8} = 2$. $y^3 = 8$ teńleme teris korenge iye emes, sebebi $y < 0$ bolǵanda $y^3 < 0$ boladı. $y = 0$ sanı da bul teńlemeniń koreni bola almaydı.

Solay etip, $y^3 = 8$ teńleme tek bir $y = 2$ korenge iye, demek, $x^3 = -8$ teńleme de tek bir korenge iye: $x = -y = -2$.

Javobi: $x = -2$. ▲

$x^3 = -8$ teńlemeniń sheshimin qısqasha bılayınsa jazıwǵa boladı:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$



Ulıwma, qálegen taq $2k+1$ natural san ushın $a < 0$ bolǵanda $x^{2k+1} = a$ teńleme tek bir teris korenge iye. Bul koren tap arifmetikalıq koren siyaqlı bılay jazılıdı: $\sqrt[2k+1]{a}$. Ol teris sannıń taq dárejeli korenı delinedi.

Máselen, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

a teris sanınıń taq dárejeli korení menen $-a = |a|$ sanınıń arifmetikalıq korení arasında usı teńlik bar:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Máselen, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Shiniǵıwlar

105. (Awızshá) 1) sannıń arifmetikalıq kvadrat korenin tabıń:

$$1; \quad 0; \quad 16; \quad 0,81; \quad 169; \quad \frac{16}{121}; \quad \frac{49}{144}.$$

2) Sanniń arifmetikalıq kub korenin tabıń:

$$1; \quad 0; \quad 5; \quad \frac{1}{27}; \quad 0,027; \quad 0,064; \quad 0,729; \quad \frac{1}{343}.$$

3) Sanniń tórtinshi dárejeli arifmetikalıq korenin tabıń:

$$0; \quad 1; \quad 16; \quad \frac{16}{81}; \quad \frac{256}{625}; \quad 0,0016; \quad \frac{625}{1296}.$$

Esaplań (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2 \cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;
4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. Teńlemeni sheshiń:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

110. x tiń qanday mánilerinde anılatpa mánige iye boladı:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Esaplań (111–112):

111. 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64};$

2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216};$

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625};$

4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256};$

5) $\sqrt[4]{0,0001} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}};$

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}.$

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}};$

2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2;$

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}})^2;$

4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

113. 1) a) $x \geq 2$; b) $x < 2$ bolǵanda $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ ti ápiwayılastırıń;

2) a) $x \leq 3$; b) $x > 3$ bolǵanda $\sqrt{(3-x)^6}$ ni ápiwayılastırıń.

114. $1987 < \sqrt{n} < 1988$ bolatuǵın neshe natural san n bar?

9- §. RACIONAL KÓRSETKISHLI DÁREJE HÁM ONÍN QÁGÝYDALARÍ

1-másele. Esaplań: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

Δ $5^{12} = (5^3)^4$ bolǵanı ushın $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ▲

Solay etip, $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$.

Sóǵan uqsas, $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$ ekenligin kórsetiwge boladı.



Eger n – natural san, $n \geq 2$, m – pútin san hám $\frac{m}{n}$ pútin san bolsa, onda $a > 0$ bolǵanda tómendegi teńlik durıs boladı:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

(1)

○ Shártı boyınsha $\frac{m}{n}$ – pútin san, yaǵníy n ni n ǵa bóliwde k pútin san payda boladı. Bunda $\frac{m}{n} = k$ teńlikten $m = kn$ kelip shıǵadı. Dárejeniń hám arifmetikalıq korenniń qaǵıyldalarınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$



Eger de $\frac{m}{n}$ pútin san bolmasa, onda $a^{\frac{m}{n}}$ (bunda $a > 0$) dáreje (1) formula durıslıǵın saqlap qalatuǵın etip anıqlanadı, yaǵníy bunda

dep esaplanadı.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (2)$$

Solay etip, (2) formula qálegen pútin m hám qálegen natural $n \geq 2$ hám $a > 0$ san ushın durıs boladı. Máselen,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8; \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

r racional san – bul $\frac{m}{n}$ kórinisindegi san ekenligin, bunda m – pútin san, n – natural san, yaǵníy $r = \frac{m}{n}$ bolıwın esletip ótemiz. Bunda (2) formula boyınsha $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ni mísal etemiz. Solay etip, dáreje qálegen racional kórsetkish hám óń tiykar ushın anıqlanadı. Eger, $r = \frac{m}{n} > 0$ bolsa, onda $\sqrt[n]{a^m}$ ańlatpa tek ǵana $a > 0$ bolǵanda emes, bálkim $a = 0$ bolǵanda da mánige iye boladı. $a = 0$ bolsa, $\sqrt[0]{0^m} = 0$. Sonıń ushın $r > 0$ bolǵanda $0^r = 0$ teńlik orınlı dep esaplanadı.

(1) hám (2) formulalardan paydalanıp, racional kórsetkishli dárejeni koren túrinde hám kerisinshe súwretlewge de boladı.



(2) formula hám korenniń qágiydarınan

$$\frac{\frac{m}{n}}{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$$

teńlik kelip shígıwin tastiyıqlaymız, bunda $a > 0$, m – pútin san hám n , k – natural sanlar.

Máselen, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.



Natural kórsetkishli dárejeniń barlıq qágiydaları qálegen racional kórsetkishli hám oń tiykarlı dárejeler ushin durıs boliwin kórsetiwge boladı. Sebebi, qálegen racional p hám q sanlar hám qálegen $a > 0$ hám $b > 0$ ushin tómendegi teńlikler durıs boladı:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q};$ | 4) $(ab)^p = a^p b^p;$ |
| 2) $a^p : a^q = a^{p-q};$ | 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$ |
| 3) $(a^p)^q = a^{pq};$ | |

Bul qágiydarar korenniń qásiyetlerinen kelip shígadı. Máselen, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ qágiydanı dálilleyik.

○ Aytayıq, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (bunda n hám l – natural sanlar, m hám k – pútin sanlar) bolsın.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} \quad (3)$$

ekenligin dálillew kerek.

$\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ bólsheklerdi ulıwma bólimge keltirip, (3) teńliktiń shep bólegin

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}$$

kórinisinde jazamız.

Racional kórsetkishli dárejeniń anıqlamasınan, korenniń hám pútin kórsetkishli dárejeniń qaǵıydarınan paydalanıp, tómendegini payda etemiz::

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} &= a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \\ &= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \end{aligned}$$

Racional kórsetkishli dárejeniń qalǵan qásiyetleri de usıǵan uqsas túrde dálillenedi.

Dárejeniń qásiyetlerin qollanıwǵa mísal keltiremiz.

$$1) \quad 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7; \quad 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5;$$

$$2) \quad 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3; \quad 8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3} - 1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$$

$$3) \quad \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$$

$$4) \quad 24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$$

$$5) \quad \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}; \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

2- m ásele. Esaplań: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\Delta \quad 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \quad \blacktriangle$$

3- m ásele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\Delta \quad \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \quad \blacktriangle$$

4- m ásele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{7}{a^3}}{\frac{1}{a^3} - \frac{4}{a^3}} - \frac{\frac{-1}{a^3} - \frac{5}{a^3}}{\frac{2}{a^3} + \frac{-1}{a^3}}$.

$$\Delta \quad \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{7}{a^3}}{\frac{1}{a^3} - \frac{4}{a^3}} - \frac{\frac{-1}{a^3} - \frac{5}{a^3}}{\frac{2}{a^3} + \frac{-1}{a^3}} = \frac{\frac{1}{a^3}(1-a^2)}{\frac{1}{a^3}(1-a)} - \frac{\frac{-1}{a^3}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)} = \\ = 1 + a - (1 - a) = 2a. \quad \blacktriangle$$

$3^{\sqrt{2}}$ mísalında *irracional kórsetkishli dárejeni* qalay kirgiziw múmkinligin kórsetemiz. $\sqrt{2}$ niń juwıq mánilerin 0,1; 0,01; 0,001 ...ge shekem anıqlıq penen izbe-iz jazıp shıǵamız. Onda tómendegi izbe-izlik payda boladı

$$1,4; \quad 1,41; \quad 1,414; \quad 1,4142; \quad \dots$$

3 sanınıń dáreje kórsetkishleri izbe-izligin usı *racional kórsetkishler* menen jazıp shıǵamız:

$$3^{1,4}, \quad 3^{1,41}, \quad 3^{1,414}, \quad 3^{1,4142}, \quad \dots$$

Bul dárejeler $3^{\sqrt{2}}$ sıyaqlı belgilengen haqıqıy sannıń izbe-iz juwıq mánileri ekenin kórsetiw múmkin:

$$3^{1,4} = \underline{4, \quad 6555355},$$

$$3^{1,41} = \underline{4,7069644},$$

$$3^{1,414} = \underline{4,7276942},$$

$$3^{1,442} = \underline{4,7287329},$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx \underline{4,7288033}.$$

Oń a tiykarlı hám qálegen irracionál kórsetkishli a^b dáreje usıǵan uqsas anıqlanadı. Solay etip, endi oń tiykarlı dáreje qálegen haqıqıy kórsetkish ushın anıqlanadı. Haqıqıy kórsetkishli dárejeniń qaǵıydaları *racional kórsetkishli* dárejeniń qaǵıydaları sıyaqlı anıqlanadı.

Shiniǵıwlar

115. (Awızeki). Racional kórsetkishli dáreje túrinde anıqlań:

$$1) \sqrt{x^3}; \quad 2) \sqrt[3]{a^4}; \quad 3) \sqrt[4]{b^3}; \quad 4) \sqrt[5]{x^{-1}}; \quad 5) \sqrt[6]{a}; \quad 6) \sqrt[7]{b^{-3}}.$$

116. (Awızeki). Pútin kórsetkishli dáreje koreni túrinde anıqlań::

$$1) x^{\frac{1}{4}}; \quad 2) y^{\frac{2}{5}}; \quad 3) a^{-\frac{5}{6}}; \quad 4) b^{-\frac{1}{3}}; \quad 5) (2x)^{\frac{1}{2}}; \quad 6) (3b)^{-\frac{2}{3}}.$$

Esaplań (**117–120**):

$$\textbf{117.} \quad 1) 64^{\frac{1}{2}}; \quad 2) 27^{\frac{1}{3}}; \quad 3) 8^{\frac{2}{3}};$$

$$4) 81^{\frac{3}{4}}; \quad 5) 16^{-0,75}; \quad 6) 9^{-1,5}.$$

$$\textbf{118.} \quad 1) 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}; \quad 2) 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}; \quad 3) 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}; \quad 4) 4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}.$$

$$5) (7^{-3})^{-\frac{2}{3}}; \quad 6) \left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}; \quad 7) 8^{\frac{4}{5}} : 8^{\frac{7}{15}}; \quad 8) (5^{-4})^{-\frac{3}{4}}.$$

$$\textbf{119.} \quad 1) 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}; \quad 2) 7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}; \quad 3) 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}; \quad 4) 150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}.$$

$$\textbf{120.} \quad 1) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}; \quad 2) (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}};$$

$$3) 8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}; \quad 4) \left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}.$$

121. Esaplań:

$$1) a=0,09 \text{ bolǵanda } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} \text{ nıń mánisin};$$

$$2) b=27 \text{ bolǵanda } \sqrt{b} : \sqrt[3]{b} \text{ nıń mánisin};$$

$$3) b=1,3 \text{ bolǵanda } \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} \text{ nıń mánisin};$$

$$4) a=2,7 \text{ bolǵanda } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} \text{ nıń mánisin}..$$

122. Racional kórsetkishli dáreje túrinde anıqlań:

$$1) \ a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a};$$

$$2) \ b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b};$$

$$3) \ \sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}};$$

$$4) \ a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a};$$

$$5) \ x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5};$$

$$6) \ y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}.$$

Anıqlamani ápiwayılastırıń (**123–124**):

$$123. 1) \ (a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6};$$

$$2) \ \left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}};$$

$$3) \ (a^{-7})^{-\frac{5}{7}} \cdot \left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-4}.$$

$$124. 1) \ \frac{\frac{4}{3}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{\frac{1}{4}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})};$$

$$2) \ \frac{\frac{1}{5}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})};$$

$$3) \ \frac{\frac{5}{3}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}};$$

$$4) \ \frac{\frac{1}{3}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}};$$

$$5) \ \frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}})}{a^{\frac{2}{5}}(a^{\frac{8}{5}} - a^{-\frac{2}{5}})};$$

$$6) \ \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}.$$

125. Esaplań:

$$1) \ \left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}; \quad 2) \ \left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \sqrt[4]{1000}.$$

126. Anıqlamani ápiwayılastırıń:

$$1) \ a^{\frac{1}{9}} \sqrt[6]{a\sqrt{a}}; \quad 2) \ b^{\frac{1}{12}} \sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}; \quad 3) \ (\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}}) \sqrt[6]{ab^4};$$

$$4) \ (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}); \quad 5) \ \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}; \quad 6) \ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}};$$

$$7) \ \frac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}; \quad 8) \ \frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}; \quad 9) \ (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}).$$

Anıqlamani ápiwayılastırıń (**127–129**):

$$127. 1) \ \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2;$$

$$2) \ \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right);$$

$$3) \frac{\frac{1}{a^4} - \frac{9}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{5}{a^4}} - \frac{\frac{-1}{b^2} - \frac{3}{b^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2}};$$

$$4) \frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}.$$

$$128. 1) \frac{\frac{3}{a^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\frac{1}{ab^2}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{\frac{2a^2 - 4ab}{a-b}}{a-b};$$

$$2) \frac{\frac{3xy - y^2}{x-y}}{\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}} - \frac{\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \frac{\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}};$$

$$4) \frac{\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}}{\frac{a-b}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}}.$$

$$129. 1) \frac{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}}{\frac{a+b}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}}};$$

$$2) \frac{\frac{a+b}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}}}{\frac{a-b}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}}};$$

$$3) \frac{\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a-b}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}};$$

$$4) \frac{\frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a+b}}{\frac{1}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}}}.$$

10- §. RACIONAL KÓRSETKISHLI DÁREJE QATNASQAN ALGEBRALÍQ AÑLATPALARDÍ ÁPIWAYÍLASTÍRÍN

Bul temaǵa tiyisli esaplardı orınlawda algebralıq bólshekler hám olar ústinde esaplar, qısqa kóbeytiw formulaları hám rational kórsetkishli dárejeniń qagyidalarınan paydalanyladi.

1-m ásele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

$$\left[\frac{\frac{1}{(x^4+y^4)^2} + \frac{1}{(x^4-y^4)^2}}{\frac{1}{x+(xy)^2}} \right]^5 \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

△ 1) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x};$

2) kvadrat qawsırmalar ishindegi ańlatpanıń alımın kvadratqa kóteremiz hám $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ekeninen paydalananız:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

3) usı ańlatpanıń bólímine \sqrt{x} qawsırmadan sırtqa shıǵaramız:

$$x + \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

$$4) \text{ Ondá } \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$5) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^5 \cdot x^3 \sqrt{x} = \frac{32}{x^2 \sqrt{x}} \cdot x^3 \sqrt{x} = 32 \cdot x$$

Juwabi: $32 \cdot x$. 

2-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń $x = 0,16$, $y = 25$ bolǵan-daǵı san mánisın tabıńı:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}} \right)^{-2} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$\Delta 1) \frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = -\sqrt[4]{xy};$$

$$2) -\sqrt[4]{xy} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{-\sqrt{xy} + 1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}};$$

$$3) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}} \right)^{-2} = \sqrt{xy};$$

$$4) \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$5) \sqrt{xy} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \sqrt{xy} + y.$$

Eger $x = 0,16$ hám $y = 25$ bolsa, $\sqrt{0,16 \cdot 25} + 25 = \sqrt{4} + 25 = 27$.

Juwabi: $\sqrt{xy} + y$; 27. 

3-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń $a = 25$, $b = 0,6561$ bolǵan-dağı san mánisin tabıń:

$$\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2 + \left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{a-\sqrt{ab}} : \frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

- △ 1) 1-bólshektiń kvadratına kóteremiz, bólminde \sqrt{a} di qawsır madan sırtqa shıǵaramız. Ápiwayılastırılgannan soń 1-bólshek $\frac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ ge teń boladı;
- 2) 2-bólshektiń alımı qısqa kóbeytiw formulalarınan paydalanıp qawsırmalardı ashqannan keyin $\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$ ańlatpa payda boladı;
- 3) bólmine bolsa $\sqrt[4]{b}$ qawsırmadan sırtqa shıǵarılań hám $(x^3 - y^3)$ nıń jayılmasınan paydalanılań. 2-bólshek sonda $\frac{1}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ ga teń boladı;
- 4) nátiyjede, 1-bólshekti 2-bólshekke bólıw $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ ańlatpaǵa teń boladı.

$a = 25$, $b = 0,6561$ bolsa, bul ańlatpa $\frac{2\cdot\sqrt[4]{0,6561}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \cdot 0,9 = 0,36$ ga teń.

Juwabi: $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Shiniǵıwlar

Ańlatpanı ápiwayılastırıń (**130–146**):

130. $\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} + 5\frac{1}{b^2} \right) - \left(\frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{b^2} \right) \right] : \left(2a + 3\frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2} \right).$

131. $\left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - \frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3 - a\sqrt{a}+2} \right]^{-3}.$

$$132. \left[\frac{\frac{4a-9a^{-1}}{1} + \frac{a-4+3a^{-1}}{a^2-a}}{\frac{1}{2a^2-3a} - \frac{1}{2}} \right]^2.$$

$$133. \left[(a-b) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a-b \right] \left[(a-b) \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1 \right) \right].$$

$$134. \left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$135. \left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$136. \left[\frac{1}{\frac{1}{x^2-4x} - \frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}} \right]^{-2} - \sqrt{x^2+8x+16}.$$

$$137. \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{a}{x}}}.$$

$$138. \frac{(a-b^2)\sqrt{3} - b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2} + (2b\sqrt{2a})^2} \cdot \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$$

$$139. \left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a} \right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a} \right)^{-1} \right]^{-2} : \frac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$$

$$140. \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

$$141. \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b} \right)^3 + 2a^2 : \sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

$$142. \left(\frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{a^2 + b^2} \right)^{-2}} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\frac{3}{a^2} - \frac{3}{b^2}} \right)^{-1} \right) (ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$143. \left[\left(\frac{a^2 - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} + a\sqrt[3]{b} \right) : \left(a + \sqrt[6]{a^3 b^2} \right) - \sqrt[3]{b} \right]^2.$$

$$144. \left[\frac{a^2 \sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - \sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}} \right]^4.$$

$$145. \left[\frac{x\sqrt{x} - x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} - \sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt[4]{x} + 1} - \sqrt{x} \right)} \right]^3.$$

$$146. \frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{ax^2} - \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x}.$$

I bapqa tiyisli shiniǵıwlar

Bolsheklerdi ulıwma bólime keltiriń:

$$147. \text{ 1) } \frac{5a}{a^3 - 27}, \frac{a-3}{a^2 + 3a + 9} \text{ va } \frac{1}{a-3}; \quad \text{ 2) } \frac{3}{x+2}, \frac{x+1}{x^3 + 8} \text{ va } \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}.$$

Ámellerdi orınlań (148–149):

$$148. \text{ 1) } \frac{a+3}{5} + \frac{7+a}{10} + \frac{a-3}{2};$$

$$3) \frac{a-2}{45} - \frac{a+5}{15} - \frac{a-9}{9};$$

$$2) \frac{b-7}{4} + \frac{5b-2}{3} + \frac{3b-1}{8};$$

$$4) \frac{b}{12} - \frac{3b+1}{9} - \frac{2b-1}{4}.$$

149. 1) $\frac{y}{n-2} + \frac{z}{2-n};$

2) $\frac{p+2q}{3p-q} - \frac{5q-2p}{q-3p};$

3) $\frac{2m}{3-5n} - 1 + \frac{7n-4}{5n-3};$

4) $4 - \frac{3a}{5-2b} + \frac{5(a-10)}{2b-5}.$

Berilgen esaplardı orınlanań (**150–152**):

150. 1) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} : \frac{8a - 8b}{a^3 + b^3};$

2) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} : \frac{a^3 - b^3}{7a + 7b}.$

151. 1) $\frac{64x^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x-2)^2}{8x+1};$

2) $\frac{x-6}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)(x-2)} \cdot \frac{x^3 - 9x}{(x-6)(x+2)};$

3) $\frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 + 2amn + an^2}{3m + 3n};$

4) $\frac{ab - 4b - 2a + 8}{2a + 8 - ab - 4b} : \frac{2a - 8 - ab + 4b}{ab + 4b - 2a - 8}.$

152. 1) $(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 1 \right);$

3) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right);$

2) $\left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a+1} \right) (1 - a^2);$

4) $\left(\frac{2-a}{2+a} - \frac{a+2}{a-2} \right) : \left(\frac{2+a}{2-a} + \frac{a-2}{a+2} \right).$

Esaplań (**153–154**):

153. 1) $(0,175)^0 + (0,36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}};$

2) $1^{-0,43} - (0,008)^{\frac{1}{3}} + (15,1)^0;$

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0;$

4) $(0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - (1,85)^0.$

154. 1) $9,3 \cdot 10^{-6} : (3,1 \cdot 10^{-5});$

2) $1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7;$

3) $8,1 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{-14};$

4) $6,4 \cdot 10^5 : (1,6 \cdot 10^7);$

5) $2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1};$

6) $3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}.$

155. Ańlatpanıń mánisin tabiń::

1) $\left(\frac{\frac{1}{x^2} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2},$ bunda $x = \frac{7}{9};$

2) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3},$ bunda $a = 0,1.$

156. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $(\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x});$ 3) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \frac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}};$

2) $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x});$ 4) $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) : (\sqrt{x^2-y^2} - x).$

157. Esaplań:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 10000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}};$ 2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}};$

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}};$ 4) $(-0,5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$

158. x tiń qanday mánilerinde ańlatpa mánige iye boladı:

1) $\sqrt[4]{x^2 - 4};$ 2) $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 6};$ 3) $\sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}};$

4) $\sqrt[4]{x^2 - 5x + 6};$ 5) $\sqrt[8]{x^3 - x};$ 6) $\sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}?$

159. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\frac{\frac{1}{a^4} - a^{-\frac{7}{4}}}{\frac{1}{a^4} - a^{-\frac{3}{4}}};$

2) $\frac{\frac{4}{a^3} - a^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^3} - a^{-\frac{2}{3}}};$

3) $\frac{\frac{5}{b^4} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{\frac{3}{b^4} - b^{-\frac{1}{4}}};$

4) $\frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2} - a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}};$

5) $\frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}};$

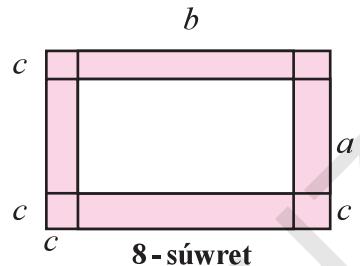
6) $\frac{\frac{3}{a^4b^{-\frac{1}{4}}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{a^4b^{-\frac{1}{4}}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}.$

160. 1) Berilgen ólshemler boyinsha boyalǵan bólektiń maydanın esaplaw formulasıń shıǵarıń (8-súwret);

$$2bc + 2c(a - 2c) = 2ac + 2c(b - 2c)$$

teńliktiń durıslıǵıń forma járdeminde kórsetiń;

3) shtrixlangan betti eki tuwrı tórt mýyeshlik betleriniń alıwı sıpatında sıpatlań. Bunnan paydalanıp, $ab - (b - 2c)(a - 2c) = 2ac + 2c \cdot (b - 2c)$ teńlikti dálilleń.



8 - súwret

161. Teńliklerdiń durıslıǵıń tekseriń, olarǵa geometriyalıq sıpatlama beriń. Sáykes figuralar siziniń:

$$1) (a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd ;$$

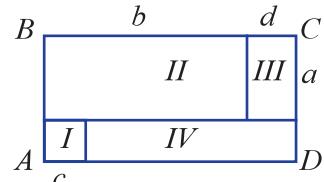
$$2) (a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd ;$$

$$3) (a+b+c)(d+l) = ad + bd + cd + al + bl + cl .$$

162. 1) Teńliklerdiń durıslıǵıń dálilleń:

$$c^2 + b(a-c) + (b+d-c)c + d(a-c) = a(b+d) .$$

2) $ABCD$ tuwrı tórtmýyeshlik betin esaplaw ushın eki ańlatpa dúziń (9-súwret). $ABCD$ tuwrı tórtmýyeshliktiń beti I, II, III, IV tuwrı tórt mýyeshlikler betleri qosındısına teńliktiń paydalaniń hám 1-teńlikke geometriyalıq sıpatlama beriń..



9- súwret



No 2

N sanınıń cifrlarınıń qosındısı 2006 ýa teń.

N sandı eki óz ara teń sanlar kóbeymesi

kórinisinde súwretlewge bola ma?

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIN

- 1.** Háriplerdiń bolshek mánige iye bolatuǵın mánilerin tabıń:

$$\frac{a}{b}; \frac{3}{c-1}; \frac{k}{d+2}.$$

- 2.** Ámellerdi orınlatań:

$$1) \quad 4a + \frac{1-4a^2}{a};$$

$$2) \quad \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$3) \quad \frac{2a-4}{3b} \cdot \frac{6b}{a-2};$$

$$4) \quad \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}.$$

- 3.** Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń $x = 2\frac{2}{3}$ bolǵandaǵı san mánisin tabıń:

$$\frac{1+2x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{5} \cdot \frac{10}{x^2-9}.$$

- 4.** Esaplań:

$$1) \quad 3^{-5} : 3^{-7} - 2^{-2} \cdot 2^4 + \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right)^3;$$

$$2) \quad \sqrt[5]{3^{10} \cdot 32} - \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}};$$

$$3) \quad 25^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{-1} + (5^3)^{\frac{2}{3}} : 5^3 - 48^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}};$$

$$4) \quad 4^{-7} : 4^{-10} - 3^{-2} \cdot 3^5 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-2}.$$

- 5.** Ańlatpalardı ápiwayılastırıń:

$$1) \quad \frac{3x^{-9} \cdot 2x^5}{x^{-4}};$$

$$2) \quad (x^{-1} + y^{-1}) \left(\frac{1}{xy} \right)^{-2};$$

$$3) \quad \frac{2a^{-8} \cdot 4a^3}{16 \cdot a^{-5}}.$$

- 6.** $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}$ ańlatpanı ápiwayılastırıń hám $a = 81$ bolǵanda onıń san mánisin tabıń.



I bapqa tiyisli sınaw esaplari – testler

1. Bólshekti qısqartıń: $\frac{27a^2 - 36ab + 12b^2}{9a^2 - 4b^2}$.
- A) $\frac{3(3a - 2b)}{3a + 2b}$; B) $\frac{3a - 2b}{3a + 2b}$; C) $\frac{39 - 36ab}{5}$; D) $\frac{3a^2 - 36ab + 3b^2}{a^2 - b^2}$.
2. Bólshekti qısqartıń $\frac{7a^2(ab^2 - 9a)}{3a(21a - 7ab)}$.
- A) $\frac{7a(ab^2 - 9a)}{3(21a - 7ab)}$; B) $\frac{-a(b+3)}{3}$; C) $\frac{7(ab^2 - 9a)}{3(21 - 7b)}$; D) $\frac{a(b-3)}{3}$.
3. Ámellerdi orınlanań: $\frac{4}{a+b} + \frac{5}{a-b} - \frac{10b}{a^2 - b^2}$.
- A) $\frac{9}{a-b}$; B) $\frac{9}{a+b}$; C) $\frac{-9}{a+b}$; D) $\frac{9(a+b)}{a-b}$.
4. Bólshekten bólshekti alıń: $\frac{a^2 + 9}{a^3 + 27} - \frac{1}{a+3}$.
- A) $\frac{1}{a^2 + 9}$; B) $\frac{3}{a^2 + 9}$; C) $\frac{a}{a^3 + 9}$; D) $\frac{3a}{a^3 + 27}$.
5. Bólsheklerdi kóbeytiń: $\frac{9a^2 - 16b^2}{6a + 8b} \cdot \frac{6a^2}{12b - 9a}$.
- A) a^2 ; B) $-a^2$; C) $\frac{a^2}{3a - 4b}$; D) $\frac{6}{3a + 4b}$.
6. Bólsheklerdi bólin: $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{5b + 4} : \frac{(2a - 5b)^2}{25b^2 - 16}$.
- A) $\frac{5b + 4}{2a - 5b}$; B) $\frac{2a - 5b}{5b - 4}$; C) $5b - 4$; D) $5b + 4$.

7. Bólsheklerdi qısqartıń: $\frac{8a^2 - 22ab + 15b^2}{16a^2 - 25b^2}$.
- A) $\frac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\frac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\frac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\frac{4a+3b}{2a-5b}$.
8. Bólsheklerdi alın: $\frac{9x^2+16}{27x^3+64} - \frac{1}{3x+4}$.
- A) $\frac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\frac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\frac{12x}{27x^3+64}$; D) $\frac{9x^2+4}{27x^3-64}$.
9. Ámellerdi orınláń: $\frac{4}{3a+2b} - \frac{2}{2b-3a} + \frac{8b}{4b^2-9a^2}$.
- A) $\frac{6}{3a-2b}$; B) $\frac{6}{3a+2b}$; C) $\frac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\frac{12b}{2b-3a}$.
10. Esaplań: $(-8)^2 - (-5)^3 - (12)^{-1}$.
- A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.
11. Esaplań: $(-0,2)^{-3} + (0,2)^{-2} - (-2)^{-2}$.
- A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.
12. Esaplań: $\frac{\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.
- A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) -1; D) $\frac{9}{5}$.
13. Esaplań: $\sqrt[4]{\frac{(4,15)^3 - (1,61)^3}{2,54} + 4,15 \cdot 1,61}$.
- A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.
14. Esaplań: $\sqrt[3]{\frac{(2,08)^3 + (2,016)^3}{4,096} - 2,08 \cdot 2,016}$.
- A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Esaplań: $\sqrt{2\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. Kórsetpe: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^2 \cdot b}$.

- A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Esaplań: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. Kórsetpe: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b}$.

- A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Esaplań: $\frac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \cdot (3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. Kórsetpe: $\sqrt[3]{a} \cdot b = \sqrt[3]{a \cdot b^3}$.

- A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Esaplań: $\sqrt[3]{64}$.

- A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Esaplań: $\frac{\sqrt[3]{98} \cdot \sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

- A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) -2,8; D) -1,4.

20. $a=125$ bolǵanda $\sqrt{a} : \sqrt[6]{a}$ ańlatpanıń san mánisin tabıń:

- A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. $a=0,04$ bolǵanda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ ańlatpanıń san mánisin tabıń:

- A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) -0,2.

22. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}} \right)$.

- A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3 ; D) a^3-b^3 .



Tariixiy maǵlıwmatlar

Qısqa kóbeytiw formulaları, algebralıq bólsheklerge tiyisli maǵlıwmat áyyemgi dereklerde ushıraydı. Máselen, **al-Karajinniń** “Al-farxi”, Mısır alımı **Abu Komil** (850-930) diń “Kitap al-jabr val-muqobala” shıgarmalarında da algebralıq bólshekler úyrenilgen. Abu Komil, al-Xorezmiden keyin algebraǵa tiyisli kitap jazǵan birinshi alım. Abu Komil óz shıgarmasında

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

sıyaqlı ápiwayı qatnaslarǵa da itibar beredi.

Algebralıq bólsheklerge I.Nyutonnıń “Ulıwma arifmetika” kitabında da jetkilikli orın ajıratılǵań “ $\frac{a}{b}$ bólshek a nı b ǵa bóliw nátiyjesinde payda bolǵan

muǵdar bolıp esaplanadı. Tap usınday etip, $\frac{aa - bb}{a + x}$ muǵdar $ab - bb$ nı $a + x$ ǵa bóliw nátiyjesinde payda boladı”, – deydi Nyuton.

Racional kórsetkishli dáreje **I.Nyuton** (1643-1727) tárepinen kírgizilgen. Qálegen a haqıqıy san ushın a^x , $a > 0$, dáreje túsinigi **L.Eyler** (1707-1783) diń “Analizge kiriw” shıgarmasında berilgen.

Abu Rayxan Beruniy óziniń tanıqlı “Qanuni Masudiy” shıgarmasında “sheńber uzınlığınıń onıń diametrine qatnasi irracional san” ekenin aytadı. Áyyemgi Greciyada “eger kvadrattıń tárepı ólshev birligi etip alınsa, onıń diagonalın rational san menen sıpatlawǵa bolmawın” dálillegen. Biziń eramızǵa shekemgi V-IV ásirlerden-aq, áyyemgi grek alımları kvadrat bolmaǵan qálegen n natural san ushın $\sqrt[n]{n}$ sannıń irrational ekenin dálillegen.

Óyisosiddin Jamshid al-Koshiydiń “Arifmetika gilti” shıgarmasında natural sannan koren shıgariwdıń ulıwma usılı bayan etilgeń. $\sqrt[n]{a^n + r}$ korendi al-Koshiy juwıqlap $\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$ kórinisinde sıpatlaydı, bunda a – natural san hám $r < (a+1)^n - a^n$.

Al-Koshiy korendi anígíraq esaplaw ushın koren astındaǵı sandı 10 niń sáykes dárejesine kóbeytiwdi usınıs etedi: $\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot N}}{10^m}$. Bólshekten koren shıǵarıwda bolsa, usı qágıydadan paydalanıladı: $\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M \cdot N^{n-1}}}{N}$.

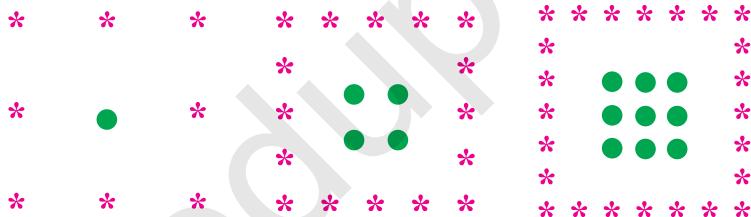
Sonıń menen birge, al-Koshiy korenler kóbeymesin ulıwma kórsetkishke keltiriw qágıydasın bayan etken:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k} \cdot \sqrt[nk]{b^n} = \sqrt[nk]{a^k \cdot b^n}.$$



Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanıshlı máseleler

- 163.** Súwrettegi jasıl noqatlar menen biyaha sortlı miyweli terekler (máselen, biyaha sortlı almurt) belgilengen. Almurtlar ólshemleri nxn (m^2) bolǵan kvadratlarǵa egilgen. Qızıl juldızshalar (*) arqalı bolsa, qorshalǵan terekler belgilengen.



Almurt baǵı átirapındaǵı qorshalǵan terekler kvadrat tárepleri boylap egilgen.

Sorawlarga juwap beriń:

- 1) $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$; 2) $25 \times 25 \text{ m}$ ólshemli kvadratqa egilgen almurtlardı “orap” turıwshi qorshalǵan terekler sanı neshew?
- 3) Almurtlar sanı menen olardı “orap” turıwshi terekler sanı arasında qanday baylanıs bar?

- 164.** Joqarıdaǵı másele shártinde n niń qanday mánilerinde n -kvadrattaǵı almurtlar sanı olardı “orap” turıwshi terekler sanına:
- 1) teń;
 - 2) úlken;
 - 3) kishi boladı?

4) Kesteni toltrırıń hám analizleń. Juwmaq shıǵarıń.

Kvadrat tárepiniń uzınlığı (m)	Almurtlar sanı	Qorshawshı terekler sanı
1	1	8
2	4	16
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10

- 165.** Avtomobiller reytingin anıqlawda tómendegiler esapqa alındı: qáwipsizligi (S), qolaylıǵı (C), hár túrli wazıypalardı orınlay alıwı (F), sapası (Q) hám dizaynı (D). Bul kórsetkishlerdiń hárkıtı biri bahalanadı (máselen, ball beriledi). Avtomobil reytingi usı formula boyınsha esaplanadı:

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

Kestede avtomobillerdiń 3 túrli markası (shártlı túrde A , B , D markalar) ushın hár qıylı kórsetkishlerdiń bahası keltirilgen.

Avtomobil túri	Qáwipsizligi S	Qolaylıq C	Hár túrli wazıypalardı orınlay alıwı F	Sapası Q	Dizayn D
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
D	4	4	3	3	4

- 1) Qaysı markadaǵı avtomobil eń úlken reytingge iye?
 - 2) Avtomobil markaların reytingin kemeyip barıwı tártibinde jaylastırıń.
 - 3) Siz ushın qaysı kórsetkish áhmiyetli? Nege?
 - 4) Siz qanday reytingli avtomobildi tańılar edińiz? Nege?
- 166.** Dem alıw, awqat sińiriw, qan aylanısı ushın kerekli energiya – almasıw intensivligi (tezligi) bolıp esaplanadı.

Tiykarǵı almasıw intensivligin (AAI) dep belgileyik. AAI kaloriyalarda ólshenedi, bunda adam temperaturası 23°C bolǵan xanada biymálel hám tınısh halatta jatqan boliwı kerek. Hayallarda AAI tómendegi formula tiykarında esaplanadı:

$$\text{AAI} = 9,74M + 172,9P - 4,737B + 667,051, \quad (*)$$

bunda M – hayaldıń massası, P – boyınıń uzınlığı (metrlerde), B – jası (jillarda).

- 1) Eger $M = 60$ kg, $P = 1,7$ m, $B = 35$ jıl bolsa, AAI ni esaplań(eń jaqın pútin sanǵa shekem dóńgeleklen).
- 2) (*) formuladan hayaldıń massası, boyı hám jası AAI ǵa qanday tásir etiwin bilip alıwǵa boladı.

Sorawlarga juwap berin:

- a) Jası mingen sayın AAI da kóterileme?
- b) Boyınıń uzın-kelteligi AAI ǵa qalay tásir etedi?
- c) 667, 051 sanı hayaldıń jasına, boyına, massasına baylanıslı ma?
- d) Eger hayaldıń massası kemeyse (ol azsa), AAI bul hayalda ózgere me?
- e) Bir shıpaker “Eger eki hayaldıń massası, jası birdey bolıp, boyalarınıń parqı 10 sm bolsa, olardıń AAI arasındaǵı parıq 17,29 kilokaloriya boladı”, degen juwmaqqa keldi. Bul juwmaq durıs pa? Onı (*) formula járdeminde tekserip kóriń.

- 167.** Bir dana buyımdı taylorlaw waqtı menen bir saatta tayaranatuǵın buyımlar sanı arasındaǵı baylanıs keri proporsional baylanıs boladı. Kesteni tolıtırın hám analizleń. Juwmaq shıgarın.

Bir buyımdı taylorlawǵa sarplanatuǵın waqt (minut)	2	3		5	6		10	12	
Bir saatta islep shıgarılatuǵın buyımlar sanı (dana)	30		15			8	6		4

- 168.** Dáryaniń ayırım jerlerindegi kesesine kesiminiń beti menen usı jerlerge sáykes ortasha aǵım tezligi keri proporsional müǵdarlar bolıp esaplanadı. Kesteni toltrıń. Qanday juwmaqqa keldińiz?

Kesesine kesimniń beti (kv.m)	40	45		54	60		
Aǵım tezligi (m/s)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

- 169.** Eki metr uzınlıqtığı qadalardı jarğıshı 4,5 saatta 0,5 m li gólalarǵa jarǵılap pitirdi. Eger, sol qadalardı 40 sm li góla etip jarǵılasa, olardı qansha waqıtta jarǵılap boladı? Bunda jumıs kólemi qanday qatnasta ózgergen bolar edi?
- 170.** 1) Eki shkiv qayıs penen birlestirilgen. Birinshi shkivtiń diametri 28 sm, ekinshisi 42 sm. Birinshi shkiv minutına 600 ret aylanatuǵın bolsa, ekinshi shkiv minutına neshe ret aylanadı?
- 2) Eki shkiv qayıs penen birlestirilgen. Birinshi shkiv minutına 560 ret, ekinshisi bolsa 240 ret aylanadı. Birinshi shkiv minutına aylanası 0,36 m bolsa, ekinshi shkivtiń aylanasınıń uzınlıǵıń tabıń.

- 171.** A hám B qalalar ortasındaǵı aralıq 360 km. Bul aralıqtı jeńil mashina 4 saatta, júk mashinası bolsa 6 saatta basıp ótedi. A dan B ǵa qarap júk mashinası jolǵa shıqtı. Tap usı waqıtta B dan A ǵa qarap jeńil mashina jolǵa shıqtı. Olar A dan neshe kilometr uzaqlıqta ushrasasdı?

△ Jeńil hám júk mashinalarınıń tezlikleri túrlishe bolǵanı ushın tuwrı proporsional baylanıs joq, 360 km aralıqtı 4 hám 6 sanlarına tuwrı proporsional bóliw menen máseleni sheshiwǵe bolmaydı.

Basqa usıldı qollanamız:

1 saatta jeńil mashina AB aralıqtıń $\frac{1}{4}$ bólimin ótedi, júk mashinası bolsa

$\frac{1}{6}$ bólimin ótedi. Demek, ushırasıw ornın aniqlaw ushın 360 km aralıqtı

$\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sanlarına proporsional etip bóliw kerek.

$$\text{Biraq } \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{12} : \frac{2}{12} = 3 : 2.$$

Bunnan $3+2=5$. Mashinalar A dan x km arılawda ushırasadı desek,

$$x = \frac{360}{5} \cdot 2 = 144 \text{ (km).}$$

Juwabi: A dan 144 km uzaqlıqta. Máselede 360, 4, 6 sayıları berilgen.

Máseleni sheshiw barısında $\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sayıların (4 hám 6 ýga keri sanlardı) kirgizdik. Demek, bul topardaǵı máseleni sheshiw ushın 360 tı 4 hám 6 sayına keri ($\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sayılarına tuwrı) proporsional etip bólív kerek eken. Bunnan sonday qagyidaǵa kelemiz:

Sandı berilgen sayılarǵa keri proporsional etip bólív ushın usı sandı berilgen sayılarǵa keri bolǵan sayılarǵa tuwra proporsional etip bólív kerek. ▲

- 172.** 195 sayıının 2, 3, 4 sayılarına keri proporsional etip úsh bólime boliń.

▲ 1) 2, 3, 4 sayılarına teris sayılar, sáykes túrde, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Yaǵniy, 195 ti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ sayılarına tuwra proporsional etip, úsh bólime boliw kerek.

Biraq, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3$. Birinshi sandı a_1 , ekinshi sandı a_2 , úshinshi sandı a_3 desek, onda

$$a_1 = \frac{195 \cdot 6}{6+4+3} = \frac{195 \cdot 6}{13} = 15 \cdot 6 = 90; \quad a_2 = \frac{195 \cdot 4}{13} = 15 \cdot 4 = 60;$$

$$a_3 = \frac{195 \cdot 3}{13} = 15 \cdot 3 = 45.$$

Juwabi: 90, 60, 45.

Tekseriw: 1) $90 + 60 + 45 = 195$.

$$2) \quad 90 : 60 : 45 = 6 : 4 : 3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \quad (\text{qatnastiń aǵzaların dáslep 15 ke, soń 12 ge bolidik}).$$

- 173.** 1) 4 480 sanın a) $\frac{1}{3}$ hám $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ hám $\frac{2}{9}$ sanlarına keri proporcional etip eki bólekke bóliń.
2) 987 sanın: a) 0,6 hám 0,3; b) 0,4 hám 0,(3) sanlarına keri proporcional etip eki bólekke bóliń.
- 174.** 1) 2040 sanın $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ hám $\frac{5}{6}$ sanlarına keri proporcional etip 3 bólekke bóliń.
2) 4530 sanın $\frac{2}{3}$, 0,7 hám $1\frac{1}{2}$ sanlarına keri proporcional bolǵan 3 bólekke bóliń.
- 175.** 1) A hám B qalalar arasındaǵı aralıq 465 km. Bul aralıqtı jolawshı tasıwshı poezd 10,5 saatta, júk tasıwshı poezd 12 saatta ótedi. Poezdler A hám B qalalardan bir waqıtta bir-birine qaray jolǵa shıqsa, olardıń hárbinı ushırasqansha neshe kilometr jol basadı?
2) Birinshi sportshı 100 m aralıqtı 12 s ta, ekinshisi bolsa 13 s ta júgirip ótedi. Olar bir-birinen 200 m aralıqta turıp, bir waqıtta bir-birine qaray júgire basladı. Ushırasqansha olardıń hárbinı neshe metr aralıqtı basıp ótedi?
- 176.** 1) 36 tisli shesterna (qurılma) 18 tisli shesterna menen tislestirilgen. 18 tisli shesterna 60 ret aylansa, 36 tisli shesterna neshe ret aylanadı? 18 tisli shesterna 24 ret aylanatugın bolsa – she?
2) Vilosipediń pedalları biriktirilgen aldińǵı (jeteklewshı) shesternada 48 tis, arqa degershikke biriktirilgen shesternada 16 tis bar. Eger vilosipediń pedallı shesternası minutına 40 ret aylansa, arqadaǵı degershik neshe ret aylanadı? Pedallı shesterna 45 ret; 60 ret aylansa ne? Eger vilosiped degershiginiń diametri 70 cm bolsa, joqarıdaǵı hár qaysı jaǵday ushın vilosipediń tezligin tabıń.
- 177.** 1) *Abu Rayxan Beruniy máselesi*. Gerbishtiń ólshemleri 5, 4, 3 uzınlıq birligine teń. Bunday gerbishtiń 30 danasınıń bahası 60 dirham (pul birligi). Ólshemleri 8, 6, 2 uzınlıq birligine teń bolǵan 20 dana gerbishtiń bahası neshe dirham boladı?
2) Gerbishtiń boyı, eni hám biyikligi 4:2:1 sıyaqlı qatnasta, deyik. Boyı menen 6 gerbish qoyıw mýmkin bolǵan orıngá eni menen neshe hám biyikligi menen neshe gerbish qoyıwǵa boladı?

11- §. SANLÍ TEŃSIZLIKLER

Sanlardı salıstırıw kündelikli turmista keń túrde qollanıladı. Mısalı, ekonomist jobada názerde tutılğan kórsetkishlerdi is júzindegı kórsetkishler menen salıstırıp qaraydı, shipaker nawqas adamnıń temperaturasın deni saw adamnıń temperaturası menen salıstıradı, slesar jonıp atırǵan detalınıń ólshemlerin úlgi menen salıstırıp kóredi.

Usı aytılǵan úsh jaǵdaydıń úshewinde de qandaya bir sanlar salıstırılıp kóriledi. Sanlardı salıstırıw nátiyjesinde sanlı teńsizlikler payda boladı..

Mısalı, $\frac{4}{5}$ hám $\frac{3}{4}$ sanların salıstırıp kóreyik. Bunıń ushın olardıń ayırmasın tabamız:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}.$$

Demek, $\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}$, yaǵníy $\frac{4}{5}$ sanı $\frac{3}{4}$ sanına $\frac{1}{20}$ oń sanın qosıw nátiyjesinde payda boladı. Bul bolsa, $\frac{4}{5}$ samı $\frac{3}{4}$ sanınan $\frac{1}{20}$ ge artıq ekenligin áňlatadı. Solay etip, $\frac{4}{5}$ sanı $\frac{3}{4}$ sanınan úlken, sebebi olardıń ayırması oń.



Anıqlama. Eger $a - b$ ayırması oń bolsa, onda a sanı b sanınan úlken boladı. Egerde $a - b$ ayırması teris bolsa, onda a sanı b sanınan kishi boladı.

Eger a sanı b sanınan úlken bolsa, onda $a > b$ túrinde, eger a sanı b sanınan kishi bolsa, onda $a < b$ túrinde jazılıdı..



Solay etip, $a > b$ teńsizligi $a - b$ ayırmasınıń oń, yaǵníy $a - b > 0$ ekenligin áňlatadı, $a < b$ teńsizligi $a - b < 0$ ekenligin áňlatadı.

1- m ásele. Eger $a > b$ bolsa, onda $b < a$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $a > b$ teńsizligi $a - b$ niń ón san ekenligin ańlatadı. Onda $b - a = - (a - b)$ – teris san, yaǵníy $b < a$. ▲

Erkli túrde alıngan eki a hám b sanı ushın tómendegi úsh jaǵdaydan tek gana birewi durıs boladı:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Mısalı, - 5 hám - 3 sanları ushın $-5 < -3$ teńsizligi durıs boladı, al $-5 = -3$ hám $-5 > -3$ jaǵdayları durıs bolmaydı.



a hám b sanların salıstırıw, olardıń arasına $>$, $=$ yamasa $<$ belgileriniń qaysısın qoyǵanda durıs qatnastıń payda bolatuǵınlıǵın tabıw degen sóz. Bunı $a - b$ ayırmasınıń belgisin anıqlaw menen orınlaw m úmkin.

2- m ásele. 0,79 hám $\frac{4}{5}$ sanların salıstırıń:

$$0,79 - \frac{4}{5} = 0,79 - 0,8 = -0,01.$$

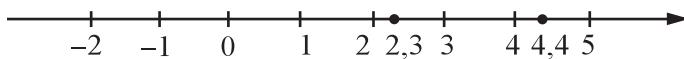
$$0,79 - \frac{4}{5} < 0 \text{ bolǵanı ushın } 0,79 < \frac{4}{5}. \triangle$$

$a > b$ teńsizligi geometriyalıq kóz qarastan qaraǵanımızda a noqatı san kósherinde b noqatınan ón tárepte jaylasqanın ańlatadı (10-súwret).



10- súwret.

Mısalı, $\frac{4}{5}$ noqatı 0,79 noqatınan ón tárepte jaylasqan, sebebi $\frac{4}{5} > 0,79$; 2,3 noqatı 4,4 noqatınan shep tárepte jaylasqan, sebebi $2,3 < 4,4$ (11- súwret).



11- súwret.

3- m ásele. Eger $a \neq b$ bolsa, onda $a^2 + b^2 > 2ab$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

Δ $a^2 + b^2 - 2ab$ ayırmasınıń oń ekenligin dálilleymiz. Haqıyatında da, $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 > 0$, sebebi $a \neq b$. ▲

4- m ásele. Eger $a > 0$ hám $a \neq 1$ bolsa, onda $a + \frac{1}{a} > 2$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

Δ $a + \frac{1}{a} - 2$ ayırmasınıń oń ekenligin dálilleymiz. Haqıyatında da,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} > 0,$$

sebebi, $a > 0$ hám $a \neq 1$. ▲

5- m ásele. Eger $\frac{n}{m}$ durıs bolshek bolsa, onda $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

Δ $\frac{n}{m}$ bolshegi $n < m$ bolǵanda (n hám m – natural sanlar) durıs bolshek dep atalatuǵınlıǵın eskertip óteyik.

Mına $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ ayırması nolden kishi, sebebi

$n-m < 0$, $m > 0$, $m+1 > 0$. Soniń ushın da, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ▲

Shınıǵıwlar

178. Sanlı teńsizliktiń anıqlamasınan paydalanıp, tómendegi sanlardı salıstırın:

1) $0,3$ hám $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ hám $0,3$; 3) $\frac{13}{40}$ hám $0,35$;

4) $-\frac{5}{8}$ hám $-0,7$; 5) $\frac{22}{7}$ hám $3,14$; 6) $\frac{4}{9}$ hám $0,44$.

179. Eger:

1) $b - a = -1,3$; 2) $b - a = 0,01$; 3) $a - b = (-5)^4$;

4) $a - b = -5^4$; 5) $a - b = 0,8$; 6) $b - a = (-2)^3$

bolsa, a hám b sanların salıstırın.

180. a niň qálegen mánisinde:

1) $a^2 > (a+1)(a-1)$; 2) $(a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$

teńsizliktiň durıslıǵın dálilleń.

181. a niň qálegen mánilerinde tómendegi teńsizlik durıs bolıwın dálilleń

1) $a^3 < (a+1)(a^2 - a + 1)$; 2) $(a+7)(a+1) < (a+2)(a+6)$;

3) $1 + (3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a)$; 4) $(3a-2)(a+2) < (1+2a)^2$.

182. a hám b niň qálegen mánisinde tómendegi teńsizlik durıs bolıwın dálilleń:

1) $a(a+b) > ab - 2$; 2) $2ab - 1 < b(2a+b)$;

3) $3ab - 2 < a(3b+a)$; 4) $b(a+2b) > ab - 3$.

183. Eki bala birdey muğdarda dápter satıp aldı. Birinshisi alǵan dápterleriniň barlıǵı 150 swmnan, ekinshisi alǵan dápterleriniň yarımı 130 swmnan, qalǵanları bolsa, 160 swmnan boldı. Qaysı bala kóbirek pul sarplaǵan?

12-§. SANLÍ TEŃSIZLIKLERDIŇ TIYKARĞI QÁSIYETLERİ

Bul paragrafta sanlı teńsizliklerdiń ádette *tiykargı* dep atalatuǵın *qásiyetleri* qaraladı, sebebi olardan teńsizliklerdiń basqa da qásiyetlerin dálillewde hám kóplegen máselelerderi sheshiwde paydalanylادı.



| 1-teorema. *Eger $a > b$ hám $b > c$ bolsa, onda $a > c$ boladı.*

○ Shárt boyınsha $a > b$ hám $b > c$. Bul jaǵday $a-b > 0$ hám $b-c > 0$ ekenligin ańlatadı. $a-b$ hám $b-c$ oń sanların qosıp $(a-b)+(b-c) > 0$ di payda etemiz, yaǵníy $a-c > 0$.

Demek, $a > c$.

Geometriyalıq kóz qarastan qaraǵanda 1-teorema eger san kósherinde a noqatı b noqatınan oń tárepte jaylasqan bolsa hám b noqatı c noqatınan ońda jaylassa, onda a noqatı c noqatınan oń tárepte jaylasqanlıǵın bildiredi (12-súwret).



12-súwret.



2- teorema. Eger teńsizliktiń eki jaǵına da birdey san qosilsa, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi.

- $a > b$ bolsın. Bul jaǵdayda erkli bir san c sanı ushin

$$a + c > b + c$$

teńsizliginiń orınlanatuǵınlıǵın dálillew talap etiledi.

Mına

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

ayırmasın qaraymız. Bul ayırma oń, sebebi máseleniń shártı boyınsha $a > b$. Demek, $a + c > b + c$.



Saldar. Qálegen qosılıwshını teńsizliktiń bir jaǵınan ekinshi jaǵına qarama-qarsı belgi menen kóshirip jazıw múmkın.

- $a > b + c$ bolsın. Bul teńsizliktiń eki jaǵına da $-c$ sanın qosıp, $a - c > b + c - c$ ni payda etemiz, yaǵníy $a - c > b$.



3- teorema. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da qanday da birdey oń sangá kóbeytsek, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da qanday da birdey teris sangá kóbeytsek, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsı belgige ózgeredi.

- 1) $a > b$ hám $c > 0$ bolsın. $ac > bc$ bolatuǵınlıǵın dálilleyik.

Shárt boyınsha $a - b > 0$ hám $c > 0$. Sonıń ushin $(a - b)c > 0$, yaǵníy $ac - bc > 0$. Demek, $ac > bc$.

- 2) $a > b$ hám $c < 0$ bolsın. $ac < bc$ bolatuǵınlıǵın dálilleyik.

Shárt boyınsha $a - b > 0$ hám $c < 0$. Sonıń ushin $(a - b)c < 0$, yaǵníy $ac - bc < 0$. Demek, $ac < bc$.

Mısalı, $\frac{1}{5} < 0,21$ teńsizliginiń eki jaǵın da 3 ke kóbeytip, $\frac{3}{5} < 0,63$ ti pay-

da etemiz, $\frac{1}{5} < 0,21$ teńsizliginiń eki jaǵın da -4 ke kóbeytip, $-\frac{4}{5} > -0,84$

ti payda etemiz.

Eger $c \neq 0$ bolsa, onda c hám $\frac{1}{c}$ sanları birdey belgige iye ekenligin atap ótemiz. c ága bólidi $\frac{1}{c}$ ge kóbeytiw menen almastırıw mümkin bolǵanı ushın 3-teoremadan tómendegi tastiyıqlaw kelip shıǵadı.



Saldar. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da birdey oń sanǵa bólsek, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da birdey teris sanǵa bólsek, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsi belgige ózgeredi.

Mısali, $0,99 < 1$ teńsizliktiń eki jaǵın da 3 ke bólip, $0,33 < \frac{1}{3}$ di payda etemiz. $0,99 < 1$ teńsizliginiń eki jaǵın da -9 ága bólsek, onda $-0,11 > -\frac{1}{9}$ di payda etemiz.

1- másele. Eger $a > b$ bolsa, onda $-a < -b$ bolatúǵınlıǵın dálilleń.

△ $a > b$ teńsizliginiń eki jaǵın da -1 teris sanına kóbeytip, $-a < -b$ ni payda etemiz. ▲

Misali, $1,9 < 2,01$ teńsizliginen $-1,9 > -2,01$ teńsizligi kelip shıǵadı, $0,63 < \frac{3}{5}$ teńsizliginen $-0,63 < -\frac{3}{5}$ teńsizligi kelip shıǵadı..

2- másele. Eger a hám b – oń sanlar hám $a > b$ bolsa, onda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bollatuǵınnı dálilleń.

△ $b < a$ teńsizliginiń eki jaǵın da ab oń sanına bólip, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ teńsizligin payda etemiz. ▲

Teńsizliklerdiń usı paragrafta qaralıp ótken barlıq qásiyetleri $>$ (úlken) belgige iye teńsizlik ushın dálillengenligin atap ótemiz.

Olar, $<$ (kishi) belgige iye teńsizlikler ushın da dál usılay dálillenedi.

Shiniǵıwlar

184. Mına tómendegı tastıyıqlawlardı dálilleń:

- 1) eger $a-2 < b$ hám $b < 0$ bolsa, onda $a-2$ – teris san;
- 2) eger $a^2-5 > a$ hám $a > 1$ bolsa, onda $a^2-5 > 1$.

185. Eger

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1) $a > b$ hám $b > 1$; | 2) $a < b$ hám $b < -2$; |
| 3) $a-1 < b$ hám $b < -1$; | 4) $a+1 > b$ hám $b > 1$ |

bolsa, onda a sanı oń san bola ma yaki teris san bola ma?

186. $-2 < 4$ teńsizliktiń eki jaǵına da: 1) 5; 2) -7 sanın qosıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

187. $2a+3b > a-2b$ teńsizliktiń eki jaǵına da: 1) $2b$; 2) $-a$ sanın qosıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

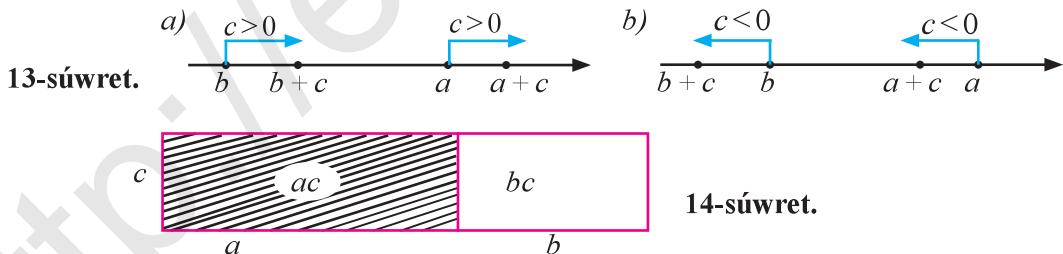
188. $3 > 1$ teńsizliktiń eki jaǵınan: 1) 1; 2) -5 sanın alıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

189. $a-2b < 3a+b$ teńsizliktiń eki jaǵınan: 1) a ; 2) b sanın alıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

190. $a < b$ bolsın. Tómendegı sanlardı salıstırıń:

- 1) $a+x$ hám $b+x$;
- 2) $a-5$ hám $b-5$.

3) 13 hám 14-súwretlerde sanlı teńsizliktiń qanday qásiyetleri berilgenin aytıń.



Berilgen teńsizliktiń eki jaǵın kórsetilgen sanǵa kóbeytiń (**191–192**):

191. 1) $3,35 < 4,5$ ti 4 ke; 2) $3,8 > 2,4$ ti 5 ke;

- 3) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ ti – 12 ke;
- 4) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ ti – 16 ke.

- 192.** 1) $2a > 1$ ni 0,5 ge; 2) $4a < -1$ ni 0,25 ge;
 3) $-4a < -3$ ni 0,25 ge; 4) $-2a > -4$ ni -0,5 ge.

Berilgen teńsizliktiń eki jaǵın da kórsetilgen sańga bóliń (**193–194**):

- 193.** 1) $-2 < 5$ ni 2 ge; 2) $4,5 > -10$ ni 5 ke;
 3) $-25 > -30$ ni -5 ke; 4) $-20 < -12$ ni -4 ke.
- 194.** 1) $1,2a < 4,8$ ni 1,2 ke; 2) $2,3a < -4,6$ ni 2,3 ke;
 3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{3}$ ke; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ di $-\frac{3}{4}$ ke.

13-§. TEŃSIZLIKLERDI QOSIW HÁM KÓBEYTIW

Hár qıylı máselelerdi sheshiw barısında kóbinese teńsizliklerdi qosıwǵa yamasa kóbeytiwge, yaǵníy teńsizliklerdiń shep jaǵın óz aldına hám oń jaǵın óz aldına qosıwǵa yamasa kóbeytiwge tuwra keledi. Bunday jaǵdaylarda geyde teńsizlikler aǵzama-aǵza qosılıp atır yamasa kóbeytilip atır, dep aytıladi.

Mısalı, sayaxatshı birinshi kúni 20 km den kóbirek, al ekinshi kúni 25 km den kóbirek joldı júrip ótken bolsa, onda ol eki kún ishinde 45 km den kóbirek joldı basıp ótti dep aytıw mümkin.

Tap usınday, egerde tuwrımýyeshliktiń biyikligi 13 sm den kem, eni 5 sm den kem bolsa, onda usı tuwrımýyeshliktiń maydanı 65 sm^2 den kem boladı, dep aytıw mümkin.

Bul mísallardı qarap shígıwda *teńsizliklerdi qosıw hám kóbeytiw haqqındaǵı tómendegi teoremlar* qollanıladı:



1- teorema. *Birdey belgige iye teńsizliklerdi qosqanda tap usınday belgige iye teńsizlik payda boladı: eger $a > b$ hám $c > d$ bolsa, onda $a + c > b + d$ boladı.*

○ Shárt boyinsha $a - b > 0$ hám $c - d > 0$. Mına ayırmanı qaraymız:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Oń sanlardıń qosındısı oń san bolǵanı ushın $(a+c)-(b+d) > 0$, yaǵníy $a+c > b+d$.

Mıṣallar:

$$1) + \begin{array}{r} 3 > 2,5 \\ 5 > 4 \\ \hline 8 > 6,5 \end{array}$$

$$2) + \begin{array}{r} 1,2 < 1,3 \\ -3 < -2 \\ \hline -1,8 < -0,7 \end{array}$$

$$3) + \begin{array}{r} 4,8 > 2,3 \\ -1,2 > -1,3 \\ \hline 3,6 > 1 \end{array}$$



2- teorema. *Shep hám oń jaqları oń san bolǵan birdey belgige iye bolǵan teńsizliklerdi kóbeytiw nátiyjesinde tap usınday belgige iye teńsizlik payda boladı: eger $a > b$, $c > d$ hám a, b, c, d – oń sanlar bolsa, onda $ac > bd$ boladı.*

○ Mına ayırmanı qarayıq:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

Shárt boyınsha $a - b > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Sonıń ushında $c(a - b) + b(c - d) > 0$, yaǵníy $ac - bd > 0$, bunnan $ac > bd$.

Mıṣallar:

$$1) \times \begin{array}{r} 3,2 > 3,1 \\ 3 > 2 \\ \hline 9,6 > 6,2 \end{array}$$

$$2) \times \begin{array}{r} 1,8 < 2,1 \\ 4 < 5 \\ \hline 7,2 < 10,5 \end{array}$$

$$3) \times \begin{array}{r} 2,4 < 3,5 \\ 3 < 4 \\ \hline 7,2 < 14 \end{array}$$

1-másele. Eger a, b – oń sanlar hám $a > b$ bolsa, onda $a^2 > b^2$ boladı.

△ $a > b$ tensizligin óz-ózine kóbeytip, mınanı payda etemiz: $a^2 > b^2$. ▲

Usıǵan uqsas, a, b — oń sanlar hám $a > b$ bolsa, onda qálegen natural n sanı ushın $a^n > b^n$ ekenligin dálillew múmkın.

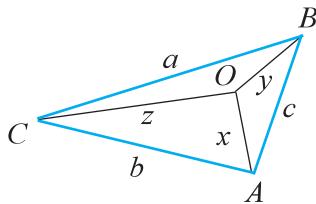
Mıṣali, $5 > 3$ teńsizliginen $5^5 > 3^5$, $5^7 > 3^7$ túrindegi teńsizlikler kelip shıǵadı.

2- másele. Úshmúyeshliktiń ishinde jatıwshı qálegen noqattan onıń tóbelelerine shekemgi aralıqlardıń qosındısı usı úshmúyeshliktiń yarım perimetrinen úlken bolatuǵınlıǵıń dálilleń.

△ 15-súwretti qarayıq. x, y, z – ABC úshmúyeshliginiń ishki O noqatınan onıń tóbelelerine shekemgi aralıqlar bolsın.

AOB, AOC, BOC úshmúyeshliklerinen úshmúyeshliktiń eki tárepiniń qosındısı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq:

$$\begin{aligned}x + y &> c, \\x + z &> b, \\y + z &> a.\end{aligned}$$



15-súwret.

Bul teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıp, $2x+2y+2z>a+b+c$ ni payda etemiz, bunnan

$$x + y + z > \frac{a+b+c}{2}. \blacktriangle$$

Shiniǵıwlar

195. (Awızeki) Tómendegiler durıs pa?

- 1) eger $x>7$ hám $y>4$ bolsa, onda $x+y>11$;
- 2) eger $x>5$ hám $y>8$ bolsa, onda $xy<40$;
- 3) eger $x<-7$ hám $y<7$ bolsa, onda $x+y<0$;
- 4) eger $x<2$ hám $y<5$ bolsa, onda $xy<10$?

196. Teńsizliklerdi qosıń:

- 1) $5>-8$ hám $8>5$;
- 2) $-8<2$ hám $3<5$;
- 3) $3x+y<2x+1$ hám $3y-2x<14-2a$;
- 4) $3x^2+2y>4a-2$ hám $5y-3x^2>3-4a$.

197. Teńsizliklerdi kóbeytiń:

- 1) $2\frac{2}{3}>1\frac{1}{3}$ hám $12>6$;
- 2) $6\frac{1}{4}<9\frac{2}{3}$ hám $4<6$;
- 3) $x-2>1$ hám $x+2>4$;
- 4) $4<2x+1$ hám $3<2x-1$.

198. Ager $a>2$ hám $b>5$ bolsa, onda

- 1) $3a+2b>16$;
- 2) $ab-1>9$;
- 3) $a^2+b^2>29$;
- 4) $a^3+b^3>133$;
- 5) $(a+b)^2>35$;
- 6) $(a+b)^3>340$;
- 7) $2a+3b>19$;
- 8) $6ab-5>55$;
- 9) $ab(a+b)>70$

boliwın dálilleń.

- 199.** Úshmúyeshliktiń tärepleri sáykes túrde 73 m, 1 m 15 sm hám 1 m 11 sm den kem. Onıń perimetri 3 m den kem bolatuğının dálilleń.
- 200.** 4 dana ulıwma dápter hám 8 dana qoyın dápter satıp alındı. Uluwma dápterdiń bahası 200 swmnan kem, al qoyın dápterdiń bahası 150 swmnan kem. Barlıq jumsalǵan aqshaniń 2000 swmnan kem bolatuğılığın kórsetiń.
- 201.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tärepi 7 sm den uzın, ekinshi tärepi birinshi tärepten 3 ese uzın. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 56 sm den uzın ekenligin dálilleń.
- 202.** Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı atızdıń uzınlığı eninen 5 ese uzın, al eni 4 m den uzın. Atızdıń maydanı 80 m^2 tan úlken ekenligin dálilleń.
- 203.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń ishinde jatıwshı qálegen noqattan onıń tóbelerine shekemgi aralıqlardıń qosındısı usı tuwrı tórtmúyeshliktiń yarım perimetrinen úlken ekenligin dálilleń.

Qatań hám qatań emes teńsizlikler. $>$ (úlken) hám $<$ (kishi) belgileri bar teńsizlikler qatań teńsizlikler dep ataladı. Mısalı, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < 1, a > b, c < d - qatań teńsizlikler.$

Qatań teńsizliklerdiń $>$ hám $<$ belgileri menen bir qatarda \geq (úlken yamasa teń) hám \leq (kishi yamasa teń) belgilerinen de paydalanalıdı. Olar **qatań emes teńsizlikler** dep ataladı.

$a \leq b$ teńsizligi $a < b$ yamasa $a = b$ ekenligin, yaǵníy a sanı b dan úlken emes ekenligin bildiredi.

Mısalı, eger samolyottaǵı orınlar sanı 134 bolsa, onda a jolawshılar sanı 134 ten kem yamasa oǵan teń bolıwı mümkin. Bul jaǵdayda $a \leq 134$ kórinisinde jazıw jazıladı.

Usıǵan uqsas, $a \geq b$ teńsizligi a sanı b dan úlken yamasa oǵan teń ekenligin, yaǵníy a sanını b dan kishi emes ekenligin bildiredi.

\geq yamasa \leq belgileri qatnasqan teńsizlikler **qatań emes teńsizlikler** dep ataladı. Mısalı, $18 \geq 12, 11 \leq 12, 7 \geq 7, 4 \leq 4, a \geq b, c \leq d - qatań emes teńsizlikler.$

Qatań teńsizliklerdiń 12–13-§ larda bayan etilgen barlıq qásiyetleri qatań emes teńsizlikler ushın da orınlı boladı. Bunda, eger qatań teńsizlikler ushın $>$ hám $<$ belgileri qarama-qarsi belgiler dep esaplanǵan bolsa, qatań emes teńsizlikler ushın da \geq hám \leq belgileri qarama-qarsi belgiler dep esaplanadı.

Mısalı, 12-§ daǵı 2-teoremanı qatań emes teńsizlikler ushın mınaday etip bayan etiw (ańlatıw) mümkin: eger $a \geq b$ bolsa, onda qálegen c sanı ushın $a + c \geq b + c$ boladı. Haqiyqatında da $a > b$ bolǵan jaǵday ushın bul teorema 12-§ de dálillengen, al $a = b$ jaǵdayı ushın bolsa bul tastıyıqlaw teńliktiń bizge belgili bolǵan qásiyetin ańlatadı.

Másele. Qálegen a hám b sanları ushın:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

teńsizliginiń durıs ekenligin dálilleń.

△ $a^2 + b^2 - 2ab$ ayırması qálegen a hám b lar ushın nolden kishi emesligin dálilleymiz. Haqiyqattan da, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Atap aytqanda (1) teńsizlik a hám b lardıń qálegen mánislerinde durıs boladı, sonıń menen birge teńlik belgisi tek $a = b$ bolǵan jaǵdayda óana orınlı boladı. ▲

Shınıǵıwlар

204. n sanınıń teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|----------------|
| 1) $n \leq -2$; | 2) $n \leq 3$; | 3) $n < 4$; | 4) $n < -5$; |
| 5) $n \leq 0,2$; | 6) $n \leq -0,3$; | 7) $n < -\pi$; | 8) $n < \pi$. |

205. n sanınıń teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń kishi pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $n \geq -3$; | 2) $n \geq 6$; | 3) $n \geq -6$; | 4) $n > -4$; |
| 5) $n > -4,21$; | 6) $n \geq 3,24$; | 7) $n \geq \pi - 1$; | 8) $n \geq -\pi + 1$. |

206. x sanınıń teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1) 1) $\frac{x}{6} \leq 1$; | 2) $\frac{x}{4} < -2$; | 3) $\frac{x}{10} \leq -3,14$; | 4) $\frac{x}{7} \leq 0,15$. |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|

207. Teńsizlik belgilerinen paydalanıp, jazıń:

- 1) Búgin Ferǵana alabında (t °C) temperatura 20 °C dan joqarı emes.
- 2) Suw 5 m den kem bolmaǵan (h m) biyiklikke kóterildi.
- 3) Normal basımdaǵı suwdıń suyuq haldägeı (t °C) temperaturası 0 °C den kem emes; 100 °C den artıq emes.

4) Qalalıq jerde avtomobil transportınıń (v km/saat) qozǵalıs tezligi 70 km/saattan artıq emes.

208. $a \leq b$ bolsın. Sonda tómendegi teńsizlikler durıs bolama:

- 1) $a - 3 \leq b - 3$; 2) $5a \leq 5b$; 3) $a + 2,5 < b + 2,5$;
4) $a - 4 > b - 4$; 5) $a - 4 \leq b + 1$; 6) $a - 3,1 \leq b + 0,1$?

209. $a \geq b$ bolsın deyik. Sonda tómendegi teńsizlikler durıs bola ma:

- 1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leq -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geq \frac{b}{12}$;
4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \geq 0,4b$; 6) $-2a \leq -b$?

14- §. SANLÍ TEŃSIZLIKLERDI DÁREJEGE KÓTERIW

11-§ da shep hám oń jaqları oń bolǵan birdey belgili teńsizliklerdi aǵzalap kóbeytilgende, usı belgili teńsizlik payda bolıwı kórsetilgen edi.



Bunnan, eger $a > b > 0$ hám n natural san bolsa, onda $a^n > b^n$ bolıwı kelip shıǵadı.

○ Shárti boyıńsha $a > 0$, $b > 0$. n ta birdey $a > b$ teńsizlikti aǵzama-aǵza kóbeytip, payda etemiz: $a^n > b^n$.

1- másеле. $(0,43)^5$ hám $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ sanların salıstırıń.

△ 0,001 ge shekem anıqlıq penen $\frac{3}{7} \approx 0,428$ bolǵanı ushın $0,43 > \frac{3}{7}$ boladı. Sonıń ushın $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲



Shep hám oń jaqları oń bolǵan teńsizlikti qálegen racional dárejege kóteriwge boladı.

eger $a > b > 0$, $r > 0$ bolsa, onda

$$a^r > b^r \quad (1)$$



boladı:

ager $a > b > 0$, $r < 0$ bolsa, onda

$$a^r < b^r$$

(2)

boladı.

1- qásiyetti dálilleymiz.

○ Dáslep (1) qásiyetiniň $r = \frac{1}{n}$ bolganda durıslığın, keyin ulıwma jaǵday ushın $r = \frac{m}{n}$ bolganda durıslığın dálilleymiz.

a) Aytayıq, $r = \frac{1}{n}$ bolsın, bunda n – birden úlken natural san, $a > 0$, $b > 0$.

Shárti boyınsha $a > b$. $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligin dálillew kerek. Oylap qarayıq, bul nadurıs, yaǵníy $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$ bolsın. Onda bul teńsizlikti n natural dárejege kóterip $a \leq b$ ni payda etemiz, bul $a > b$ shártine qarsı. Demek, $a > b > 0$ den $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligi kelip shıǵadı.

b) Aytayıq, $r = \frac{m}{n}$ bolsın, bunda m hám n – natural sanlar. Onda $a > b > 0$ shártinen, dálillegenimiz boyınsha $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul teńsizlikti m natural dárejege kóterip, payda etemiz:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ yaǵníy } a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}.$$

Máselen, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, sebebi $5 > 3$; $2^{\frac{3}{4}} < 4^{\frac{3}{4}}$, sebebi $2 < 4$; $\sqrt[5]{7^2} > \sqrt[5]{6^2}$, sebebi $7 > 6$.

Endi (2) qásiyetti dálilleymiz.

○ Eger $r < 0$ bolsa, onda $-r > 0$ boladı. (1) qásiyeti boyınsha $a > b > 0$ shártinen $a^{-r} > b^{-r}$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul teńsizlikti eki bólimin oń $a^r b^r$ sanǵa kóbeytip, $b^r > a^r$ ni payda etemiz, yaǵníy $a^r < b^r$.

Máselen, $(0,7)^{-8} < (0,6)^{-8}$, sebebi $0,7 > 0,6$; $13^{-0,6} > 15^{-0,6}$, sebebi $13 < 15$; $\sqrt[4]{8^{-3}} < \sqrt[4]{7^{-3}}$, sebebi $8 > 7$.

Joqarı matematika kursında (1) qásiyet qálegen óń r haqıqıy san ushın, (2) qásiyet bolsa qálegen teris r haqıqıy san ushın durıs ekenligi dálillengen. Máselen,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ sebebi } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ sebebi } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Qatań teńsizliklerdi ($>$ yaki $<$ belgi) dárejege kóteriwdi kórip shígılǵan qásiyetleri qatań emes teńsizlikler (\geq yaki \leq belgi) ushın da durıs bolıwın tastiyıqlap ótemiz.



Solay etip, eger teńsizliktiń eki jaǵı da óń bolsa, onda oni óń dárejege kótergende teńsizlik belgisi saqlanadi, teris dárejege kótergende bolsa teńsizlik qarama-qarsısına ózgeredi.

Qatań teńsizlikler ushın $>$ hám $<$ belgileri, qatań emes teńsizlikler ushın bolsa \geq hám \leq belgileri qarama-qarsı belgiler bolatuǵının esletip ótemiz.

2- m ásele. Sanlardı salıstırıń.

$$1) \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ hám } \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad 2) \left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} \text{ hám } (0,86)^{\sqrt{2}}.$$

△ 1) $\frac{17}{18} < 1$ hám $\frac{18}{17} > 1$ bolǵanı ushın $\frac{17}{18} < \frac{18}{17}$ boladı.

Bul teńsizlikti teris $\left(-\frac{1}{3}\right)$ dárejege kóterip, payda etemiz: $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2) Dárejelerdiń tiykarların salıstırıramız. $\frac{6}{7} = 0,857\dots$ bolǵanı ushın $\frac{6}{7} < 0,86$ boladı. Bul teńsizlikti óń $\sqrt{2}$ dárejege kóterip, tómendegini payda etemiz:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}. \blacktriangle$$

3- m ásele. Teńlemeni sheshiń: $10^x = 1$.

△ $x = 0$ san bul teńlemeniń koreni boladı, sebebi $10^0 = 1$. Basqa korenler joq ekenligin kórsetemiz.

Berilgen teílemeneni $10^x = 1^x$ kórinisinde jazamız.

Eger, $x > 0$ bolsa, onda $10^x > 1^x$ demek teíleme oý korenlerge iye emes.

Eger, $x < 0$ bolsa, onda $10^x < 1^x$ demek teíleme teris korenlerge iye emes.

Solay etip, $x = 0$ berilgen $10^x = 1$ teílemeneniń jalǵız koreni eken. \blacktriangle

Usıǵan uqsas, $a^x = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$) teíleme jalǵız $x = 0$ korenge iye bolıwı dálillenedi. Bunnan,

$$a^x = a^y \quad (3)$$

teílik $x = y$ bolǵanda ǵana durıs bolıwı kelip shıǵadı, bul jerde $a > 0$, $a \neq 1$.

○ (3) teílikti a^{-y} kóbeytip, $a^{x-y} = 1$ payda etemiz, bunnan $x = y$. ●

4-másele. $3^{2x-1} = 9$ teílemeneni sheshiń.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, bunnan $2x - 1 = 2$, $x = 1,5$. \blacktriangle

$a^x = b$ teílemeneni qaraymız, bunda $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Bul teíleme jalǵız x_0 korenge iye ekenligin dálillewge boladı. x_0 san a tiykar boyınsha b sannıń logarifmi delinedi hám $\log_a b$ siyaqlı belgilenedi.

Máselen, $3^x = 9$ teílemeneniń koreni 2 sanı boladı, yaǵníy $\log_3 9 = 2$. Tap usı-

day, $\log_2 16 = 4$, sebebi $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, sebebi $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$,

sebebi $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

b sanınıń 10 tiykarı boyınsha logarifmi *onlıq logarifm* delinedi hám $\lg b$ etip belgilenedi. Máselen, $\lg 100 = 2$, sebebi $10^2 = 100$; $\lg 0,001 = -3$, sebebi $10^{-3} = 0,001$.

Shiniǵıwlar

210. Sanlardı salıstırıń:

$$1) 2^{\frac{1}{3}} \text{ hám } 3^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 5^{-\frac{4}{5}} \text{ hám } 3^{-\frac{4}{5}}; \quad 3) 5^{\sqrt{3}} \text{ hám } 7^{\sqrt{3}}; \quad 4) 21^{-\sqrt{2}} \text{ hám } 31^{-\sqrt{2}}.$$

211. Sanlardı salıstırını:

$$1) (0,88)^{\frac{1}{6}} \text{hám} \left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}};$$

$$2) \left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{hám} (0,41)^{-\frac{1}{4}};$$

$$3) (4,09)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \text{hám} \left(4\frac{3}{25}\right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}};$$

$$4) \left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} \text{hám} \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}.$$

212. Teňlemederdi sheshiń:

$$1) 6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}};$$

$$2) 3^x = 27;$$

$$3) 7^{1-3x} = 7^{10};$$

$$4) 2^{2x+1} = 32;$$

$$5) 4^{2+x} = 1;$$

$$6) \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3} = 5.$$

213. Sanlardı salıstırını:

$$1) \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} \text{hám} \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2}; \quad 2) \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} \text{hám} \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}.$$

Teňlemederdi sheshiń (**214–216**):

$$214. 1) 3^{2-y} = 27;$$

$$2) 3^{5-2x} = 1;$$

$$3) 9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0;$$

$$4) 27^{3-\frac{1}{3}y} - 81 = 0.$$

$$215. 1) \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8};$$

$$2) 2^{4x-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4};$$

$$3) 8^x 4^{x+13} = \frac{1}{16};$$

$$4) \frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5};$$

$$5) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = 2^{x+2};$$

$$6) 3^x \cdot 9^{x-1} = \frac{1}{27}.$$

$$216. 1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x;$$

$$2) (\sqrt[3]{2})^{x-1} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x};$$

$$3) 9^{3x+4} \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2} \sqrt{2}.$$

217. Esaplań::

$$1) \log_7 49;$$

$$2) \log_2 64;$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}} 4;$$

$$4) \log_3 \frac{1}{27};$$

$$5) \log_7 \frac{1}{7}.$$

218. Teńlemeňi sheshiń:

$$1) 7^{5x-1} = 49; \quad 2) (0,2)^{1-x} = 0,04; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3} = 3^{2x};$$

$$4) 3^{5x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}; \quad 5) (0,3)^{2-3x} = 0,027; \quad 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3} = 6^x.$$

15- §. BIR BELGISIZLI TEŃSIZLIKLER

1-másele. Eki qaladan bir-birine qarama-qarsı baǵitta eki poezd birdey turaqlı tezlik penen jolǵa shıqtı. Qozǵalıs baslanǵannan 2 saat ótkennen keyin olardıń júrip ótken jollarınıń qosındısı 200 km den kem bolmawı ushın poezdlar qanday tezlik penen júriwi kerek?

△ Saatına x km – bul poezdlardıń qozǵalısınıń izlenip atırǵan tezligi bolsın. Eki saatta poezdlardıń hár qaysısı $2x$ km joldı júrip ótedi. Máseleniń shártı boyınsha poezdlardıń 2 saatta júrip ótken jollarınıń qosındısı 200 km den kem bolmawı kerek:

$$2x + 2x \geq 200.$$

$$\text{Bunnan } 4x \geq 200, x \geq 50.$$

Juwabı: Hárbir poeziń qozǵalıs tezligi 50 km/saattan kem bolmawı kerek. ▲

$4x \geq 200$ teńsizliginde x hárbi menen belgisiz san belgilengen. Bul *bir belgisizli sıziqlı teńsizliklerge misal boladi*.

Mına

$$ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b$$

teńsizlikleri bir belgisizli sıziqlı teńsizlikler dep ataladı, bunda a hám b - berilgen sanlar, al x belgisiz shama.

Kóbinese, mísali,

$$4(3-x) > 5 + 2x, \quad \frac{x-3}{2} \leq \frac{x-2}{3}, \quad 1 - \frac{x}{2} < 3(x+4)$$

túrindegi teńsizlikler bir belgisizli sıziqlı teńsizliklerge keltirilgen.

Teńsizlik belgisiniń shep hám ón jaqlarında turǵan áňlatpalar *teńsizliktiń shep hám ón jaqları* dep ataladı. Teńsizliktiń shep hám ón jaqlarındaǵı hárbir qosılıwshi *teńsizliktiń aǵzası* dep ataladı.

Mısalı, $2x - 5 \geq 4 + 3x$ teńsizliginde $2x - 5 -$ shep jaǵı, al $4 + 3x -$ óń jaǵı, $2x, -5, 4$ hám $3x$ ler teńsizliktiń aǵzaları dep ataladı.

Eger mäselede payda bolǵan $2x + 2x \geq 200$ teńsizligine $x = 50, x = 51, x = 60$ tı qoysaq, onda durıs sanlı teńsizlikler payda boladı:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \geq 200; 2 \cdot 51 + 2 \cdot 51 \geq 200;$$

$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \geq 200.$$

50, 51, 60 sanlarıniń hárkı 2x + 2x ≥ 200 teńsizliginiń sheshimi delinedi.



Bir belgisizli teńsizliktiń sheshimi dep, belgisizdiń usı teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandıratuǵın mánisine aytamız.

Teńsizlikti sheshiw – onıń barlıq sheshimlerin tabıw yaması olardıń joq ekenligin aniqlaw degen sóz.

Teńsizliktegi belgisiz san qálegen hárıp penen belgileniwi mümkin.

Mısalı, mına

$$3(y - 5) < 2(4 - y), \quad 2t - 1 \geq 4(t + 3), \quad 5 - \frac{z}{2} > \frac{z}{3} - 4$$

teńsizliklerde belgisizler, sáykes túrde y, t, z hárıpleri menen belgilengen.

Teńsizliklerdi sheshiwge mísallar keltiremiz.

2- mäsele. Teńsizlikti sheshiń:

$$x + 1 > 7 - 2x.$$

△ x san berilgen teńsizliktiń sheshimi, yaǵníy x san $x + 1 > 7 - 2x$ teńsizligin durıs teńsizlikke aylandıradı, dep oylayıq.

-2x aǵzani teńsizliktiń óń jaǵınan shep jaǵına, onıń belgisin qarama-qarsısına ózgertken halda ótkizemiz. 1 sanın bolsa teńsizliktiń óń jaǵına „-“ belgisi menen ótkizemiz.

Nátiyjede usı

$$x + 2x > 7 - 1$$

durıs teńsizlikti payda etemiz.

Bul teńsizliktiń eki jaǵıń da uqsas aǵzalarǵa ıqshamlastırıramız:

$$3x > 6.$$

Endi teńsizliktiń eki jaǵın 3 ke bólip,

$$x > 2$$

ekenin tabamız.

Solay etip, x ti berilgen teńsizliktiń sheshimi, dep oylap, biz $x > 2$ ni payda ettik, x tiń 2 den úlken qálegen mánisi teńsizliktiń sheshimi bolıwına isenim payda etiw ushın barlıq pikirlerimizdi kerisinshe tártipte alıp barıw jetkilikli.

Aytaqıy, $x > 2$ bolsın. Durıs sanlı teńsizliklerdiń qásiyetlerin qollanıp, izbe-iz tómendegilerdi payda etemiz:

$$\begin{aligned}3x &> 6, \\x + 2x &> 7 - 1, \\x + 1 &> 7 - 2x.\end{aligned}$$

Yaǵníy, 2 den úlken qálegen x san berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabi: $x > 2$. ▲

Teńsizliklerdiń sheshiliwin jazıwdıa túsindirmelerdi tolıq keltiriw shárt emes. Máselen, 1 – máseleniń sheshimin bılayınsıa jazıwǵa boladı:

$$\begin{aligned}x + 1 &> 7 - 2x, \\3x &> 6, \\x &> 2.\end{aligned}$$

Solay etip, teńsizlikti sheshiwde onıń tómendegi *tiykarǵı qaǵıydalarıman* paydalanylادı:



1- qaǵıyda. *Teńsizliktiń qálegen aǵzasın onıń bir jaǵınan ekinshi jaǵına, usı aǵzaniń belgisin qarama-qarsı belgige ótkiziwge boladı, bunda teńsizlik belgisi ózgermeydi.*



2- qaǵıyda. *Teńsizliktiń eki jaǵın da nolge teń bolmaǵan bir sanǵa kóbeytiwge yaki bóliwge boladı: eger bul san onı bolsa, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi, eger bul san teris bolsa, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsısına belgige ózgeredi.*

Bul qaǵıydarlar berilgen teńsizlikti basqa, tap usınday sheshimlerge iye bolǵan teńsizlik penen almastırıwǵa imkan beredi.

Sıziqlı teńsizlikke keltiriletuǵın bir belgisizli teńsizliklerdi sheshiw ushın:

1) Belgisizge iye aǵzaların shep jaǵına, belgisizi joq aǵzaların bolsa oń jaǵına kóshiriw (1-qaǵıyda);

2) Uqsas aǵzalardı ıqshamlastırıp, teńsizliktiń eki jaǵına belgisiz aldındıǵı koefficientke (eger ol nolge teń bolmasa) bóliw (2-qaǵıyda) kerek.

3- m ásele. Teńsizlikti sheshiń:

$$3(x-2)-4(x+1) < 2(x-3)-2.$$

△ Teńsizliktiń shep hám oń jaqların ápiwayılastırıramız. Qawsırmalardı ashamız:

$$3x-6-4x-4 < 2x-6-2.$$

Belgisizge iye aǵzalardı teńsizliktiń shep jaǵına, belgisizi joq (erkin) aǵzaların bolsa oń jaǵına alıp ótemiz (1-qaǵıyda):

$$3x-4x-2x < 6+4-6-2.$$

Uqsas aǵzalardı ıqshamlastırıramız:

$$-3x < 2$$

hám teńsizliktiń eki jaǵın - 3 ke bólemiz (2-qaǵıyda):

$$x > -\frac{2}{3}.$$

Juwabi: $x > -\frac{2}{3}$. ▲

Bul sheshiliwdi qısqasha bılayınsı jazıwǵa boladı:

$$3(x-2)-4(x+1) < 2(x-3)-2,$$

$$3x-6-4x-4 < 2x-6-2,$$

$$-x-10 < 2x-8,$$

$$-3x < 2,$$

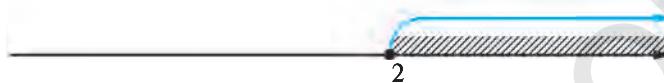
$$x > -\frac{2}{3}.$$

$x > -\frac{2}{3}$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı sanlar x sanlar kópligi san kósherinde nur menen súwretlep kórsetiledi(16-súwret). $x = -\frac{2}{3}$ noqatı bul nurǵa tiyisli emes, 16-súwrette ol *kósher dóńgelegi* menen, nur bolsa qıya sızıqlar menen súwretlengen.

x sanlardıń, máselen, $x \geq 2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı kópligi de *nur* delinedi. $x = 2$ noqatı usı nurǵa tiyisli. 17-súwrette bul noqat *qara dóńgelek* penen belgilengen.



16- súwret.



17- súwret.

4-másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Teńsizliktiń eki jaǵın da 6 ága kóbeytemiz:

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 &\geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3}, \\ (x-5) + 6 &\geq 15x - 2(x-3). \end{aligned}$$

Qawsırmalardı ashamız hám uqsas aǵzalardı ıqshamlastırıramız:

$$x-5+6 \geq 15x-2(x-3),$$

$$x+1 \geq 13x+6,$$

Bunnan

$$-12x \geq 5, \quad x \leq -\frac{5}{12}. \quad \blacktriangle$$

Bul teńsizliktiń sheshimler kópligi, yaǵníy $x \leq -\frac{5}{12}$ sanlar kópligi 18-súwrette berilgen.



18- súwret.

Usı qaralǵan mısallarda teńsizlikler ápiwayılastırılǵannan keyin belgisizdiń alındında turǵan koefficienti nolge teń bolmaǵan sızıqlı teńsizlikke keltirilgen. Ayırıム waqtları bul koefficient nolge teń boliwı da mümkiń

Endi usınday teńsizliklerge mısallar keltiremiz.

5- másele. Teńsizliklerdi sheshiń:

$$2(x+1) + 5 > 3 - (1 - 2x).$$

△ Teńsizliktiń eki jaǵın da ápiwayılastırıramız:

$$2x + 2 + 5 > 3 - 1 + 2x,$$

$$2x + 7 > 2 + 2x,$$

bunnan

$$2x - 2x > 2 - 7,$$

$$0 \cdot x > -5.$$

Aqırǵı teńsizlik x tiń qálegen mánisinde durıs boladı. Sebebi, onıń shep jaǵı qálegen x ta nolge teń hám de $0 > -5$. Demek, x tiń qálegen mánisi berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabi: x – qálegen sań. ▲

6- másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$3(2-x) - 2 > 5 - 3x.$$

△ Teńsizliktiń shep jaǵın ápiwayılastırıramız:

$$6 - 3x - 2 > 5 - 3x,$$

$$4 - 3x > 5 - 3x,$$

bunnan

$$-3x + 3x > 5 - 4,$$

$$0 \cdot x > 1.$$

Aqırǵı teńsizlik sheshimge iye emes. Sebebi, teńsizliktiń shep jaǵı x tiń qálegen mánisinde nolge teń hám $0 > 1$ teńsizlik nadurıs. Demek, teńsizliktiń sheshimlerge iye emes.

Juwabi: sheshimleri joq. ▲

219. Tastıyıqlawlardı teńsizlik kórinisinde jazıń:

- 1) x hám 17 sanlarınıń qosındısı 18 den úlken;
- 2) 13 hám x sanlarınıń ayırması 2 den kishi;
- 3) 17 hám x sanlarınıń kóbeymesi 3 den kishi emes;
- 4) x hám -3 sanlarınıń qosındısınıń eki eselengeni 2 den úlken emes;
- 5) x hám 3 sanlarınıń qosındısınıń yarımı olardıń kóbeytindisinen kishi emes.
- 6) x hám -4 sanlarınıń kóbeymesinin eki eselengeni, olardıń ayırmasınan kishi emes.

220. $10, \frac{1}{2}, 0, -1$ sanlarından qaysıları tómendegi teńsizliktiń sheshimi boladı:

- 1) $3x + 4 > 2$;
- 2) $3x + 4 \leq x$;
- 3) $\frac{1}{2}x - 3 > \leq 1 - x$;
- 4) $3 - x \geq \frac{1}{2}x$;
- 5) $0,8x + 5 > 7$;
- 6) $0,2x - 4 \leq -2$?

221. y tiń qanday mánislerinde teńsizlik durıs boladı:

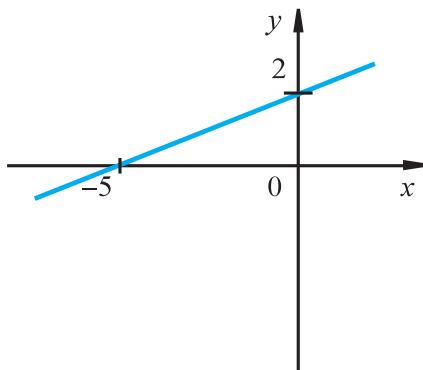
- 1) $-2y > 0$;
- 2) $-3y < 0$;
- 3) $y^2 + 1 \geq 0$;
- 4) $2y^2 + 3 \leq 0$;
- 5) $(y - 1)^2 \leq 0$;
- 6) $(y + 2)^2 \geq 0$?

222. 19- súwrette $y = kx + b$ sızıqlı funkciyasınıń grafigi súwretlengen.

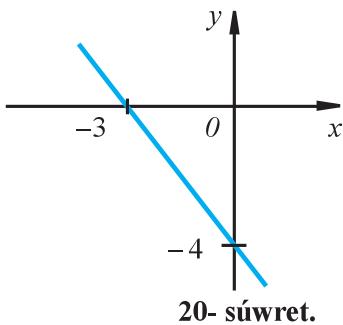
- 1) $x \geq 0$;
- 2) $x < 0$;
- 3) $x > -5$;
- 4) $x \leq -5$

bolǵanda y qanday mánislerdi qabil etetuǵınlıǵın teńsizlik túrinde jazıń.

223. 20- súwrette $y = kx + b$ sızıqlı funkciyasınıń grafigi yasınıń grafigi kórsetilgen. x tiń qanday mánislerinde y funkciyasınıń mánisleri: 1) oń; 2) teris emes; 3) teris; 4) -4 ten kishi; 5) -4 ten kishi emes; 6) -4 ten úlken bolıwın teńsizlik járdeminde kórsetiń.



19- súwret.



224. Funkciyaniń grafigin jasań hám grafik boyinsha x tiń qanday mánislerinde funkciya: 1) oń; 2) teris; 3) nolge teń; 4) 1 den úlken; 5) 1 den kishi mánislerdi qabil etiwin tabıń:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $y = 2x + 4;$ | 2) $y = 3x - 9;$ |
| 3) $y = -2x - 8;$ | 4) $y = -3x + 6.$ |

Teńsizliklerdi sheshiń (**225–226**):

- | | | |
|---------------------------------|---------------------|----------------------|
| 225. 1) $x + 2 \geq 15;$ | 2) $x - 6 < 8;$ | 3) $3 \leq y + 6;$ |
| 4) $-4 > 5 - y;$ | 5) $2z \geq z - 7;$ | 6) $3z \leq 2z + 4.$ |

- | | | |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------|
| 226. 1) $12x > -36;$ | 2) $-7x \leq 56;$ | 3) $\frac{y}{4} \leq 7;$ |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------|

- | | | |
|------------------------|------------------|--------------------|
| 4) $-5 < \frac{z}{3};$ | 5) $7,2z > -27;$ | 6) $-4,5x \geq 9.$ |
|------------------------|------------------|--------------------|

Teńsizlikti sheshiń hám onıń sheshimleriniń kópligin san kósherinde kórsetiń (**227–228**):

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------|
| 227. 1) $2x - 16 > 0;$ | 2) $18 - 3x > 0;$ | 3) $3x - 15 < 0;$ |
| 4) $25 - 5x < 0;$ | 5) $9 - 3x \geq 0;$ | 6) $2x + 4 \leq 0;$ |
| 7) $6 - 2x \leq 0;$ | 8) $1,8 + 3x \geq 0;$ | 9) $-4x + 2 \leq 0.$ |

- | | |
|---|--|
| 228. 1) $3(x + 1) \leq x + 5;$ | 2) $4(x - 1) \geq 5 + x;$ |
| 3) $2(x - 3) + 4 < x - 2;$ | 4) $x + 2 < 3(x + 2) - 4;$ |
| 5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5};$ | 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}.$ |

229. x tiń qanday mánislerinde ańlatpa oń mánislerdi qabil etetuǵınlıǵın anıqlań:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $\frac{3}{8}x + 4;$ | 2) $\frac{5}{2} - 4x;$ | 3) $2(x+3)+3x;$ |
| 4) $3(x-5)-8x;$ | 5) $\frac{1}{3}-2(x+4);$ | 6) $\frac{1}{2}-3(x-5).$ |

230. y niň qanday mánislerinde ańlatpa teris bolatuǵının anıqlańı:

$$\begin{array}{lll} 1) \ 5 - \frac{2}{3}y; & 2) \ \frac{3}{4} - 2y; & 3) \ \frac{y-2}{3} + \frac{1}{3}; \\ 4) \ \frac{8y-3}{5} - \frac{2}{5}; & 5) \ \frac{3y-5}{2} - \frac{y}{2}; & 6) \ \frac{4-5y}{6} - \frac{y}{6}. \end{array}$$

231. Teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń kishi pútin sandı tabıńı:

$$\begin{array}{l} 1) \ 4(y-1) < 2 + 7y; \\ 2) \ 4y - 9 \geq 3(y-2); \\ 3) \ 3(x-2) - 2x < 4x + 1; \\ 4) \ 6x + 1 \geq 2(x-1) - 3x. \end{array}$$

232. Teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń úlken pútin sandı tabıńı:

$$\begin{array}{ll} 1) \ 5 - 2x > 0; & 2) \ 6x + 5 \leq 0; \\ 3) \ 3(1-x) > 2(2-x); & 4) \ 4(2-x) < 5(1-x). \end{array}$$

233. 1) a niň qanday mánislerinde $\frac{a}{3}$ bólshegi $\frac{a+1}{4}$ bólsheginiń sanlı mánisinen úlken boladı?

2) b niň qanday mánilerinde $\frac{b+3}{2}$ bólshegi $\frac{b-1}{5}$ bólsheginiń sanlı mánisinen kishi boladı?

3) x niň qanday mánilerinde $\frac{3x-5}{6}$ bólshek $\frac{6x-7}{15}$ hám $\frac{3-x}{9}$ bólshekleriniń ayırmasınan úlken boladı?

4) x niň qanday mánislerinde $\frac{2-5x}{4}$ hám $\frac{7x-3}{6}$ qosındısınıń sanlı mánisi $\frac{2x+5}{18}$ bólshekten kishi boladı?

Teńsizliklerti sheshiń (**234–236**):

$$\begin{array}{ll} 1) \ 3(x-2) + x < 4x + 1; & 2) \ 5(x+2) - x > 3(x-1) + x; \\ 3) \ \frac{3x+6}{4} - \frac{x}{4} > \frac{x+2}{2}; & 4) \ \frac{2x-1}{5} - 4 < x - \frac{3x+1}{5}. \end{array}$$

- 235.** 1) $5(x+2) + 2(x-3) < 3(x-1) + 4x$;
 2) $3(2x-1) + 3(x-1) > 5(x+2) + 2(2x-3)$;
 3) $\frac{5x+3}{2} - 1 \geq 3x - \frac{x-7}{2}$; 5) $\frac{3x+2}{4} - 1 \leq 2x + \frac{x-5}{2}$;
 4) $2 - \frac{x-4}{3} \leq 2x - \frac{7x-4}{3}$; 6) $3 - \frac{x-1}{2} \geq 3x - \frac{5x-3}{3}$.
- 236.** 1) $\frac{2}{3x+6} < 0$; 2) $\frac{3}{2x-4} > 0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2} > 0$;
 4) $\frac{-2,3}{0,4x+8} < 0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x} < 0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x} > 0$.
- 237.** x tiń qanday mánislerinde $y=2,5x-4$ funkciyanıń mánisi: 1) oń; 2) teris; 3) 1 den úlken; 4) – 4 den kishi boladı?
- 238.** x tiń qanday mánislerinde $y=3,5-0,5x$ funkciyanıń mánisi: 1) oń; 2) teris emes; 3) 3,5 ten úlken emes; 4) 1 den kishi boladı?
- 239.** $y=3-2x$ funkciyanıń grafigin jasań. Grafik járdeminde x tiń grafik noqatları: 1) abscissalar kósherinen joqarıda; 2) $y=2$ tuwrı sızığınan joqarıda; 3) abscissalar kósherinen tómende; 4) $y=4$ tuwrı sızığınan tómende jaylasqan mánislerin tabıń.
 Nátiyjelerdi tiyisli teńsizliklerdi sheshiw joli menen tekserip kóriń.
- 240.** Ustalar joba boyınsha 40 besik tayarlawı kerek edi. Olar jobanı 10% ten kóbirek etip orınlawı ushın neshe besik tayarlawı kerek?

16- §. BIR BELGISIZLI TEŃSIZLIKLER SİSTEMALARÍ. SANLÍ ARALÍQLAR

1. Teńsizlikler sistemaları.

Másele. Siyimliliǵı 4000 l bolǵan bos háwız suw menen toltırıla baslandı. Usı háwızdiń 4 saattan keyin yarımlınan kóbireginiń tolıwı hám 5 saattan keyin háwızdiń tolıq tolıp tasıp ketpewi ushın, usı háwızge saatına neshe litrden suw quyw kerek?

△ x litr – hawizge 1 saat ishinde quyılatuğın suw muğdarı bolsın. Másele-níñ shárti boyınscha $4x > 2000$, $5x \leq 4000$.

Birinshi teńsizlikten $x > 500$, ekinshi teńsizlikten $x \leq 800$ kelip shıǵadı.

Juwabi: Hawizge saatına 500 l den kóp, biraq 800 l den kóp bolmaǵan suw quyıw kerek. ▲

$4x > 2000$ hám $5x \leq 4000$ teńsizligindegi belgisiz sanlar birdey san, yaǵníy x sanı boladı. Sonıń ushin, bul teńsizlikler birgelikte qaraladı hám olar tómen-degi *teńsizlikler sistemasıń* qurayıdı, dep uygarılıdı:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \quad (1)$$

Figuralı qawsırma, x tiń (1) sistemasınıń eki teńsizliginiń de durıs sanlı teńsizlikke aylandırıwshı mánislerin tabıw kerekligin bildiredi.

(1) sistema *bir belgisizli sızıqlı teńsizlikler sistemasına* mísal boladı.

Taǵı da sızıqlı teńsizlikler sistemasına keltiriletuğın bir belgisizli teńsizlikler sistemalarına mísallar keltiremiz:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$



Bir belgisizli teńsizlikler sistemasınıń sheshimi dep, belgisizdiń sistema teńsizlikleriniń barlıǵın durıs sanlı teńsizliklerge aylandırıwshı mánislerine aytıladı.

Teńsizlikler sistemasıń sheshiw – onıń barlıq sheshimlerin tabıw yamasa olardıń joq ekenligin aniqlawdan ibarat.

Mísali, $x=1$ mına

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \quad (2)$$

sistemanıń sheshimi boladı, sebebi $x=1$ bolǵanda (2) sistemanıń eki teńsizligi de durıs boladı:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \geq -4, \\ 3 \cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

(2) sistema birinshi teńsizliktiń eki jaǵın 2 ge, ekinshi teńsizliktiń eki jaǵın 3 ke bólip,

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$$

ti payda etemiz. Demek, (2) sistemaniń sheshimleri x tiń -2 den kishi bolmaǵan hám 3 den úlken bolmaǵan barlıq mánislerinen ibarat boladı.

$x \geq -2$ hám $x \leq 3$ teńsizliklerdi *qos teńsizlik* túrinde jazıwǵa boladı:

$$-2 \leq x \leq 3.$$

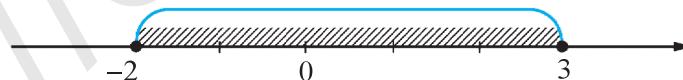
2. Sanlı aralıqlar.

Bir belgisizli teńsizlikler sistemalarınıń sheshimleri hár túrli sanlı kóplikler boladı. Bul kóplikler ózleriniń atamalarına iye.



Eger $a < b$ bolsa, onda $a \leq x \leq b$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarıń kópligi kesindi dep ataladı hám $[a; b]$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, san kósherinde x tiń $-2 \leq x \leq 3$ bolatuǵın san mánisleri kópligi, ushları -2 hám 3 noqtalarında bolǵan kesindi menen súwretlep kórsetiledi (21-súwret).



21- súwret.

Soniń ushın $-2 \leq x \leq 3$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi kesindi dep ataladı hám $[-2; 3]$ túrinde belgilenip jazıladı.

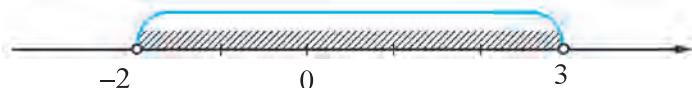
Mısalı, $[4; 7]$ kesindisi – mına $4 \leq x \leq 7$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi boladı.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ túrindegi teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı sanlardıń kópligi ushın da basqasha atamalar qollanıladı.



Eger $a < b$ bolsa, onda $a < x < b$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi interval dep ataladı hám (a; b) túrinde belgilenip jaziladi.

Mısali, $(-2; 3)$ intervalı – mına $-2 < x < 3$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınıń kópligi boladı. (22-súwret).



22- súwret.



$a \leq x < b$ yamasa $a < x \leq b$ teńsizliklerin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi yarım intervallar dep ataladı hám sáykes túrde [a; b) hám (a; b] túrinde belgilenip jaziladi.

Mısali, $[-1; 2)$ yarım intervalı – mına $-1 \leq x < 2$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınıń kópligi; $(4; 7]$ yarım intervalı – mına $4 < x \leq 7$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınıń kópligi boladı (23-súwret).



23- súwret.

Kesindiler, intervallar, yarım intervallar hám nurlar *sanlı aralıqlar* dep ataladı.

Solay etip, sanlı aralıqlardı teńsizlikler túrinde kórsetip beriw mümkin.

Teńsizlikler sistemasın sheshiwge tiyisli misallardı kórip shıǵamız.

1- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshini:

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1), \\ 2(x + 4) > x + 5. \end{cases} \quad (1)$$

△ Birinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$5x - 1 > 3x + 3,$$

$$2x > 4, \quad x > 2.$$

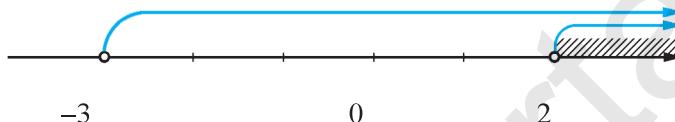
Solay etip, birinshi teńsizlik $x > 2$ bolǵanda orınlanadı.
Ekinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$2x + 8 > x + 5, \quad x > -3.$$

Solay etip, (1) sistemasiń ekinshi teńsizligi $x > -3$ bolǵanda orınlanadı.

San kósherinde (1) sistemaniń birinshi hám ekinshi teńsizlikleriniń sheshimleri kópliklerin súwretlep kórsetemiz.

Birinshi teńsizliktiń sheshimleri $x > 2$ nurunuń barlıq noqatları, al ekinshi teńsizliktiń sheshimleri $x > -3$ nurdıń barlıq noqatları boladı (24-súwret).



24- súwret.

(1) sistemaniń sheshimleri x tiń eki nurǵa bir waqıtta tiyisli bolǵan mánisleri boladı. Súwretten kórinip turǵanınday, bul nurlardıń barlıq ulıwma noqatları kópligi $x > 2$ nur boladı.

Juwabi: $x > 2$. ▲

2- m ásele. Teńsizlikler sistemasiń sheshiń:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2x + 4, \\ 4x - 3 \geq 13. \end{cases} \quad (2)$$

△ Birinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$\begin{aligned} 3x - 3 &\leq 2x + 4, \\ x &\leq 7. \end{aligned}$$

(2) sistemaniń ekinshi teńsizligin sheshemiz:

$$\begin{aligned} 4x &\geq 16, \\ x &\geq 4. \end{aligned}$$

San kósherinde (2) sistemaniń birinshi hám ekinshi teńsizlikleriniń sheshimleri kópligin súwretlep kórseteyik. Birinshi teńsizliktiń sheshimleri $x \leq 7$ nuri ekinshi teńsizliktiń sheshimleri $x \geq 4$ nur boladı (25-súwret).



25-súwret.

Súwretten kórinip turǵanınday, bul nurlardıń ulıwma noqatları kópligi $[4; 7]$ kesindisi boladı.

Juwabi: $4 \leq x \leq 7$. \blacktriangle

3- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshini:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \geq \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

\blacktriangle (3) sistemanıń birinshi teńsizligin sheshemiz:

$$5x + 16 \geq 4x + 4,$$

$$x \geq -12.$$

Ekinshi teńsizlikti sheshemiz:

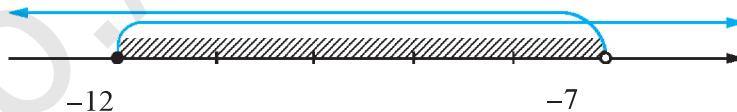
$$28 - 5x < 14 - 7x,$$

$$2x < -14,$$

$$x < -7.$$

San kósherinde $x \geq -12$ ham $x < -7$ nurların súwretleymiz. (26- súwret.). Súwretten kórinip turǵanınday, bul nurlardıń ulıwma noqatları kópligi $[12; -7)$ yarım interval boladı.

Juwabi: $-12 \leq x < -7$. \blacktriangle



26- súwret.

4- másele. Mına

$$\begin{cases} 2(1-x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

teńsizlikler sisteması sheshimge iye emesligin kórsetiń.

△ Birinshi teńsizlikti sheshemiz:

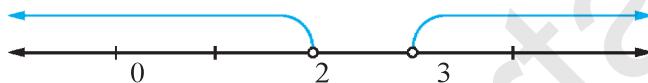
$$2 - 2x < 4 - 3x, \quad x < 2.$$

(4) sistemاسының екинши teńsizligин sheshemiz:

$$\begin{aligned} -3x &< -9, \\ x &> 3. \end{aligned}$$

San kósherinde $x < 2$ hám $x > 3$ nurların súwretleymiz (27-súwret).

Súwrette kórinip turǵanınday, bul nurlar noqatlarǵa iye emes. Demek, (4) sistema sheshimge iye emes. ▲



27-súwret.

Shiniǵıwlар

241. $-3; 0; 5$ sanlarınıң qaysıları міна teńsizlikler sistemasынı sheshimleri boladı:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 5 - x \leq 9, \\ 2 - 3x > -4; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 > 1, \\ 5 - 2x > -25; \end{cases} & 3) \begin{cases} 0,5x + 3 > 4, \\ 7 - x > 1? \end{cases} \end{array}$$

242. $-2; 0; 1$ san臺南市ını qaysıları міна teńsizlikler sistemasынı sheshimleri boladı

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 12x - 1 < 11, \\ -3 - x \leq 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 4x - 1 \geq 4 - x, \\ x + 6 > 2? \end{cases} \end{array}$$

243. Tómendegi teńsizlikler sistemasынı sheshimi bola alatuǵın barlıq pútin sanlardı tabıń:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x > 2, \\ x < 7; \end{cases} & 2) \begin{cases} x \leq 3, \\ x > -1; \end{cases} & 3) \begin{cases} x \leq 2, 7, \\ x \geq 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} x \geq -5, 1, \\ x < 5, 1. \end{cases} \end{array}$$

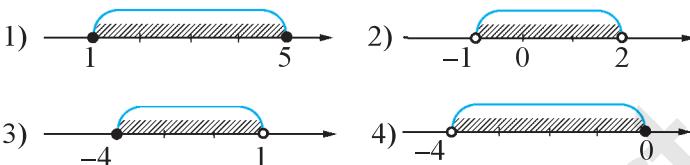
244. Berilgen qos teńsizlikti qanaatlandırıwshı x san臺南市ını kópligin sanlı aralıqlardын belgileniwlerinen paydalanıp jazıń:

$$\begin{array}{lll} 1) 1 \leq x \leq 5; & 2) -1 \leq x \leq 3; & 3) -1 < x < 4; \\ 4) 1 < x < 2; & 5) -3 \leq x < 1; & 6) -4 < x \leq -2. \end{array}$$

245. Berilgen sanlı aralıqqa tiyisli x sanlarınıń kópligin qos teńsizlik kórinisinde jazıń hám onı san kósherinde súwretleń:

- 1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;
- 4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. 28-súwrette berilgen x sanlarınıń kópligin qos teńsizlik túrinde, son-dayaq, sanlı aralıqtıń belgileniwleri járdeminde jazıń:

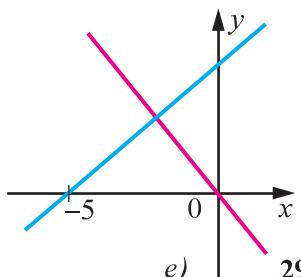
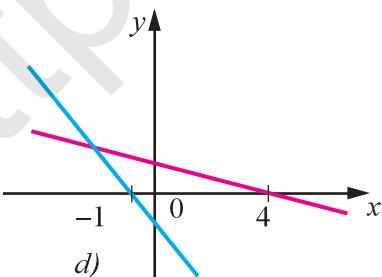
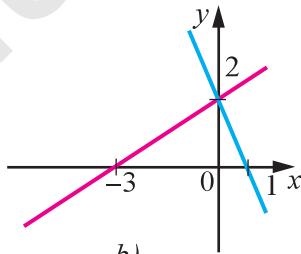
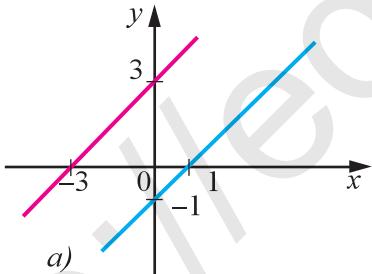


28- súwret.

247. $[2; 3]$ kesindisi $(1; 4)$ aralığına tiyisli me?

248. $[2; 4]$ hám $[3; 5]$ kesindileri uluwma noqatqa iye bola ma?

249. Bir koordinata tegisliginde eki sızıqlı funkciyanıń grafikleri súwretlengen (29-súwret). x tiń qanday mánislerinde usı eki funkciyanıń mánisi bir waqıtta ón boladı? Al, qanday mánislerinde bir waqıtta teris boladı?



29- súwret.



*Tuwrimiyeshliktiń tárepleri natural sanlar menen aňlatılıadi.
Tuwrimiyeshlik perimetriń shaması onıń maydanınıń shamasına
teń bolıwı ushın olar qanday uzınlıqlarǵa iye bolıwı kerek?*

№ 3

250. Bir koordinata tegisliginde $y = -2x - 2$ hám $y = 2 - \frac{x}{2}$ funkciyasınıń grafiklerin jasań. Abscissalar kósherinde x tiń eki funkciyasınıń mánisleri: 1) on; 2) teris bolatuǵın mánisleriniń kópligin belgileń.

251. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $(x - 3)(2x - 3) + 6x^2 \geq 2(2x - 3)^2$;
- 2) $(5 - 6x)(1 + 3x) + (1 + 3x)^2 \leq (1 + 3x)(1 - 3x)$;
- 3) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8x^3 \geq -2(x + 3)$;
- 4) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq x(x^2 + 2) + 1$.

Teńsizlikler sistemasınıń barlıq sheshimlerin tek bir teńsizlik penen jazıń hám sheshimlerdiń kópligin san kósherinde súwrettleń (**252–253**):

252. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 0. \end{cases}$

Teńsizlikler sistemasınıń barlıq sheshimlerin qos teńsizlik túrinde jazıń hám bul kópliki san kósherinde súwrettleń (**254–255**):

254. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

- 255.** 1) $\begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \geq -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geq 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x \leq 7,5, \\ x \geq -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Teńsizlikler sistemasıň sheshiň (**256–259**):

- 256.** 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \geq 0, \\ 2x \geq 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \geq 0; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0, \\ 5x + 15 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ 3x \leq 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$
- 257.** 1) $\begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \leq 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3 \leq 0, \\ 3x + 9 \leq 0; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24 < 6x, \\ 3x \geq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 14 > 0, \\ 3x - 6 \leq 0. \end{cases}$
- 258.** 1) $\begin{cases} 7 - 2x \geq 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \leq 0, \\ 9x + 18 \leq 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 10 - 2x \geq 0, \\ 4x - 8 \geq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 12 \geq 0, \\ 15 - 3x \leq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6 - 4x \leq 0, \\ 3x + 9 > 0. \end{cases}$
- 259.** 1) $\begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1, \\ 3x - 2 \leq 4x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 < 2(2x + 1) - x; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leq 6(1 - x) + 7. \end{cases}$

260. Teńsizlikler sistemasınıń sheshimleri bolǵan barlıq pútin sanlardı tabıń:

$$1) \begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 1 - 0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 1 + 0,2x \geq 0, \\ 0,5x - 1 < 0. \end{cases}$$

261. x tiń qanday mánislerinde $y=0,5x+2$ hám $y=3-3x$ funkciyasınıń mánisleri bir waqitta: 1) oń; 2) teris; 3) 3 ten úlken; 4) 3 ten kishi boladı?

262. x tiń qanday mánislerinde $y=x-2$ hám $y=0,5x+1$ funkciyasınıń mánisleri bir waqitta: 1) teris emes; 2) oń emes; 3) 4 ten kishi emes; 4) 4 ten úlken emes boladı?

263. Úshmúyeshliktiń bir tárepi 5 m, al ekinshi tárepi bolsa 8 m. Eger, úshmúyeshliktiń perimetri: 1) 22 m den kem; 2) 17 m den artıq bolsa, onıń úshinshi tárepi qanday boliwı mümkin?

264. Eger pútin sannıń $\frac{3}{2}$ úlesinen, onıń $\frac{1}{4}$ úlesin alsaq, onda 29 dan úlken san payda boladı, eger usı sannıń $\frac{3}{2}$ úlesinen onıń $\frac{1}{3}$ úlesin alsaq, onda 29 dan kishi san payda boladı. Usı pútin sandı tabıń.

265. Eger pútin sannıń eki eselengen kóbeymesine onıń yarımı qosılsa, onda 92 den kishi san payda boladı, eger usı pútin sannıń eki eselengen kóbeymesinen onıń yarımı alınsa, onda 53 ten úlken san payda boladı. Usı pútin sandı tabıń.

17-§. SANNÍN MODULI. MODUL QATNASQAN TEŃLEME HÁM TEŃSIZLIKLER

1. Sannín moduli.

Sannín moduli túsinigin eske túsırip óteyik:

1) *Oý sannín moduli, usı sannín ózine teń.*

Máselen, $|3| = 3$, $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$, $|2,4| = 2,4$.

2) *Teris sannín moduli oǵan qarama-qarsı sanǵa teń.*

Máselen, $|-2| = -(-2) = 2$, $\left|-\frac{5}{6}\right| = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$, $|-1,5| = -(-1,5) = 1,5$.

3) *Noldiń moduli nolge teń: $|0| = 0$.*

Solay etip, san moduliniń anıqlaması tómendegishe boladı:

$$|a| = a, \text{ eger } a \geq 0 \text{ bolsa;}$$

$$|a| = -a, \text{ eger } a < 0 \text{ bolsa.}$$

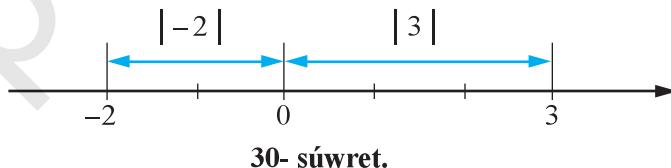
Bul anıqlama formula menen qısqasha tómendegishe jazıladı:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa;} \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

San moduliniń geometriyalıq maǵanasın qarap óteyik.

San kósherinde, mísali, 3 hám -2 noqtaların súwretlep kórseteyik (30-súwret).

Súwretten kórinip turǵaninday $|3| = 3$ – bul 0 noqatınan 3 noqatına shekemgi aralıq, al $|-2| = 2$ – bul 0 noqatınan -2 noqatına shekemgi aralıq.



Solay etip, $|a|$ – a sannín moduli, geometriyalıq kóz-qarastan qaraǵanımızda, 0 naqatınan a sanın súwretlep kórsetiwshi noqatqa shekemgi aralıq boladı.

2. Belgisizi modul belgisi menen berilgen teńleme.

1-másele. Teńlemeni sheshiń:

$$|x| = 7.$$

△ 1) $|x| \geq 0$ bolsın. Onda moduldiń anıqlaması boyinsha $|x| = x$ hám teńleme tómendegishe kóriniske iye boladı:

$$x = 7,$$

yańıy, $x = 7$ — berilgen teńlemeniń koreni boladı;

2) $|x| < 0$ bolsın. Onda moduldiń anıqlaması boyinsha $|x| = -x$ bolıp teńleme tómendegidey kóriniske iye boladı:

$$-x = 7,$$

bunda $x = -7$ — berilgen teńlemeniń koreni boladı;

Juwabi: $x_1 = 7, x_2 = -7$. ▲

2- másele. $|3x + 2| = 1$ teńlemeni sheshiń.

△ 1) $3x + 2 \geq 0$ bolsın. Bunda $3x + 2 = 1, 3x = -1, x = -\frac{1}{3}$;

2) $3x + 2 < 0$ bolsın. Bunda $3x + 2 = -1, 3x = -3, x = -1$.

Juwabi: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1$. ▲

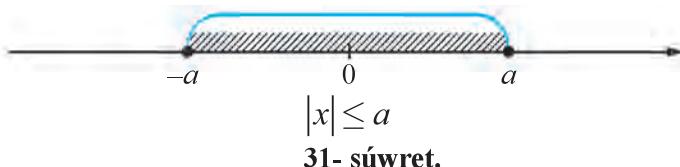
3. Belgisizi modul belgisi menen berilgen teńsizlikler.

Mına

$$|x| \leq a, \text{ bunda } a > 0$$

teńsizlikti qaraymız.

Bul teńsizlikti 0 noqatından baslap a sanınan úlken bolmaǵan aralıqta jatıwshı barlıq x noqatlari, yańıy $[-a; a]$ kesindisiniń noqatlari qanaatlandırıdı (31-súwret).



$[-a; a]$ kesindisi – mına $-a \leq x \leq a$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı x sanlarınıń köpligi boladı.



Demek, $|x| \leq a$ teńsizlik $-a \leq x \leq a$ qos teńsizliginiń tap ózin ańlatadı, bunda $a > 0$.

Máselen, $|x| \leq 2,5$ teńsizligi $-2,5 \leq x \leq 2,5$ ti bildiredi; $|x| < 3$ teńsizlik $-3 < x < 3$ ti bildiredi.

3- másele. $|5 - 3x| < 8$ teńsizlikti sheshiń.

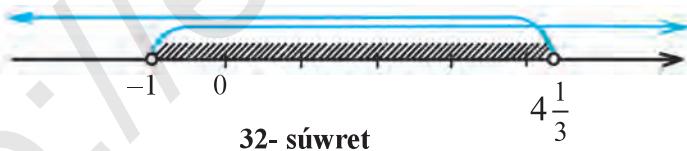
△ BBerilgen teńsizlikti mınaday türde jazıp alamız:

$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Bul qos teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasiń dál ózin ańlatadı:

$$\begin{cases} 5 - 3x < 8, \\ 5 - 3x > -8. \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ ekenin tabamız (32-súwret). ▲

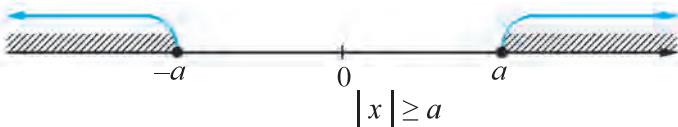


Mına

$$|x| \geq a, \text{ bunda } a > 0,$$

teńsizlikti qaraymız.

Bul teńsizlikti 0 noqatınan a dan kishi bolmaǵan aralıqta jatiwshı barlıq x no-qatlarınıń köpligi, yaǵníy $x \geq a$ hám $x \leq -a$ nurlarınıń noqatları qanaatlandırıdı (33-súwret).



33-súwret.

4- m ásele. Teńsizlikti sheshiň: $|x - 1| \geq 2$.

△ 1) $x - 1 \geq 0$ bolsın. Bunda $x - 1 \geq 2$. Tómendegi teńsizlikler sistemasın payda etemiz:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 \geq 2. \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $x \geq 3$ ti tabamız.

2) $x - 1 < 0$ bolsın. Bunda $-(x - 1) \geq 2$ yaki $x - 1 \leq -2$.

Sonda mına tómendegi teńsizlikler sistemasın payda etemiz:

$$\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x - 1 \leq -2. \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $x \leq -1$ di tabam.

Solay etip, $|x - 1| \geq 2$ teńsizliginiň sheshimleri birinshiden, $x \geq 3$ sanlar, al ekinshiden $x \leq -1$ sanlar boladı.

Juwabi: $x \leq -1, x \geq 3$. ▲

$|x - 1| \geq 2$ teńsizliktiň sheshimleri 34-súwrette berilgen.



34-súwret.

Eger

$$|x| \leq a$$

teńsizliginde a sanı nolge teń bolsa, onda teńsizlik $x = 0$ den ibarat bolğan tek bir ýana sheshimge iye boladı; aytayıq, eger $a < 0$ bolsa, onda teńsizlik sheshimlerge iye bolmaydı.

Eger

$$|x| \geq a$$

teńsizliginde a san nolden kishi yaki oǵan teń bolsa, onda qálegen san onıń sheshimi boladı.

Shiniǵıwlar

266. (Awızeki) Sannıń moduli nege teń:

1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) -2,1; 6) $-\frac{3}{8}$?

Teńlemeni sheshiń (**267–270**):

267. 1) $|x|=2,5$; 2) $|x|=1,5$; 3) $|x-1|=2$;

4) $|x+3|=3$; 5) $|x+4|=4$; 6) $|x-4|=4$.

268. 1) $|x+4|=0$; 2) $|x-2|=0$; 3) $|2x-3|=0$;

4) $|3-4x|=0$; 5) $|7+3x|=0$; 6) $|2x+5|=0$.

269. 1) $|3x-5|=5$; 2) $|4x+3|=2$; 3) $\left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$;

4) $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x-10|=4$; 6) $|0,5-2x|=2,5$.

270. 1) $|-x|=3,4$; 2) $|-x|=2,1$; 3) $|5-x|=5$;

4) $|3-x|=8$; 5) $|x-7|=1$; 6) $|5-x|=2$.

271. Teńsizliktiń sheshimleriniń kópligin san kósherinde súwretleń:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Moduli teńsizlikti qos teńsizlik túrinde:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3,5$; 4) $|x| \leq 2,4$.

273. Qos teńsizlikti bir modulli teńsizlik túrinde jazıń:

1) $-3,1 < x < 3,1$; 2) $-0,3 \leq x \leq 0,3$; 3) $-4,8 < x < 4,8$.

Teńsizliklerdi sheshiń (**274–277**):

274. 1) $|1+x| \leq 0,3$; 2) $|2+x| < 0,2$; 3) $|3-x| \leq \frac{2}{3}$;

4) $|1-x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x-1| \leq 1$; 6) $|x-4| \leq 2$.

275. 1) $|3x-4| < 5$; 2) $|2x+3| < 3$; 3) $|2-3x| \leq 2$;

4) $|5-4x| \leq 1$; 5) $|4x-1| < 7$; 6) $|3-2x| \leq 3$.

276. 1) $|x+1| > 1,3$; 2) $|x-2| \geq 1,1$; 3) $|1-x| \geq \frac{1}{2}$;

4) $|3-x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x-1| > 3,8$; 6) $|5-4x| \leq 1$.

277. 1) $|4x-3| \geq 3$; 2) $|3x+2| > 1$; 3) $|3x-2| > 4$;

4) $|4-5x| \geq 4$; 5) $|6x-1| \leq 2$; 6) $|3-5x| \geq 2$.

278. x tiń tómendegi orınlanaǵıń barlıq pútin mánislerin tabıńı:

1) $|5x-2| < 8$; 2) $|5x+3| < 7$; 3) $|5-3x| \leq 1$;

4) $|3-4x| \leq 3$; 5) $|2x-5| \leq 1$; 6) $|3-4x| \leq 6$.

279. Teńsizlikti sheshiń:

1) $|2x-3| > 5$; 2) $|3x-1| \leq 4$; 3) $|1-3x| \leq 1$;

4) $|3-2x| \geq 3$; 5) $|1,5x-2| \leq 1$; 6) $|4-3x| > 2$.

18- §. SHAMALARDÍN JUWÍQ MÁNISLERI. JUWÍQLASÍW QÁTELIGI

Kündelikli turmista gezlesetuğın hár qıylı máselerlerdi sheshiwde kóbinese hár qıylı shamalardıń juwıq mán-isleri menen is júrgiziwe tuwra keledi. Juwıq mánisler ádette kóp muğdardaǵı nárselerdi, mísalı, toǵaydaǵı tereklerdiń sanın esaplawda; ásbaplar járdeminde hár qıylı shamalardı, máselen uzınlıqtı, mas-sarı, temperaturanı ólshewde, sanlardı dóńgeleklewde payda boladı.

Bir neshe misallardı qarap óteyik:

1) Gárezsiz Ózbekstannıń birinshi pochta markası ózbek shayırası Mohlarayım Nadiraǵa baǵışhlangan bolıp, 2 million nusqada aylanısqa shıgarıldı;

- 2) klasta 36 oqıwshı bar;
- 3) Ózbekstanda 10 000 nan artıq uluwma bilim beretuğın mektepler bar;
- 4) Nawayı - Nókis temir jolınıń uzınlığı 342 km;
- 5) jumısshi kassadan 70 600 swm aldı;
- 6) sóńgi jıllarda Ózbekstanda góalle egininiń maydanı 300 miń gektarǵa kóbey-di;
- 7) Tashkentten Buxaraǵa shekemgi aralıq 500 km;
- 8) bir kilogramm biydayda 30 000 dana biyday dáni bar;
- 9) Jerden Quyashqa shekemgi qashiqlıq 1,5 · 108 km;
- 10) Ózbekstan Respublikası Mámlekетlik bayraǵında 12 juldız bar.

Bunda 2-, 5-, 10-misallardaǵı shamalardıń mánisleri anıq, al qalǵan jaǵ-daylardaǵıları bolsa juwıq shamalar.

1- m ásele. Oqıwshılardıń birewi mektepte neshe oqıwshı oqıp atır degen sorawǵa «1000 oqıwshı» dep juwap berdi, al ekinshi oqıwshı bolsa, tap usı sorawdıń ózine «950 oqıwshı»

dep juwap berdi. Eger usı mektepte 986 oqıwshı bilim alıp atrıǵan bolsa, onda qaysısınıń juwabı anıǵıraq?

△ Birinshi oqıwshı 14 ke góana, al ekinshi oqıwshı bolsa 36 gó aljasti. Demek, birinshi oqıwshınıń juwabı anıǵıraq. △

Sónı aytıp ótemiz, birinshi jaǵdayda oqıwshılar sanınıń dál hám juwıq mánisleri arasındaǵı pariq (ayırma) teris san:

$$986 - 1000 = -14,$$

al ekinshi jaǵdayda ol shama ón:

$$986 - 950 = 36.$$

Is júzinde juwıq mánistiń dál mánisten anaw yaki mınaw tárepke awısqanlıǵın, yaǵníy dál mánisi menen juwıq mánisi arasındaǵı ayırmániń modulin (absolut mánisin) biliw áhmiyetke iye.



Shamanıń dál mánisi menen onıń juwıq mánisi arasındaǵı ayırmániń moduli juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi dep ataladı.

Solay etip, eger de a – dál mánisi x qa teń bolǵan shamanıń juwıq mánisi bolsa, onda absolyut qátelik

$$|x-a|$$

ǵa teń boladı.

Juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi, kóbinese ápiwayı túrde qátelik dep te ataladı.

2-másele. Úshmúyeshliktiń ishki mýyeshleriniń qosındısın transportir járdeminde esaplap tabıwda 182° qa teń nátiyje payda boldı. Bul juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi qanday?

△ Úshmúyeshliktiń ishki mýyeshleriniń qosındısınıń dál mánisi 180° qa teń, juwıq mánisi 182° qa teń. Sonıń ushın absolyut qátelik

$$|180^\circ - 182^\circ| = |-2^\circ| = 2^\circ$$

ǵa teń. ▲

3 - másele. $\frac{3}{7}$ sanınıń 0,43 ke teń onlıq bólshekke juwıqlasıw qáteligin tabıń.

$$\Delta \left| \frac{3}{7} - 0,43 \right| = \left| \frac{3}{7} - \frac{43}{100} \right| = \left| \frac{300 - 301}{700} \right| = \left| -\frac{1}{700} \right| = \frac{1}{700}. \quad \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

- 280.** Mısaltarda keltirilgen sanlardan qaysıları shamalardıń dál mánislerin, qaysıları juwıq mánislerin ańlatadı.
- 1) bir shórek 500 swm turadı;
 - 2) 12 betli dápter 60 swm turadı hám qalınlığı 3 mm;
 - 3) bir jılda avtomobil zavodı 200 mın avtomobil islep shıgaradı?

- 281.** Bir oqıwshı kitaptıń enin masshtablı sızǵısh penen ólshegende 16,2 cm den 16,4 cm ge shekem aralıqtaǵı nátiyjeni payda etti.
1) Sonda kitap eniniń dál mánisin aytıw mümkin be?
2) Kitaptıń eniniń bir neshe juwıq mánisin kórsetiń.
- 282.** $\frac{4}{9}$ sanınıń:
1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,3; 4) 0,44; 5) 0,43; 6) 0,45
sanına juwıqlasıwınıń absolyut qáteligin tabıń.
- 283.** Tómendegi sanlardıń juwıqlasıw qáteligin tabıń:
1) 0,1975 sanınıń 0,198 sanı menen;
2) $-3,254$ sanınıń $-3,25$ sanı menen;
3) $-\frac{8}{17}$ sanınıń $-\frac{1}{2}$ sanı menen;
4) $\frac{22}{7}$ sanınıń 3,14 sanı menen.
- 284.** a sanı x sanınıń juwıq mánisi bolsın. Eger de
1) $x = 5,346$, $a = 5,3$; 2) $x = 4,82$, $a = 4,9$;
3) $x = 15,9$, $a = 16$; 4) $x = 25,08$, $a = 25$
bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń.
- 285.** Tórtmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń ekenligi belgili. Tórtmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısın transportirdiń járdeminde ólshep kórligende 363° lıq nátiyjege iye boldıq. Usı juwıqlasıwdıń qáteligi nege teń?
- 286.** $y = 7x + 9$ hám $y=1$ tuwrı sıziqlar grafikleri járdeminde bul tuwrı sıziqlardıń abscissası -1 ge teń bolǵan noqatta kesilisetugınlığı anıqlandı. Usı juwıqlasıwdıń qáteligi neshege teń?
- 287.** 0,33 onlıq bólsheginiń $\frac{1}{3}$ sanınıń absolyut qáteligi 0,01 den kishi juwıq mánisi bolıwı durıs pa?

19-§. QÁTELIKTI BAHALAW

Kóp gana jaǵdaylarda shamalardıń dál mánisleri belgisiz boladı, sonıń ushın juwıqlasıwdıń absolyut qáteligin tabıw múnkin bolmaydı. Solay bolsa da, kóbinese, eger artıǵı menen de kemi menen de juwıqlasıwlar belgili bolsa, *absolyut qátelikti bahalaw* múnkin boladı.

1-másele. Bólme termometrinegi suyıqlıq baǵanasınıń joqarı shetki shkalanıń 21 hám 22° C belgileri aralığında turıptı. Temperaturanıń juwıq mánisi sıpatında 21,5 sanı alındı. Juwıqlasıwdıń absolyut qáteligin bahalań.

△ t temperaturasınıń dál mánisi belgisiz, biraq

$$21 \leq t \leq 22$$

dep tastıyqlaw múnkin.

Temperaturanıń dál mánisi menen juwıq mánisi arasındaǵı ayırmanı, yaǵníy $t - 21,5$ ayırmasın bahalaw ushın bul qos teńsizliktiń hárbir úlesinen 21,5 sanın alamız.

$-0,5 \leq t - 21,5 \leq 0,5$ ti, yaǵníy $|t - 21,5| \leq 0,5$ ti payda etemiz. Solay etip, absolyut qátelik 0,5 ten úlken emes. ▲

Bul jaǵdayda temperatura 0,5 ke shekemgi dállikte ólshengen dep ataladı hám bılay jazıladı:

$$t = 21,5 \pm 0,5.$$

Uluwma alganda, eger de a sanı x sanınıń juwıq mánisi hám $|x - a| \leq h$ bolsa, onda x sanı a sanına h qa shekemgi dállik penen teń dep ataladı hám bılay jazıladı:

$$x = a \pm h. \quad (1)$$

$$|x - a| \leq h \text{ teńsizligi}$$

$$a - h \leq x \leq a + h \quad (2)$$

qos teńsizliktiń tap ózin ańlatatuǵınlıǵın eskertip ótemiz.

Mısali, $x = 2,43 \pm 0,01$ jazıwı, x sanın 2,43 ge 0,01 ge shekemgi dálliktegi teńligin, yaǵníy $2,43 - 0,01 \leq x \leq 2,43 + 0,01$ yamasa $2,42 \leq x \leq 2,44$ ekenligin bildiredi.

2,42 hám 2,44 sanları x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen alıngan juwıq mánisleri boladı.

Ádette, 1-máselede qaralǵan ólshewlerde temperaturanıń juwıq mánisi sıpatında 21 yamasa 22 °C alındı. Bul jaǵdayda hárbir juwıqlasıwdıń ab-

solyut qáteligi 1°C dan aspaydı. Sonıń ushın, ádette, bóliniw aralığı 1°C dan bolǵan termometr járdeminde temperaturanı ólsheuw usılı 1°C ǵa shekemgi dállik penen alıp barıladı, dep esaplanadı.

Usıǵan uqsas basqa ólsheuw ásbapları ushın da ólsheuw anıqlığı, ádette ásbaptıń eń kishi bóliniwi boyınsha esaplanadı. Mısalı, uzınlıq mikrometr menen $0,01\text{ mm}$ ge shekemgi dállikte ólshenedi, temperatura medicinalıq termometr menen $0,1^{\circ}\text{C}$ qa shekemgi dállikte ólshenedi, sekundlıq tili bar qol saatı waqtıttı 1 sekundqa shekemgi dállikte kórsetedi.

Solay etip, ólsheuw qáteligi shamanıń qanday ásbap penen ólshenip atırǵanlıǵına baylanıslı. Juwiqlasıw qáteligi qansha kishi bolsa, ólsheuw dálligi 4 sonshelli anıq boladı.

Juwıq mánislerden kóbinshe ápiwayı bolsheklerdi, onlıq bolsheklerge aylandırıwda paydalanyladi.

2- másеле. $0,43$ sani $\frac{13}{30}$ bolsheginiń $0,01$ ge shekemgi dállikte alıńǵan

juwıq mánisi ekenligin dálilleń.

△ Bunda

$$\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$$

ekinligin dálillew talap etiledi. Ayırmanı esaplaymız:

$$\frac{13}{30} - 0,43 = \frac{13}{30} - \frac{43}{100} = \frac{130-129}{300} = \frac{1}{300}.$$

Demek, $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| = \frac{1}{300}; \frac{1}{300} \leq 0,01$ bolǵanı ushın $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$

boladı. ▲

Shiniǵıwlar

288. Tómendegi jazıwlar neni ańlatadı?

1) $x = 3,9 \pm 0,2;$ 2) $x = 0,4 \pm 0,15;$ 3) $x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{10};$

4) $x = 0,73 \pm 0,01;$ 5) $x = -135 \pm 1;$ 6) $x = -2\frac{1}{5} \pm \frac{1}{10};$

7) $x = -1 \pm 0,1;$ 8) $x = 9,5 \pm 0,2;$ 9) $x = -3,2 \pm 0,01?$

- 289.** Qos teńsizlik túrinde jazıń:
- 1) $x = 11 \pm 0,5$; 2) $m = 142 \pm 1$; 3) $l = 3,7 \pm 0,1$;
4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = m \pm n$.
- 290.** 1) $x = 4 \pm 0,1$; 2) $x = 2,7 \pm 0,1$;
3) $x = -0,6 \pm 0,12$; 4) $x = -5,9 \pm 0,2$
- ekeni belgili. x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen alıńǵan juwıq mánislerin tabıń.
- 291.** $x = 5,8 \pm 0,2$ bolsın. Anıq mánisi tómendegige teń bolıwı múmkın be?
- 1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?
- 292.** $x = 8,7 \pm 0,4$ bolsın. x san tómendegige teń bolıwı múmkın be?
- 1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?
- 293.** x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen juwıqlasılıwlarınıń arifmetikalıq ortasına teń bolǵan mánisin kórsetiń:
- 1) $20 \leq x \leq 22$; 2) $5 \leq x \leq 6$; 3) $4,5 \leq x \leq 4,8$;
4) $3,7 \leq x \leq 4,1$; 5) $2,81 \leq x \leq 2,83$; 6) $0,55 \leq x \leq 0,6$.
- 294.** Dálilleń:
- 1) 2,7 sanı 2,7356 sanınıń 0,5 ge shekemgi dállikte alıńǵan juwıq mánisi;
2) 0,27 sanı $\frac{11}{40}$ bólsheginiń 0,01 ge shekemgi dállikte alıńǵan juwıq mánisi.
- 295.** 4 sanı 4,3 bólsheginiń 0,5 ke shekemgi dállikte alıńǵan juwıq mánisi bola ala ma? 0,1 ge shekemgi dálliktegi she?
- 296.** Optikalıq hám radiolokaciyalıq ólshevlerge qaraǵanda Merkuriydiń diametri (4880 ± 2) km ge, Veneraniń radiusı (6050 ± 5) km ge teń. Ólshev nátiyjelerin qos teńsizlik túrinde jazıń.
- 297.** Jumısshi, cilindrдиń diametrin ólshep kóriw ushın 10,00; 10,04; 10,08 mm hám taǵı basqa 10,56 mm diametrli shkalaǵa iye bolǵan kalibrometrden paydalanaǵdı. Bunda ólshevdiń dálligi qanday bolǵan?
- 298.** Zavodtıń texnikalıq qadaǵalaw bóliminde cilindr diametri 0,1 mm ge shekemgi dállikte ólshenedi. Kórsetpe boyınscha cilindr diametri $167,8 \leq d \leq 168,2$ aralıqta bolsa, onda cilindr jaramlı bolıp esaplanadı. Eger ólshev nátiyjesinde cilindr diametri 168,1 mm ge teń bolsa, texnikalıq qadaǵalaw bólimi onı jaramsız dep shıǵara ala ma?

20-§. SANLARDÍ DÓNGELEKLEW

Sanlardı dóngeleklew fizika, matematika, texnikanıń kóp ógana ámeliy máselelerinde hár qıylı shama (muğdar) larınıń juwiq mánisleri menen jumıs alıp barganda paydalanyladi.

Mısalı, teńiz beti qáddinde hám 45° lıq keňliklerde denelerdiń erkin túsiw túsiwiniń $9,80665 \text{ m/s}^2$ qa teń. Ádette, bul san onnan birge shekemgi dállikte dóngeleklenedi: yaǵníy $9,8$ dep alınadı. Onıń jazılıwi: $g \approx 9,8$ (g shama menen $9,8$ ge teń dep oqıladı).

! $x \approx a$ jazıwi a sanı x sanınıń juwiq mánisi ekenligin ańlatadı.

1- másele. Tuwrımúyeshlik formasındaǵı jer uchastkasınıń maydanı 25 m^2 qa, uzınlığı 8 m ge teń. Usı uchastkanıń enin tabıń.

△ Jer uchastkasınıń eni l metr bolsın, sonda

$$l = 25 : 8 = 3,125.$$

Juwabi: $3,125 \text{ m}$. ▲

Is júzinde bunday nátiyje, ádette onnan birge shekem dóngeleklenip alınadı, yaǵníy $l \approx 3,1$ dep esaplanadı.

Sanlardı dóngeleklew qaǵıydasin tómendegi mísalda qarap ótemiz. $3,647$ sanın júzden birge shekemgi dállikte dóngeleklew talap etilsin deyik, kemi menen dóngeleklew ushin aqırğı 7 sanın túsırip qaldırımız, nátiyjede $3,64$ ti payda etemiz. Artığı menen dóngeleklew ushin aqırğı 7 sanın túsırip qaldırıp, onnan aldińğı sandı bir birlikke arttıramız. Nátiyjede $3,65$ kelip shıǵadı.

Birinshi jaǵdayda dóngeleklewdiń absolyut qáteligi

$$|3,647 - 3,64| = 0,007$$

ge, ekinshi jaǵdayda

$$|3,647 - 3,65| = 0,003$$

ge teń.

Ekinshi jaǵdayda dóngeleklewdigi qáteligi birinshi jaǵdaydaǵıdan kem. Demek, qaralıp atrıǵan mísalda artığı menen dóngeleklew maqulıraq boladı eken.

Dóngeleklewdiń absolyut qáteligi eń kishi mániske iye bolıwı ushin onı sanlardı dóngeleklewde tómendegi qaǵıydadan paydalanyladi:

! *Eger birinshi túsırilip qaldırılatuǵın cifr 5 ten kishi bolsa, onda kemi menen dóngeleklew kerek, eger bul cifr 5 ten artıq bolsa yaması oǵan teń bolsa, onda artığı menen dóngeleklew kerek.*

Mısalı, onnan birge shekem dóńgeleklewde

$$3,647 \approx 3,6, \quad 2,658 \approx 2,7$$

ni payda etemiz, júzden birge shekem dóńgeleklewde

$$0,6532 \approx 0,65, \quad 9,0374 \approx 9,04$$

ti payda etemiz.

2- m ásele. $\frac{2}{7}$ sanın usı sanǵa 0,01 ge shekemgi dállikte teń bolǵan onlıq bólshek penen almastırıń.

△ 2 ni 7 ge bóliwdiń nátiyjesin útirden keyin úsh cifrlı onlıq bólshek túrinde jazamız:

$$\frac{2}{7} = 0,285\dots$$

Bul sandı júzden birge shekemgi dállikte dóńgeleklep, $\frac{2}{7} \approx 0,29$ dı payda etemiz. ▲

Bul máseleni sheshiw ushın $\frac{2}{7}$ niń 0,01 ge shekemgi dálliktegi juwıq mánisin tabıwda onıń útirden keyingi úsh cifrin tabıw kerek boladı. Eger $\frac{2}{7}$ sanınıń 0,001 ge shekemgi dálliktegi juwıq mánisin tabıw talap etilgen bolsa, onda útirden keyingi tórt onlıq cifrin tabıw kerek bolar edi.

Shınıǵıwlar

299. Sanlardı reti menen 0,001, 0,01, 0,1 ge deyin, birliklerge, onlıqlarǵa, júzliklerge, münlıqlarǵa shekem dóńgelekleń: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

300. 15,75 hám 317,25 sanların birliklerge shekem kemi hám artıǵı menen dóńgelekleń. Hárbir dóńgeleklewdiń absolyut qáteligin tabıń.

301. Tómendegi sanlardı 0,1 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{13}{8}; \quad 2) \frac{17}{25}; \quad 3) \frac{39}{129}; \quad 4) \frac{11}{3}; \quad 5) \frac{5}{7}; \quad 6) \frac{19}{11}.$$

302. Tómendegi sanlardı 0,01 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{3}{7}; \quad 2) \frac{7}{99}; \quad 3) \frac{5}{19}; \quad 4) 1\frac{2}{3}; \quad 5) 2\frac{3}{11}; \quad 6) 5\frac{1}{14}.$$

303. Tómendegi sanlardı 0,001 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{2}{7}; \quad 2) \frac{5}{13}; \quad 3) 2\frac{3}{11}; \quad 4) 7\frac{9}{14}; \quad 5) 3\frac{1}{7}; \quad 6) 1\frac{18}{19}.$$

304. 0° C da vodorod molekulاسınıń ortasha qozǵalıs tezligi 1693 m/s qatı. Bir oqıwshı bul sandı 1690 m/s etip, al ekinshi oqıwshı 1700 m/s etip dóńgelekledi. Hárbir dóńgeleklewdiń absolyut qáteligin tabıń. Qaysı jaǵdayda dóńgeleklew qáteligi kishi boladı?

21-§. SALÍSTÍRMALÍ QÁTELIK

Belgili bir shamanıń túrli juwiqlasıwlarınıń dálligin salıstırıwda absolyut qátelikten paydalanıladı. Eger de shamalardıń juwiqlasıwları salıstırılsa, onda absolyut qátelik jetkilikli bolmaydı.

Mısalı, Tashkentten Samarqandqa shekemgi bolǵan aralıq (300 ± 1) km ge teń. Qálemniń uzınlığı ($21,3 \pm 0,1$) sm ge teń. Birinshi jaǵdayda absolyut qátelik 1 km den artıq emes, al ekinshi jaǵdayda 1 mm den artıq emes. Qálemniń uzınlığı Tashkentten Samarqandqa shekemgi aralıqqa salıstırǵanda dállirek ólshengen dep aytıw mümkın be?

Tashkentten Samarqandqa shekemgi aralıqtı ólshegenede 300 km ge 1 km den artıq bolmaǵan qátelikke jol qoyılǵan. Demek, bul jaǵdayda ólshenetügen uzınlıqtıń $\frac{1}{300} \cdot 100\% \approx 0,33\%$ in quraydı.

Qálemniń uzınlığın ólshegen waqıtta 21,3 cm ge 0,1 cm den artıq bolmaǵan qátelikke jol qoyılǵan. Demek, bul jaǵdayda ólshenetüğün uzınlıqtıń $\frac{0,1}{21,3} \cdot 100\% \approx 0,47\%$ ini tashkil etadi.

Solay etip, qalalar arasındaǵı qashıqlıq qálemniń uzınlığına qaraǵanda dállirek ólshengen.

Juwıqlasıw sapasın bahalaw ushın salıstırmalı qátelik túsinigi engiziledi.



Salıstırmalı qátelik dep, absolyut qáteliktiń shamanıń juwıq mánisi moduline qatnásın aytadı.

Solay etip, egerde a sanı x tiń juwıq mánisi bolsa, onda absolyut qátelik $|x - a|$ ġa teń, al salıstırmalı qátelik $\frac{|x-a|}{|a|}$ ge teń. Salıstırmalı qátelik ádette procentlerde ańlatıladı.

Másele. Jer massasınıń juwıq mánisi $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{24}$ kg ġa teń. Aw miltigi oginiń massası (9 ± 1) g ġa teń. Qaysı ólshew anıǵıraq?

△ Hárbir ólshewdiń salıstırmalı qáteligin bahalayıq:

$$1) \frac{0,01 \cdot 10^{24}}{5,98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0,2\%; \quad 2) \frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%.$$

Jer massası anıǵıraq ólshengen. ▲

Shınıǵıwlar

- 305.** Sandı birliklerge shekem dóńgelekkleń jáne dóńgeleklewdiń absolyut hám salıstırmalı qáteliklerin tabıń;
- 1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892; 5) 1,947.
- 306.** 1) $\frac{1}{3}$ sanınıń 0,33 sanı menen; 2) $\frac{1}{7}$ sanınıń 0,14 sanı menen juwıqlasıwınıń salıstırmalı qáteligin tabıń.
- 307.** Qaysı ólshew anıǵıraq:
- 1) $a = (750 \pm 1)$ m ma yaki $b = (1,25 \pm 0,01)$ m ma;
- 2) $p = (10,6 \pm 0,1)$ s ma yaki $q = (1,25 \pm 0,01)$ s ma?
- 308.** Túrli ásbaplardıń járdemi menen bir waqtta puwdıń temperaturası ólshendi hám birinshi jaǵdayda $t = (104 \pm 1)$ °C, ekinshi jaǵdayda $t = (103,8 \pm 0,1)$ °C, úshinshi jaǵdayda $t = (103,86 \pm 0,01)$ °C nátiyjeleri alınadı. Hárbir ólshewdiń salıstırmalı qáteligin bahalań.

- 309.** Eki oqıwshı üzinqılıq ólshevwe tiyisli ámeliy islerdi orınlawda (203 ± 1) mm hám (120 ± 1) sm nátiyjelerge eristi. Oqıwshılardan qaysısı usı jumıstı sapalı orınlagań?
- 310.** 1) x sanınıń juwiq mánisi a ága teń. Usı sannıń salıstırma qáteligi 0,01 ge teń, yağniy 1%. Eger $a = 2,71$ bolsa absolyut qátelikti tabıń.
 2) x sanınıń juwiq mánisi b ága teń. Usı sannıń salıstırma qáteligi 0,001 ge teń, yağniy 0,1%. Eger $b = 0,398$ bolsa, absolyut qátelikti tabıń.
- 311.** Quyashtıń massası $(2 \cdot 10^{33} \pm 0,1 \cdot 10^{33})$ g. Balalar tobınıń massası $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$ g. Qaysı ólshev dállirek?

II Bapqa tiyisli shınıǵıwlar

Teńlemeni sheshiń (**312–313**):

- 312.** 1) $x(2x + 5) = 0$; 2) $x(3x - 4) = 0$;
 3) $(x - 5)(3x + 1) = 0$; 4) $(x + 4)(2x - 1) = 0$.
- 313.** 1) $\frac{2x+3}{3x-1} = 0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5} = 0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} = 0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} = 0$.

- 314.** San kósherinde a noqati b noqatınan shepte jatadı. Tómendegi san ón ba yaki teris pe:
- 1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

315. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $x + 9 > 8 - 4x$; 2) $3(y + 4) \geq 4 - (1 - 3y)$;
 3) $5(0,2 + y) - 1,8 \geq 4,3 + 5y$; 4) $3(x - 5) + 9 > 15$.

316. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$1) \begin{cases} 0,5(x+3) - 0,8 < 0,4(x+2) - 0,3, \\ 0,7(2-x) + 1,3 < 0,6(1-x) + 2,2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 1,5(x-2) - 2,1 < 1,3(x-1) + 2,5, \\ 1,3(x+3) + 1,7 > 1,6(x+2) + 1,8. \end{cases}$$

317. Teńlemeni sheshiń:

- 1) $|x - 1| = 3, 4$; 2) $|1 - x| = 2, 4$; 3) $|1 - 2x| = 5$;
4) $|3x - 2| = 1$; 5) $|4x - 1| = 3$; 6) $|2x + 7| = 9$.

318. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $|x - 1| \leq 3, 4$; 2) $|x - 1| \geq 3, 4$; 3) $|x - 1| < 3, 4$;
4) $|2x + 1| \geq 3$; 5) $|3 + 2x| \leq 1$; 6) $|1 - 3x| \geq 4$.

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRÍŃ!

1. x tiń qálegen mánisinde

$$\frac{1}{2}x(2x - 4) \geq (x - 2)x$$

teńsizliginiń durıslıǵın dálilleń.

2. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $12 - 5x > 0$; 2) $3x - 7 \leq 4(x + 2)$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2$.

3. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

- 1) $\begin{cases} 3x - 13 > 0, \\ 25 - 4x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 13 \geq 3x - 10, \\ 11 - 4x \leq 12 - 3x; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 5x + 3 < 3x - 7, \\ 1 - 2x > x + 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 7 \leq 2 - 4x, \\ 7 - 3x \geq 1 - 5x. \end{cases}$

319. $a < 2b$ bolsın. Dálilleń:

- 1) $4a - 2b < a + 4b$; 2) $3a - 2b < a + 2b$;
3) $a + 2b > 3a - 2b$; 4) $a + b > 4a - 5b$.

320. Úshmúyeshliktiń bir tárepi 4 cm den uzın, ekinshi tárepi birinshisinen 1,5 ese uzın, úshinshi tárepi ekinshisinen 1,5 ese uzın. Úshmúyeshliktiń perimetri 19 cm den uzın ekenin dálilleń.

- 321.** x tiń qanday mánislerinde $y = -x + 1$ hám $y = x + 2$ funkcıyalarınıń mánisleri bir waqıtta: 1) oń; 2) teris; 3) 1 den úlken; 4) 2 den úlken boladı?
- 322.** Jup sanniń onnan keyin keliwshi jup sanınıń úsh esesi menen qosındısı 134 ten úlken, al usı jup sanniń ózinen aldın keliwshi jup sanınıń eki esesi menen qosındısı 104 ten kishi. Usı sandı tabıń.
- 323.** Taq sanniń onnan keyin keliwshi taq sanınıń eki eselengeni menen qosındısı 151 ten kishi, al usı taq sanniń ózinen aldın keliwshi taq sanniń úsh esesi menen qosındısı 174 ten úlken. Usı sandı tabıń.
- 324.** Qos teńsizlik túrinde jazıń:
- 1) $x = 12 \pm 0,3$; 2) $y = 23 \pm 1$; 3) $x = a \pm 1$;
 4) $y = m \pm 0,1$; 5) $z = 1,8 \pm 0,01$; 6) $z = b \pm 0,2$.
- 325.** Tómendegi sandı 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek kórinisinde jazıń:
- 1) $\frac{5}{11}$; 2) $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{17}{24}$; 6) $\frac{5}{12}$.
- 326.** Uzınlığı $I = 0,25$ m, kesesine kesindisiń beti $S \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$ mm², salıştırma qarsılığı $\rho \approx 0,017 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ bolǵan mıs tayaqshaniń qarsılığın esaplań $\left(R = \frac{\rho I}{S} \right)$.
- 327.** Eger $m = 7,6$ kg, $v = 4,2$ m/s bolsa, deneniń kinetikalıq energiyasın formula boyınsha esaplań.
- $$E_k = \frac{mv^2}{2}$$
- 328.** 20 cm li kesindini ólshewde 0,5 mm qátelikke jol qoyıldı, 1000 km aralıqtı ólshewde bolsa qátelik 200 m di quradı. Qaysı ólshew dállirek?
- 329.** Xalqı 57 100 adamnan ibarat bolǵan qalada hárbir qan gruppasına kiriwshi adamlar qanshadan ushırasatuğının anıqlaw maqsetinde medicinalıq izertlew alıp barıldı. Qanı I gruppaga tuwra keletugın adamlar 32,9 % ti, II gruppadaǵıları 35,8 % ti, III gruppadaǵıları 23,2% ti hám IV gruppadaǵıları 8,1 % ti quraytuǵınlıǵı anıqlandı. Hárbir qan gruppadaǵı adamlardan qalada neshewden jasayıdı eken?



II bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler

1. Teńsizlikti sheshiń: $5(x-3)+2x < 4x+3$.
A) $x < 6$; B) $x < -6$; C) $x > 6$; D) $x > -6$.
2. Teńsizlikti sheshiń: $4(x-1)+5(x+1) < 6(x+2)+7(x-1)$.
A) $x < -1$; B) $x > -1$; C) $x < 1$; D) $x > 1$.
3. Teńsizlikti sheshiń: $\frac{2x-3}{4} > \frac{x+1}{6} - \frac{4x+3}{3}$.
A) $x > 1$; B) $x \leq 1$ C) $x > -0,05$; D) $x < 2$.
4. $7x + 5 \geq 3(x-1) - 4x$ teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń kishi pútin sanın tabıń:
A) $x = 2$; B) $x = -2$; C) $x = 3$; D) $x = -1$.
5. $7(1-x) > 5(3-x)$ teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń úlken pútin sanın tabıń:
A) $x = -5$; B) $x = -3$; C) $x = 2$; D) $x = -2$.
6. x tiń qanday mánislerinde $\frac{3x-6}{5}$ bólshek $\frac{4x-5}{15}$ hám $\frac{4-x}{3}$ bólshekler qosındısınan kishi boladı?
A) $x < 3,3$; B) $x > 2,3$; C) $x \leq -2,3$; D) $x > 4,5$.
7. x tiń qanday mánislerinde $\frac{3-5x}{4}$ va $\frac{7x+3}{6}$ bólshekler ayirmasi $\frac{3x+5}{12}$ bólshekler qosındısınan úlken boladı?
A) $x < \frac{1}{16}$; B) $x < -\frac{1}{16}$; C) $x > \frac{1}{16}$; D) $x > -\frac{1}{16}$.
8. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:
$$\begin{cases} 3(1-x) > 5 - 4x, \\ 13 - 4x < 1. \end{cases}$$

A) $x > \frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2} < x < 3$; C) $x > 3$; D) $x > -3$.

9. Teńsizlikler sistemasıň sheshiń:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+2}{2}, \\ \frac{x-4}{5} \geq \frac{x-5}{4}. \end{cases}$$

- A) $1 \leq x \leq 9$; B) $-12 \leq x$; C) $x \geq 9$; D) $-12 \leq x \leq 9$.

10. Teńsizlikler sistemasıň sheshiń:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \leq (x+4)(x-1) + 5, \\ 2(5x-1) \geq 3(3x-2). \end{cases}$$

- A) $-4 \leq x \leq -2,5$; B) $-4 \leq x \leq 2,5$; C) $4 \leq x \leq 2,5$; D) $0 \leq x \leq 2,5$.

11. Teńsizlikler sistemasınıň sheshimi bolatugın eń kishi pütin sandı tabıń:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

- A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Teńsizlikler sistemasınıň sheshimi bolatugın eń úlken pütin sandı tabıń:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{x}{2} < 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{1}{6}. \end{cases}$$

- A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Teńsizlikti sheshiń: $|4x-5| \leq 3$.

- A) $x \geq -2$; B) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; C) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$; D) $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

14. Teńsizlikti sheshiń: $|1-3x| \leq 2$.

- A) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$; B) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$; D) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

- 15.** Teńsizlikti sheshiń: $|3 - 2x| \geq 1$.
- A) $x \leq 1, x \geq 2$; B) $x \leq -1, x \geq -2$; C) $x \leq 2, x \geq 3$; D) $1 \leq x \leq 2$.
- 16.** Sanniń anıq mánisi 1,483, juwıq mánisi 1,48 bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń:
- A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.
- 17.** Sanniń anıq mánisi $\frac{8}{17}$, juwıq mánisi $\frac{1}{2}$ bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń:
- A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.
- 18.** Qos teńsizlik túrinde jazıń: $a = -1,8 \pm 0,2$.
- A) $-2 < a < -1,6$; C) $-2 \leq a \leq -1,6$;
B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $-2 \leq a \leq -1,82$.
- 19.** Qos teńsizlik túrinde jazıń: $a = 2,71 \pm 0,01$.
- A) $2,7 < a < 2,72$; C) $2,7 \leq a < 2,711$;
B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $2,7 \leq a \leq 2,72$.
- 20.** $\frac{8}{15}$ di 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek túrinde jazıń:
- A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.
- 21.** $\frac{5}{14}$ di 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek túrinde jazıń:
- A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.
- 22.** Bólmeniń uzınlığı $(5 \pm 0,02)$ m ge teń. Ólshewdiń salıstırmalı qáteligin anıqlaná:
- A) 4%; B) 0,4%; C) 0,02%; D) 0,05%.

- 23.** Eki awıl arasındaǵı aralıq (100 ± 1) km ge teń. Ólshewdiń salıstırmalı qáteligin aniqlań:
- A) 2%; B) 0,5%; C) 1%; D) 1,5%.
- 24.** Sandı júzden birge shekem dóńgelekleń. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń: 5,7635.
- A) 5,76; 0,8%; C) 5,77; 0,08%;
 B) 5,76; 0,9%; D) 5,76; 0,06%.
- 25.** Sandı onnan birge shekem dóńgelekleń. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń: 2,2941.
- A) 2,3; 0,26%; C) 2,3; 0,3%;
 B) 2,2; 2,5%; D) 2,3; 0,4%.



Tariyxıy máseleler

1. *Evklid máselesi*. Eger a, b, c, d – óń sanlar, a – olardıń eń úlkeni hám

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{bolsa, onda } a+d > b+c \text{ bolıwın dálilleń.}$$

2. *Aleksandriyalı Papp máselesi*. Eger a, b, c, d teris sanlar hám $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ bolsa, onda $ad > bc$ bolıwın dálilleń.

3. *Bernulli teńsizligi*. Eger $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$ hám x_1, x_2, \dots, x_n sanlardıń barlıǵı birdey belgige iye bolsa, $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_2 + \dots + x_n$ boladı.

Bernulli teńsizligin $n = 2, 3$ bolǵan jaǵday ushın dálilleń..

4. $(1+a)^2 \approx 1+2a$ juwıqlaw formulasınan paydalanıp, esaplań hám qátelikti bahalań:

$$1) (1,01)^2; \quad 2) (1,001)^2; \quad 3) (0,99)^2; \quad 4) (0,999)^2.$$

5. Vakuumda jaqtılıq tezligin ólshew $299796 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ nátiyjeni berdi, bunda ólshew dálligi $4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ boldı. Salıstırmalı qátelikti tabıń.

6. Adamníń shash talası juwanlıǵı ($0,15 \pm 0,005$) mm ge teń. Jerden Ayǵa shekem bolǵan aralıq bolsa ($380\ 000 \pm 500$) km ge teń. Qaysı ólshew anıǵıraq orınlangan?

7. *Akmim papirusında*: „Uzınlığı $r=5$ hám $R=10$ radiuslı sheńberler uzınlıqlarınıń arifmetikalıq ortasına teń dóńgelek beti, usı radiuslı betleriniń arifmetikalıq ortasına teń“, deyilgen eken. Bundaǵı absolyut hám salıstırmalı qáteliklerdi tabıń.



Tariixiy maǵluwmatlar

$>$ (úlken) hám $<$ (kishi) belgiler – qatań teńsizlik belgileri birinshi ret ingliz alımı T. Garriottiń 1631-jılı basıp shıgarılǵan broshyurasında keltirilgen.
 \geq (úlken yaki teń) hám \leq (kishi yaki teń) belgileri – qatań emes teńsizlik belgilerin bolsa, 1734-jılı francuz matematigi P.Buge kiritken.

x sanınıń modulin $|x|$ sıyaqlı belgilewdi ataqlı nemis matematigi K. Veyershtras 1841-jılı usınıs etken.

Áyyemgi Mısır hám Babilonda tabılǵan matematikalıq jazıwlar, adamlar júdá áyyemgi zamanlardan-aq juwiq esaplawlardıń bazı usılları menen tanış ekenligin kórsetedi. 4000 jıl burın Bobilonlı alımlar sanlardı kóbeytiw, kvadratqa kóteriw, keri sanlar kestesin dúziw menen bir qatarda, sanlardan kvadrat koren shıgarıw kestelerin de düzgen. Olar natural sanlardıń kvadrat korenleriniń juwiq mánislerin taba alǵan.

2-, 3-dárejeli teńlemenıń korenlerin juwiq esaplaw usılların Áyyemgi Qıtay, Orta Aziyalı alımlar tapqan.

Mırza Uluğbek ilimiý mektebinıń alımları astronomiyalıq kesteler («Zij»lar) di dállirek dúziw ushın juwiq esaplawdıń jańa usılların jaratqan. Mırza Uluğbek akademiyasınıń jetekshi alımlarnan biri Ğiyosiddin Jamshid al-Koshiy bolsa «Sheńber haqqında traktat» tında π sanınıń útirden keyingi 17 tańbasın anıq esaplaǵan.



Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máselerler

Ténsizliklerdi, ténsizlikler sisteması sheshiwge alıp keletugin bir neshe máseleni kórip shıǵayıq.

330. 4 toraq hám 5 qorazqant birgelikte 225 swmnar arzan, 3 toraq hám 2 qorazqant birgelikte 120 swmnar qımbat.

Qaysısı arzan: 13 toraq pa yaki 10 qorazqant pa?

△ 1 toraqtiń bahasın x som, 1 qorazqanttiń bahasın y swm, dep alayıq. Onda másale shártine saykes keletugin usı ténsizlikler sistemاسına iye bolamız:

$$\begin{cases} 4x + 5y < 225, \\ 3x + 2y > 120. \end{cases} \quad (1)$$

Bunnan

$$\begin{cases} 32x + 40y < 1800, \\ 45x + 30y > 1800, \end{cases}$$

yağníy $45x + 30y > 32x + 40y$, $13x - 10y > 0$.

Demek, $13x > 10y$.

Juwabi: 10 qorazqant 13 toraqtan arzan.

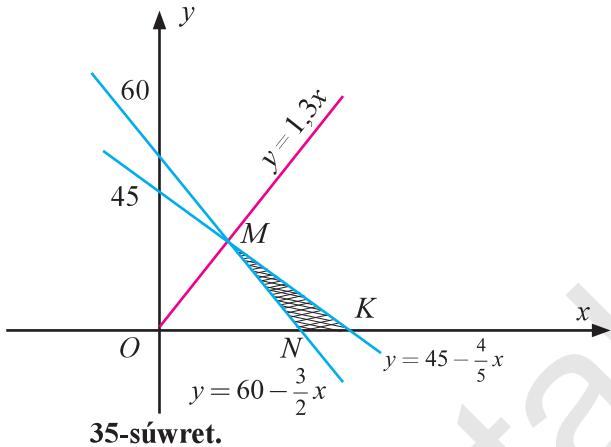
Máseleniń geometriyalıq sıpatlaması menen tanışayıq.

Tekislikte qanday taraw (1) ténsizlikler sistemasi menen súwretlenedi?

(1) sistemaniń 1 – ténsizligi $4x + 5y = 225$, yağníy $y = 45 - \frac{4}{5}x$ tuwrı sıziqtan tómende jatıwshı barlıq noqatların bildiredi; 2 – ténsizlik bolsa $3x + 2y = 120$, yağníy $y = 60 - \frac{3}{2}x$ tuwrı sıziqtan joqarıda jatıwshı barlıq noqatlardı bildiredi (35-súwretke qarań).

Bul eki yarım tegisliktiń kesisipesi, $x > 0$, $y > 0$, ekeni esapqa alınsa, $\triangle MNK$ ni beredi. Toraq hám qorazqanttiń anıq bahasın bilmeymiz, bul bahanı bildiriwshi ($x; y$) noqat MNK úshmýyeshlik ishindegi qálegen noqat bolıwı mümkin. Bul úshmýyeshlik bolsa $13x = 10y$, yağníy $y = 1,3x$ tuwrı sıziqtan tómende jaylasqan.

Demek, $y < 1,3x$, yağníy $13x > 10y$. ▲



- 331.** Imtixanda oqıwshılardıń $\frac{1}{6}$ bólegi „qanaatlandırıralı“, 56% i “jaqsı” hám 14 i „ayrıqsha“ bahalar aldı. „Ayrıqsha“ alǵanlar jámi oqıwshılardıń 4% inen kóp, biraq, 5% inen kem bolsa, jámi oqıwshılar sanın tabıń.

△ Jámi oqıwshılar sanın x dep alayıq. Onda $\frac{x}{6}$ – „qanaatlandırıralı“ baha, $\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „jaqsı“ baha alǵan oqıwshılar sanı boladı.

Jámi oqıwshılar sanı 6 ǵa da, 25 ke de bólinedi. Demek, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – natural san. Shárt boyınsha „ayrıqsha“ baha alǵan oqıwshılar sanı $0,04x < 14 < 0,05x$ teńsizlikti qanaatlandıradı.

Buǵan $x = 150 \cdot n$ di qoyp, $6n < 14 < 7,5 \cdot n$, yaǵníy $n = 2$ ekenin tabamız.

Juwabi: 300 oqıwshi. ▲

- 332.** Eki ıdıştagı birdey buyımlar sanı qosılıp 29 dan kóp. 1 – ıdıştan 2 buyım alınganda, onda qalǵan buyımlar 2 – ıdıştagıdan 3 esesinen de kóbirek boladı. 1 – ıdıştagı buyımlardıń 3 esesi menen 2 – ıdıştagı buyımlardıń 2 esesiniń parqı 60 dan kem. Hárbir ıdışta qanshadan buyım bar?

△ 1-ıdıştagı buyımlar sanın x penen, 2-ıdıştagı buyımlar sanın y penen belgileyik. Onda másele shártine sáykes usı teńsizlikler sistemäsine iye bolamız:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Bul sistemanı tómendegiſe jazıp alamız:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ 20 + \frac{2}{3}y > x. \end{cases} \quad (1)$$

Bunnan

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \quad (2)$$

$$20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2 \quad (3)$$

teńsizliklerdiń durıslığı kelip shıǵadı. (2) den $y > \frac{27}{5}$, (3) den bolsa $y < \frac{54}{7}$ teńsizlikti alamız.

Demek, $\frac{27}{5} < y < \frac{54}{7}$ yaki $5\frac{2}{5} < y < 7\frac{5}{7}$. y – natural san bolǵanı ushın ol 6 ýa yaki 7 ge bola aladı. Eger $y = 6$ bolsa, onda (1) sistemani

$$\begin{cases} x > 23, \\ x > 20, \\ x < 24 \end{cases}$$

túrinde jazıp alıwǵa boladı. Biraq, bul sistemanı qanaatlandırıwshı natural san x joq. Demek, $y = 7$ eken. Onda (1) den

$$\begin{cases} x > 22, \\ x > 23, \\ x < 24\frac{2}{3} \end{cases}$$

sistemaǵa kelemiz. Bul sistemanı qanaatlandırıwshı jalǵız natural san $x = 24$ ekeni anıq.

Juwabı: 1-ıdısta 24, 2-ıdısta 7 buyım bar. \blacktriangle

- 333.** Eki ıdıstaǵı buyımlar sanı birgelikte 27 den kóp. 2-ıdıstan 12 buyım alınganda, 1-ıdıstaǵı buyımlar sanı 2-ıdıstaǵıdan 2 ese kóplew boladı. 1-ıdıstan 10 buyım alınganda, 2-ıdıstaǵı buyımlar sanı 9 eseden kóplew boladı. Hárbir ıdısta qanshadan buyım bar?

- 334.** 1-zavod 1 kúnde 950 den ziyat bolmaǵan muǵdarda ónim islep shıgaradı. 2-zavod dáslep 1-zavod islep shıgarǵan ónimniń 95 % in shıgaratuǵın edi. Qosımsha stanoklar ornatılǵannan keyin, 2-zavod islep shıgarıwdı 1-zavodqa qaraǵanda 23 % ke asırdı hám 1 kúnde 1000 nan kóp ónim bere basladı. 2-zavod qosımsha stanoklar alganǵa shekem hám hárbir zavod qansha ónim islep shıgaratuǵın edi? (Ónimler sanı natural sanlarda belgilenedi.)

\blacktriangle 1-zavod 1 kúnde islep shıgarǵan ónimler sanı x bolsın. Onda 2-zavod

dáslep $\frac{95x}{100}$, qosımsha stanoklar ornatılǵannan keyin $\left(\frac{95x}{100} + \frac{23x}{100}\right)$ ónim bergen. Másele mazmunına sáykes teńsizlikler sistemasi tómendegishe boladı:

$$\begin{cases} x \leq 950, \\ \frac{95x}{100} + \frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Bunnan

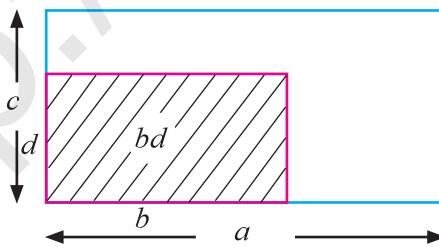
$$847\frac{27}{59} < x \leq 950. \quad (1)$$

Biraq $\frac{95x}{100}$ hám $\frac{23x}{100}$ sanları natural san bolıwı kerek, yaǵníy $x=100$ ge bóniniwi kerek. (1) aralıqta 100 ge bóninetuǵın san 900. Demek, 1-zavod 1 kúnde 900 ónim islep shıgarǵan. 2-zavod bolsa qosımsha

stanok ornataman degenshe $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$ dana ónim islep shıgarǵan.

Juwabı: 900 dana, 855 dana.▲

- 335.** 1-ıdısta jasıl, 2-ıdısta bolsa aq sharlar bar. Jasıl sharlar sanı aq sharlar sanınıń $\frac{15}{19}$ bólegin quraydı. Jasıl sharlardıń $\frac{3}{7}$ bólegi, aq sharlardıń $\frac{2}{5}$ bólegi ıdışlardan alıngannan keyin, 1-ıdısta 1000 danadan az, 2-ıdısta 1150 danadan kóp shar qaldı. Dáslep, hárbir ıdısta qanshadan shar bolǵan?
- 336.** 80 t, 60 t, 50 t júk siyatúǵın vagonlar bar. Eger, júk 80 t lı vagonlarga júklense, vagonlardan birewi tolıq júklenbey qaladı. Eger júk 60 t lı vagonlarga júklense, jáne 8 den kóp vagon kerek boladı hám 1 vagon tolıq júklenbey qaladı. Eger júk 50 t lı vagonlarga júklense, jáne 5 vagon kerek boladı hám bul jaǵdayda júkler vagonlardıń hámmesin toltırıdı. Júk neshe tonna bolǵan?
- 337.** Oqıwshılar hár qatarda 8 den sap tartıp tursa, qatarlardan birewi tolıq bolmay qaladı. Eger, hár qatarda 7 den bólince, qatarlar tolıq boladı, biraq qatarlar sanı 2 ge artadı. Eger hár qatarda 5 ten bólince, qatarlar sanı jáne 7 ge artadı, biraq 1 qatar tolıq bolmaydı. Oqıwshılar sanın anıqlań.
- 338.** 1) a, b, c, d – oń sanlar hám $a > b, c > d$ bolsa, onda $ac > bd$ bolıwı sabaqlıǵıńızda dálillengen. Bul teńsizlikke geometriyalıq sıpatlama beriń hám 36-súwretti túsındırıń:

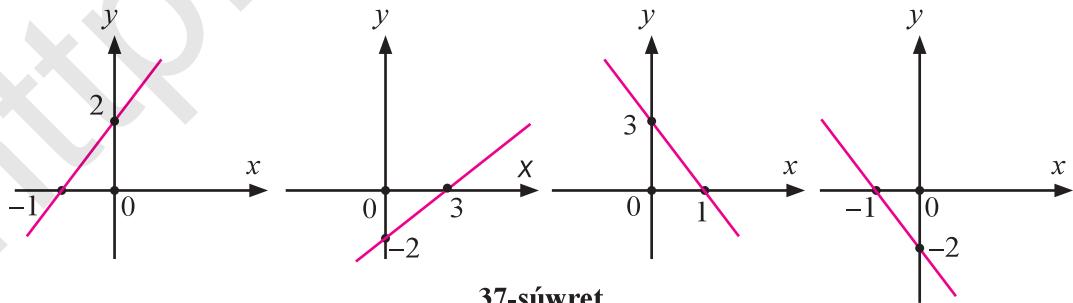


36- súwret.

- 2) Dóńes kópmýeshlik ishinde jatiwshı qálegen noqattan onıń ushlarına shekem bolǵan aralıqlar qosındısı, usı kópmýeshlik yarım perimertinen úlken ekenin dálilleń.

- 339.** Kólemi 8 l bolǵan eritpede 60 % kislota bar edi. Oǵan kislotası 20 % bolǵan eritpeden quya baslandı. Aralaspadaǵı kislota 40 % den kóp bolmawı, lekin 30% ten kem bolmawı ushın ekinshi eritpeden birinshisine qansha quyıwǵa boladı?
- 340.** 1) Jumısshılar komandası 5 kúnde 300 den kem, 10 kúnde 500 den artıq ónim tayarladı. Eger komandada 8 adam islep, olardıń miynet ónimdarlığı birdey bolsa, hárbir jumısshı bir kúnde neshe ónim tayarlaǵan?
 2) Avtobus 8 ret qatnawda 185 ten kóp jolawshını, 15 ret qatnawda bolsa 370 ten kem jolawshını tasıdı. Eger avtobus hár saparı onda neshe orın bolsa, tap sonsha jolawshını tasıǵan bolsa, avtobusta neshe orın bar?
- 341.** Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha x tiń qanday mánislerinde funkciya: óń; nolge teń; 2 den úlken; -1 den kishi mánislerdi qabil etiwin tabıń:
- 1) $y = 5x + 2$;
 - 2) $y = 2x - 6$;
 - 3) $y = -4x + 5$;
 - 4) $y = -3x - 1$.

- 342.** 37-súwrette $y = kx + b$ sızıqlı funkciyanıń grafigi berilgen.
 1) k hám b ni tabıń; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ bolǵanda y funkciyanıń qanday mánislerin qabil etiwin teńsizlik belgisi járdeminde jazıń hám payda etilgen teńsizlikti sheshiń. Sheshimin san kósherinde súwretleń.



22-§. KVADRAT TEŃLEME HÁM ONÍń KORENLERİ

1-másele. Tuwrımúyeshliktiń ultanı onıń biyikliginen 10 cm ge artıq, al onıń maydani 24 cm^2 qa teń. Tuwrımúyeshliktiń biyikligin tabıń.

△ Meyli tuwrımúyeshliktiń biyikligi x santimetr bolsın deyik, onda onıń ultanı $(x + 10)$ santimetre teń boladı. Usı tuwrımúyeshliktiń maydani $x(x + 10) \text{ cm}^2$ qa teń. Mäseleniń shártı boyınsha $x(x+10)=24$.

Qawsırmalardı ashıp hám 24 sanın qarama-qarsı belgi menen teńlemeńiń shep jaǵına ótkizip, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Teńlemeńiń shep jaǵın gruppaları usılı menen kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 24 &= x^2 + 12x - 2x - 24 = \\ &= x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2). \end{aligned}$$

Demek, teńlemeńiń tómendegishe jazıw mümkin:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Bul teńleme $x_1 = -12$ hám $x_2 = 2$ korenlerine iye boladı.

Kesindiniń uzınlığı teris san bola almaytuǵınlığı sebepli izlenip atırǵan biyiklik 2 sm ge teń boladı. ▲

Bul mäseleni sheshiwde kvadrat teńleme dep atalıwshi

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

teńleme payda boladı.



Kvadrat teńleme dep,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

túrindegi teńlemege aytılaǵı, bunda a, b, c . berilgen sanlar, $a \neq 0$, x – bolsa belgisiz.

Kvadrat teńlemeńiń a , b , c koefficientleri ádette bılay aytıladı: a – *birinshi yamasa bas koefficient*, b – *ekinshi koefficient*, c – *saltań aǵza*.

Mısalı, $3x^2 - x + 2 = 0$ teńlemesinde bas koefficient – 3, ekinshi koeficient – 1, saltań aǵza – 2.

Matematika, fizika hám texnikanıń kóp ǵana máselelerin sheshiw kvadrat teńlemeńi sheshiwge alıp keledi.

Kvadrat teńlemelerge jáne de mısallar keltiremiz:

$$2x^2+x-1=0, \quad 5t^2-10t+3=0, \\ x^2-25=0, \quad 2x^2=0.$$

Kóp ǵana máselelerdi sheshiwde algebralıq teńlemeler járdeminde kvadrat teńlemege keltiriletuǵın teńlemeler payda boladı.

Mısalı,

$$2x^2+3x=x^2+2x+2$$

teńlemesi onıń barlıq aǵzaların shep jaqqa alıp ótkennen hám uqsas aǵzaların jıynaǵannan keyin, mına

$$x^2+x-2=0$$

kvadrat teńlemesi túrine keltiriledi.

2 - m á s e l e . Mına teńlemeńi sheshiń:

$$x^2=64.$$

△ 64 ti shep jaqqa alıp ótemiz, kvadrat teńlemeńi payda etemiz:

$$x^2-64=0.$$

Shep jaǵın kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x-8)(x+8)=0.$$

Demek, teńleme eki korenge iye: $x_1 = 8$, $x_2 = -8$.

$x^2 = 64$ teńlemesiniń birinshi koreni 64 sanınıń arifmetikalıq koreni, al ekinshisi bolsa oǵan qarama-qarsı san ekenligin eskertemiz:

$$x_1 = \sqrt{64}, x_2 = -\sqrt{64}.$$

Ádette, bul eki formula biriktirilip jazıladı:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{64}.$$

2-máseleniń juwabın $x_{1,2} = \pm 8$ túrinde jazıw mümkin.

$x^2 = 64$ teńleme $x^2 = d$ teńlemesiniń dara túri. Hár qanday kvadrat teńleme bolsa, $x^2 = d$ teńlemege keltiriliwi mümkin.



T e o r e m a . $x^2 = d$ teńlemesi, bunda $d > 0$, eki korenge iye:

$$x_1 = \sqrt{d}, \quad x_2 = -\sqrt{d}.$$

○ d nı teńlemeniń shep jaǵına alıp ótemiz:

$$x^2 - d = 0.$$

$d > 0$ bolǵanı ushın arifmetikalıq kvadrat korenniń anıqlamasına muwapıq $d = (\sqrt{d})^2$. Sonıń ushın teńlemeni tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0.$$

Bul teńlemeniń shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0,$$

bunnan, $x_1 = \sqrt{d}$, $x_2 = -\sqrt{d}$.

Máselen, $x^2 = \frac{4}{9}$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ korenlerine iye; $x^2 = 3$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ korenlerine iye; $x^2 = 8$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ korenlerine iye.

Eger de $x^2 = d$ teńlemesiniń óń jaǵı nolge teń bolsa, onda $x^2 = 0$ teńleme bir korenge iye: $x = 0$. $x^2 = 0$ teńlemesin $x \cdot x = 0$ túrinde jazıw mümkin bolǵanı ushın geyde $x^2 = 0$ teńlemesi eki teń korengeboladı iye delinedi: $x_{1,2} = 0$.

Eger de $d < 0$ bolsa, onda $x^2 = d$ teńlemesi haqıqıy korenlerge iye bolmaydi, sebebi haqıqıy sannıń kvadratı teris san boliwı mümkin emes. Mısalı, $x^2 = -25$ teńlemesi haqıqıy korenlerge iye emes.

343. (Awızeki.) Tómende berilgen teńlemelerden qaysıları kvadrat teńleme boladı:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0;$ | 2) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0;$ |
| 3) $-7x^2 - 13x + 8 = 0;$ | 4) $17x + 24 = 0;$ |
| 5) $-13x^4 + 26 = 0;$ | 6) $x^2 - x = 0?$ |

344. (Awızeki.) Kvadrat teńlemeniń koefficiyentlerin hám saltań aǵzasın aytıń:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0;$ | 2) $-7x^2 - 13x + 8 = 0;$ |
| 3) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0;$ | 4) $x^2 + 25x = 0;$ |
| 5) $-x^2 + x + \frac{1}{3} = 0;$ | 6) $-x^2 - x = 0.$ |

345. Eger $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemeniń koefficiyentleri belgili bolsa, usı kvadrat teńlemenı jazıń:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $a = 2, b = 3, c = 4;$ | 2) $a = -1, b = 0, c = 9;$ |
| 3) $a = 1, b = -5, c = 0;$ | 4) $a = 1, b = 0, c = 0.$ |

346. Berilgen teńlemenı kvadrat teńlemege keltiriń:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x(x - 3) = 4;$ | 2) $(x - 3)(x - 1) = 12;$ |
| 3) $3x(x - 5) = x(x + 1) - x^2;$ | 4) $7(x^2 - 1) = 2(x + 2)(x - 2).$ |

347. $-3, -2, 0, 1$ sanıranan qaysıları teńlemeniń koreni boladı:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 9 = 0;$ | 2) $x^2 - x = 0;$ |
| 3) $x^2 + x - 6 = 0;$ | 4) $x^2 - 5x + 4 = 0;$ |
| 5) $(x - 1)(x + 2) = 0;$ | 6) $(x + 1)(x - 3) = x?$ |

348. (Awızeki.) $x^2 = 36$ teńlemesi neshe korenge iye? Olardı tabıń. Olardan qaysısı 36 nıń arifmetikalıq koreni boladı?

349. (Awızeki.) Teńlemeni sheshiń:

- 1) $x^2 = 1$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = 25$;
5) $x^2 = 100$; 6) $x^2 = 0$; 7) $x^2 = 49$; 8) $x^2 = 64$.

350. Teńlemeni korenlerin tabıń:

- 1) $x^2 = \frac{9}{16}$; 2) $x^2 = \frac{16}{49}$; 3) $x^2 = 1\frac{7}{9}$; 4) $x^2 = 2\frac{1}{4}$;
5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = 13$; 7) $x^2 = \frac{25}{49}$; 8) $x^2 = 10$.

351. Teńlemeni sheshiń:

- 1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $x^2 - 121 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;
4) $\frac{x^2}{5} = 0$; 5) $x^2 + 9 = 0$; 6) $x^2 + 12 = 0$.

352. Kvadrat teńlemeni, onıń shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep jolı menen sheshiń:

- 1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + 2x = 0$; 3) $3x^2 + 5x = 0$;
4) $5x^2 - 3x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

23-§. TOLÍQ EMES KVADRAT TEŃLEMELER

Egerde $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemesinde b yamasa c koefficientlerinen hesh bolmaǵanda birewi nolge teń bolsa, onda bul teńleme *tolıq emes kvadrat teńleme* dep ataladı.

Demek, tolıq emes kvadrat teńleme tómendegi teńlemelerdiń biriniń kórinisinde boladı.

$$ax^2 = 0, \quad (1)$$

$$ax^2 + c = 0, c \neq 0, \quad (2)$$

$$ax^2 + bx = 0, b \neq 0. \quad (3)$$

(1), (2), (3) teńlemelerde a koefficiyenti nolge teń emesligin eskertip ótemiz.

Tolıq emes kvadrat teńlemelerdiń qalay sheshiletugının kórseteyik.

1-más ele. Teńlemeni sheshiń:

$$5x^2=0.$$

Δ Bul teńlemeniń eki jaǵın da 5 ke bólip,

$$x^2=0$$

teńlemesin payda etemiz, bunnan $x=0$. ▲

2-más ele. Teńlemeni sheshiń:

$$3x^2-27=0.$$

Δ Teńlemeniń eki jaǵın da 3 ke bólemiz:

$$x^2-9=0.$$

Bul teńlemeni tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2=9,$$

bunnan $x_{1,2}=\pm 3$. ▲

3-más ele. Teńlemeni sheshiń:

$$2x^2+7=0.$$

Δ Bul teńlemeni tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2=-\frac{7}{2}.$$

Bul teńleme haqıqıy korenlerge iye emes, sebebi, x tiń qálegen haqıqıy mánislerinde $x^2 \geq 0$ boladı. ▲

4-más ele. Teńlemeni sheshiń:

$$-3x^2+5x=0.$$

Δ Teńlemeniń shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep,

$$x(-3x+5)=0$$

ekenin payda etemiz, bunnan: $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$.

Juwabi: $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$. ▲

Shiniǵıwlar

Teńlemeńi sheshiń (**353–357**):

- 353.** 1) $x^2 = 0$; 2) $3x^2 = 0$; 3) $5x^2 = 125$;
4) $9x^2 = 81$; 5) $4x^2 - 64 = 0$; 6) $x^2 - 27 = 0$;
7) $4x^2 = 81$; 8) $0,01x^2 = 4$; 9) $0,04x^2 = 16$.

- 354.** 1) $x^2 - 7x = 0$; 2) $x^2 + 5x = 0$; 3) $5x^2 = 3x$;
4) $4x^2 = 0,16x$; 5) $9x^2 - x = 0$; 6) $9x^2 + 1 = 0$;
7) $x^2 - 3x = 0$; 8) $0,1x^2 - x = 0$; 9) $16x^2 + 3 = 0$.

- 355.** 1) $4x^2 - 169 = 0$; 2) $25 - 16x^2 = 0$; 3) $2x^2 - 16 = 0$;
4) $3x^2 = 15$; 5) $2x^2 = \frac{1}{8}$; 6) $3x^2 = 5\frac{1}{3}$;
7) $3x^2 = 27$; 8) $4x^2 = 64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2 = 4$.

- 356.** 1) $\frac{x^2 - 1}{3} = 5$; 2) $\frac{9 - x^2}{5} = 1$; 3) $4 = \frac{x^2 - 5}{5}$;
4) $3 = \frac{9x^2 - 4}{4}$; 5) $\frac{16 - x^2}{4} = 3$; 6) $5 = \frac{x^2 - 6}{2}$.

- 357.** 1) $3x^2 + 6x = 8x^2 - 15x$; 2) $17x^2 - 5x = 14x^2 + 7x$;
3) $10x + 7x^2 = 2x^2 + 8x$; 4) $15x + 9x^2 = 7x^2 + 10x$.

- 358.** x tiń qanday mánislerinde berilgen bólshekler bir-birine teń boladı:

$$1) \frac{4x^2 - 3x}{3} \text{ hám } \frac{x^2 + 5x}{2}; \quad 2) \frac{3x^2 + 7x}{4} \text{ hám } \frac{7x^2 - 5x}{3}?$$

24-§. KVADRAT TEŃLEMELERDIŃ KORENLERIN TABÍW FORMULARARI. DISKRIMINANT

Kvadrat teńlemeńlerdi sheshiw ushın *tolıq kvadrattı ajiratiw usılı* qollanılıdı. Bul usılıdı mísallarda kórip shıǵayıq.

1- m á s e l e. Kvadrat teńlemeńi sheshiń:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Δ Bul teńlemeni tómendegishe túrlendiremiz:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &= 3, \\x^2 + 2x + 1 &= 3 + 1, \\(x + 1)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Demek, $x + 1 = 2$ yaki $x + 1 = -2$, bunnan $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Δ

Biz, $x^2 + 2x - 3 = 0$ teńlemeni shesher ekenbiz, onıń túrin sonday etip al-mastırıldıq, teńlemeniń shep jaǵında eki aǵzalınıń kvadrati $(x + 1)^2$ payda boldı hám oń jaǵında belgisiz qatnaspadi.

2- m á s e l e. Teńlemeni sheshiń:

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Δ Bul teńlemeni sonday túrlendiremiz, onıń shep jaǵı eki aǵzalınıń kvadratına aylansın:

$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= 7, \\x^2 + 2 \cdot 3x &= 7, \\x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 &= 7 + 3^2, \\(x + 3)^2 &= 16.\end{aligned}$$

Bul túrlendiriwdi túsindireyik. $x^2 + 6x$ ańlatpasında birinshi qosılıwshı x sanınıń kvadratı, al ekinshisi x hám 3 tiń eki eselengen kóbeymesi. Sonıń ushın teńlemeniń shep jaǵında ekinshi aǵzanıń kvadratın payda etiw ushın teńlemeniń eki jaǵına da 3^2 ti qosıw kerek.

$(x + 3)^2 = 16$ teńlemesin sheship, $x + 3 = 4$ yaki $x + 3 = -4$ ti payda etemiz, bunnan $x_1 = 1$, $x_2 = -7$. Δ

3- m á s e l e. $4x^2 - 8x + 3 = 0$ teńlemeni sheshiń.

$$\begin{aligned}\Delta \quad 4x^2 - 8x &= -3, \\(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x &= -3, (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x + 4 &= -3 + 4, \\(2x - 2)^2 &= 1, 2x - 2 = 1 \text{ yoki } 2x - 2 = -1, \\x_1 &= \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}. \Delta\end{aligned}$$

4- м á s e l e. $x^2 + 5x - 14 = 0$ teńlemeňi sheshiň.

$$\Delta \quad x^2 + 5x = 14, \quad x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 14 + \frac{25}{4},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}, \quad x + \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2},$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2, \quad x_2 = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -7. \quad \blacktriangle$$

Joqarıda kvadrat teńlemelerdi tolıq kvadratqa jiklew usılı menen sheshiw kórip shígıldı. Usı usıldı ulıwma túrdegi kvadrat teńlemeňi sheshiw for-mulasın keltirip shígariw ushın qollanamız.

Ulıwma túrde berilgen kvadrat teńlemeňi qarayıq:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{bunda } a \neq 0.$$

Teńlemeňi eki jaǵın a ǵa bólip,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

kvadrat teńlemeňi payda etemiz.

Bul teńlemeňi túrin mınaday etip túrlendireyik, onıń shep jaǵında eki aǵzalınıń *tolıq kvadrati* payda bolsın:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}, & x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Eger, $b^2 - 4ac \geq 0$ bolsa, onda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

Bunnan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

yamasa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

- (2) formula uliwma túrdegi kvadrat teńleme korenleriniň formulası delinedi.
 $D=b^2-4ac$ aňlatpa $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńlemeniň diskriminantı delinedi.
- (2) formuladan kórinip turǵanday, kvadrat teńleme:
- 1) $D>0$ bolsa, x_1 hám x_2 – eki túrli korenge iye, $x_1 \neq x_2$;
 - 2) $D=0$ bolsa, $x_1=x_2$ – bir korenge iye;
 - 3) $D<0$ bolsa, haqıyqıy korenlerge iye emes.

1-másele. Teńlemeni sheshiń:

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

△ Bul jerde $a=6$, $b=1$, $c=-2$ hám $D>0$, yağníy teńleme eki korenge iye. (2) formula boyinsha tómendegilerdi tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

bunnan

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Juwabi: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ▲

2- m á s e l e . $4x^2 - 4x + 1 = 0$ teńlemeni sheshiń.

△ Bul jerde $a=4$, $b=-4$, $c=1$ hám $D=0$ yağníy teńleme bir korenge iye. (2) formula boyinsha tómendegilerdi tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Juwabi: $x = \frac{1}{2}$. ▲

Eger (1) teńliktiň oň jaǵında teris san tursa, yağníy $D=b^2-4ac<0$ bolsa, onda (1) teńlik x tiń hesh qanday haqıyqıy mánisinde durıs bolmaydı, sebebi onıň shep jaǵı teris emes. Sonıń ushın, eger $D=b^2-4ac<0$ bolsa,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

teńlemesi haqıqıy korenlerge iye bolmaydi.

3- māsele. $x^2 - 4x + 5 = 0$ teńleme haqıqıy korenlerge iye emesligin dálilleń.

△ Bul jerde $a=1$, $b=-4$, $c=5$,

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0.$$

Demek, berilgen teńleme haqıqıy korenlerge iye emes. ▲

4- māsele. $2x^2 + 3x + 4 = 0$ teńlemenı sheshiń:

△ (2) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4}.$$

Koren belgisi astında turǵan san teris:

$$9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 < 0.$$

Juwabi: Teńleme haqıqıy korenlerge iye emes. ▲

Bul mísalda $D = b^2 - 4ac = -23 < 0$: haqıqıy korenler joq ekenlige diskriminantı esaplap isenim payda etiwge de bolatugın edi.

Tolıq emes kvadrat teńlemelerdi de (2) formula boyınsha sheshiw mümkin. Biraq, olardı sheshiwde 23-§ ta berilgen usillardan paydalaniw qolaylıraq.

Shınıǵıwlar

359. Sonday óń m sandı tabiń, nátiyjede berilgen ańlatpa qosındınıń yaki ayırmayıń kvadratı bolsın:

- 1) $x^2 + 4x + m$; 2) $x^2 - 6x + m$; 3) $x^2 - 14x + m$;
4) $x^2 + 16x + m$; 5) $x^2 + mx + 4$; 6) $x^2 - mx + 9$.

360. Teńlemeni tolıq kadrattı jiklew usılı menen sheshiń:

- 1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $x^2 + 4x - 12 = 0$;
3) $x^2 + 2x - 15 = 0$; 4) $x^2 - 10x + 16 = 0$;
5) $x^2 - 6x + 3 = 0$; 6) $x^2 + 8x - 7 = 0$.

Teńlemeňi sheshiń (**361–363**):

361. 1) $9x^2 + 6x - 8 = 0$;

2) $25x^2 - 10x - 3 = 0$.

2) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

363. 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;

2) $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

364. $D = b^2 - 4ac$ ańlatpanıń mánisin esaplań, bunda:

1) $a = 3, b = 1, c = -4$;

2) $a = 3, b = -0,2, c = -0,01$;

3) $a = 7, b = -6, c = -45$;

4) $a = -1, b = 5, c = 1800$.

365. Kvadrat teńlemeňi sheshiń:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;

2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;

4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

5) $3x^2 + 11x + 6 = 0$;

6) $4x^2 - 11x + 6 = 0$.

366. x tiń qanday mánislerinde ańlatpanıń mánisi nolge aylanadı:

1) $2x^2 + 5x - 3$;

2) $2x^2 - 7x - 4$;

3) $3x^2 + x - 4$;

4) $3x^2 + 2x - 1$;

5) $x^2 + 4x - 3$;

6) $3x^2 + 12x + 10$;

7) $-2x^2 + x + 1$;

8) $-3x^2 - x + 4$;

9) $6x^2 - 5x + 1$?

Kvadrat teńlemeňi sheshiń (**367–368**):

367. 1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;

2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;

3) $49x^2 + 28x + 4 = 0$;

4) $36x^2 + 12x + 1 = 0$.

368. 1) $2x^2 + x + 1 = 0$;

2) $3x^2 - x + 2 = 0$;

3) $5x^2 + 2x + 3 = 0$;

4) $x^2 - 2x + 10 = 0$.

369. Tómendegi teńlemelerdi sheshpesten, olardıń neshe korenge iye bolıwın anıqlań:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$;

2) $3x^2 - 7x - 8 = 0$;

3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

4) $9x^2 - 6x + 2 = 0$.

Teńlemeni sheshiń (**370–372**):

- 370.** 1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; 2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$;
3) $9x^2 + 12x + 4 = 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 = 0$;
5) $4x^2 + 12x + 9 = 0$; 6) $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- 371.** 1) $6x^2 = 5x + 1$; 2) $5x^2 + 1 = 6x$;
3) $x(x - 1) = 72$; 4) $x(x + 1) = 56$;
5) $2x(x + 2) = 8x + 3$; 6) $3x(x - 2) - 1 = x - 0,5(8 + x^2)$.

372. 1) $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{x + 7}{4}$; 2) $\frac{x^2 - 3x}{7} + x = 11$;
3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{2 - 3x}{4} = \frac{x^2 - 6}{6}$; 4) $\frac{x^2 + x}{4} - \frac{3 - 7x}{20} = 0,3$.

373. Teńlemeni sheshiń:

1) $5x^2 - 8x - 4 = 0$; 2) $4x^2 + 4x - 3 = 0$;
3) $8x^2 - 6x + 1 = 0$; 4) $5x^2 - 26x + 5 = 0$.

374. Teńlemeni tolıq kvadrattı jiklew usılı menen sheshiń:

1) $x^2 - 16x + 48 = 0$; 2) $x^2 - 7x - 18 = 0$;
3) $x^2 - 15x + 56 = 0$; 4) $x^2 + 12x + 27 = 0$;
5) $x^2 - 11x + 28 = 0$; 6) $x^2 - 11x + 18 = 0$;
7) $x^2 + 10x + 21 = 0$; 8) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
9) $x^2 - 21x + 20 = 0$; 10) $x^2 - 6x - 55 = 0$;
11) $3x^2 - x - 70 = 0$; 12) $x^2 - 100x + 99 = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ teńlemeniń eki jaǵın da $4a$ óga kóbeytip hám
 $ax^2 + bx + c = 0$ úsh aǵzalıdan tolıq kvadrat jiklewge boladı:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ bunnan, } 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Onda $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Másele. Tolıq kvadrattı joqaridaǵı usıl menen jiklep, $10x^2 + 13x - 3 = 0$ teńlemenı sheshiń:

$$\Delta 10x^2 + 13x - 3 = 0, \quad 40 \cdot 10x^2 + 40 \cdot 13x - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x)^2 + 2 \cdot 20x \cdot 13 + 13^2 - 13^2 - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x + 13)^2 = 169 + 120, \quad (20x + 13)^2 = (17)^2; \quad 20x + 13 = \pm 17;$$

$$x_1 = \frac{17 - 13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad x_2 = \frac{-17 - 13}{20} = \frac{-30}{20} = -\frac{3}{2}.$$

Juwabi: $x = \frac{1}{5}, \quad x = -\frac{3}{2}$. 

375. Teńlemenı kórsetilgen usıl menen sheship kóriń:

$$1) 12x^2 - 7x + 1 = 0;$$

$$2) 6x^2 + 5x + 1 = 0;$$

$$3) 8x^2 + 7x - 1 = 0;$$

$$4) \frac{x^2}{12} - \frac{1}{12}x - 1 = 0.$$



No 4

*Qırınıń uzınlığı 3 sm bolǵan kub qızıl reńge boyalǵan. Ol 1 sm bolǵan kublarǵa bólinedi. Neshe kub úsh qızıl jaqqa iye? Eki qızıl jaqqa iye? Bir qızıl jaqqa iye?
Bir qızıl jaqqa iye emes?*

25- §. VIET TEOREMASÍ.KVADRAT ÚSH AĞZALÍNÍ SÍZÍQLÍ KÓBEYTIWSHILERGE JIKLEW



Mina

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

túrindegi kvadrat teńleme keltirilgen kvadrat teńleme dep ataladı.

Bul teńlemede bas koefficient birge teń. Mısalı,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

teńlemesi keltirilgen kvadrat teńleme boladı.



Hár qanday

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kvadrat teńlemesin onú eki jaǵın $a \neq 0$ ge bólip, (1) teńleme túrine keltiriwge boladı.

Máselen, $4x^2 + 4x - 3 = 0$ teńlemesiniń barlıq aǵzaların 4 ke bólip, tómen-degi túrge keltiremiz.

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

(1) keltirilgen kvadrat teńlemenin korenlerin tabamız. Bunıń ushın uluw-ma túrdegi $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemesiniń korenleriniń formulasınan, yaǵníy

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

formulasınan paydalanamız. Ulıwma túrdegi teńlemede $a=1$, $b=p$, $c=q$ bolsa, keltirilgen kvadrat teńleme

$$x^2 + px + q = 0$$

payda boladı. Sol sebepli keltirilgen kvadrat teńleme ushın (2) formula

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

yaki

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (3)$$

túrine iye boladı.

(3) formulaǵa keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń formulası delinedi.

(3) formuladan, ásirese, p - jup san bolǵanda paydalaniw qolaylı.

Mısalı, $x^2 - 14x - 15 = 0$ teńlemenı shesheyik:

△ (3) formula boyınsha tómendegini tabamız:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Juwabi: $x_1 = 15$, $x_2 = -1$. ▲

Keltirilgen kvadrat teńleme ushın tómendegi teorema orınlı:



V i e t t e o r e m a s ı . Eger x_1 hám x_2 ler

$$x^2 + px + q = 0$$

teńlemesiniń korenleri bolsa, onda

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

formulalari orınlı, yaǵniy keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń qosındısı qarama-qarsı belgisi menen alıńǵan ekinshi koefficientke, al korenleriniń kóbeymesi saltań aǵzaǵa teń.

○ (3) formula boyınsha:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qossaq, $x_1+x_2=-p$ boladı. Bul teńliklerdi kóbeytip, kvadratlardıń ayırmasınıń formulası boyınsha tómendegini payda etemiz:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$

Mısali, $x^2-13x+30=0$ teńlemesi $x_1=10$, $x_2=3$ korenlerine iye; onıń korenleriniń qosındısı $x_1+x_2=13$, al olardıń kóbeymesi $x_1 \cdot x_2=30$.

Viet teoreması, kvadrat teńleme teń eki $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$ korenlerge iye bolǵan jaǵdayda da durıs bolatuǵınlıǵın atap ótemiz.

Mısali, $x^2-6x+9=0$ teńlemesi teń eki $x_1=x_2=3$ korenlerge iye; olardıń qosındısı $x_1+x_2=6$, kóbeymesi $x_1 \cdot x_2=9$.

1- m á s e l e . Mına $x^2+px-12=0$ teńlemesiniń korenlerinen biri $x_1=4$. Usı teńlemenıń p koefficientin hám ekinshi koreni x_2 ni tabıń.

△ Viet teoreması boyınsha:

$$x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = -p.$$

$$x_1=4 \text{ bolǵanı ushın } 4x_2=-12, \text{ bunnan } x_2=-3,$$

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1.$$

Juwabı: $x_2=-3$, $p=-1$. ▲

2- m á s e l e . Korenleri $x_1=3$, $x_2=4$ bolǵan keltirilgen kvadrat teńlemeni dúziń.

△ $x_1=3$; $x_2=4$ sanları $x^2+px+q=0$ teńlemesiniń korenleri bolǵanı ushın Viet teoremasına muwapiq $p=-(x_1+x_2)=-7$, $q=x_1x_2=12$.

Juwabı: $x^2-7x+12=0$. ▲

3- m á s e l e . $3x^2+8x-4=0$ teńlemesiniń korenleriniń biri oń. Teńlemeni sheshpey turıp, ekinshi korenniń belgisin anıqlań.

△ Teńlemeniń eki jaǵın 3 ke bölip, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

Viet teoremasına muwapiq $x_1x_2 = -\frac{4}{3} < 0$. Shárt boyinsha $x_1 > 0$, demek, $x_2 < 0$. 

Bazı mäselelerde sheshide *Viet teoremasına keri bolğan* tómendegi teorema qollanıladı.



Eger p, q, x_1, x_2 sanlar ushın

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (4)$$

qatnasları orınlansa, onda x_1 hám x_2 sanlar

$$x^2 + px + q = 0$$

teńlemeńiń korenı boladı.

 Shep jaqtığı

$$x^2 + px + q$$

ańlatpada p niń ornına $-(x_1 + x_2)$ ni, q niń ornına $x_1 \cdot x_2$ kóbeymesin qoyamız. Nátiyede tómendegi ańlatpa payda boladı:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = \\ &= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Solay etip, eger p, q, x_1 hám x_2 sanlar (4) qatnasları menen baylanısta bolsa, onda x tiń hár qanday mánisinde

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

teńligi orınlanadi, bunnan x_1 hám x_2 lar $x^2 + px + q = 0$ teńlemeńiń korenleri ekeni kelip shıǵadı. 

Viet teoremasına keri teoramadan paydalanıp, kvadrat teńlemeńiń korenlerin bazı da *tańlaw usılı* menen de tabıwǵa boladı.

4 - m á s e l e . Tańlaw usılı menen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

teńlemeńiń korenlerin tabıń.

△ Bunda $p=-5$, $q=6$. Eki x_1 hám x_2 sanın

$$x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 x_2 = 6$$

bolatugın etip tańlaymız.

$6=2 \cdot 3$ hám $2+3=5$ ekenligin esapqa alıp, Viet teoramasına keri teorema boyinsha $x_1=2$, $x_2=3$ ke, yaǵníy $x^2-5x+6=0$ teńlemeńiń korenlerine iye bolamız. ▲

5-másele. $\frac{x^2-x-12}{x+3}$ bólshekti qısqartıń.

△ Bólshektiń alımın kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= x^2 - 4x + 3x - 12 = \\ &= x(x-4) + 3(x-4) = (x-4)(x+3). \end{aligned}$$

Demek,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3} = \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = x-4. \quad \blacktriangle$$

ax^2+bx+c kóp aǵzalısı kvadrat úsh aǵzalısı delinedi, bunda $a \neq 0$.

5- máseleni sheshiwde x^2-x-12 kvadrat úsh aǵzalını gruppalaus usılı menen kóbeytiwshilerge jiklenedi. Onı tómendegi teoremadan paydalanıp ta kóbeytiwshilerge jiklewge boladı.



Teorema. Eger x_1 hám x_2 ler $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńlemeńiń korenleri bolsa, onda barlıq x ushın tómendegi teńlik orınlı boladı:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (5)$$

○ (5) teńliktiń onı jaǵında turǵan ańlatpanı kóp aǵzalıllarǵa túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - ax \cdot x_1 - ax \cdot x_2 + ax_1 x_2 = \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

x_1 hám x_2 lar $ax^2+bx+c=0$ teńlemesiniń, yaǵníy $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ teńlemeńiń korenleri bolǵanı ushın Viet teoreması boyinsha,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

bunnan $a(x_1 + x_2) = -b$, $ax_1 x_2 = c$.

Bul ańlatpalardı (6) teńlikke qoyıp, (5) formulanı payda etemiz.

(5) formula $ax^2 + bx + c$ kvadrat úsh aǵzalı siziqlı kóbeytiwshilerge jikleniwin ańlatadı.

6- m ás ele. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ ańlatpanı ápiwayılastırıń.

△ Bólshektiń alımı hám bólomin kóbeytiwshilerge jikleymiz.

1) $2x^2+5x-3=0$ teńlemesi eki korenge iye:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3.$$

Dálillengen teorema boyınsha

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3).$$

2) $x^2 - x - 12 = 0$ teńleme $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ korenlerge iye. Dálillengen teorema boyınsha $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$.

Solay etip,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12} = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{2x-1}{x-4}. \quad \blacktriangle$$

Shiniǵıwlar

376. Keltirilgen kvadrat teńlemenı sheshiń:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; | 2) $x^2 - 6x - 7 = 0$; |
| 3) $x^2 - 8x - 9 = 0$; | 4) $x^2 + 6x - 40 = 0$; |
| 5) $x^2 + x - 6 = 0$; | 6) $x^2 - x - 2 = 0$. |

377. (Awızeki.) Keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń qosındısı hám kóbeymesin aytıń:

1) $x^2 - x - 2 = 0;$

2) $x^2 - 5x - 6 = 0;$

3) $x^2 + 3x + 2 = 0;$

4) $x^2 + 3x - 4 = 0;$

5) $x^2 - 7x + 5 = 0;$

6) $x^2 + 9x - 6 = 0.$

378. (Awızeki.) $x^2 - 19x + 18 = 0$ teńlemesiniń korenlerinen biri 1 ge teń. Onıń ekinshi korenin tabıń.

379. (Awızeki.) $28x^2 + 23x - 5 = 0$ teńlemesiniń korenlerinen birewi 1 ge teń. Onıń ekinshi korenin tabıń.

380. (Awızeki.) Teńlemeni sheshpesten, onıń korenleriniń belgilerin anıqlań:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0;$

2) $x^2 + 5x + 3 = 0;$

3) $x^2 - 5x + 3 = 0;$

4) $x^2 - 8x - 7 = 0.$

381. Korenleri x_1 hám x_2 bolǵan keltirilgen kvadrat teńlemenin jazıń:

1) $x_1 = 3, x_2 = -1;$

2) $x_1 = 2, x_2 = 3;$

3) $x_1 = -4, x_2 = -5;$

4) $x_1 = -3, x_2 = 6.$

382. Tańlaw jolı menen teńlemenin korenlerin tabıń:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0;$

2) $x^2 - 7x + 12 = 0;$

3) $x^2 - 6x + 5 = 0;$

4) $x^2 + 8x + 7 = 0;$

5) $x^2 - 8x + 15 = 0;$

6) $x^2 + 2x - 15 = 0.$

383. Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleń:

1) $x^2 - 5x + 6;$

2) $x^2 + 4x - 5;$

3) $x^2 + 5x - 24;$

4) $x^2 + x - 42;$

5) $2x^2 - x - 1;$

6) $8x^2 + 10x + 3;$

7) $-6x^2 + 7x - 2;$

8) $-4x^2 - 7x + 2.$

384. Bólsheklerdi qısqartıń:

$$1) \frac{x^2+x-2}{x-1};$$

$$2) \frac{x^2+4x-12}{x-2};$$

$$3) \frac{x+3}{x^2-6x-27};$$

$$4) \frac{x-8}{x^2-x-56};$$

$$5) \frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1};$$

$$6) \frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}.$$

385. Keltirilgen kvadrat teńlemeńi sheshiń:

$$1) x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0;$$

$$2) x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0;$$

$$3) x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0;$$

$$4) x^2 - 4\sqrt{7}x + 4 = 0.$$

386. Kóbeytiwshilerge jikleń:

$$1) x^3 - 3x^2 + 2x;$$

$$2) x^3 + 4x^2 - 21x;$$

$$3) x^3 + 5x^2 - 24x;$$

$$4) x^3 - 9x^2 - 22x;$$

$$5) x^3 - 8x^2 + 7x;$$

$$6) x^3 - 5x^2 + 6x.$$

387. Bólshektili qısqartıń:

$$1) \frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}; \quad 2) \frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}; \quad 3) \frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}; \quad 4) \frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}.$$

388. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

$$1) \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x-3};$$

$$2) \frac{3}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x+3};$$

$$3) \frac{7}{5x^2+3x-2} - \frac{5}{5x-2};$$

$$4) \frac{5x+1}{x^2+9x-10} : \frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}.$$

26- §. KVADRAT TEŃLEMEGE KELTIRILETUĞÍN TEŃLEMELER

1- m ás e l e. Teńlemeńi sheshiń:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

Δ $x^2=t$ dep belgileymiz. Bunda teńleme tómendegi kóriniske iye boladı:

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Bul kvadrat teńlemeni sheshemiz:

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 3.$$

$x^2 = t$ bolǵanı ushın berilgen teńlemeni sheshiw tómendegi eki teńlemeni sheshiwge keltiriledi.

$$x^2 = 4, \quad x^2 = 3,$$

bunnan

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{3}.$$

Juwabi: $x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$. ▲



Mıma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

túrindegi teńleme bikvadrat teńleme dep ataladı, bunda $a \neq 0$.

$x^2 = t$ dep belgilep, bul teńleme kvadrat teńlemege keltiriledi.

2- mäsеле. Bikvadrat teńlemeni sheshiń:

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

△ $x^2 = t$ dep belgileymiz. Onda

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Bul kvadrat teńlemeni sheship, tawamız:

$$t_1 = \frac{4}{9}, \quad t_2 = -1.$$

$x^2 = \frac{4}{9}$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$ korenlerge iye, $x^2 = -1$ teńlemesi bolsa haqıqıy korenlerge iye emes.

Juwabi: $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$. ▲

3- mäsеле. Teńlemeni sheshiń:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3.$$

Δ Teńlemedegi bolsheklerdiń ulıwma bólimi $(x + 2)(x - 3)$ ke teń. Eger, $x + 2 \neq 0$ hám $x - 3 \neq 0$ bolsa, onda teńlemenin eki jaǵın da $(x + 2)(x - 3)$ ke kóbeytip, tómendegige iye bolamız:

$$3(x - 3) - 4(x + 2) = 3(x + 2)(x - 3).$$

Bul teńlemeni túrlenediremiz:

$$\begin{aligned} 3x - 9 - 4x - 8 &= 3(x^2 - x - 6), \\ -x - 17 &= 3x^2 - 3x - 18, \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Payda bolǵan kvadrat teńlemen sheship, onıń korenlerin tawamız:

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$x = 1$ hám $x = -\frac{1}{3}$ bolǵanda berilgen bolsheklerdiń bólimleri nolge aylanbaǵanı ushın 1 hám $-\frac{1}{3}$ sanları usı teńlemenin korenleri boladı.

Juwabi: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}$. Δ

4- mas ele. Teńlemeni sheshiń:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}, \quad x \neq 1, x \neq 2. \quad (1)$$

Δ Shárti boyınscha $(x-1)(x-2) \neq 0$. Teńlemenin eki jaǵın da $(x-1)(x-2)$ kóbeytip, tómendegini payda etemiz:

$$1 + 3(x - 2) = (3 - x)(x - 1).$$

Bul teńlemeni túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} 1 + 3x - 6 &= -x^2 + 4x - 3, \\ x^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Payda bolǵan kvadrat teńlemen sheship, onıń korenlerin tabamız:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

$x = -1$ bolǵanda berilgen teńlemeńiń bólimaları nolge aylanbaydı. Demek, -1 sanı – berilgen teńlemeńiń koreni. $x = 2$ bolǵanda berilgen teńlemedegei eki bólshektiń bólimi nolge teń. Soniń ushın 2 sanı berilgen teńlemeńiń koreni bolmaydı.

Juwabi: $x = -1$. 

4- máselede berilgen (1) teńleme eki korenge iye bolǵan (2) kvadrat teńlemege keltirildi. Olardan biri, yaǵníy $x_1 = -1$ (1) teńlemeńiń koreni boladı. Ekinshisi $x_2 = 2$ koren (1) teńlemeńiń koreni bolmaydı. Bunda ol *shet koren* dep ataladı.

Solay etip, teńlemeńiń belgisizi bar ańlatpaǵa kóbeytkende shet korenler payda bolıwı mümkin. Soniń ushın *bólshek bóliminde belgisizi bar teńlemederdi sheshiwde tekseriw ótkiziw kerek*.

5- m á s e l e . Teńlemeńiń sheshiń:

$$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

Bunday teńlemeler *bólshek-racional teńlemelerge* mísal bola aladı.

 $x^2 + 7x + 12$ kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleymiz. $x^2 + 7x + 12 = 0$ teńlemesin sheship, oniń $x_1 = -3$, $x_2 = -4$ korenlerin tabamız. Soniń ushın

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Teńlemeńiń eki jaǵın bólsheklerdiń ulıwma bólime, yaǵníy $(x + 3)(x + 4)$ ke kóbeytemiz. Nátiyjede tómendegige iye bolamız.

$$(x + 7)(x + 3) - (x + 4) + 1 = 0.$$

Teńlemeńiń türleklerini tórmashyndyklary:

$$x^2 + 10x + 21 - x - 4 + 1 = 0,$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0.$$

Bul teńlemeńiń sheship, oniń korenlerin tabamız:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -6.$$

Endi korendi tekseremiz. $x = -3$ bolǵanda berilgen teńleme ekinshi hám úshinshi bólshekleriniń bólimaları nolge aylanadı. Soniń ushın $x_1 = -3$ – shet

koren. $x = -6$ bolǵanda berilgen teńleme bólshekleriniń bólimleri nolge teń emes. $x = -6$ ni berilgen teńlemege qoyıp, bul san teńlemeneniń korenı bolıwına isenim payda etiw mümkin.

J u w a b i : $x = -6$. 

Shiniǵıwlar

Teńlemeni sheshiń (**389–392**):

389. 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$

3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0;$

2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$

4) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0.$

390. 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$

3) $x^4 + x^2 - 20 = 0;$

2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0;$

4) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0.$

391. 1) $\frac{10}{x-3} - \frac{8}{x} = 1;$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20};$

5) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{5}{8};$

2) $\frac{2}{x-5} + \frac{14}{x} = 3;$

4) $\frac{40}{x-20} - \frac{40}{x} = 1;$

6) $\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1,5.$

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6} = \frac{x-2}{4x+3};$

3) $\frac{x+5}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1};$

5) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{x}{-3-x} = \frac{6}{x+3};$

2) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{13}{6};$

4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1;$

6) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x}{1-x} = \frac{3}{x-1}.$

393. Teńleme haqıyqıy korenlerge iye me:

1) $x^4 - 5x^2 + 7 = 0;$

2) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0?$

394. x tiń qanday mánislerinde ańlatpalardıń mánisleri bir-birine teń:

1) $\frac{6}{x^2-1} + \frac{2}{1-x}$ va $2 - \frac{x+4}{x+1};$

2) $\frac{6}{x+2} - \frac{3}{x-2}$ va $\frac{14}{4-x^2} + 1?$

Sáykes belgilew kirgizip, teńlemeni sheshiń (**395–399**):

- 395.** 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
 3) $9x^4 + 23x^2 - 12 = 0$; 4) $16x^4 - 409x^2 + 225 = 0$;
 5) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; 6) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
 7) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$; 8) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

- 396.** 1) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$; *Belgilew:* $(x+3)^2 = t$
 2) $(2x-1)^4 - 13(2x-1)^2 - 12 = 0$; $(2x-1)^2 = t$
 3) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$; $(x-1)^2 = t$
 4) $(x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 16 = 0$; $(x+2)^2 = t$
 5) $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9 = 0$; $(x^2 + 6x) = t$
 6) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$. $(x^2 - 16x) = t$

- 397.** 1) $(x+1)^2 \cdot (x^2 + 2x) = 12$;
 2) $(x-2)^2 \cdot (x^2 - 4x) + 3 = 0$;
 3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 4) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
 5) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$;
 6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7) + 36 = 0$.

- 398.** 1) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3\frac{1}{3}$; 2) $\frac{x^2 - 2x}{4x-3} + 5 = \frac{16x-12}{2x-x^2}$;
 3) $\frac{x^2 + 4x}{7x-2} - \frac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$; 4) $\left(\frac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25$;
 5) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9}$; 6) $\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{2-5x}\right)^2 = 3\frac{31}{225}$;
 7) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2,5$.

399. 1) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$; *Belgilew:* $(x + \frac{1}{x}) = t$.

2) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$;

3) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$;

4) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$;

5) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = -5$;

6) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$.

- 400.** Tómendegi teňleme niň hárkıtı ushın: 1) barlıq korenler qosındısın; 2) barlıq korenler kóbeymesin; 3) teris korenler qosındısın; 4) óń korenler kóbeymesin; 5) eń úlken hám eń kishi korenler ayırmasın; 6) eń úlken óń korenniň eń kishi óń korenine qatnasın tabıń:

1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

3) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 4) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;

5) $x^4 - 19x^2 + 90 = 0$; 6) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$.

- 401.** Teňleme niň sheshiniň:

1) $\left(x^2 - 8\right)^2 + 4\left(x^2 - 8\right) = 5$;

2) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$;

3) $\left(x + 5\right)^4 - 13\left(x + 5\right)^2 \cdot x^2 + 36x^4 = 0$;

4) $5x^4 + 20x^3 - 40x + 17 = 0$;

5) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)x^2 = 8$.

27-§. KVADRAT TEŃLEMELER JÁRDEMINDE MÁSELELER SHESHIW

Kvadrat teńlemeler járdeminde birneshe másele sheshemiz.

1- m á s e l e. Shaxtaǵa taslandı hám onıń shaxta túbine urılǵandaǵı sesti 9 sekundtan keyin esitildi. Sestiń tezligin 320 m/s , awırılıq kúshiniń tezleniwin $g = 10 \text{ m/s}^2$ dep esaplap, shaxtanıń tereńligin aniqlań.

△ Shaxtanıń tereńligin tabıw ushın tastıń shaxta túbine túsiw waqtı t ni aniqlaw jetkilikli, sebebi shaxtanıń tereńligi erkin túsiw nızamı boyınsha $\frac{gt^2}{2}$ metrge teń.

Shárt boyınsha $g=10 \text{ m/s}^2$. Sonlıqtan, shaxtanıń tereńligi $5t^2$ metrge teń.

Ekinshi jaqtan, shaxtanıń tereńligin ses tezligi 320 m/s tastıń shaxta túbine barıp tiygendegi sesti esitilgenge shekemgi ótken waqıtqa, yaǵníy $(9-t)$ sekundqa kóbeytip tabıwǵa boladı. Demek, shaxtanıń tereńligi $320(9-t)$ metrge teń.

Shaxtanıń tereńligin aniqlaw ushın tabılǵan eki ańlatpanı teńlestirip, $5t^2=320(9-t)$ teńlemesin düzemiz. Bul teńlemenin tómendegishe sheshemiz:

$$t^2 - 64(9-t) = 0,$$

$$t^2 + 64t - 64 \cdot 9 = 0.$$

Payda bolǵan kvadrat teńlemenin korenlerin tabamız:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32(32+18)} = \\ &= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40, \\ t_1 &= 8, \quad t_2 = -72. \end{aligned}$$

Tastiń túsiw waqtı oń bolǵanı ushın $t=8 \text{ s}$ boladı.

Demek, shaxtanıń tereńligi tómendegige teń:

$$5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320(\text{m}).$$

Juwabi: 320 m. ▲

2- m ás e l e. Tez júrer avtobus avtovokzaldan 40 km uzaqlıqtaǵı aeroportqa qaray ketti. Aradan 10 minut ótkennen keyin avtobustıń keyninen taksi menen jolawshı ketti. Taksidiń tezligi avtobustıń tezliginen 20 km/saatqa saatqa artıq. Eger olar aeroportqa birdey waqıtta jetip kelgen bolsa, taksi menen avtobustıń tezligin tabıń.

△ Avtobustıń tezligi x km/saat bolsın, onda taksidiń tezligi $(x+20)$ km/saat boladı. Avtobustıń häreket etiw waqtı $\frac{40}{x}$ saat, taksidiń häreket etiw waqtı bolsa $\frac{40}{x+20}$ saat boladı. Máseleniń shártı boyınsa avtobus penen taksidiń qozǵalıs waqtı arasındaǵı parıq 10 minutqa, yaǵníy $\frac{1}{6}$ saatqa teń. Demek,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Payda bolǵan teńlemeń sheshemiz. Teńlemeńiń eki jaǵın da $6x(x + 20)$ ga kóbeytip, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 6 \cdot (x + 20) - 40 \cdot 6x &= x(x + 20), \\ 240x + 4800 - 240x &= x^2 + 20x, \\ x^2 + 20x - 4800 &= 0. \end{aligned}$$

Bul teńlemeńiń korenleri:

$$x_1 = 60, \quad x_2 = -80.$$

x tiń bul mánislerinde (1) teńlemege kiriwshi bólsheklerdiń bólimleri nolge teń emes. Sonıń ushın, $x_1 = 60$ hám $x_2 = -80$ (1) teńlemeńiń korenleri boladı.

Avtobustıń tezligi oń bolǵanı ushın, máseleniń shártın tek bir sheshim qanaatlandıradı: $x = 60$. Sonıń ushın taksidiń tezligi 80 km/saatqa teń.

Juwabi: Avtobustıń tezligi 60 km/saat, taksidiń tezligi 80 km/saat. ▲

3- m ás e l e. Qol jazbanı kóshiriw ushın birinshi operator ekinhisine qaraǵanda 3 saat kem waqt sarpladı. Olar birgelikte islep barlıq qol jazbanı 6 saat 40 minutta kóshirip boldı. Barlıq qol jazbanı kóshiriw ushın olardıń hárbinne qanshadan waqt talap etiledi?

△ Barlıq qol jazbanı kóshiriw jumısın bir birlik, dep qabil etemiz. Meyli birinshi operator qol jazbanı kóshiriw ushın x saat sarplaǵan bolsın. Onda ekinshi operatorıǵa bul jumıs ushın $(x+3)$ saat talap etiledi. Birinshi opera-

tor bir saatta jumıstıń $\frac{1}{x}$ bólimin, ekinshisi bolsa $\frac{1}{x+3}$ bólimin isleydi. Olar birlikte bir saatta barlıq jumıstıń $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$ bólimin isleydi, 6 saat 40 minutta, yaǵníy $6\frac{2}{3}$ saatta olar barlıq jumıstı islep pitkeredi. Sonıń ushın,

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1.$$

Bul teńlemeni tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}. \quad (2)$$

Teńlemeniń eki jaǵın da $20x(x+3)$ ke kóbeytip, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} 20(x+3) + 20x &= 3x(x+3), \\ 40x + 60 &= 3x^2 + 9x, \\ 3x^2 - 31x - 60 &= 0. \end{aligned}$$

Bul teńlemeniń korenleri:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

x tiń bul mánislerinde (2) teńlemege kiriwshi bólsheklerdiń bólimleri nolge teń emes. Sonıń ushın $x_1 = 12$ hám $x_2 = -\frac{5}{3}$ (2) teńlemeniń korenleri.

Máseleniń mazmunı boyınsha $x > 0$ bolǵanı ushın $x = 12$. Demek, birinshi operator 12 saat, al ekinshisi 12 saat + 3 saat = 15 saat jumıs islegen.

Juwabi: 12 saat hám 15 saat. ▲

Shiniǵıwlar

- 402.** Kóbeymesi: 1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600 ǵa teń bolǵan eki izbe-iz kelgen natural sandı tabıń.

- 403.** Kóbeymesi: 1) 255; 2) 399 ǵa teń bolǵan eki izbe-iz kelgen taq sandı tabıń.
- 404.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 1 m, beti bolsa 4 dm^2 . Onıń táreple-riniń uzınlıǵıń tabıń.
- 405.** Maydanı 2,45 hektar bolǵan baǵ 630 m uzınlıqtaǵı diywal menen qorshalǵan. Eger, baǵ tuwrı tórtmúyeshlik túrinde bolsa, onıń boyı hám enin tabıń.
- 406.** 400 km aralıqtı tez júrer poezd júk poezdına qaraǵanda 1 saat tezirek basıp ótedi. Eger, júk poezdınıń tezligi, tez júrer poezdinikinen 20 km/saat kem bolsa, hárbiir poezddiń tezligi qanday?
- 407.** Keme dárya ágısı boyınsha *A* pristanınan *B* pristanına bardı. Keme yarıı saat toqtagannan soń, keyin qaray qayıttı hám *A* dan shıqqanınan 8 saat ótkennen keyin jáne *A* pristanǵa qayıtip keldi. *A* hám *B* pristan-ları arasındaǵı aralıq 36 km ge teń, al dárya ágısınıń tezligi 2 km/saat bolsa, kemeniń turǵan suwdaǵı tezligin tabıń?
- 408.** Eki topar qánigeler birgelikte islep awılda tazadan qurılıǵan emlewxananı zamanagóy medicina ásbap-úskenelei menen támiyinlew hám olardı ornatıw jumısların 12 künde tamamladı. Eger toparlardıń birewi bul jumıstı ekinshisine qaraǵanda 10 kún kem waqıtta orınlay alsa, hárbiir topar óz aldına islep, onı neshe künde orınlaydı?
- 409.** Kvadrat túrindegi qańıltırdan eni 6 sm lik qańıltır qırqıp alındı. Qalǵan bóleginiń beti 135 sm^2 qa teń. Kvadrattıń dáslepki ólshem-lerin tabıń.
- 410.** Tuwrımúyeshli úshmúyeshliktiń maydanı 180 sm^2 . Eger katetleriniń biri ekinshisinen 31 sm úlken bolsa, usı úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.
- 411.** 30 km aralıqtı velosipedshilerdiń biri ekinshisine qaraǵanda 20 min tezirek basıp ótti. Birinshi velosipedshiniń tezligi ekinshisinkinen 3 km/saat artıq edi. Hárbiir velosipedshiniń tezligi qanday?
- 412.** Eki qurılıs brigadası birgelikte islep, qoylar ushın 6 künde qora qurdı. Eger bul jumıstı orınlaw ushın birinshi brigadaǵa, ekinshisine qaraǵanda 5 kún artıq talap etilse, hárbiir brigada óz aldına islep, neshe künde qurıp pitkeredi?



Nº 5

$x^4 + 2006x^2 + 2005x + 2006$
Kópaǵzalíní kóbeytiwshilerge jiklení.

III bapqa tiyisli shiniǵwlar

Teńlemení sheshiń (**413–415**):

- 413.** 1) $x^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 50 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$;
 4) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$; 5) $x^2 - 48 = 0$; 6) $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$.

- 414.** 1) $x^2 + 4x - 45 = 0$; 2) $x^2 - 9x - 52 = 0$;
 3) $3x^2 - 7x - 40 = 0$; 4) $5x^2 + 17x - 126 = 0$.

- 415.** 1) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $9x^2 - 3x - 4 = 0$;
 3) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

- 416.** Teńlemení sheshpesten, ol neshe haqıyqıy korenge iye ekenin anıqlanı:
 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $5x^2 + 7x - 8 = 0$;
 3) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; 4) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

- 417.** Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklení:
 1) $x^2 + 12x + 30$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $2x^2 + x - 1$;
 4) $2x^2 - 3x - 2$; 5) $x^2 + 8x + 7$; 6) $2x^2 - 3x + 1$.

- 418.** Bólsheklerdi qısqtırını:
 1) $\frac{x^2 - 9}{x+3}$; 2) $\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x+2}$; 3) $\frac{16x^2 - 24x + 9}{4x^2 + 5x - 6}$;
 4) $\frac{25x^2 + 10x + 1}{5x^2 - 14x - 3}$; 5) $\frac{x^2 - 25}{x-5}$; 6) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3}$.

Teńlemeni sheshiń (**419–420**):

- 419.** 1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; 2) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; 4) $5x^4 - 16x^2 + 3 = 0$.

- 420.** 1) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2+x}{x+3} = \frac{5-x}{x}$;
3) $\frac{y+3}{y^2-y} + \frac{6-y}{1-y^2} = \frac{y+5}{y+y}$; 4) $\frac{y+4}{y-4} + \frac{y}{4-y} = -\frac{4}{y+2}$.

- 421.** Mi-6 verolyotınıń hawaǵa salıstırǵanda tezligi 300 km/saat. Ol 224 km aralıqtı eki ret uship ótti: birinshi ret samal jónelisi boyınsha, ekinshi ret samal jónelisine qarsı. Eger vertolyot samalǵa qarsı ushqanda samal jónelisi boyınsha ushqandaǵıǵa qaraǵanda 6 min kóp waqıt jumsaǵan bolsa, samaldıń tezligin aniqlań.
- 422.** Velosipedshi jolınıń birinshi yarımindagı tezligi, onıń ekinshi yarımindagı tezliginen 3 km/saat artıq boldı. Eger, velosipedshi 90 km li barlıq joldı 5,5 saatta basıp ótken bolsa, ol joldıń ekinshi yarımin qanday tezlik penen basıp ótken?
- 423.** Terek otırǵızıwdı eki gruppı isledi. Birinshi gruppı hár kúni ekinshisine qaraǵanda 400 tún kóp terek otırǵızıp, hámmesi 2700 tún terek otırǵızdı. Ekinshi gruppı 2 kún kóp isledi hám 2500 tún terek otırǵızdı. Hárbi gruppı terek otırǵızıwdı neshe kún islegen?

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIŃ!

1. Teńlemeni sheshiń:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $3x^2 = 0$; | 2) $(x+1)(x-2) = 0$; |
| 3) $4x^2 - 1 = 0$; | 4) $3x^2 = 5x$; |
| 5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; | 6) $x^2 - 16x - 17 = 0$; |
| 7) $3x^2 + 5x = 2$; | 8) $x^2 - 4x + 5 = 0$. |

2. Kóbeytiwshilerge jikleń:

1) x^2+x-6 ; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9 .

3. Máseleni sheshiń:

Awıllar arasındaǵı 36 km aralıqtı bir velosipedshi ekinshisinen 1 saat tezirek basıp ótti. Eger, velosipedshilerden biriniń tezligi ekinshisinen 3 km/saat artıq ekeni belgili bolsa, hárbir velosipedshi tezligin tabıń.

Teńlemeni sheshiń (**424–426**):

424. 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

426. 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

427. x tiń qanday mánislerinde $x^2+3x-88$ ánlatpasınıń mánisi: 1) 0 ge; 2) 20 ga; 3) -18 ge; 4) -70 ke teń boladı?

428. Eger:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

bolsa, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńleme neshe haqıyqıy korenge iye boladı?

429. Teńlemeni sheshiń:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7}=\frac{2x-3}{x-7}-\frac{x+5}{x-1}$.

- 430.** Firma belgili bir müddette 5 400 jup ayaq kiyim tayarlawı kerek. Negizinde ol kúnine mólsherlengennen 30 jup kóp ónim tayarladı hám buyıtpanı müddetinen 9 kún aldın orınladı. Buyıtpa neshe künde orınlangan?
- 431.** Eki sayaxatshı velosipedlerinde A awıldan B awılǵa qaray hár túrli joldan shıqtı. Birinshisi 30 km, ekinshisi bolsa 20 km júriwi kerek edi. Birinshi sayaxatshınıń tezligi ekinshisiniňken 3 km/saat artıq. Biraq, ekinshi sayaxatshı B ǵa birinshisine qaraǵanda 20 min aldın jetip keldi. Hárbir sayaxatshı jolǵa qansha waqıt sarplaǵan?
- 432.** Jumısshilardıń eki toparı joldı ońlawdı 4 saatta tamamladı. Eger dáslep birinshi topar joldıń yarımin, soń qalǵan bólegin ońlaǵanda, barlıq ońlaw isleri 9 saatta tamalanǵan bolar edi. Joldı hárbir topar bólek-bólek qansha waqıtta ońlaydı?



III bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler

- Teńlemeni sheshiń: $x^2=64$.

A) $x_{1,2}=\pm 8$;	C) $x=-8$;
B) $x=8$;	D) $x=32$.
- Teńlemeni sheshiń: $x^2-11=0$.

A) $x=\sqrt{11}$;	C) $x=-\sqrt{11}$;
B) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$;	D) $x=\frac{11}{2}$.
- Teńlemeni sheshiń: $3x^2=48$.

A) $x=4$;	C) $x_{1,2}=\pm 4$;
B) $x=-4$;	D) $x=8$.
- Teńlemeni sheshiń: $x^2=5x$.

A) \emptyset ;	C) $x=0$;
B) $x=2,5$;	D) $x_1=0, x_2=5$.
- Teńlemeni sheshiń: $x^2+9x=0$.

A) $x_1=0, x_2=-9$;	C) $x_{1,2}=9$;
B) $x_{1,2}=\pm 3$;	D) $x_1=9, x_2=0$.

6. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $x^2 + x - 6 = 0$.

- A) $x_1 = -3, x_2 = 2$; C) $x_{1,2} = \pm 6$;
B) $x_1 = 3, x_2 = -2$; D) $x_1 = -2; x_2 = -3$.

7. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $x^2 + 7x + 6 = 0$.

- A) $x_1 = 1, x_2 = -1$; C) $x_1 = -7, x_2 = -6$;
B) $x_1 = -6, x_2 = -1$; D) $x_1 = -1, x_2 = -5$.

8. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $x^2 + x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = 0, x_2 = 1$; C) \emptyset ;
B) $x_{1,2} = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; D) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3}$.

9. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $x^2 - 7x + 10 = 0$.

- A) $x_1 = -2, x_2 = 2$; C) $x_1 = 5, x_2 = 1$;
B) $x_1 = -5, x_2 = 2$; D) $x_1 = 2, x_2 = 5$.

10. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$; C) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$;
B) $x = \frac{1}{6}$; D) $x = -\frac{1}{3}$.

11. Kvadrat teńlemeni sheshiń: $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$; C) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$;
B) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$; D) $x = \frac{1}{7}$.

12. Teńlemeni sheshiń: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

- A) $x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = 1$; C) $x_1 = 1, x_2 = 4$;
B) $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$; D) $x_{1,2} = \pm 1$.

13. Teńlemeni sheshiń: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

- A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}$, $x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) \emptyset .

14. 60 km aralıqtı bir vilosipedshi ekinshisine qaraǵanda 1 saat tezirek basıp ótti. Eger, birinshi velosipedshiniń tezligi ekinshisiń tezliginen 5 km/saat kem bolsa, hárbir velosipedshiniń tezligin tabiń.

- A) 20 km/saat, 25 km/saat; B) 10 km/saat, 15 km/saat;
C) 15 km/saat, 20 km/saat; D) 12 km/saat, 17 km/saat.



Tariixiy máseleler

Al-Xorezmiydiń „Al-jabr val-muqobala“ shıgarmasınan alıngan teńlemelerdi sheshiń (1—31):

1. $x^2 + 10x = 39$.

2. $x^2 + 5x = 24$.

3. $x^2 + 10x = 56$.

4. $x^2 + (10-x)^2 = 58$.

5. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$.

6. $4x(10-x) = x^2$.

7. $\frac{25}{9}x^2 = 100$.

8. $x^2 + 21 = 10x$.

9. $3x + 4 = x^2$.

10. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24$.

11. $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = 2\frac{1}{6}$.

12. $100 + x^2 - 20x = 81x$.

13. $30x = 100 + x^2$.

14. $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$.

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$.

16. $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$.

17. $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$.

18. $(10-x)^2 - x^2 = 40$.

19. $(10-x)^2 + x^2 + (10-x) - x = 54$.

20. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{10-x} + 5x = 50$.

21. $x^2 + 20 = 12x$.

22. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$.

23. $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

$$24. \left(x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - 4\right)^2 = x + 12.$$

$$26. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{1}{7} x.$$

$$28. (x^2 - 3x)^2 = x^2.$$

$$30. 10x = (10-x)^2.$$

$$25. \left(x - \left(\frac{x}{3} + 3\right)\right)^2 = x.$$

$$27. \frac{x^2 - 4x}{3} = 4x.$$

$$29. \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{4}{5} x.$$

$$31. \begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Abu Komil máselesi. Teńlemeni sheshiń:

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

Evklid máselesi. $(1-x):x=x:1$ teńlemeni sheshiń.

Bobil bitiklerindegi másele:

Eki kvadrattıń betiniń qosındısı $25\frac{5}{12}$ ge teń. Ekinshi kvadrat tárepi

birinshi kvadrat tárepiniń $\frac{2}{3}$ bólegenin 5 birlikke artıq. Kvadrat táreplerin tabıń.

Omar Xayyam (1048–1131) máselesi.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4} \text{ teńlemeni sheshiń.}$$

Kvadrat teńlemeni sheshiwdiń al-Xorezmij usılı.

Al-Xorezmiydíń “Al-jabr val-muqobala” shıǵarmasınan alıńǵan usı máseleni kórip shıǵayıq: “Eger bir kvadratqa onıń on korenine teń zattı qossań, otız toǵız payda boladı”. Bul máseleni sheshiw (házirgi belgilewlerde) $x^2 + 10x = 39$ teńlemeni sheshiw bolıp esaplanadı. Al-Xorezmij usı teńlemeni sheshiw qagyıdaların tómendegishe túsindiredi: 1) korenler sanın ekige bol, bul máselede bes payda boladı ($10:2=5$); 2) onı ózine teń sangá kóbeyt, jigırma bes boladı ($5 \cdot 5 = 25$); 3) onı otız toǵızǵa qos, alpis tórt boladı ($25 + 39 = 64$); 4) onnan kvadrat koren shıǵar, segiz boladı ($\sqrt{64} = 8$); 5) onnan korenler

sanınıń yarımin, yaǵníy besti al, úsh qaladı ($8 - 5 = 3$). Mine usı san sen izlegen kvadrat koren boladı”.

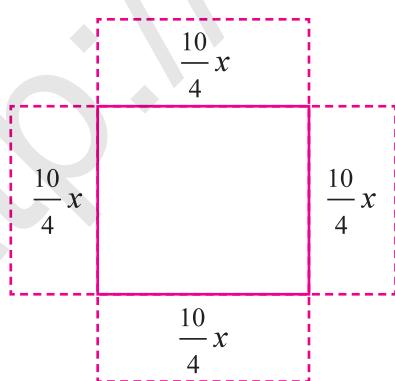
Házirgi jaziwda al-Xorezmiydiń bul sheshimi qısqasha bunday kóriniske iye boladı:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3.$$

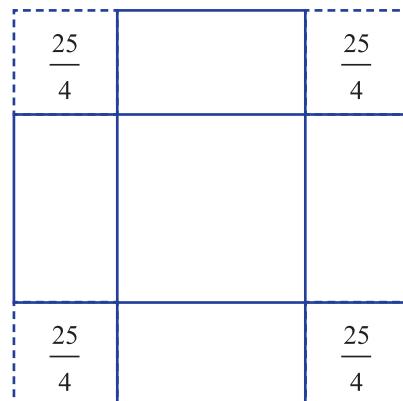
Juwabi: $x = 3$.

(Al-Xorezmiy ekinshi koren $x = -13$ ti qaramaydı.)

„Al-jabr val-muqobala“ shıgarmasında tap usı teńlemenin geometriyalıq usıldaǵı sheshimi de beriledi (38-súwret). Bul usıł tómendegishe: tárepi x (beti x^2) ge teń kvadrat qaraladı. Onıń táreplerinde eni $\frac{10}{4}$ teń 4 tuwrı tórtmúyeshlik jasaladı. Payda bolǵan figura $x^2 + 10x$ ańlatpaǵa sáykes keledi. Bul figura tárepi $(x + 5)$ ke teń bolǵan kvadratqa shekem “toltırıladı”, yaǵníy figuraniń “ushları”na tárepi $\frac{10}{4}$.ge teń bolǵan 4 kvadrat “qosıladı”. Payda bolǵan figura $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ ańlatpaǵa sáykes. Biraq, shárt boyınsha, $x^2 + 10x = 39$ bolǵanı ushın úlken kvadrattıń beti $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$. Solay etip, $(x + 5)^2 = 64$, bunnan $x + 5 = 8$ va $x = 3$. Demek, al-Xorezmiy kvadrat teńlemenin sheshiwdə tolıq kvadrattı jiklewdiń geometriyalıq usılin beredi. $x^2 + px = q$ teńleme ushın al-Xorezmiydiń bul usılı tómendegishe jazılıdı:



38-súwret.



$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad \left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2} + 2 \cdot \frac{p}{4} = \pm \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

$$\text{bundan } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + q}.$$



Tariixiy maǵlıwmatlar

Abu Abdullah Muxammed ibn Musa al-Xorezmiy (783–850) elimizdiń ullı alımlarınıń biri. Ol óziniń “Al-kitob al-muxtasar fi hisob al-jabr val-muqobala” (qısqasha “Al-jabr val-muqobala”) miyneti menen algebra pánine tiykar saldı. Miynettiń 1342-jılı kóshirilgen arabsha nusqası Oksford universitetiniń Bodleyan kitapxanasında saqlanadı. Al-Xorezmiy kitaptı jazıwdan maqsetin bilay bayan etedi: “... Men arifmetikanıń ápiwayı hám quramalı máselelerin óz ishine alıwshi “Al-jabr val-muqobala esabı haqqında qısqasha kitap”ı jarattım, sebebi, miyrasti bólistiriwde, wásiyatnama dúziwde, mal bólistiriwde, ádillik jumıslarında, sawda da hám hár qanday shártnamalarda, sonday-aq, jer ólshewde, salmalar qazıwda, injenerlikte hám basqa usıǵan uqsas túrlishe jumıslarda adamlar ushın zárür boladı”. Algebrada “úsh túrli san(muǵdar) menen jumıs alıp barıladi”, – deydi al-Xorezmiy. Olar: koren (teńlemedegi belgisiz san x), kvadrat (x^2) hám ápiwayı sanlar (teńlemedegi saltań aǵzalar).

Al-Xorezmiy usı úsh muǵdarlar arasındaǵı qatnaslardı úyrenedi. Ol teńlemelerdi tómendegi klasslarga bóledi:

- 1) $ax^2 = bx$ – kvadratlar korenlerge teń;
- 2) $ax^2 = c$ – kvadratlar sańga teń;
- 3) $bx = c$ – kvadratlar sańga teń;
- 4) $ax^2 + bx = c$ – kvadratlar hám korenler sańga teń;
- 5) $ax^2 + c = bx$ – kvadratlar hám san korenlerge teń;
- 6) $bx + c = ax^2$ – korenler hám san kvadratlarga teń;

Al-Xorezmiy “Al-jabr val-muqobala” shıgarmasında 4-, 5-, 6- teńlemelerdi sheshiwdiń geometriyalıq usılların beredi. Alım al-jabr hám al-muqobala ámelleri (túrlendiriyleri) járdeminde hár qanday kvadrat teńleme joqarıdaǵı 6 kórinisten birine keltiriliwin dálilleydi.



Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máseleler

433. 1) Qudıqqa tas taslandı. Tas qudıq tóbine urlǵanda shıqqan dawıs baqlawshıǵa tas taslaǵan soń 4 sekunddan keyin esitiledi. Dawıstıń tezligi sekundına 330 metr, erkin túsip atırǵan deneniń t sekundda ótken jolın $s = \frac{gt^2}{2}$. $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ dep alıp, qudıqtıń tereńligin tabıń.

2) Sekundına 300 metr tezlik penen atılǵan oq neshe sekunddan keyin jerden 2500 metr biyiklikte boladı? (Hawanıń qarsılıǵı esapqa alınbasın).

△ 1) Tas t minutta qudıq tóbine túskен hám $s = \frac{gt^2}{2}$ aralıqtı ótken.

Dawıs qudıq tóbine túskен hám $(4-t)$ sekundta $330(4-t)$ m aralıqtı

ótken. $\frac{gt^2}{2} = 330(4-t)$. Bul teńlemeden $t \approx 3,78 \text{ s}$; $4-t \approx 0,22 \text{ s}$;

$s \approx 330 \cdot 0,22 = 72,6 \text{ (m)}$. **Juwabi:** $\approx 72,6 \text{ m}$.

2) t sekunddan keyin dene jerden 300 t m biyiklikte bolǵan.

$300t - \frac{10t^2}{2} = 2500$ yaki $t^2 - 60t + 500 = 0$, bunda $t=10$ yoki $t=50$.

Juwabi: 10 s hám 50 s. ▲

434. Hárbiriniń sıyımlığı 30 litrden eki ıdisqa birgelikte 30 litr spirt bar edi. 1 – ıdisqa tolıǵansha suw quyılıp, bul aralaspadan 2 – ıdisqa tolıǵansha quyıldı. Keyin 2-ıdistan 1 – ıdisqa 12 litr aralaspa alıp quyıldı. Sonnan soń 2 – ıdistagı spirt 1 – ıdistagıǵa qaraǵanda 2 litr ge kem boladı. Dáslep, hár qaysı ıdistä qanshadan spirt bolǵan?

△ Dáslep, 1-ıdistä x l, 2-ıdistä $(30-x)$ l spirt bolǵan deyik. 1-ıdistagı suw quyılǵannan soń, 1 litr aralaspada $\frac{x}{30}$ l spirt boldı. Bul aralaspadan 2 – ıdisqa x l qosılsa (sebebi 2-ıdistä x l “bos orın” bar), 2 – ıdistagı aralaspa quramında $\frac{x}{30} \cdot x = \frac{x^2}{30}$ litr spirt boladı hám 2-ıdistagı $(30-x)$ l menen birge $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt boladı. 2-ıdistagı aralaspa

quramında $\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right) : 30 = 1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2$ litr spirt boladı. 2-ıdıştan 1-sine 12 l alıp quyılsa, bul aralaspada $12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bolıp, 1-ıdıştagı $\left(x - \frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt penen birge $\left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr boladı. 2-ıdıştan 12 l aralaspanı 1-sine quyılgannan soń, onda 18 l aralaspa qaldı, bul aralaspa quramında $18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bar.

Másele shárti boyınsha, bul muğdar 1-ıdıştagı spirtten 2 litrge kem. Demek, usınday teńlemege keltiremiz:

$$18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = \left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right), \text{ bunnan}$$

$$6 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = x - \frac{x^2}{30}, \text{ nátiyjede, } x^2 - 30x + 200 = 0.$$

Juwabi: 20 l hám 10 l. ▲

- 435.** Sonday tórt tańbalı san tabıń, onıń mińlar tańbasındaǵı hám onlar tańbasındaǵı sanları óz ara teń bolsın, júzler tańbasındaǵı san birler tańbasındaǵı sannan birewge artıq bolsın hám izlenip atırǵan san pútin sanniń kvadrati bolsın.

(Kórsetpe: $x^2 = 1010a + 101b + 100$ teńlemege keltiriń, bunda x^2 – izlenip atırǵan san, a – mińlar, b – birler tańbasındaǵı san).

- 436.** Kislota menen tolı ıdis bar. Bul ıdıştan 2 l kislota alındı hám ıdisqa 2 l suw quyıldı. Aralaspadan 2 l alındı hám jáne 2 l suw qosıldı. Bul aralaspadan 2 l alındı hám jáne 2 l suw quyıldı. Nátiyjede ıdışta neshe 1 kislota hám neshe 1 suw bar?

△ Ídistin kólemi v litr dep alayıq. Ídıştan 2 l kislota alıp, ıdisqa 2 l suw quyılgannan soń, kislota ıdıştin $\frac{v-2}{v}$ kólemin iyeleydi. Aralaspadan

2 l alıngannan keyin, ıdısta $(v-2) \cdot \frac{v-2}{v}$ litr kislota qaldı, oğan 2 l suw quyılǵannan soń kislota ıdıstiń $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ bólegin iyeleydi. 3-ret (jáne 2 l aralaspa alınıp, ıdisqa 2 l suw quyılǵannan keyin) kislota ıdıstiń $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ bólegin iyeleydi. Solay etip, ıdıstaǵı kislota muǵdarı $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ ága, suw muǵdarı bolsa $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3$ ke teń.

Onda sonday teńlemege iye bolamız:

$$v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3 = v, \text{ bunnan}$$

$$v^3 - 9v^2 + 24v - 16 = 0, \quad (v-1)(v-4)^2 = 0.$$

Shárti boyınsha, $v > 2$ bolǵanı ushın, $v = 4$.

$$\text{Onda } v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} \text{ (l)},$$

Juwabı: 0,5 l kislota hám 3,5 l suw. ▲

- 437.** A awıldan B awılǵa qaray júk mashinası jolǵa shıqtı. 1 saattan soń A dan sol jóneliske jeńil mashina jolǵa shıqtı hám B ága júk mashinası menen bir waqıtta jetip keldi. Eger bul mashinalar A hám B awillarınan bir waqıtta bir-birine qaray jolǵa shıqqanında, olar jolǵa shıqqan waqıttan 1 saat 12 minut ótkennen soń ushrasatuǵın edi. Júk mashinası A dan B ága keliw ushın qansha waqıt ketti?

- 438.** Vagonnan júkti jumısshılardıń eki toparı túsiretuǵın boldı. Júkti 1-topardıń jalǵız ózi túsiretuǵın waqıt penen sol júkti 2-topardıń jalǵız ózi túsiretuǵın waqıt qosındısı 12 saatqa teń. Bul waqıtlar ayırması eki topar birge islep júkti túsiretuǵın waqıttıń 45% ine teń. 1-topar jalǵız ózi hám 2-topar jalǵız ózi islep júkti qansha waqıtta túsiredi?

▲ 1-topar júkti jalǵız ózi x saatta, 2-topar bolsa y saatta túsiredi, deyik. Másele shárti boyınsha, $x + y = 12$ (saat). 1-topar 1 saatta jámi

jumıstiń $\frac{1}{x}$ bólegin, 2-topar bolsa $\frac{1}{y}$ bólegin orınlayıdı. Olar birgelikte islep 1 saatta jámi jumıstiń $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ bólegin orınlayıdı. Birgelikte islep olar jámi jumısti orınlaw ushın $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ saat sarplaydı. Anıqlıq ushın, máselen, 1-topar ásterek isleydi, yaǵníy $x > y$ dep alayıq. Onda shárt boyınscha $(x - y)$ saat $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ saattin 45 % in qurayıdı:

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x+y}.$$

Bul teńlemedegei y ornına $y=12 - x$ ti qoypı, x ge salıstırmalı kvadrat teńleme payda etemiz:

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12-x)}{12},$$

bunnan, $3x^2 + 124x - 960 = 0$.

Bul teńlemeniń korenleri $x_1 = -48$, $x_2 = \frac{20}{3}$. Másele mazmuni boyınscha $x > 0$. Demek,

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ (saat)},$$

$$y = 12 - x = 12 - 6\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (soat)}.$$

Juwabi: $6\frac{2}{3}$ saat, $5\frac{1}{3}$ saat. ▲

- 439.** Eki paxta teriw mashinası birgelikte maydandaǵı paxtani, birinshi mashinanıń bir ózinen 8 kún tezirek terip bolıwı, al ekinshi mashinanıń bir ózinen 2 kún tez terip bolıwı mümkin. Hárbir mashina maydandaǵı paxtani neshe künde terip bolıwı mümkin?

- 440.** Eki usta bir buyımdı soğıw ushın buyıtpa aldı. Dáslep, birinshi usta 1 saat aldın jumıs basladı, keyin eki usta birgelikte 4 saat isledi hám buyıtpanıń 40 % i orınlındı. Eger buyıtpanı birinshi ustaniń bir ózi islewi ushın ekinhisine qaraǵanda 5 saat waqt kerek bolsa, hárbir usta neshe saat islewi mümkin?
- 441.** Poezd A hám B qalalar arasındań jol ortasında 20 minut toqtap qaldı. Mashinist B ága kestege muwapiq jetip keliwi ushın poezddiń dáslepki tezligin 12 km/saat qa asırdı. A hám B qalalar arasındań aralıq 240 km bolsa, poezddiń dáslepki tezligin tabıń.
- 442.** Hár qıylı quwwatqa iye bolǵan eki traktor 3 kún birge islep, dalanıń $\frac{5}{8}$ bólegin súrip shıqtı. Eger birinshi traktor menen dalanı ekinhisine qaraǵanda 4 kún tezirek súriw mümkin bolsa, tolıq dalanı hárbir traktor jeke-jeke neshe künde súrip boladı?
- 443.** Poezd 840 km jol basıwı kerek edi. Joldıń yarımında 30 minut toqtap qaldı. Ol keshikpewi ushın tezligin saatına 2 km ge asırdı. Poezd joldıń hámmesine qansha waqt sarplaǵan?

△ *1-usıl.* Poezd tolıq joldı x saatta basıwı kerek edi; jol yarımının saatına $\frac{840}{x}$ km tezlikte júrgen; keyin saatına $\left(\frac{840}{x} + 2\right)$ km tezlik penen joldıń

yarımının $\frac{\frac{420}{840}}{\frac{x}{x}+2} = \frac{210x}{420+x}$ saatta basıp ótedi. Joldıń birinshi yarımın $\frac{x}{2}$ saatta júrgen edi. Soǵan qaray: $\frac{210x}{420+x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Teńlemenı sheshsek, $x = 21$ saat ekenin tabamız.

2-usıl. Poezddiń aldińǵı tezligi x km, keyingi tezligi saatına $(x + 2)$ km, 420 km di $\frac{420}{x}$ saatta, qalǵan 420 km di $\frac{420}{x+2}$ saatta júredi. Soǵan qaray: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+2} = \frac{1}{2}$. Teńlemenı sheshsek, $x = 40$ km/saat; poezd barlıq joldı basıp ótiwi ushın $\frac{840}{40} = 21$ saat sarplaǵan.

3-usıl. Poezd joldıń birinshi yarımin x saatta, ekinshi yarımin $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

saatta júrgen. Poezddıń joldıń birinshi yarımdaǵı tezligi saattına $\frac{420}{x}$

km, ekinshi tezligi saattına $\frac{420}{x - \frac{1}{2}} = \frac{840}{2x - 1}$ km, $\frac{840}{2x - 1} - \frac{420}{x} = 2$. Teńlemeni

sheship, $x = 10,5$ saat, $2x = 21$ saat ekeni anıqlanadı.

Juwabı: 21 saat. ▲

444. Bir san úsh izbe-iz pútin sanlar kóbeymesinen ibarat. Bul sandı berilgen úsh izbe-iz sanınıń hárbinne bólwdan payda bolǵan tiyindılar qosındısı 74 ke teń. Usı sandı tabıń.

445. Dónes kópmúyeshliktiń tárepleri sanı menen diagonalları sanınıń qosındısı 15 ke teń. Kópmúyeshlik tárepleriniń sanın tabıń.

446. Tuwrı müyeshli úshmúyeshlik tárepleriniń uzınlığı: a) izbe-iz natural sanlar menen; b) izbe-iz jup natural sanlar menen; d) izbe-iz taq natural sanlar menen de beriliwi mümkin be?

△ a) Tárepleri izbe-iz pútin sanlar: $x, x + 1, x + 2$ bolsın. Onda x hám x hám $x + 1$ katetler, $(x + 2)$ bolsa gipotenuza boladı, $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$; bunnan $x = 3$ yaki $x = -1$ ($x = -1 < 0$ máselege juwap bola almaydı). $x = 3; x + 1 = 4; x + 2 = 5$. Tárepleri izbe-iz pútin sanlar 3, 4, 5 penen berilgen tuwrı müyeshli úshmúyeshlik boladı; b) tárepleri izbe-iz jup sanlar: $2x, 2x + 2, 2x + 4$ bolsın. Onda: $(2x)^2 + (2x + 2)^2 = (2x + 4)^2; x = 3; 2x = 6; 2x + 2 = 8; 2x + 4 = 10$. Tárepleri izbe-iz jup sanlar 6, 8, 10 menen berilgen tuwrı müyeshli úshmúyeshlik boladı;

d) tárepleri izbe-iz taq sanlar: $2x + 1, 2x + 3, 2x + 5$ menen berilsin. $(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = (2x + 5)^2; x = \frac{5}{2}$ yaki $x = -\frac{3}{2}$. Biraq, x natural san bolıp shıqpadi. Demek, tárepleri izbe-iz taq sanlar menen berilgen tuwrı müyeshli úshmúyeshlik joq. ▲

447. Eki túrli eritpeniń birinde 800 g, ekinshisinde 600 g duz bar. Eki eritpeden 10 kg lı jańa eritpe payda etildi. Birinshi eritpedege duzdıń procent muǵdarı ekinshi eritpedege duzdıń procent muǵdarınan 10 ga kóp bolsa, aralaspada hárbir eritpeden neshe kilogramm bar?

△ Birinshi eritpe x kg bolsa, ekinshisi $(10 - x)$ kg boladı. Birinshi eritpede duz $\frac{0,8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$ procent, ekinshi eritpede bolsa $\frac{0,6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$

procent boladı. Máseleniń shárti boyınsha:

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10-x} = 10.$$

oni bılay sheshemiz: $x = 20$ yaki $x = 4$. Måsele shártinde $x < 10$ bolǵanı ushın $x = 20$ koren bolmaydı. $10 - x = 10 - 4 = 6$.

Juwabi: birinshi eritpeniń massası 4 kg, ekinshi eritpeniń massası bolsa 6 kg eken.

Juwapti tekseriw: 800 g duz 4 kg lı eritpeniń $\frac{0,8 \cdot 100\%}{4} = 20\%$ in, 600

g duz 6 kg lı eritpeniń $\frac{0,6 \cdot 100\%}{6} = 10\%$ in quraydı: $20\% - 10\% = 10\%$. ▲

448. Eki metall bóleginen biriniń massası 880 g, ekinshiniń massası 858 g. 1-bólektiń kólemi 2-siniń kóleminen 10 cm^3 kem. 1-metall bóleginiń salıstırmalı awırılığı 2-sinikinen 1 g/cm^3 kóp bolsa, hárbir metall bóleginiń salıstırmalı awırılığın tabıń.

△ Ekinshi metall bóleginiń salıstırmalı awırılığı $d \text{ g/cm}^3$, birinshi metall bóleginiń salıstırmalı awırılığı $(d + 1) \text{ g/cm}^3$. Birinshi metall bóleginiń kólemi $\frac{880}{d+1} \text{ cm}^3$, ekinshi metall bóleginiń kólemi $\frac{858}{d} \text{ cm}^3$. Måsele shártinde:

$$\frac{880}{d+1} + 10 = \frac{858}{d} \quad \text{yaki} \quad 5d^2 + 16d - 429 = 0,$$

$d = 7,8$ yaki $d = -11$ ($d = -11 < 0$ bolǵanı ushın māselege juwap bola almaydı).

Juwabi: ekinshi bólektiń salıstırmalı awırkıgi $7,8 \text{ g/cm}^3$, birinshiniki bolsa $7,8 + 1 = 8,8 \text{ (g/cm}^3)$.

Juwaptı tekseriw: Birinshi metalldıń kólemi $\frac{880}{8,8} = 110 \text{ (cm}^3)$, ekinshisiniki $\frac{858}{7,8} = 110 \text{ (cm}^3)$; $110 \text{ cm}^3 - 100 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$. ▲

- 449.** Eki ıdısta bir-birinen basqasha 1 kg suw bar. Ídislardaǵı suwǵa 88 kaloriya ıssılıq berildi. Massası kóp bolǵan suw massası kem bolǵan suwǵa qaraǵanda $\frac{4}{5}$ gradus azlaw ısiganı málım bolsa, hárbiń ıdıstaǵı suw massasın anıqlań.

△1) Suw massası x kg hám $(x+1)$ kg dep alayıq. Massası az bolǵan suw $\frac{88}{x}$ gradusqa, massası kóp bolǵan suw $\frac{88}{x+1}$ gradusqa ısigan. Massaları hár qıylı bolǵan eki ıdıstaǵı suw temperaturaları arasındaǵı ayırma $\frac{4}{5}$ gradusqa teń bolǵanı ushın tómendegi teńlemenı dúze alamız:

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+1} = \frac{4}{5}.$$

Payda bolǵan teńlemenı sheshsek: $x = 10$ yaki $x = -11$. $x = -11 < 0$ māselege juwap bola almaydı.

Juwabi: 10 kg hám 11 kg.

Juwaptı tekseriw: 10 kg suw 88 kaloriya ıssılıqtan $\frac{88}{10} = 8,8$ gradusqa ısigan, 11 kg suw bolsa 88 kaloriya ıssılıqtan $\frac{88}{11} = 8$ gradusqa ısigan.

$$8,8 - 8 = 0,8 = \frac{4}{5} \text{ (gradus). } \blacktriangle$$

- 450.** A hám B qalalar arasında aralıq temir jol menen 66 km, suw joli menen 80,5 km. Poezd kemege qaraǵanda 4 saat keyin jolǵa shıǵıp, B ǵa kemeden 15 minut aldın jetip keldi. Eger poezddiń tezligi kemeniń tezliginen saatına 30 km ge kóp bolsa, olardiń tezliklerin tabıń.

△Poezddiń tezligi saattına x km, kemeniń tezligi saattına ($x - 30$) km.

Poezd $\frac{66}{x}$ saat, keme bolsa $\frac{80,5}{x-30}$ saat jol júrgen. 4 saat + 15 minut =

= $4\frac{1}{4}$ saat = $\frac{17}{4}$ saat. Másele shártı boyınsha teńleme düzemiz:

$$\frac{80,5}{x-30} - \frac{66}{x} = \frac{17}{4}.$$

Bul teńlemeni sheshsek, mına juwap kelip shıǵadı: poezddiń tezligi saatına 44 km, kemeniń tezligi 14 km.

Juwaptı tekseriw: Keme 80,5 km di $\frac{80,5}{14} = 5\frac{3}{4}$ saatta, poezd bolsa 66

km di $\frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$ saatta ótedi. $5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ saat boladı. ▲

- 451.** Egin maydanınıń $\frac{2}{3}$ bólegin túrli quwwatlıqtaǵı eki traktor birgelikte 4 künde súrip shıǵadı. Eger jerdi 1-traktordiń ózi 2-traktordiń tek ózinen 5 kún tez súrip bolıwı mümkin bolsa, egin maydanın traktordiń hárbiń neshe künde súrip boladı?

△ *1-usıl.* Jumisti bir birlik dep qabil etemiz. Jerdiń barlıǵın ekinshi traktordiń ózi x künde súrip shıqadı, dep alayıq. Onda birinshisiniń ózi

$x - 5$ künde súrip boladı. Birinshi traktor bir künde tolıq jerdiń $\frac{1}{x-5}$

bólegin, ekinshisi bolsa $\frac{1}{x}$ bólegin, eki traktor birge $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$ bólegin süredi.

Eki traktor bir künde egin maydanınıń $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}$ yaki $\frac{1}{6}$ bólegin süredi.

Demek:

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}.$$

Bul teňlemeň korenleri $x = 15$ yaki $x = 2$. Másele mazmunında $x > 5$ bolıwı kerek. Sonıń ushın $x_2 = 2$ máselege juwap bola almaydı.

2-usıl. Eki traktor birge tolıq jerdi $4 : \frac{2}{3} = 6$ kúnde süredi. Ekinshi

trakrtordıń ózi tolıq jerdi x kúnde súrse, 1 kúnde $\frac{1}{x}$ bólegin, 6 kúnde

$\frac{6}{x}$ bólegin süredi. Birinshi traktordıń ózi tolıq jerdi $x - 5$ kúnde súrse,

1 kúnde $\frac{1}{x-5}$ bólegin, 6 kúnde $\frac{6}{x-5}$ bólegin süredi. Eki traktor 6

kúnde egin maydanın súrip boladı, yağníyı:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x-5} = 1.$$

Juwaptı: birinshi traktordıń bir ózi menen 10 kúnde, ekinshisiniń bir ózi menen 15 kúnde súrip boladı.

Juwaptı tekseriw: 1) Egin maydanın birinshi traktordıń bir ózi ekinshi traktordıń bir ózinen 15 kún – 10 kún = 5 kún tez súrip boladı.

2) Birinshi traktor 1 kúnde jerdiń $\frac{1}{10}$ bólegin, 4 kúnde $\frac{4}{10}$ bólegin,

ekinshisi 1 kúnde $\frac{1}{15}$ bólegin, 4 kúnde $\frac{4}{15}$ bólegin süredi. Eki traktor

birge 4 kúnde jerdiń $\frac{4}{10} + \frac{4}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ bólegin süredi. ▲

- 452.** Jobadaǵı jumısti orınlaw ushın 1-topar 3,5 kún isledi. Qalǵan jumısti 2-topar 6 kúnde tamamladı. Jobadaǵı jumısti 2-topar bir ózi 1-topardıń bir ózine qaraǵanda 5 kún keyin juwmaqlaydı. Hárbir topardıń jeke ózi jobadaǵı jumısti neshe kúnde tamamlaydı?

- 453.** Keme dárya aǵımı menen 69 km aralıqqa barıp, 34 km artına qaytiw ushın 5 saat waqt sarplaydı. Aǵım tezligi saattına 3 km bolsa, kemeniń turǵan suwdaǵı tezligin tabıń.
- 454.** A awıldan dárya aǵımı boyınsa sal aǵızıldı. Sal aǵızılǵannan 4 saat ótkennen soń, usı awıldan dárya aǵımı boyınsa motorlı qayıq jolǵa shıǵıp, 15 km súzgennen keyin salǵa jetip aldı. Motorlı qayıq saldan saattına 12 km artıq súzse, saldiń (dárya aǵımınıń) tezligin tabıń.
- 455.** Fermer xojalığı 200 gektar jerge belgili muǵdarda kartoshka egip bolıwı kerek edi. Biraq, xojalıq hár kúni rejedegiden 5 gektar ziyat jerge kartoshka egip, jumıstı 2 kún burın orınladı. Kartoshka egiw neshe kún dawam etken?
- 456.** Onlıq sanlar birliklerden 4 ke kem bolǵan eki tańbalı san menen usı sanniń cifrlarınıń orınların almastırıw nátiyjesinde payda bolǵan sannan 2 birlik kishi bolǵan sanniń kóbeymesi 2 627 ge teń. Usı eki tańbalı sandı tabıń.
- 457.** Eki tańbalı sanniń onlıq sanı birliklerden 4 ese kóp. Usı sannan 2 ni alıp, sanları izlenip atırǵan sanlarınıń kerisinshe jazılıwınan payda bolǵan sanǵa 2 ni qossaq hám nátiyjelerdi kóbeytsek, 2400 shıǵadı. Usı eki tańbalı sandı tabıń.
- 458.** Úsh gruppı jumısshılar imarattı birgelikte belgili bir müddette remontladı. Remontlawdı tek 1-gruppa islese, bul müddetten 10 kúnge kóp waqt boladı. Eger, jumıstı tek 2-gruppa islese, 20 kún artıq, tek 3-gruppa islese müddetten 6 ese kóp waqt kerek boladı. Hárbir gruppı jeke ózi islese, imarattı neshe künde remontlap boladı?
- 459.** Háwizge úsh truba ótkizilgen. Bos háwizdi ekinshi trubanıń ózi birinshi trubaǵa qaraǵanda 3 saat kesh toltıradı. Úshinshi truba bolsa tolıq háwizdi bosatıw ushın, 1-truba háwizdi toltıriwǵa ketken waqıttan 3 saat az waqt sarplaydı. Eger, trubalardıń ekewinen suw aǵıp, 3-sinen shıǵıp tursa, bos háwiz 36 saatta toladı. 1-trubanıń bir ózi hám 2-trubanıń bir ózi bos háwizdi neshe saatta toltıradı? 3-trubanıń jeke ózi tolıq háwizdi qansha waqıtta bosatadı?
- 460.** Buyımnıń bahası 12 000 swm edi. Bul baha izbe-iz eki ret birdey procentke arzanlastırılgannan keyin, buyımnıń bahası 9 720 swm bolǵan. Buyımnıń bahası hár saparı neshe porcentke arzanlastırılgan.

- 461.** Eki jıl ishinde qala xalqı 2 millionnan 2 million 205 miń adamǵa jetti. Bul qala xalqınıń jılıq ortasha kóbeyiw procentin tabıń.
- 462.** Eki jolawshı A hám B awıldan bir-birine qaray kiyatır. Olar ushrasqanda biri ekinshisinen 2 km kóp júrgeni belgili boldı. Ushrasqannan keyin júriwdi dawam ettirip, 40 minuttan soń 1-jolawshı B óa keldi. 1,5 saattan keyin bolsa 2-jolawshı A óa keldi. AB aralıqtı tabıń.
- 463.** Shaxmat jarısında qatnasıwshılardıń hárkı biri qalǵanları menen bir retten oynadı. Barlıǵı bolıp, 120 oyın oynalǵan bolsa, jarısqa neshe adam qatnasqan?
- 464.** 11-klasstı pitkeriwshi oqıwshılar bir-biri menen súwret almastırı. Eger 1 190 súwret almastırılǵan bolsa, usı klasta neshe oqıwshı bolǵan?
- 465.** Aralıǵı 900 km bolǵan eki qaladan bir-birine qaray eki poezd jolǵa shıqtı. Poezdlar joldıń ortasında ushırástı. Eger 1-poezd 2-sinen 1,5 saat keyin jolǵa shıqqan bolsa hám oǵan qaraǵanda tezligi saattına 10 km kóp bolsa, hárkı poezddıń tezligin tabıń.
- 466.** Poezd 220 km joldı belgili waqıtta basıp ótiwi kerek edi. Ol 2 saat júrgennen keyin 10 minut toqtap qaldı; keyin tezligin saatına 5 km ge asırdı hám mánzilge mólsherlenen waqıtta jetip keldi. Poezddıń dálepki tezligin tabıń.

IV BAP MAĞLÍWMARLAR ANALIZI

28- §. MAĞLIWMATLAR ANALIZI. MAGLIWMATLARDI BERIW

Hár túrli firmalar, kompaniyalar islep shıgarıp atırğan sapa hám mügħdarliq belgileri, kórsetkishleri (quramı, massası, ólshemleri, reńi, dámi, ...) qabil etilgen standartlarga sáykes keliwin (yaki kelmewi) qalay bilemiz? Qalay baqlaymiz, sinaymiz?

Tayarlangan ónimniń (máselen, sút, dán, gósh ónimleri; túrli ishimlikler; kiyim-kenshekler; dári-darmaqlar; elektr ósbap-úskeneleleri hám t.b.) mügdari júdá kóp bolsa, olardıń hámmesin birimlep sınaqtan, baqlawdan ótkiziw ekonomikalıq jaqtan da duris bolmaydi. Bunday jaǵdayda jámi ónimler toplamınan bir neshesin dusmalıy, táwekel tańlap alınadı da solardıń ózin birmə-bir sınaqtan ótkiziledi.



Barlıq tekseriliwi kerek bolǵan obyektlər kópligi *bas kóplik* delinedi. Bas kóplikten tańlap alıngan obyektlər *tańlangan kóplik* (qısqasha *tańlanba*) dep ataladı. Obyekt degende nelerdi tekseriw kerek bolsa, solar túsiniledi.

1 - m ásele. Firma lampochkalar islep shıgaradı, dep alayıq. Olardıń neshe procenti jaramsız (janbaydı)? Buni qalay tekseresiz?

△ Firma shıgarıp atırğan júz miňlaǵan lampochkalardıń janıw-janbawın birimlep sınaqtan ótkeriwdiń ilaji joq. Sonıń ushın bunday jaǵdayda lampochkalardıń bir neshewi táwekel tańlap alınadı. Tańlap alıngan lampochkalar sınaqtan ótkeriledi. Sınaq nátiyjesi boyınsha firma shıgarıp atırğan ónim haqqında belgili bir juwmaqqa kelinedi.

Máselen, 1000 dana lampochka sınawdan ótkizilgen bolıp, olardan 10 jaramsız bolsa (janbasa), onda jámi lampochkalardıń $\frac{10}{1000} = 0,01$ bólegi (yaǵníy 1% i) jaramsız degen juwmaqqa kelinedi. ▲

Bul mísalda firma islep shıǵarǵan barlıq lampochkalar *bas kóplik* boladı. Sınaw ushın *táwekel tańlap alıńǵan* 1000 lampochka *tańlanba kópliki* quraydı.

2-másele. Paxta atızda ashılǵan góreklerdiń ortasha massasın anıqlań.

△ Ashılǵan góreklerdiń barlıǵın jiynap alıp, olardıń massasın birme-bir anıqlaw mümkin emes. Górektiń ortasha massasın biliw ushın olardıń bir neshesin túrli jerlerden táwekel tańlap alıńǵan góza túbinen úzip alınadı. Payda bolǵan tańlanbadaǵı góreklerdiń massaları ólshenedi hám olardıń ortasha arifmetigi esaplanadı. Bul ortasha arifmetikalıq máni paxta atızda ashılǵan góreklerdiń ortasha massası sıpatında qabil etiledi. ▲

Bul mísalda bas kóplik – paxta atızdaǵı barlıq górekler; tańlanba kóplik bolsa massasın ólshew ushın atızdiń túrli jerlerinen úzip alıńǵan górekler bolıp esaplanadı.



Táwekel saylap alıńǵan n dana obyektiń sınaw (ólshew, baqlaw) nátiyjeleri x_1, x_2, \dots, x_n dep alayıq. n san *tańlanbaniń kólemi* delinedi. Tańlanbaniń aǵzaları, ádette, variantlar delinedi. Varinatlardı artıp bariw tártibinde jazıp shıǵayıq:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq x_3^* \leq \dots \leq x_n^*. \quad (1)$$

(1) qatnas variacion qatar delinedi.

3 - m ásele. Pille uzınlığın ólshewde sonday mánisler (santimetrlerde) alınadı:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Usı mánislerge sáykes variacion qatar dúziń.

△ Bul mánislerdiń eń kishisi 3, 24; eń úlkeni 3, 62. Sanlardı ósiw tártibinde jaylastırıp, usı variacion qatardı payda etemiz:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-másele. Táwekel 10 túp góza tańlandı. Olardaǵı gumshalar sanı sanaladı hám sonday nátiyjeler alınadı: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 19. Usı mánislerge sáykes variacion qatar dúziń.

△ Berilgen sanlardıń eń kishisi 10, eń úlkeni 18. Sanlardı ósiw tártibinde jaylastırıp, usı variacion qatardı payda etemiz:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

x_1, x_2, \dots, x_k tańlanbada x_1 variantta n_1 ret..., x_k variantta n_k ret qaytalangan (baqlanǵan), dep alayıq. n_1, n_2, \dots, n_k sanlar jiyiliği delinedi.

Anıǵıraqı, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}, W_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, W_k = \frac{n_k}{n}$ salıstırıwlar salistirma jiyiliği delinedi.

Anıǵıraqı, $W_1 + W_2 + \dots + W_k = 1$. Sonday kesteler düzeyik (1- hám 2-kesteler):

1-keste

Sınav nátiyjeleri	x_1	x_2	...	x_k
Jiyiliği	n_1	n_2	...	n_k

2- keste

Sınav nátiyjeleri	x_1	x_2	...	x_k
Salıstırmalı jiyiliği	W_1	W_2	...	W_k

1- hám 2-kestelerdi x_1, x_2, \dots, x_k tańlanbanıń, sáykes túrde, jiyiliği boyınsha hám salıstırmalı jiyiliği boyınsha bólistiriliwi deymiz.

4-másеле. ushın jiyilik kestesi hám salıstırmalı jiyilikler kestesi tómen-de berilgen (sáykes túrde, 3- hám 4- kesteler).

3- keste

Sınav nátiyjeleri	10	11	15	16	17	18
Jiyiliği	1	1	3	2	2	1

4- keste

Sinaw nátiyjeleri	10	11	15	16	17	18
Salıstırmalı jiyiligi	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

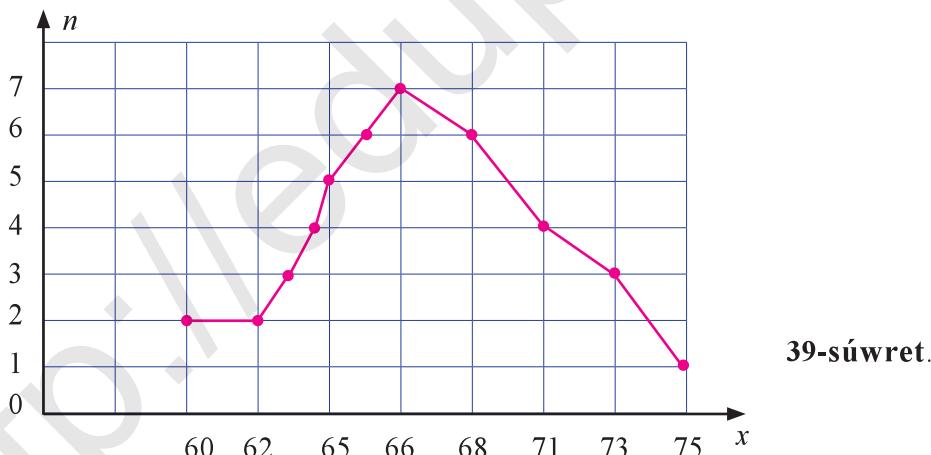
5 - m ásele. „Háreket qáwipsizligi“ aylığında MAY xızmetkeri 30 avtomobiliň tezligin ólshedi. Maǵlıwmatlар jiyilikler kestesinde berilgen:

Ólshew nátiyjeleri (km/s)	60	62	65	66	68	71	73	75
Jiyiligi	2	2	5	7	6	4	3	1

Usı maǵlıwmattı tegislikte súwretleń.

△ Koordinata tegisliginde koordinataları $(60; 2), (62; 2), (65; 5), \dots, (75; 1)$ bolǵan noqatların súwretleyimiz hám olardı kesindiler menen izbe-iz tutastırıamız (39-súwret).

Payda bolǵan sıńıq sıńıq jiyilikler *poligoni* delinedi. ▲



Eger tańlanbanıň kólemi úlken bolsa, onıń jiyilikler boyınsha bólistiriliwin tabıw ushın tańlanba klasslarǵa bólinedi. Klasslardıň ólshemi (úlkenligi, uzınlığı,...) birdey bolıwı kerek.

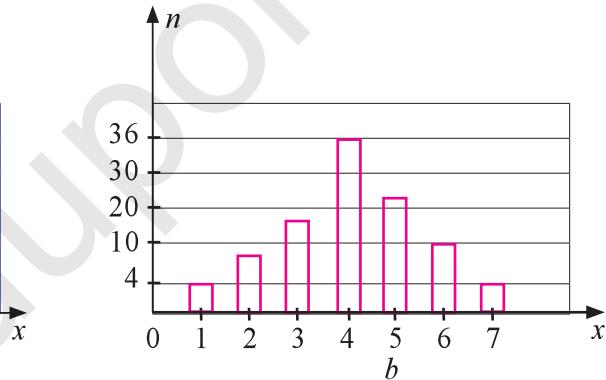
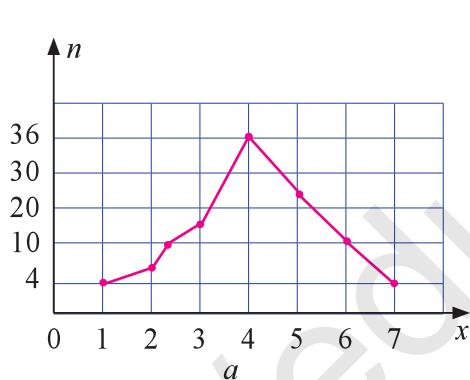
Mısalı. MAY xızmetkeri „Háreket qáwipsizligi“ aylığında 100 avtomobiliň teknikalıq tekseriwden ótkeriw barısında olardıň ótken 6 ay dawamında neshe

kilometr jol júrgenin de aniqladı. Bul maǵlıwmatlar jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi tómendegi kestede berilgen. Tańlanbalar 7 klasqa bólingen. Klasslardıń ólshemi (uzınlığı) birdey.

Klaslar	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Klass tártip nomeri	1	2	3	4	5	6	7
Jiyilikleri	4	6	18	36	22	10	4

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=100 \text{ ekeni anıq.}$$

Kestedegi maǵlıwmatlardı jiyilikler poligonı yaki baǵanalı diagramma kórinisinde súwretlewge boladı (40-a, b súwretler).



40- súwret.

Shınıǵıwlar

467. Táwekel tańlangan 30 tús góza ósimligindegi góumshalar sanı tómendegi kestede keltirilgen:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Maǵlıwmatlar M.Sultanovaniń „Variacion statistika“ qollanbasınan alıngan. „Oqtıwshi“ baspası, T., 1977.)

- 1) Tańlanbaniń jiyilikler kestesin dúziń.
 2) Tańlanbaniń jiyilikler poligonın jasań.
- 468.** Klass basshisı klastaǵı 30 oqıwshıdan dem alıs kúni hárbir oqıwshı neshe saat televizor kórgeni haqqında maǵlıwmat aldı. Olar kestede berilgen:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań.

- 469.** Áskeriý xızmetke shaqırılǵan jigitlerden 100 niń ayaq kiyimleri ólshemi tómendegi kestede berilgen:

Ólshemi	38	39	40	41	42	43	44	45
Jiyiliği	4	4	19	27	23	14	6	3

Maǵlıwmatlar boyınsha: 1) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń;
 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

- 470.** 8-klastıń 50 oqıwshı qızlarınıń ayaq kiyimleriniń ólshemleri kestede berilgen:

Ólshemi	34	35	36	37	38	39	40
Jiyiliği	5	7	10	15	7	4	2

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń;
 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

- 471.** 8-klass oqıwshılarıń 20 sıńıń kiyimleriniń(pidjak-shalbar) ólshemleri kestede berilgen:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń; 3) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

- 472.** Testte 10 tapsırma bar edi. Klastaǵı 30 oqıwshınıń test nátiyjeleri (durıs juwaplar sanı) kestede berilgen:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Maǵlıwmatlарǵa tiykarında: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań.

- 473.** Sport dógeregine qatnasıp atırǵan 150 balanıń 1 minut 30 sekund dawamında neshe ret „otırıp-turiw“ baqlandı. „Otırıp-turiw“ lar sanı 40 tan 74 ke shekem boldı: 40; 74. Bul kesindi hárbiriniń uzınlığı 5 ke teń bolǵan aralıqqa bólindi. Hárbir aralıqqa túsken baqlawlar sanı esaplandı hám usı jiyilikler kestesi dúzildi:

„Otırıp-turiw“lar sanı	Jiyiliği
40 dan 44 ke shekem	11
45 ten 49 ǵa shekem	20
50 den 54 ke shekem	28
55 ten 59 ǵa shekem	36
60 dan 64 ke shekem	24
65 den 69 ǵa shekem	19
70 den 74 ke shekem	12
Jámi	150

Maǵlıwmatlарǵa sáykes: 1) jiyilikler poligonın jasań; 2) ústinli diagrammanı jasań.

29- §. ORTASHA MÁNI. MODA. MEDIANA

Ortasha máni túsinigi menen tanıssız. Eger variantlar x_1, x_2, \dots, x_n bolsa, tańlanbanıń *ortasha mánisi* dep

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

sanǵa aytıladı.

Eger, tańlanbada x_1 variantta n_1 ret, x_2 variantta n_2 ret,..., x_k variantta n_k ret qaytalangán (baqlangán) bolsa,

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_kx_k}{n_1 + \dots + n_k}$$

san tańlanbaniń ólshemli ortasha mánisi delinedi. n_1, n_2, \dots, n_k sanlar sáykes variantlardıń jiyilikleri ekenin eskertip ótemiz.

1-másele. Xojalıq 100 gektar jerje shigit egip, belgili bir sortlı paxtadan gektar basına 33 cr den ónim aldı. 50 gektar basqa jerje egilgen sol sorttaǵı paxtadan bolsa 30 cr den ónim aldı. Xojalıq 1 gektar jerden ortasha qansha ónim alǵan?

△ Bul jerde $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (cr).}$$

Juwabi: 32(cr). ▲

2-másele. Sportsmen biyiklikke 7 ret sekirdi hám sonday nátiyjelerdi kórsetti (metr esabında):

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Sportsmen ortasha neshe metr biyiklikke sekirgen?

△ Bul jerde 1,97 variantta eki ret, qalǵan variantlar bir ret berilgen. Bunnan

$$\bar{x} = (2,1 + 2 \cdot 1,97 + 2,44 + 1,85 + 1,96 + 2,06) : 7 = 14,35 : 7 = 2,05 \text{ (m).}$$

Juwabi: 2,05 metr. ▲

Ortasha máni maǵlıwmatlar qatarınıń orayın kórsetetuǵın san desek te boladı.

Moda. Moda túsinigine alıp keliwshi máseleni kórip shıǵayıq.

3-másele. Mektep miyirbiykesi 8-klass oqıwshılarınan 10 oqıwshınıń boyın ólshep, tómendegi nátiyjelerdi aldı (santimetr esabında):

166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Tańlanbada qaysı variant eń kóp qaytalangán?

△ Variacion qatar dúzeyik:

162; 163; 164; 165; 166; 168; 168; 168; 169; 170.

Bul variacion qatarda úyrenilip atırǵan belgi – oqıwshı boyınıń uzınlığı – 168 cm eń kóp – 3 ret dizimge alıngan, basqa variantlar bolsa 1 yaki 2 ret. Bul variacion qatar ushın 168 sanı moda boladı. ▲



Berilgen variacion qatarda úyrenilip atırǵan belginiń eń kóp ushıraytuǵın mánisi *moda* delinedi hám M_0 etip belgilenedi.

Moda hám ortasha máni óz-ara teń bolıwı hám teń bolmawı da mümkin. Bul máselede oqıwshılardıń ortasha uzınlığı $\bar{x} = (2 \cdot 163 + 164 + 165 + 166 + 3 \cdot 168 + 169 + 170) : 10 = 1664 : 10 = 166,4$ (cm) boladı.

Bul máselede moda hám ortasha mánisi óz ara teń bola almaydı: $168 \neq 166,4$.

4-másele. Alidiń „Algebra“ páninen jurnaldaǵı bahaları: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Bul tańlanbanıń modası hám ortasha mánisin tabıń.

▲ $M_0 = 4$ ekeni anıq, sebebi 4 variantta eń kóp ushırasǵan:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 2} = \frac{28}{7} = 4.$$

Bul máselede $M_0 = \bar{x} = 4$.

Tańlanbanıń modası bolmawı da mümkin. Máselen, atızdan úzilgen 5 qawınnıń massası ólshengende (kg larda) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 nátijeler alındı. Bul tańlanbanıń modası joq. ▲

Mediana.



Variacion qatar aǵzalarınıń sanı taq bolsa, bul qatar ortasında jaylasqan aǵza *mediana* delinedi hám M_e etip belgilenedi.

Máselen, 20,23,24,27,29,31,34 qatar ushın mediana 27 boladı, sebebi 27 sanı bul variacion qatardıń ortasında jaylasqan. Onnan shep tárepte de, oń tárepte de qatardıń 3 ewden aǵzası bar. Variantlar sanı jup bolǵan jaǵdaydı qarayıq.



12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 qatarda 8 aǵza bar, bunday jaǵdayda variacion qatardıń medianası ortada turǵan eki sanniń ortasha arifmetigi sıyaqlı kórsetiledi.

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Keńlik.



Variacion qatardıń eń úlken aǵzası x_n^* menen eń kishi aǵzası x_1^* arasında ayırmashılıq(aliw), yaǵníy $x_n^* - x_1^*$ san x_1, x_2, \dots, x_n tańlanbaniń keńligi delinedi.

Ol, ádette, r háribi menen belgilenedi..

Tańlanbaniń keńligi x_1, x_2, \dots, x_n sanlar qanshelli jayılmalı ekenin bildiriwshi ólshewlerden biri bolıp esaplanadı. Máselen,

$$5, 6, 8, 16, 18, 19 \quad (1)$$

qatar ushın keńlik $r = 19 - 5 = 14$ ke teń.

$$10, 10, 12, 13, 13, 14 \quad (2)$$

qatar ushın keńlik $r = 14 - 10 = 4$ ke teń. Yaǵníy, eki qatardaǵı aǵzalar sanı 6 dan, ortasha mánisleri bolsa óz ara teń ($\bar{x} = 12$).

$14 > 4$ teńsizlik (1) qatardaǵı aǵzalar (2) qatardaǵı aǵzalarǵa qaraǵanda ortasha mánisi salıstırımlı jayılmalı jaylasqanın, (1) qatarda ózgeriwsheńlik úlken ekenin bildiredi.

Shiniǵıwlar

- 474.** 10 oyında mektep futbol komandasınıń qarsılas komanda dárwazasına kirgizgen toplarınıń jiyilikler kestesi tómendegishe boldı:

$x - \text{toplar sanı}$	0	1	2	3
$n - \text{jiyiliği}$	4	2	3	1

Bul maǵlıwmatlar boyıńsha: 1) variacion qatar dúziń; 2) tańlanbaniń ortasha mánisin; modasın; medianasın; keńligin tabiń; 3) jiyilikler poligonın jasań; 4) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń; 5) salıstırmalı chastota kestesine sáykes diagramma jasań.

Tańlanbalardıń: 1) ortasha mánisi; 2) modası; 3) medianası; 4) keńligin tabiń (**475–477**):

- 475.** 1) 12, 14, 9, 13, 15; 3) 15, 13, 13, 14, 16, 14;
2) 16, 14, 13, 17; 4) 5, 8, 13, 12, 12.

- 476.** 1) 6, 8, 10, 11, 10; 3) 8, 10, 12, 11, 14;
2) 3, 6, 8, 4, 9; 4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.

- 477.** 1) -3, 4, 5, -4, 1, 2, 4, -3, -2, 3, -3, 2;
2) -3, -3, 4, 4, 4, 6, 6, -3, -2, 4, 5, -4.

- 478.** Toǵız adamnan ibarat jyuriyler aǵzasi 10 ballıq shkalada eki oyıńshınıń oyınıń bahaladı. Baqlaw nátiyjeleri kestede keltirilgen:

Oyıńshınıń tártip nomeri	Jyuriylerdiń tártip nomeri hám nátiyjeleri								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Hárbir oyıńshı ushın qoyılǵan bahalardıń : 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; 4) keńligin tabiń.

- 479.** Mekteptegi 40 oqıtıwshınıń jumıs stajı haqqında maǵlıwmatlar tómendegi jiyilikler kestesinde berilgen:

Jumıs stajı	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Oqıtıwshılar sanı	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Usı tańlanbaniń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; 4) keńligin tabıń; 5) jiyilikler poligonın jasań.

- 480.** Baqlaw kameraları tekserip atırıp, táwekel túrde 50 avtomobil tańladıhám hır biriniń tezligi (km/s larda) anıqlandı. Nátiyjeler kestede berilgen:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Usı tańlanbaniń;

- 1) keńligin anıqlań;
 - 2) aralıq uzınlığın 5 dep alıp, tańlanbani klaslarǵa (toparlarǵa) boliń (45-49; 50-54; 55-59; ...) hám jiyilikler kestesin dúziń;
 - 3) Tańlanbaniń ortasha mánisin; modasın; medianasın esaplań;
 - 4) Jiyilikler poligonın jasań;
 - 5) Salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń;
 - 6) Salıstırmalı jiyilikler kestesine sáykes diagramma jasań;
 - 7) Neshe procent avtomobildiń tezligi 70 km/s tan artıq eken?
- 481.** Nayza atıw boyıńsha jarısta qatnasqan 40 adamníń kórsetken nátiyjeleri (1 metr anıqlığında) tómendegi kestede berilgen:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

- 1) maǵlıwmatlardı klaslarga (toparlarga) bóliń (25-29; 30-34; ...) hám jiyilikler kestesin dúziń;
- 2) jiyilikler poligonın dúziń;
- 3) tańlanbanıń: ortasha mánisin, modasın; medianasın tabiń.

30- §. TAŃLAW USÍLÍ MENEN KOMBINATORIYALÍQ MÁSELELERDI SHESHIW

Ómirde kóplegen máselelerdiń sheshimi bir neshe bolıwı mýmkin. Sheshimler ishinen ózimizge maqulın saylawımız tábiyyi. Bul sheshimlerdi esaplawda barlıq variantlar (usıllar, imkaniyatlar)dan birewi de “qalıp ketpewi”, “joǵalmawı” ushın tańlaw (sanap shıǵıw) usılınan paydalanıladı. Usı usıllardıń maǵanası misallar sheshiw barısında ashıladı.

1- máseler. 2, 3, 5 cifrleri járdeminde neshe eki tańbalı san dúziwge boladı?

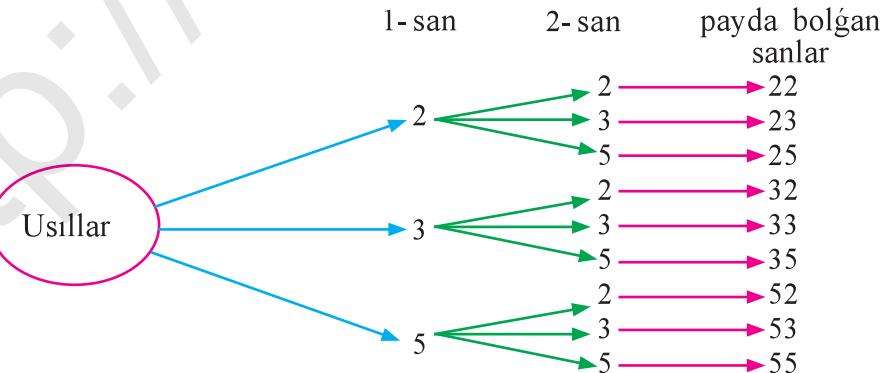
△ Juwaplardan birewin de túsırip qaldırmay, olardı tákirarlamaw ushın sanlardı, ósiw tártibinde jazıp shıǵamız: dáslep 2 sanı menen, sóń 3 sanı menen, keyin 5 sanı menen baslanatuǵın sanlardan máselege sáykesin *tańlap* jazamız:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Juwabi: 9 eki tańbalı san dúziwge boladı. ▲

1-máseleni sheshiwdiń jáne bir usılın kórip shıǵayıq.

△ Mına sızılmanı sızamız:

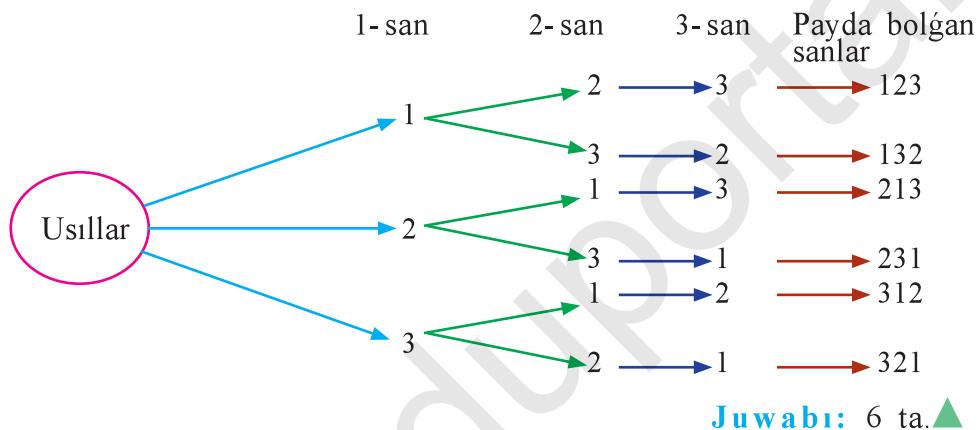


Juwabi: Jámi 9. ▲

Bul sizılma terekke uqsayıdı. Sonıń ushın da bunday sizilmalar mümkin bolǵan variantlar (usıllar, tańlawlar) teregi delinedi. Berilgen 2, 3, 5 sanlarından eki tańbalı san dúziw ushın dáslep 1-san tańlanadı. Buniń 3 usılı bar, sonıń ushın terektegi “tamır” – usıllardan 3 shaqa shıqqan. Keyin 2-san tańlanadı, buniń da 3 usılı bar. Sonıń ushın da 1-san bolıwǵa talaban 3 sanniń hárbinen 3 ewden shaqa shıqqan. Nátiyjede 9 túrli eki tańbalı san payda etiledi.

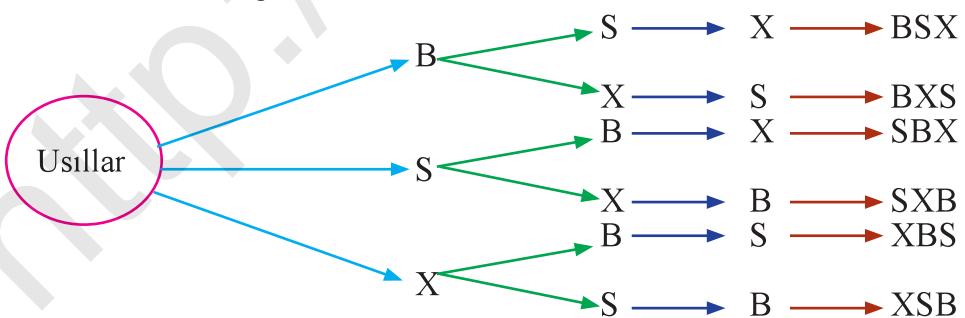
2-másele. 1, 2, 3 sanlarından, olardı tákirarlamay, jámi neshe túrli 3 tańbalı san dúziwge boladı?

△ Variantlar teregin düzemiz:



3- másele. Turistlik firması Buxara, Samarqand, Xiywa qalalarına sayaxat shólmeklestirmekshi. Bunday marshruttiń jámi neshe túrli variantı (usılları) bar?

△ Belgilewlerdi kirgizemiz: Buxara – B, Samarqand – S, Xiywa – X.
Variantlar teregin düzemiz:



Juwabi: Jámi 6 marshrut. ▲

4- másеле. 1) 1, 2 hám 3; 2) 0, 1, 2 hám 3 sanlarından paydalanıp, ilajı bolğanınsha barlıq eki tańbalı sanlardı jazıń. Olardıń sanı N neshege teń eken?

△ Kombinatoriyalıq máselerelerdi sheshiw usıllarınan biri variantlar kestesi bolıp esaplanadı. Bunday usıl járdeminde esaplaǵanda elementler kombinaciyasınıń “joǵalıp” qalıwı bolmaydı. Máseleni variantlar kestesi járdeminde sheship kóreyik. Mınaday kesteler düzemiz:

1-san	2-san		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$$N = 3 \cdot 3 = 9.$$

Juwabi: 1) $N = 9.$

1-san	2-san		
	0	1	2
1	10	11	12
2	20	21	22
3	30	31	32

$$N = 3 \cdot 4 = 12.$$

Juwabi: 2) $N = 12.$ ▲

Shiniǵıwlar

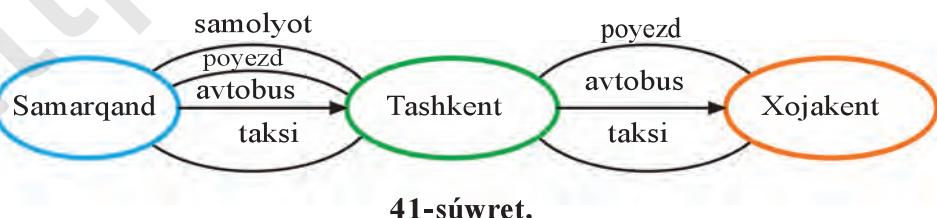
- 482.** Alisher, Baxram, Selim futbol oyının kóriw ushın 3 bilet satıp aldı. Bilette olar 1-qatardıń 1; 2; 3-orınların iyelewi kerek. Olar bul 3 orındı neshe usılda iyelewi mümkin? Máselege sáykes variantlar teregin sıziń.
- 483.** 0, 4, 5 sanlarından, usı sanlar tákirarlanıwı mümkin bolsa, jámi neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı? Máselege sáykes variantlar teregin sıziń.
- 484.** 4, 5, 8 sanlarından, usı sanlar tákirarlanıwı mümkin bolsa, neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı?
- 485.** Dúkanda alma, almurt, júzim bar. Iroda hám Nasiba apalar bul miywelerden birewin tańlayjaq. Bunday tańlawdıń jámi neshe variantı bar? Variantlar teregin sıziń.
- 486.** 2, 4, 6, 8 sanlarından tórt tańbalı sanlar dúziń. Bul sanlar tákirarlanbasın. Usı sanlardıń neshewi: 1) 4 ke; 2) 8 ge bólinedi?

- 487.** Azamat anası hám sińlisine beriw ushın eki góldáste alajaq. Gúl dükanda aq roza gúl, qızıl roza gúl, lala gúllerden ibarat góldásteler bar eken. Azamat eki góldásteni neshe túrli usılda tańlawı mümkin? Variantlar teregin sızıń.
- 488.** Alisher qoyanına geshir, kapusta, láblebi beredi. Ol usı úsh palız óniminen ekewin tańlawı kerek. Alisher bunı neshe usılda ámelge asıra aladı.
- 489.** Seyftiń shifrında 3 – A, B, C háripler bar. Usı háripler járdeminde jámi neshe shifr dúziwge boladı? Eki jaǵdaydı qarań: 1) háripler tákirarlanbaydı; 2) háripler tákirarlanadı.
- 490.** Tarelkada 2 alma, 2 almurt, 2 shabdal bar. Nadira hám Nazima bul miywelerden 3 ewin tańlamaqshı. Tańlawdıń neshe usılı(variantı) bar?
- 491.** Altı bala eki orınlı qayıqta seyilge barajaq. Balalardı bul qayıqlarǵa neshe túrli usılda bólistiriwge boladı? Variantlar teregin sızıń.

31-§. KOMBINARIKANÍ TIYKARĞÍ QAĞÍYDASÍ HÁM ONÍ MÁSELELER SHESHIWDE QOLLANÍW

Áziz oqıwshı! Sizler 6-klasta kombinatorikanıń qosıw hám kóbeytiw qaǵıydalarına tiyisli dáslepki túsinikler menen tanıstıńız..

1- másele. Samarqanddan Toshkentke 4 túrli jol menen keliwge boladı: samolyot, poezd, avtobus hám jeńil mashina (taksi). Tashkentten Xojakentke 3 túrli transport alıp baradı: poezd, avtobus, taksi. Samarqanddan Xojakentke neshe usılda keliwge boladı (41-súwret)?



△ Samarqanddan Toshkentke keliwdiń jámi 4 túrli joli bar. Bul 4 joldan birewin tańlap, Tashkentke keldik deyik. Endi Xojakentke barıwdıń 3 túrli joli-imkaniyatı bar. Solay etip, Samarqanddan Tashkent arqalı Xojakentke barıwdıń jámi $4 \cdot 3 = 12$ túrli usılı bar.

Bul usıllardı jazıp shıǵıwǵa boladı. Belgilew kirgizeyik: samolyot (*s*), poezd (*p*), avtobus (*a*), taksi (*t*). Máselen, sp jazıw Samarqanddan Tashkentke samolyotta keliw hám Tashkentten Xojakentke poezdda barıwdı bildiredi. Bul belgilewler járdeminde Samarqanddan Tashkent arqalı Xojakentke barıwdıń jámi usılları (variantları, jolları, imkaniyatları) tómendegishe boladı:

sp	pp	ap	tp
sa	pa	aa	ta
st	pt	at	tt

Jámi usıllar sanı: $4 \cdot 3 = 12$.

Juwabi: 12 túrli. ▲



Ulıwma, *A* qaladan *B* qalaǵa keliwdiń ***m usılı bolsa hám*** hárbir ***usıl ushın*** *B* dan *C* qalaǵa keliwdiń *n* usılı bolsa, onda *A* dan *C* ǵa keliwdiń jámi *m · n* usılı bar, yaǵníy *A* dan *C* ǵa *m · n* trli usúl menen ***barıwǵa*** boladı.

Bul qaǵıyda *kóbeytiw qaǵıydası* bolıp, ol kombinatorikanıń tiykargı qaǵıydası bolıp esaplanadı.

2-másеле. „Makro“ supermarketiniń „Hámmesi úy ushın“ bóliminde 5 túrli kese, 6 túrli tarelka, 4 túrli shay qasıq bar. Nargiza apa hár túrli attaǵı eki buyım satıp alajaq. Ol bunı neshe túrli usılda ámelge asırıwı mümkin?

△ 1) Keseni tańlawdıń 5 usılı bar. Tarelkanı saylawdıń 6 usılı bar. Kese tańlawdıń hárbir usılında tarelka tańlawdıń 6 usılı bar. Demek, *kóbeytiw qaǵıydası* boyınsha kese hám tarelka juplığın tańlawdıń $5 \cdot 6 = 30$ usılı bar. Tap usınday pikir júritip: 2) kese hám qasıqtı $5 \cdot 4 = 20$ usılda; 3) tarelka hám qasıqtı $6 \cdot 4 = 24$ usılda tańlaw mümkinligin tabamız. Demek, hár túrli eki buyımdı $30 + 20 + 24 = 74$ túrli usılda tańlaw mümkin eken.

Juwabi: 74 túrli usılda. ▲

3-másele. Neshe úsh tańbalı sanda tek ógana bir 7 sanı bar?

△ 7 sanı 1-, 2-, 3-orında (júzler, onlıqlar, birlikler tańbalısında) bolıwı mümkin.

Eger, 7 sanı 1 – orında turǵan bolsa, 2- hám 3-orınlardı 9 san (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) járdeminde $9 \cdot 9 = 81$ usılda toltırıw mümkin.

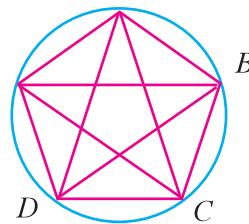
Eger 7 sanı 2-orında bolsa, onda 1-orında 0 hám 7 sanınan basqa qálegen san turiwı mümkin. 1-orındı iyelewdiń $10 - 2 = 8$ imkaniyat bar. Bunda 3-orında 7 sanınan basqa qálegen san tura aladı; demek, imkaniyatlar sanı $8 \cdot 9 = 72$.

Eger 7 sanı 3-orında tursa, onda 1-orındı alıw ushın 8, 2-orındı alıw ushın bolsa 9 imkaniyat bar. Solay etip, onlıq jazıwda tek ógana bir 7 sanı bar úsh tańbalı sanlar jámi $81 + 72 + 72 = 225$ eken.

Juwabi: 225 ▲

4- másele. Sheńberden alıngan 5 noqat A, B, C, D, E hárıpleri menen belgilengen. Hárbir noqat qalǵan noqatlar menen tutastırılsa, neshe kesindi payda boladı (42-súwret)?

△ **1-usıl.** Noqatlar sanı az bolǵanı ushın, máselege sáykes figuranı sızip, kesindiler sanın E sanap shıǵıwǵa boladı, olar 10 dana. Biraq, sheńberde alıngan noqatlar sanı kóp bolsa (máselen, 100, ...), sáykes figuranı sıziw hám ondaǵı kesindilerdi sanaw qıyınlasadı. Bul jaǵdayda basqa-sha jol tutiw kerek.



42-súwret.

2 – usıl. Sheńberden alıngan 5 noqattıń hár hár-birinen 4 kesindi ótkiziledi. Bunday kesindiler sanı $5 \cdot 4 = 20$, biraq kesindiler sanın esaplawa hárbir kesindi eki ret sanalǵan. Demek, biz 20 nı 2 ge boliwimiz kerek: $20 : 2 = 10$.

3-usıl. A noqattı qalǵan 4 noqat penen tutastırısaq, 4 kesindi payda etemiz: AB, AC, AD, AE . B noqatınan da 4 kesindi ótkiziwge boladı, biraq B dan ótkizilgen bir kesindi ($BA = AB$) nı biz sanadıq. Demek, B noqattan 3 jańa (aldın sanalmaǵan) kesindi ótkiziledi. Usıǵan uqsas, C dan 2, D dan bolsa 1 jańa kesindi ótkiziwge boladı. E noqatınan ótkizilgen 4 kesindiniń barlıǵı aldın esaplanǵan ($EA = AE; EB = BE; EC = CE; ED = DE$). Demek, sheńberde belgilengen 5 noqattı tutastırıwshı jámi kesindiler sanı $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$ ta. ▲

5- m ásele. 3, 4, 5, 6, 8, 9 sanları járdeminde barlıǵı bolıp: 1) sanlar tákirarlanbasa; 2) sanlar tákirarlanıwı m úmkin bolsa, neshe úsh tańbalı san dúziwge boladı?

△ 1) Berilgen sanlar 6 aw. Olardıń qálegen birewin 3 tańbalı sanniń birinshi sanı bolıwı m úmkin. Demek, 3 tańbalı sanniń birinshi sanı *tańlaw imkaniyatı* 6 boladı. Onda 2 – san qalǵan 5 sanniń qálegen birewi bolıwı m úmkin, yaǵníy 2-sandı tańlaw imkaniyatlarımız 5. Usıǵan uqsas, 3-sandı tańlaw imkaniyatlarımız 4 ew.

Demek, sanlar tákirarlanbasa, jámi úsh tańbalı sanlar sanı $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ boladı eken.

Juwabi: 120 ta. ▲

△ 2) Sanlar tákirarlanatugın bolsa, úsh tańbalı sanniń 1-, 2-, 3-tańbalarındaǵı jazılatuǵın sandı tańlaw imkaniyatları 6 dan boladı. Sebebi, berilgen sanlar 6 aw. Bunda jámi 3 tańbalı san $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ boladı.

Juwabi: 216 ta. ▲

Shiniǵıwlar

492. Anası Nargizaǵa „Korzinka. Uz“ supermarketinen 3 túrli miywe satıp alıp keliwge jiberdi. „Korzinka. Uz“ da 6 sortlı alma, 4 sortlı almurt, 5 sortlı júzim bar. Nargiza miywalerdiń hár túrinen 1 kg nan alıp, neshe túrli kóplik d úze aladı?
493. Neshe 4 tańbalı sanda tek ǵana bir 5 sanı bar?
494. Sheńberde: a) 10; b) 100; d) n noqat belgilengen. H árbir noqat qalǵan h árbir noqat penen tutastırılsa, h árbir jaǵdayda jámi neshe kesindi payda boladı?
495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 doslar óz ara qol berip s álemlesti. H árbir jaǵdayda qol beriwler sanı neshew bolǵan?
496. 10 dos óz ara shaxmat turnirin ótkermekshi. Bunda bir bala qalǵan h árbir bala menen bir partiya shaxmat oynaydı. Bul turnirde jámi neshe partiya oynaladı?

494–496-m áselelerdiń uqsaslıǵı nede ekenin aytıń?

497. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayıları jardeminde barlığı bolıp: 1) sayılar takırlarlanbasa; 2) sayılar takırlarlanıwı mümkin bolsa, neshe úsh tańbalı sayı dúziwge boladı?

498. 1, 2, 3, 4, 5 sayıları jardeminde neshe: a) eki tańbalı; b) úsh tańbalı; d) tórt tańbalı sayılar jazıwga boladı?

Sayılar: takırlarlanbaytuğın; takırlarlanatuğın halları bólek-bólek jazıp kóriń.

499. Futbol boyinsha jáhán shempionatında altın, gúmis, bronza medalları ushın bolatuğın oyılarda 16 komanda qatnasıp atır. Medallar komandalar arasında neshe túrli usıl menen bólístiriliwi mümkin?

500. Bir mámlekette 4 qala bar eken: A, B, C hám D. A qaladan B ga 6 jol, B qaladan C ga 4 jol alıp baradı eken. A dan D ga 2 jol, D dan C ga 3 jol menen barıwga boladı eken. A qaladan C qalaǵa neshe túrli jol menen barıwga boladı?

501. Eger natural sanniń jazılıwında tek ǵana taq sayılar qatnassa, bunday sandı “súykimli” san deymiz. Neshe: 1) 3 tańbalı; 2) 4 tańbalı “súykimli” san bar?

502. Jazıwda hesh bolmaǵanda bir jup san qatnasqan 6 tańbalı sayılar neshew?

Kórs etpe: Jazıwda tek ǵana taq sayılar qatnasqan 6 tańbalı sayıları $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$. Jami 6 tańbalı sayılar bolsa 900 000. Måsele shártın qanaatlandıratuğın 6 tańbalı sayıları $900\,000 - 3125 = 896\,875$.

503. 4 túrli xattı 4 túrli konvertke neshe túrli usılda salıwga boladı?

504. 5 oqıwshıdan 2 ewin “Bilimler bellesiwi”nde qatnasiw ushın tańlap alıw kerek. Bunu neshe túrli usılda orınlawga boladı?

505. Doskada 12 atlıq sóz, 8 feyil sóz hám 7 kelbetlik sóz jazılǵan. Gáp dúziw ushın hárbi sóz shaqabınan birewden alıw kerek. Bunu neshe túrli usıl menen ámelge asırıwga boladı?

506. Shaxmat taxtasında aq hám qara turanı bir-birin alalmaytuğın (“jey almaytuğın”) etip neshe túrli usılda jaylastırıwga boladı(43-súwret)?



43-súwret.

- 507.** Shaxmat taxtasına aq hám qara ferzilerdi, olar bir-birin “jey almaytuǵın” etip neshe túrli usılda jaylastırıwǵa boladı?
- 508.** Shaxmat taxtasına aq hám qara shaxlardı, oyın qaǵıyıldaların buzbaǵan halda, neshe túrli usılda qoyıwǵa boladı?
- Úlgi:* 3 halattı qarań:
- 1) aq shax mýyeshte turıptı;
 - 2) aq shax taxtanıń shetinde (lekin mýyeshte emes) turıptı;
 - 3) aq shax taxtanıń shetinde emes.
- 509.** Mektep asxanasında aq nan, qara nan hám úsh túrli kolbasa bar. Olardan neshe túrli buterbrod tayarlawǵa boladı? Barlıq variantlardı jazıp shıǵıń.
- 510.** Bazı mámlekетlerdiń bayraqları túrli reńdegi 3 gorizontal yaki 3 vertikal “jol” lardan ibarat. Aq, jasıl, kók reńli tawarlar járdeminde sonday bayraqlardan neshe túrin tigiwge boladı?
- 511.** Bos orınlarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sanınan birin jazıw mýmkin bolsa, $\bigcirc + \square + \triangle = 10$ “teńleme” neshe sheshimge iye boladı? Sanlar tákırlarıñı mýmkin. Eki jaǵdaydı qarań (máselen: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 túrli sheshim; 2) bir sheshim dep qaralatuǵın halatlar.
- 512.** Nadirdiń chemodanı kod penen ashıladı. Bul kod úsh túrli cifrdan ibarat bolıp, hárbir cifr 3 ten úlken emes. Kodta 13 sanı qatnaspayıdı (máseleen, kodlar dizimi 0, 13, 213 ... kodlar joq). Nadir kodtı umıtıp qalsa, kodtı tabıw ushın ol kóbi menen neshe ret “urınıp” kóriwi kerek boladı?
- 513.** Kóp qabatlı úyde dálız esigindegi qulıp kod penen ashıladı. Kod 0 hám 1 cifrlarınan düzilgen 4 tańbalı san (0000 hám 1111 sanlar kod emes dep esaplangan). Qulıp kodın umıtqan bolsańız, esiki eń kóbi menen neshe urınıwda asha alasız?
- Kórsetpe:* Dáslep 1 qatnasaqan kodlardı, keyin eki 1 bolǵan kodlardı hám keyninde úsh 1 bolǵan kodlardı sınań kerek.
- 514.** 20 kg gúrishti 1 kg, 2 kg, 5 kg lı taslar járdeminde pálleli tárezide neshe túrli usılda ólshewge boladı?
- Δ Bul jumıstı tómendegishe islewge boladı:
- 1) tek ǵana 1 kg lı tas járdeminde 1 usıl;

- 2) tek ýana 2 kg lí tas járdeminde 1 usıl;
 3) tek ýana 5 kg lí tas járdeminde 1 usıl;
 4) 1 kg hám 2 kg lí tas járdeminde 9 usıl menen;

1 kg lí tas	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 kg lí tash	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 5) 1 kg hám 5 kg lí tas járdeminde 3 usıl menen;

1 kg lí tas	15	10	5
5 kg lí tas	1	2	3

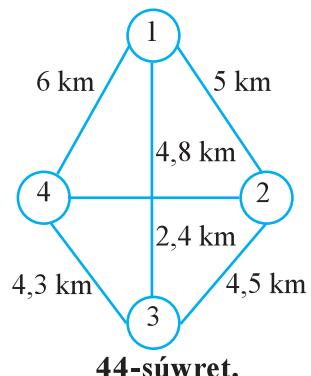
- 6) 2 kg hám 5 kg lí tas járdeminde 1 usıl menen: 5 2 kg hám 2 5 kg;
 7) 1 kg, 2 kg hám 5 kg lí taslar járdeminde 13 usıl menen:

	Usıllar sanı												
Taslar, kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 kg	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 kg	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 kg	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Demek, jámi $1+1+1+9+3+1+13=29$ usıl.

Juwabi: 29 usıl. ▲

- 515.** Firmaǵa 4 dúkan tiyisli. Inkassator (dúkandaǵı pullardı jynap bankke tapsırıwshı xızmetker) 1- dükannan baslap barlıq dúkanlardı aylanıp shıǵadı hám jáne 1-dúkanǵa qaytip keledi. Múmkin bolǵan marshrutlardan eń qısqasın tabıń (44-súwret). Kórsetpe: Hárbir marshrut ushin 5 cifrlı kod dúziń. Kodtiń birinshi hám aqırǵı cifri 1 bolsın. Máselen, 12431 marshruttiń uzınlığı: $5+2,4+4,3+4,8=16,5$ (km).



IV bapqa tiyisli shınıǵıwlar

516. Tómende tańlanba berilgen:

18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24, 14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.

Tańlanbaniń: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) ortasha mánisin tabıń; 3) modasın; 4) medianasın; 5) keńligin tabıń; 6) jiyilikler poligonın jasań.

517. Tańlanbaniń: 1) variacion qatarın dúziń; 2) ortasha mánisin; 3) modasın; 4) medianasın; 5) keńligin tabıń:

-5, -4, -3, -2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

518. Kestedegi maǵlıwmatlarga qarap tańlanbaniń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; 4) keńligin tabıń; 5) jiyilikler poligonın sızıń; 6) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń hám oğan sáykes diagramma jasań:

Baqlaw Nátiyjeleri	7	8	9	10	12	14	15
Jiyilik	6	7	8	9	10	6	4

519. 100 metrli aralıqqa júgiriwde 8-klastıń 20 oqıwshısı mınaday nátiyjelerdi kórsetti (sekundlarda):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Tańlanbaniń: 1) variacion qatarın; 2) jiyilikler kestesin dúziń; 3) ortasha mánisin; 4) modasın; 5) medianasın; 6) keńligin esaplań; 7) jiyilikler poligonın jasań.

520. 8-klastaǵı bir oqıwshınıń “Algebra” páninen eki sherek dawamında álgan bahaları tómendegishe eken:

4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.

Tańlanbaniń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medainasın tabıń; 4) jiyilikler kestesin dúziń; 6) jiyilikler poligonın sızıń.

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRÍN!

1. Futbol championatında 18 komanda qatnasıp atır. Eger hárbi komanda basqa komanda menen óz maydanında hám qarsılas komanda maydanında oynap atırǵan bolsa, championatta jámi qansha oyın oynaladı?
2. 8-klasta 12 pánnen sabaq ótiledi. Dúyshembí kúni keste boyınsha 5 sabaq bolıp, hárbi sabaqta hár túrli sabaq ótiledi. Dúyshembí kúngi kesteni neshe usılda dúziwge boladı?
3. 5 stolǵa 3 oqiwshını neshe usılda otırǵızıwǵa boladı?
4. Matematikaǵa tiyisli 5 túrli kitaptı shkaftıń 5 tekshesine neshe túrli usılda qoyıwǵa boladı?
5. Tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; keńligin tabıń; 5) jiyilikler kestesin dúziń; 6) jiyilikler poligonın sıziń:
-3, -5, -3, -6, 1, 4, 7, 4, 9, 4.
6. Tańlanbanıń jiyilikler kestesi berilgen:

Baqlaw nátiyjeleri	2	1	5	4	0	-2	3	-1
Jiyilik	3	2	1	5	1	2	4	2

Tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın tabıń; 4) jiyilikler polgonın sıziń; 5) salıstırmalı kesteni dúziń.

- 521.** Eger: 1) cifrlar tákiraralanbasa; 2) cifrlar tákirarlanıw mümkin bolsa, 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlarının jámi neshe 4 tańbalı san dúziwge boladı?
- 522.** 0, 3, 4, 5, 6, 7 sanlarının jámi neshe 4 tańbalı taq san dúziwge boladı?

- 523.** Ádette, úshmúyeshliktiń ushları latın álipbesiniń úlken háripleri menen belgilenedi. Latin álipbesinde 26 hárip bar. Úshmúyeshliktiń ushların neshe túrli usılda belgilewge boladı?
- 524.** 8 stulǵa 3 oqıwshını neshe usılda otırǵızıwǵa boladı?
- 525.** Klienttiń úy telefonı 7 cifrlı bolıp, 218 den baslanadı. Klient aǵza bolǵan bul telefon stansiyası neshe klientke xızmet kórsete aladı?
- 526.** Neshe usılda 5 qılıshpazdan 2 ewin jarısta qatnastırıw ushın tańlap alıw kerek?

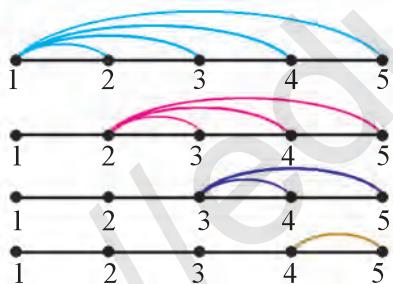
Aliniń sheshimi: 5 qılıshpazdan birewin tańlaw imkaniyatı 5 ew. 4 qılıshpaz qaladı. Olardan birewin 4 usılda tańlawǵa boladı. Demek, $5 \cdot 4 = 20$.

Juwabi: $5 \cdot 4 = 20$ túrli usıl bar.

Nazimanıń sheshimi: 5 qılıshpazdı “nomerlep” shıǵamız hám olardan eki adamlıq topar düzemiz: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 45.

Juwabi: 10 túrli usılda tańlawǵa boladı.

Madinaniń sheshimi:



4 juplıq: 12; 13; 14; 15;

3 juplıq: 23; 24; 25;

2 juplıq: 34; 35;

1 juplıq: 45.

Jámi $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Juwabi: 10 túrli usılda.

Kimniń sheshimi durıs? Kimniń sheshimi sizge unadı? Nesi menen unadı?

- 527.** Siziń qatarınız bolǵan bir bala: “Házirshe men bir háwesker balaman, úlkeysem úlken shayır bolaman”, dep jaqsı niyet etip qosıq jazıp jüredi eken. Qosıqlarınıń birine “Lala” dep at qoysipti. Bul qosıqtıń 1-qatarı “Náwbáhárde dalada ashıldı lala” eken. Qalǵan qatarlar 1-qatardaǵı sózlerdiń ornın almastırıw nátiyjesinde payda bolǵan. Bul “qosıq”ta eń kóbi menen neshe qatar bar?

- 528.** Tuwrı sızıqta: 1) 4 ew; 2) 6 noqat belgilenedi. Hárbir jaǵdayda neshe kesindi payda boladı?
- 529.** “Rayxan” kafesiniń taǵamnamasında 3 túrli somsa, 4 túrli 1-taǵam, 5 túrli 2-taǵam bar eken. 3 túrdegi taǵamǵa buyırtpańı neshe usılda beriwigə boladı?
- 530.** 2 alma, 2 almurt, 2 shabdal bar. 3 dos miywelerdi hárbiti 2 túrli miywe alatuǵın etip bólip almaqshı. Bunı jámi neshe usılda orınlasa boladı?



IV bapqa tiyisli sınaq shınıǵıwları – testler

- Tańlanbanıń ortasha mánisin tabıńı: $-3, -2, -1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6$.
 - 2,5;
 - 11;
 - $2\frac{7}{9}$;
 - anıqlawǵa bolmaydı.
- Tańlanbanıń medianasın tabıńı: $-1, 0, 2, 6, 6, 5, 10$.
 - 6;
 - 5;
 - 5,5;
 - 4,5.
- Tańlanbanıń medianasın tabıńı: $10, 7, 6, 5, 4, 9$.
 -
 - 7;
 - 6,5;
 - 6,25.
- Tańlanbanıń keńligin tabıńı: $120, 100, 140, 170, 95$.
 - 120;
 - 312,5;
 - 70;
 - 75.
- Tańlanbanıń modasın tabıńı: $-1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7$.
 - 2 hám 5;
 - 2
 - 5;
 - 3.
- Kestedegi maǵlıwmatlarǵa qarap tańlanbanıń ortasha mánisin tabıńı:

Baqlaw nátiyjeleri	5	6	11	7	13	12
Jiyilik	3	4	3	5	3	2

- 9,5;
- 8,5;
- 10;
- 7.

- 7.** 5 ke bólinetuǵın 6 tańbalı sanlar neshew?
A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6$; D) $6 \cdot 5^4$.
- 8.** Cifrlar tákirarlanıwı mümkin bolsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sanlarından neshe 5 tańbalı san dúziwge boladı?
A) 8^5 ; B) 5^8 ; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.
- 9.** Eki parallel tuwrı sızıq berilgen bolıp, olardıń birinde 4, ekinshisinde 3 noqat belgilengen. Ushları usı noqatlarda bolǵan neshe úshmúyeshlik bar?
A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.
- 10.** 3 oqıwshını 6 stulǵa neshe túrli usılda otırǵızıwǵa boladı?
A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.
- 11.** Futbol komandasında 11 adam arasınan komanda sárdarı hám onıń járdemshisin neshe túrli usılda tańlap alıwǵa boladı?
A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.
- 12.** Boǵiston awılınan Toshkentke 2 jol menen, Toshkentten Úrgenishke 2 jol menen bariwǵa boladı. Boǵistonnan Úrgenishke bariw jollarınıń sanı neshew?
A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.
- 13.** Bir oqıwshıda qızıqlı matematikaǵa tiyisli 7 kitap, ekinshi oqıwshıda 9 ádebiy kitap bar. Olar neshe túrli usıl menen birewiniń bir kitabıń ekinshisiniń bir kitabına almastırıwı mümkin?
A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.
- 14.** Atabektiń tuwlǵan kúnine onı qutlıqlaw ushın 9 dostı keldi. Atabek olardıń barlıǵı menen, dosları da óz ara qol berisip sálemlesti. Jámi qol berip sálemlesiwler sanı neshew?
A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.



Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máseleler

- 531.** Áskeriy xızmetke shaqırılıp atırğan jigitlerden 50 iniń boyın santimetlerde ólshedi. Ólshev nátiyjeleri kestede berilgen:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

- 1) Maǵlıwmatlardı klaslarǵa bóniń(gruppalań): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.
Hárbir klasqa maǵlıwmatlardan neshewi tiyisli ekenin aniqlań;
2) Baǵanalı diagramma jasań;
3) Jiyilikler poligonın jasań.
- 532.** Táwekel túrde tańlanǵan 30 túp góza ósimliginde ashılǵan óumshalar sanı kestede berilgen:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Usı maǵlıwmatlar boyınsha:

- 1) jiyilikler jadvalini tuzing;
2) jiyilikler poligonın jasań.

- 533.** Ózbek jazıwshısınıń ózbek tilindegi bir shıǵarmasın tańlań. (Máselen: X.Toxtabayevtiń “Sarı dáwdı minip”, A.Qadiriydiń “Ótken kúnler” shıǵarmalari.) táwekel dusmalı túrde tańlanǵan, máselen, 2 betindegi háríplerdi sanań. Ózbek álipbesindegi hárbir háríp siz tańlaǵan betlerinde neshe retten ushıraydı? Háríplerdiń: 1) jiyilikleri boyınsha; 2) salıstırmalı jiyilikleri boyınsha bólístiriliwin dúziń; 3) jiyilikler poligonın jasań.

- 534.** 8-klass oqıwshıları arasında Alisher Nawayıǵázellerin yaddan kórkemlep aytıw boyınsha jarıs bolıp ótti. Onda 10 qız bala hám 9 ul bala qatnastı. x – qız balalar yadlaǵan ǵázeller sanı, y – ul balalar yadlaǵan ǵázeller sanı bolsın. x hám y sanlarınıń jiyilikler boyınsha bólistiriliwi tómendegi kestelerde berilgen:

x – ǵázeller sanı	4	5	6	8	12
n – jiyiligi	3	2	3	1	1

y – ǵázeller sanı	4	5	6	8	9
n – jiyiligi	2	4	1	1	1

Kestedegi x hám y shamalarınıń:

1) modaların; 2) medianaların tabiń; 3) kestege sáykes jiyilikler poligoniń jasań.

Δ x hám y shamalarınıń keste kórinisinde berilgen bólistiliwin variantlardıń tómendegi qatarı kórinisinde jazıwǵa da boladı:

$$x: 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 12 \quad (1)$$

$$y: 4, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 9 \quad (2)$$

(1) tańlanbada 2 moda bar: $M_{0_1} = 4$ hám $M_{0_2} = 6$. (2) tańlanbada moda birew: $M_0 = 5$.

(1) qatarda 10 (jup sandaǵı) aǵza bar. Bul jaǵdayda mediana orayındaǵı eki aǵzaniń ortasha arifmetigine teń:

$$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

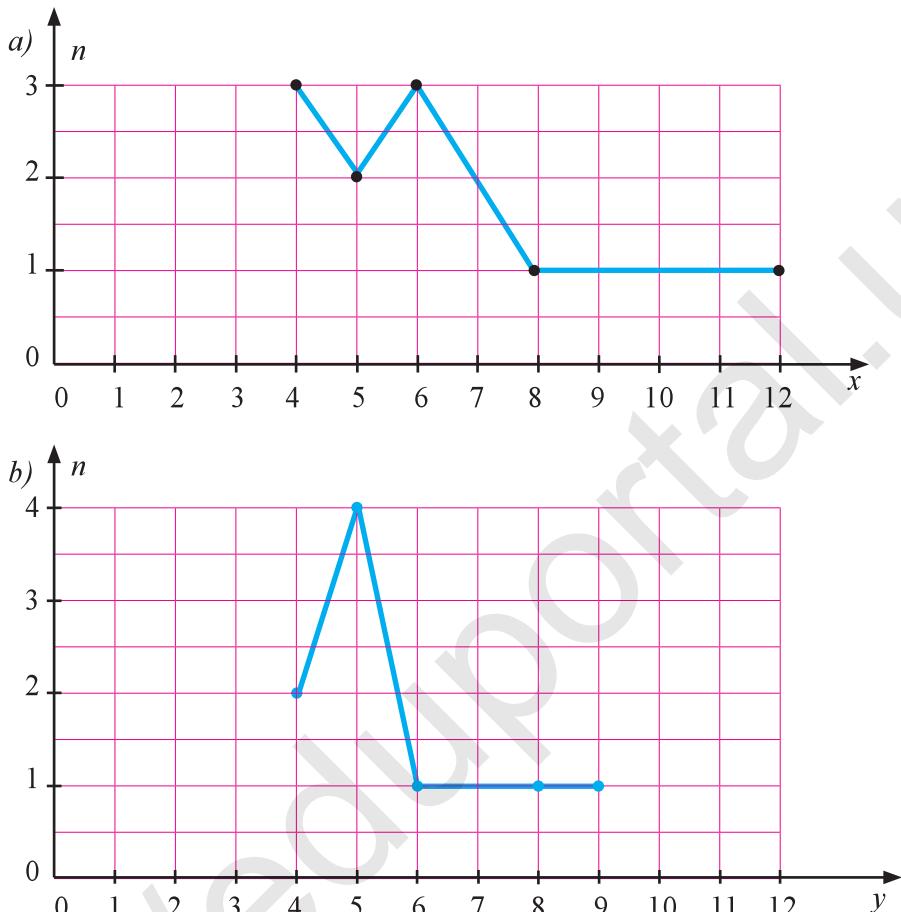
(2) qatarda 9 (taq sandaǵı) aǵza bar. Bul jaǵdayda mediananıń mánisi oraydaǵı aǵzaǵa teń: $M_e = 5$.

Mediana variacion qatardı teńdey ekige bóledi: medianadan shep tárepte de, ón tárepte de variacion qatardıń elementleri sanı birdey, óz ara teń boladı..

Juwabi: 1) (1) qatar ushın $M_{0_1} = 4$; $M_{0_2} = 6$; (2) qatar ushın $M_0 = 5$;

2) (1) qatar ushın $M_e = 5,5$; (2) qatar ushın $M_e = 5$;

3) x hám y shamalarınıń jiyilikler poligoni
45- a , b súwretlerde berilgen. ▲



45-súwret.

- 535.** Hárbir 8-klass ushın, máselen, I hám II sherekler nátyjelerge sáykes: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) poligonların salıstırıń hám juwmaq shıǵarıń. Maǵlıwmatlardı klass журнallarınan oqtıwshılarıńız járdeminde alıń. Máseleni qanday sheshiwińizdi bayan etiń.
- 536.** Mektebińiz: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-klaslar oqıwshılarıńıń hárbir klasları ushın: a) balalardıń ortasha uzınlıqların; b) ortasha massaların tabıń. Maǵlıwmatlardı mektep miyirbiykesinen alasız. Sáykes jiyilikler poligonın jasań.

- 537.** Baqlawıńız nátiyjeleri tiykarında mektebińizde 1 kúnde ortasha neshe gramm por ketetugıńın anıqlań. 1 kúnda, 1 ayda mámlekетlik mekteplerde neshe tonna por jumsalıwin shamalań. Respublikamızda joqarı oqıw orınları, liceyler hám mektepler sanı birgelikte (esaplawıńız ańsat bolıwi ushın) 10000 dep alını.
- 538.** 3 hektar jerge qawın egilgen. Olar jetilisip qaldı. 1 hektar jerden ortasha neshe tonna ónim alıwin bahalań. Bul jumisti qalay ámelge asıratuǵınıńızdı qádem be qádem bayan etiń.
- 539.** Avtomashinalardı mámlekетlik dizimnen ótkiziwde 3 cifr, 3 háripten hám qala yaki rayon ushın belgilengen kodtan paydalanyladi. Máselen, avtomashina nomerindegi 01 kod – mashina Tashkentten dizimge ótkenin bildiredi. Ne dep oylaysız, Tashkentte eń kóbi menen neshe avtomashina dizimnen ótiwi mümkin?
- △ Nomerlewdə 24 hárip qatnasadı, dep alayıq. Nomer 6 “orın” di iyeleydi. 1-“orın”dı 10 cifrdan qálegen birewi bolıwi mümkin. 2-“orın”dı 10 cifrdan birewi iyeleydi. 3-“orın”dı 9 cifrdan qálegen birewi boladı. (3 birdey cifrlı nomer berilmeydi, bunday nomerler aukcionda satılıdı.) Nomerdegi 1-hárip te, 2-hárip te, 3-hárip te 24 háriptiń qálegen birewi bolıwi mümkin. Demek, Tashkentte dizimnen ótiwi mümkin bolğan jámi avtomashinalar sanı $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\ 441\ 600$. Bul esaplawda háriplerdiń nomerdegi 3 tańbalı sannan “bir hárip – 3 tańbalı san – 2 hárip” yaki “3 tańbalı san – 3 hárip” kórinisinde boliwdiń ayırmashılığı joq.
- Juwabi:** 12 441 600. ▲
- 540.** 2, 4, 7, 9 cifrlarınan olardı tákirarlamastan neshe 4 tańbalı san dúziw mümkin? Olardıń neshewi: 2 ge, 4 ke, 11 ge bólinedi?
- 541.** Tuwilǵan kúnińge mirát etilgen 4 dostıńızdı 4 stulǵa neshe túrli usılda otırǵıza alasız?
- 542.** Tarelkada 8 góza bar edi. Anvar qálegen 3 ewin almaqshı boldı. Bunu ol neshe túrli usılda ámelge asırıwi mümkin?
- 543.** Zalda 2 bos orın bar. 3 adamnan 2 ekewin usı orıngá neshe túrli usılda otırǵızıwǵa boladı?

544. Salıstırıń:

$$1) \frac{27}{32} \cdot \frac{8}{162} \cdot \frac{72}{69};$$

$$2) \frac{38}{147} \cdot \frac{91}{152} : \frac{65}{264};$$

$$3) \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{12} \right) \cdot \left(3\frac{23}{58} - 2\frac{9}{58} \right);$$

$$4) \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9} \right) \cdot \left(2\frac{23}{56} - 3\frac{15}{56} \right);$$

$$5) 34,17 : 1,7 + (2\frac{3}{4} + 0,15) : \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8};$$

$$6) 5,86 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7};$$

$$7) \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}};$$

$$8) \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13} : 1\frac{1}{26}}.$$

- 545.** Eki sannan biri a ága teń, ekinshisi onnan 7 ge kóp. Usı sanlar kóbeymesiniń eki eselengenin tabiń. Bul kóbeymeniń mánisin $a = \frac{1}{2}$; 2 bolǵanda esaplań.
- 546.** Eki sannıń qosındısı 30 ága teń. Sanlardan biri a . Usı sanlardıń eki eselengen kóbeymesin jazıń. Bul kóbeymeniń mánisin $a = -2$ bolǵanda esaplań.
- 547.** a júzlik, b onlıq hám c birliklerden dúzilgen natural sanda neshe birlik barlıǵın kórsetiwshi formula dúziń. Tap usı sanlar járdeminde, lekin kerisinshe tártipte jazılǵan sanda neshe birlik bar?
- 548.** a kilogramm hám c gramm neshe grammdı qurayıd? Grammlar sanın x háribi menen belgilep, juwaptı formula menen jazıń.

Ámellerdi orınlarań (**549–552**):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc} - \frac{c}{d^2+cd} \right) : \left(\frac{d^2}{c^3-cd^2} + \frac{1}{c+d} \right);$

2) $\left(\frac{2n}{k+2n} - \frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2} \right) : \left(\frac{2n}{k^2-4n^2} + \frac{1}{2n-k} \right);$

3) $\left(\frac{b^2}{b+x} - \frac{b^3}{b^2+x^2+2bx} \right) : \left(\frac{b}{b+x} - \frac{b^2}{b^2-x^2} \right);$

4) $\left(\frac{2q}{2q+m} - \frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2} \right) : \left(\frac{2q}{4q^2-m^2} + \frac{1}{m-2q} \right).$

550. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2};$

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3};$

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n;$

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}.$

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1} \cdot \frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}; \quad 2) \quad \frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2} : \frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}.$

552. 1) $1,5 \cdot \left(2b - \frac{3b}{7} \right) - 1\frac{5}{7} \cdot (3b-5) + \frac{9b^2-16}{4-3b};$

2) $\frac{x+3a}{x+a} - \frac{x}{x-a} + \frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2} : \frac{x^2-a^2}{a^2x^2}.$

553. Eger $x > \frac{1}{2}$ hám $y > 4$ bolsa, onda

1) $4x+3y > 14; \quad 2) \quad 2xy-3 > 1; \quad 3) \quad x^2y > 1; \quad 4) \quad x^3+y^2 > 16$

ekenin esaplań

- 554.** (Awızeki.) Teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin sandı tabıń:
 1) $n \leq -7$; 2) $n < -3,6$; 3) $n \leq 4,8$; 4) $n \leq -5,6$.

- 555.** (Awızeki.) Teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń kishi pútin sandı tabıń:
 1) $n > -12$; 2) $n \geq -5,2$; 3) $n \geq 8,1$; 4) $n \geq -8,1$.

- 556.** Teńsizlikti sheshiń:

$$\begin{array}{ll} 1) x + 4 > 3 - 2x; & 2) 5(y+2) \geq 8 - (2-3y); \\ 3) 2(0,4+x) - 2,8 \geq 2,3 + 3x; & 4) 7(x + 5) + 10 > 17; \\ 5) \frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} > 7; & 6) \frac{x}{6} - \frac{2-x}{3} \leq 5. \end{array}$$

- 557.** Eger

$$\begin{array}{lll} 1) 0 \leq x \leq 7,2; & 2) -5\frac{1}{3} \leq x \leq 0; & 3) 4 < \frac{1}{3}x < 5; \\ 4) 11 < 3x < 13; & 5) -3,1 < x \leq 4; & 6) 12 < 5x < 21 \end{array}$$

bolsa, x qanday pútin mánislerdi qabil ete aladı?

- 558.** Teńsizlikler sistemasıń sheshiń:

$$1) \begin{cases} 5x - 2 \geq 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5 - 2x) - 1 \geq 4 - 5x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 12x - 3(x+2) \geq 7x - 5, \\ 13x + 6 \leq (x-5) \cdot 2 + 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$$

- 559.** Teńsizlikler sistemasınıń sheshimleri bolǵan pútin sanlardı tabıń:

$$1) \begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leq \frac{3-x}{4}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geq \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$$

- 560.** Teńlemeńi sheshiń:

$$\begin{array}{lll} 1) |x-2|=3,4; & 2) |3-x|=5,1; & 3) |2x+1|=5; \\ 4) |1-2x|=7; & 5) |3x+2|=5; & 6) |7x-3|=3. \end{array}$$

561. Teńlemeni sheshiń:

- 1) $|x-2| \leq 5,4$; 2) $|x-2| \geq 5,4$; 3) $|2-x| < 5,4$;
4) $|3x+2| \geq 5$; 5) $|2x+3| < 5$; 6) $|3x-2,8| \geq 3$.

562. Korennen shıǵarıń:

- 1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

563. Ápiwayılastırıń:

- 1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;
3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}$.

564. Ańlatpalardıń mánislerin salıstırıń:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ va $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$ va $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$.

565. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

- 1) $\frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3}\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Kóbeytiwshini korennen shıǵarıń:

- 1) $\sqrt{9a^2b}$, bunda $a < 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, bunda $a > 0, b > 0$;
3) $\sqrt{8a^3b^5}$, bunda $a < 0, b < 0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, bunda $a < 0, b < 0$.

567. Kóbeytiwshini korenge alıń:

- 1) $x\sqrt{5}$, bunda $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, bunda $x < 0$;
3) $-a\sqrt{3}$, bunda $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, bunda $a < 0$.

568. Esaplań:

$$1) \sqrt[3]{1000} \cdot (0,0001)^{0,25} + (0,027)^{\frac{1}{3}} \cdot 7,1^0 - \left(\frac{10}{13} \right)^{-1};$$

$$2) \left(2\frac{10}{27} \right)^{-\frac{2}{3}} : \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1}{9}}} + (6,25)^{\frac{1}{2}} : (-4)^{-1};$$

$$3) \left(1\frac{61}{64} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,008)^{\frac{1}{3}} : (-2)^{-2}.$$

569. Ańlatpanıń mánisin tabıń:

$$1) \left(\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{1}{a-b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a}, \text{ bunda } a=3, b=12;$$

$$2) \frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n} \cdot \frac{\sqrt{mn}+n}{m-n} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}, \text{ bunda } m=5, n=20.$$

570. Teńlemeń sheshiń:

$$1) x^{\frac{1}{2}} = 2; \quad 2) x^{-\frac{1}{2}} = 3; \quad 3) x^{-3} = 8; \quad 4) x^{\frac{5}{2}} = 0; \quad 5) x^{-\frac{1}{3}} = 27.$$

571. $y = -\frac{25}{x}$ funkciyanıń grafigine:

$$1) A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5}); \quad 2) B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}); \quad 3) C(0,1; 250)$$

noqatı tiyisli bolıw yaki bolmawın anıqlań.

572. Funkciyanıń grafigin jasań:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = -\frac{6}{x}.$$

Funkciyanıń qaysı aralıqlarında ósiwi, kemeyiwin grafik boyınsa anıqlań; funkciyanıń jup yaki taqlığın anıqlań.

573. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

$$1) \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4};$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}};$$

$$3) \left(\frac{a-b}{\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{b^4}} - \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2}} \right) \cdot \frac{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}};$$

$$4) \left(\frac{\frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2}}{a-b} - \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.$$

Ańlatpanı ápiwayılastırıń (**574–575**):

$$\text{574. } 1) \sqrt{5+\sqrt{21}}; \quad 2) \sqrt{4+\sqrt{7}}; \quad 3) \sqrt{5+2\sqrt{6}}; \quad 4) \sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

$$\text{575. } 1) \frac{1}{\sqrt{5}} \left[4(a+1) + (\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1)^2 - \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ bunda } 0 < a \leq 1;$$

$$2) \frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}; \quad 3) \frac{a^{-2}\cdot b^{-3}-a^{-1}\cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}}\cdot b^{-\frac{11}{2}}-a^{-\frac{11}{2}}\cdot b^{-\frac{9}{2}}}.$$

Teńlemenı sheshiń (**576–577**):

$$\text{576. } 1) x^2=7; \quad 2) x^2=11; \quad 3) x^2+6x=0; \\ 4) x^2+5x=0; \quad 5) x^2=8x; \quad 6) x^2=12x.$$

$$\begin{array}{ll} \text{577. } 1) 1,5x-4x^2=6,3x-x^2; & 2) 11y-15=(y+5)(y-3); \\ 3) 3x(x+2)=2x(x-2); & 4) \frac{1}{4}(3x^2+1)-\frac{40x+3}{6}=\frac{x-3}{12}; \\ 5) \frac{y^2-5}{4}-\frac{15-y^2}{5}=\frac{y^2-4}{3}; & 6) \frac{2x^2-1}{4}=\frac{1+1,5x^2}{5}. \end{array}$$

578. Eger

- 1) $(y-3)^2 > (3+y)(y-3)$ bolsa, onda $y < 3$ bolıwın;
- 2) $(3a+b)^2 < (3a-b)^2$ bolsa, onda $ab < 0$ bolıwın dálilleń.

579. Eger $x < \frac{a+b}{2}$, $y < \frac{a+c}{2}$, $z < \frac{b+c}{2}$ bolsa, onda $x+y+z < a+b+c$ bolıwın dálilleń.

580. Tuwrı müyeshli parallelepipedtiń biyikligi 15 cm den artıq, eni 2 cm den, boyı bolsa 0,3 dan artıq. Onıń kólemi 0,9 dm³ dan úlken ekenin dálilleń.

581. y tiń qálegen mánisinde

- 1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$
aňlatpa ón bolıwın dálilleń.

582. k niń $4y^2-3y+k=0$ teńleme haqıyqıy korenlerge iye bolmaǵan mánislerin tabıń.

583. k niń qanday mánislerinde -2 sanı $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ teńlemeneniń koreni boladı?

584. Teńlemeni sheshiń:

1) $3x^2+8x+5=0$;

2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1} - \frac{x}{2x-1} = \frac{5}{2x+1}$;

4) $\frac{5}{x-1} + \frac{3x-3}{2x+2} = \frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$;

6) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Teńlemeni sheshiń:

1) $(x+2)^2 < (x-3)^2 - 8(x-5)$;

2) $\frac{2+x}{9} - x \leq \frac{2x-5}{3} - (4-x)$;

3) $\frac{(x-3)(x+2)}{4} - \frac{(x-7)}{3} > \frac{(x-6)^2}{4} + x$;

4) $6x + \frac{(3+x)^2}{2} > \frac{8-2x}{5} + \frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Juwıqlasıw qáteligin tabıń:

1) 0,2781 niń 0,278 menen;

2) -2,154 niń -2,15 menen;

3) $-\frac{7}{18}$ niń $-\frac{1}{3}$ menen;

4) $\frac{3}{11}$ niń 0,272 menen.

587. 3,5 sanı 3,5478 sanınıń 0,05 ge shekem anıqlıq penen alıngan juwıq mánisi ekenin dálilleń.

588. $\frac{7}{9}$ sanınıń 0,777 sanı menen juwıqlasıwınıń salıstırmalı qáteligin tabıń.

589. Dusmalıy tańlanǵan 60 túp góza ósimliginiń tiykargı payasındaǵı bu-wınlar sanı tómendegi kestede berilgen:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Tańlanbaniń: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) ortasha mánisin; 3) modasın; 4) medianasın; 5) keńligin esaplań; 6) jiyilikler poligonın jasań.

590. Neshe 4 tańbalı sanda da tek bir 0 sanı bar?

591. 0, 1, 2, 3, 5, 8 cifrlarınan, olardı tákirarlamastan jámi neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı?

592. 6 qonaqtı 6 stulǵa neshe túrli usılda otırǵızıwǵa boladı?

593. Ádebiyat kitabıńızdaǵı bir teksti tańlań. Onıń eki betindegi barlıq hárıplerdi sanań. Únli hárıplerdiń tekste ushıraw jiyiligin aniqlań. Jiyilikler kestesin dúziń. Jiyilikler poligonın jasań. Juwmaq shıgarıń hám onı dápterińzge jazıp qoyıń.

SHÍNÍGÍWLARĞA JUWAPLAR

I bap

- 1.** 2) 0; 4) 5. **2.** 2) -2 ; 4) 0. **3.** $(7m)t$; 168 t. **4.** 1) $(60m)$ min; 2) $\frac{p}{60}$ min;
 3) $\left(60m + l + \frac{p}{60}\right)$ min. **5.** 3($x - y$); 2) 4,5; 4) 2,5. **6.** $(x + y)$ ($x - y$); 2) $-\frac{11}{64}$;
 4) 0,104. **7.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **8.** 2) 4. **9.** 1, 3, 15, 21. **10.** 2) $(m - 1)m$; 4) $(2p + 1) \times$
 $\times (2p + 3)(2p + 5)$. **12.** $(p - q)t$; 1) 5t; 2) q san p dan úlken emes; q san p
 ga teń bolıwı mümkin. **13.** $400n + 500m$; 155000; 155000. **15.** 187200 m^3 ,
 $(37440m) \text{ m}^3$. **16.** $s = 3\frac{1}{6}c + 1\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}b$, 53 km. **23.** $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$. **25.** 2) 5; 4) 1,9; 6)
 -4. **26.** 2) $V = \frac{m}{p}$; 4) $a = \frac{p}{2} - b$. **27.** $x = \frac{np}{1000a}$, $x = 3$. **28.** $t = \frac{a}{cn}$, $t = 15$.
30. 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2 . **31.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. **32.** 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2 . **33.** 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6)
 $\frac{a^2b}{5c}$. **34.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a - b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **35.** 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y - 2x$; 6) $\frac{2}{a(a - b)}$.
36. 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **37.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. **38.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$;
 4) $-\frac{1}{ab}$. **39.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$. **40.** 2) $10 - 7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2 - b^2}$.
41. 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **42.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **43.** 2) $n - m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$.
44. 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$. **45.** 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. **46.** 2) $\frac{b}{ab}$ hám $\frac{2a}{ab}$; 4)
 $\frac{2a}{2b}$ hám $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ hám $\frac{25}{60}$. **47.** 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ hám $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ hám $\frac{b}{4x^3}$.

- 48.** 2) $\frac{6b^2}{2b}$ hám $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}, \frac{9ac}{6ab}, \frac{6a^2b^2}{6ab}$. **49.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}, \frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ hám $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$;
- 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}, \frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ hám $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **50.** 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ hám $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$; 4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ hám $\frac{15a^2}{12(a+1)}$. **51.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ hám $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ hám $\frac{x}{8x+8y}$. **52.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ hám $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}, \frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ và $\frac{3}{x^2-y^2}$. **53.** 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}, \frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ hám $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}, \frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ hám $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ và $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$. **54.** 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. **55.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. **56.** 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$. **57.** $\frac{15+ab}{5a}$; 4) $\frac{2+7b}{b}$. **58.** 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **59.** 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$.
- 60.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. **61.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$.
- 62.** 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. **63.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **64.** 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$. **65.** 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **66.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **67.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. **68.** 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. **69.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **70.** 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. **71.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. **72.** 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4) $-\frac{6m}{m^3-27}$. **73.** 2) $-\frac{12}{19}$. **74.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. **75.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6)

- $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **78.** 2) 2; 4) $\frac{a}{bc}$; 6) $\frac{ac}{b}$. **79.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3md}{2nk}$; 6) $\frac{15a^2c^2}{d}$. **80.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **81.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **82.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **83.** 2) $\frac{2b}{a}$;
- 4) $3b$; 6) $a - b$. **84.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **85.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$; 6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **86.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **87.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1;
- 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **88.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **89.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **90.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **91.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **92.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **95.** $\frac{v-v_1}{v+v_1} s$ km.
- 96.** 6 danadan. **97.** 2) $x = -4$ da $y = -\frac{1}{2}$; 4) $x < 0$ hám $x \geq 2$ da $y \leq 1$.
- 99.** 2) $(-2;4)$ hám $(2;-4)$; 4) $(-4; -2)$ hám $(1;3)$. **106.** 2) 2; 4) 15. **107.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **108.** 2) -1 ; 4) -4 ; 6) -8 . **109.** 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.
- 110.** 2) $x -$ qálegen san; 4) $\frac{2}{3} \leq x < 2$. **111.** 2) 5; 4) -11 ; 6) $\frac{1}{30}$. **112.** 2) 2;
- 4) $4\sqrt{6}$. **113.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$, $x \leq 3$ da, $(x-3)^3$, $x > 3$ da. **114.** 3974. **117.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **118.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **119.** 2) 49; 4) 125. **120.** 2) 121;
- 4) 150. **121.** 2) 3; 4) 2,7. **122.** 2) b ; 4) a ; 6) 1. **123.** 2) a^2b . **124.** 2) 1.
- 125.** 2) 3. **126.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$; 6) $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c} - 1$. **127.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **128.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **129.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **130.** $3 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$. **131.** 27
- 132.** 9a. **133.** $2b(a-b)$. **135.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **136.** $-4\sqrt{x}$. **137.** $\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{x})$.

- 138.** $-\sqrt{ab}$. **139.** $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **140.** 0. **141.** 3. **142.** 1. **143.** a . **144.** a^2x . **145.** $-x^3$. **146.** $\sqrt[6]{a}$. **147.** 2) $\frac{3(x^2 - 2x + 4)}{x^3 + 8}$, $\frac{x+1}{x^3 + 8}$ va $\frac{(x+2)^2}{x^3 + 8}$. **148.** 2) $\frac{55b - 61}{24}$; 4) $\frac{5 - 27b}{36}$. **149.** 2) $\frac{7q - p}{3p - q}$; 4) $\frac{8a + 8b - 70}{2b - 5}$. **150.** 2) $\frac{a^2 - b^2}{7}$. **151.** 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2 + 2)}$; 4) 1. **152.** 2) $-2(a - 1)^2$; 4) $\frac{a^2 + 4}{4a}$. **153.** 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. **154.** 2) 51; 4) 0,04; 6) -0,1. **155.** 2) 1000. **156.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. **157.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$.
158. 2) $x -$ qálegen san; 4) $x \leq 2$, $x \geq 3$; 6) $0 \leq x \leq 2$, $x \geq 3$. **159.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$.

II bap

- 178.** 2) $\frac{1}{3} > 0,3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0,7$. **179.** 2) $b > a$; 4) $a < b$. **183.** Birinshisi. **185.** 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. **186.** $-9 < -3$. **187.** 2) $a + 3b < -2b$. **188.** 2) $8 > 6$. **189.** 2) $a - 3b < 3a$. **190.** 2) $a - 5 < b - 5$. **191.** 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$. **192.** 2) $a < -0,25$; 4) $a < 2$. **193.** 2) $0,9 > -2$; 4) $5 > 3$. **194.** 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. **196.** 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. **197.** 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. **204.** 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. **205.** 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. **206.** 2) $x = -9$. **207.** 2) $h \geq 5$; 4) $v \leq 70$. **208.** 2) Duris; 4) naduris. **209.** 2) duris; 4) naduris. **211.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **212.** 2)

$$x = 3; \quad 4) \quad x = 2; \quad 6) \quad x = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{213.} \quad \sqrt{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}. \quad \mathbf{214.} \quad 2) \quad x = \frac{5}{2};$$

$$4) \quad y = 5. \quad \mathbf{215.} \quad 2) \quad x = 2,6; \quad 4) \quad x = 4. \quad \mathbf{216.} \quad 2) \quad x = -\frac{1}{3}; \quad 4) \quad x = 1. \quad \mathbf{217.} \quad 2) \quad 6;$$

$$4) \quad -3. \quad \mathbf{218.} \quad 2) \quad x = -1; \quad 4) \quad x = 1. \quad \mathbf{219.} \quad 2) \quad 13 - x < 2; \quad 4) \quad 2(x - 3) \leq 2; \quad 6)$$

2x(-4) ≥ x - (-4). **220.** 2) Berilgen sanlardan birewi de sheshim bola almaydı; 4) $\frac{1}{2}$; 0; -1. **221.** 2) $y > 0$; 4) hesh qanday mániste; 6) $y \neq -2$.

$$\mathbf{222.} \quad 2) \quad y < 2; \quad 4) \quad y \leq 0. \quad \mathbf{223.} \quad 2) \quad x \leq -3; \quad 4) \quad x > 0; \quad 6) \quad x < 0. \quad \mathbf{225.} \quad 2) \quad x < 14;$$

$$4) \quad y > 9; \quad 6) \quad z \leq 4. \quad \mathbf{226.} \quad 2) \quad x \geq -8; \quad 4) \quad z > -15; \quad 6) \quad x \leq -2. \quad \mathbf{227.} \quad 2) \quad x < 6; \quad 4)$$

$$x > 5; \quad 6) \quad x \leq -2. \quad \mathbf{228.} \quad 2) \quad x \geq 3; \quad 4) \quad x > 0; \quad 6) \quad x \geq 2. \quad \mathbf{229.} \quad 2) \quad x < \frac{5}{8}; \quad 4) \quad x < -3;$$

$$6) \quad x < 5\frac{1}{6}. \quad \mathbf{230.} \quad 2) \quad y > \frac{3}{8}; \quad 4) \quad y < \frac{5}{8}; \quad 6) \quad y > \frac{2}{3}. \quad \mathbf{231.} \quad 2) \quad y = 3; \quad 4) \quad x = 0. \quad \mathbf{232.}$$

$$2) \quad x = -1; \quad 4) \quad x = -4. \quad \mathbf{233.} \quad 2) \quad b < -5\frac{2}{3}; \quad 4) \quad x > -1\frac{3}{7}. \quad \mathbf{234.} \quad 2) \quad x - \text{qálegen}$$

san; 4) $x - \text{qálegen}$ san. **235.** 2) sheshimleri joq; 4) sheshimleri joq. **236.**

$$2) \quad x > 2; \quad 4) \quad x > -20; \quad 6) \quad x > 0,5. \quad \mathbf{237.} \quad 2) \quad x < 1,6; \quad 4) \quad x < 0. \quad \mathbf{238.} \quad 2) \quad x \leq 7; \quad 4)$$

$$x \leq 5. \quad \mathbf{239.} \quad 2) \quad x < 0,5; \quad 4) \quad x > -0,5. \quad \mathbf{240.} \quad 45 \text{ ten kem emes.} \quad \mathbf{241.} \quad 2) \quad \text{Berilgen}$$

sanlardan hesh biri sheshim bola almaydı. **242.** 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4)

$$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. \quad \mathbf{244.} \quad 2) \quad [-1; 3]; \quad 4) \quad (1; 2); \quad 6) \quad (-4; -2].$$

$$\mathbf{245.} \quad 2) \quad -3 \leq x \leq -1; \quad 4) \quad 0 < x < 3; \quad 6) \quad -2 \leq x < 2. \quad \mathbf{246.} \quad 2) \quad -1 < x < 2, \quad (1; 2);$$

$$4) \quad -4 < x \leq 0, \quad (-4; 0]. \quad \mathbf{247.} \quad \text{Awa.} \quad \mathbf{248.} \quad \text{Awa.} \quad \mathbf{249.} \quad \text{b)} \quad -3 < x < 1; \quad \text{hesh qan-}$$

day mániste; e) $-5 < x < 0$; hesh qanday mániste; **251.** 1) $x \geq 0,6$; 2) $x \leq -\frac{1}{3}$;

$$3) \quad x \geq -3,5; \quad 4) \quad x \geq -4,5. \quad \mathbf{252.} \quad 2) \quad x > 0; \quad 4) \quad x \geq -2. \quad \mathbf{253.} \quad 2) \quad x < -1; \quad 4) \quad x \leq 0.$$

$$\mathbf{254.} \quad 2) \quad 3 < x < 6; \quad 4) \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}. \quad \mathbf{255.} \quad 2) \quad -1,5 \leq x < 1,5; \quad 4) \quad -0,5 \leq x \leq 7,5. \quad \mathbf{256.}$$

$$2) \quad x \geq 4; \quad 4) \quad x > -3. \quad \mathbf{257.} \quad 2) \quad x \leq -2; \quad 4) \quad x < 4. \quad \mathbf{258.} \quad 2) \quad x \leq -2,5; \quad 4) \quad 2 \leq x \leq 5. \quad \mathbf{259.}$$

- 2) $-5 < x \leq -1$; 4) $0 < x \leq \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) hesh qanday x da; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \leq -2$; 4) $x \leq 6$. **263.** 2) 4 m den úlken, lekin 13 m den kishi. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 4) $x=0$, $x_2=-6$. **268.** 2) $x=2$; 4) $x = \frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1 = -0,25$, $x_2 = -1,25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **270.** 2) $x_{1,2} = \pm 2,1$; 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \leq 0,3$. **274.** 2) $-2,2 < x < -1,8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leq x < 1,5$. **276.** 2) $x \leq 0,9$, $x \geq 3,1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 1,6$. **278.** 2) -1 ; 0; 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3°. **286.** $\frac{1}{7}$. **287.** Duris. **289.** 2) $141 \leq x \leq 143$; 4) $895 \leq v \leq 905$; 6) $m-n \leq y \leq m+n$. **290.** 2) 2,6 hám 2,8; 4) $-6,1$ hám $-5,7$. **291.** 2) Yaq; 4) awa. **292.** 2) Awa; 4) yaq. **293.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Yaq. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 hám 7. **305.** 2) 0,41; $\approx 3,7\%$; 4) 0,108; 10,8%. **306.** 2) $\approx 2\%$. **307.** 2) Ekinshisi. **308.** $\approx 1\%$; 0,1%; 0,01%. **309.** Birinshisi. **310.** 2) 0,000398. **311.** Ekinshisi. **312.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0,5$. **313.** 2) $x = 0,5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **314.** 2) $2+b-a > 0$; 4) $a-3-b < 0$. **315.** 2) y-qálegen san; 4) $x > 7$. **316.** 2) $x < 2$. **317.** 2) $x_1 = 3,4$, $x_1 = -1,4$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \leq -2,4$, $x \geq 4,4$; 4) $x \leq -2$, $x \geq 1$. **321.** 2) Hesh bir mániste; 4) Hesh bir mániste; **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3,5416 \cdot 10^{-5}\Omega$. **327.** 67J. **329.** 18800; 20400; 13200; 4600.

III бап

345. 2) $-x^2 + 9 = 0$; 4) $x^2 = 0$. **346.** 2) $x^2 - 4x - 9 = 0$; 4) $5x^2 + 1 = 0$. **347.** 2) 0;

1; 4) 1; 6) berilgen sanlardan birewi de koren bolmaydi. **350.** 2) $x_{1,2} = \pm \frac{4}{7}$;

4) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 6) $x_{1,2} = \pm \sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2} = \pm 11$; 4) $x = 0$; 6) haqiyqiy korenleri joq. **352.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 0,6$; 6) $x = -3$. **353.** 2) $x = 0$;

4) $x_{1,2} = \pm 3$; 6) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2} = \pm 20$. **354.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 4) $x_1 = 0$,

$x_2 = 0,04$; 6) korenleri joq. **355.** 2) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$; 6) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$.

356. $x_{1,2} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -2,5$. **358.** 2)

$x_1 = 0$, $x_2 = 2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m = 9$; 4) $m = 64$; 6) $m = 6$. **360.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$;

4) $x_1 = 8$, $x_2 = 2$; 6) $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{23}$. **361.** $x_1 = \frac{3}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1 = 1$,

$x_2 = 4$; 2) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. **363.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -2,5$; 2) $x_1 = 2$, $x_1 = -\frac{3}{5}$. **364.**

2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 0,5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 0,5$; 6) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

366. 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -0,5$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

367. 2) $x = \frac{1}{4}$; 4) $x = -\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) haqiyqiy korenler joq. **369.**

2) eki; 4) birewi de joq. **370.** Haqiyqiy korenleri joq; 4) $x = 2,5$; 6) $x_1 = 4$,

$x_2 = -1$. **371.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 0,2$; 4) $x_1 = 7$, $x_2 = -8$; 6) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. **372.** 2)

$x_1 = 7$, $x_2 = -11$; 4) $x_1 = 0,6$; $x_2 = -3$. **373.** 2) $x_1 = 0,5$, $x_2 = -1,5$; 4) $x_1 = 5$,

$$x_2 = \frac{1}{5}. \quad \mathbf{376.} \quad 2) \ x_1 = 7, \ x_2 = -1; \quad 4) \ x_1 = 4, \ x_2 = -10; \quad 6) \ x_1 = 2, \ x_2 = -1. \quad \mathbf{381.} \quad 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad 4) \ x^2 - 3x - 18 = 0. \quad \mathbf{382.} \quad 2) \ x_1 = 3, \ x_2 = 4; \quad 4) \ x_1 = -1, \ x_2 = -7; \quad 6) \\ x_1 = 3, \ x_2 = -5. \quad \mathbf{383.} \quad 2) \ (x-1)(x+5); \quad 4) \ (x+7)(x-6); \quad 6) \ (2x+1)(4x+3); \quad 8)$$

$$(x+2)(1-4x). \quad \mathbf{384.} \quad 2) \ x+6; \quad 4) \ \frac{1}{x+7}; \quad 6) \ \frac{x+3}{3x+1}. \quad \mathbf{385.} \quad 2) \ x_{1,2} = \sqrt{5} \pm 2; \quad 4)$$

$$x_{1,2} = 2(\sqrt{7} \pm \sqrt{6}). \quad \mathbf{386.} \quad 2) \ x(x+7)(x-3); \quad 4) \ x(x-11)(x+2). \quad \mathbf{387.} \quad 2) \ \frac{x-9}{x+8};$$

$$4) \ \frac{9-x}{x-5}. \quad \mathbf{388.} \quad 2) \ -\frac{x}{(x+3)^2}; \quad 4) \ \frac{x-1}{x(x+10)}. \quad \mathbf{389.} \quad 2) \ x_{1,2} = \pm 1, \ x_{3,4} = \pm 2; \quad 4)$$

$$x_{1,2} = \pm 1, \ x_3 = \pm 7. \quad \mathbf{390.} \quad 2) \ x_{1,2} = \pm 1; \quad 4) \ x_{1,2} = \pm \sqrt{5}. \quad \mathbf{391.} \quad 2) \ x_1 = 7, \ x_2 = 3\frac{1}{3};$$

$$4) \ x_1 = 40, \ x_2 = -20, \quad 6) \ x_1 = 6, \ x_2 = -\frac{2}{3}. \quad \mathbf{392.} \quad 2) \ x_{1,2} = \pm 10; \quad 4) \ \text{korenleri joq};$$

$$6) \ x = -3. \quad \mathbf{393.} \quad 2) \ \text{Joq.} \quad \mathbf{402.} \quad 2) \ 14 \ \text{hám} \ 15. \quad \mathbf{403.} \quad 2) \ 19 \ \text{hám} \ 21.$$

$$\mathbf{404.} \quad 10 \ \text{cm}, \ 40 \ \text{cm}. \quad \mathbf{405.} \quad 140 \ \text{m}, \ 175 \ \text{m}. \quad \mathbf{406.} \quad 100 \ \text{km/s}, \ 80 \ \text{km/s}.$$

$$\mathbf{407.} \quad 10 \ \text{km/s}. \quad \mathbf{408.} \quad 20 \ \text{kún}, \ 30 \ \text{kún}. \quad \mathbf{409.} \quad \text{Kvadrattíń tárepi} \ 15 \ \text{cm}.$$

$$\mathbf{410.} \quad 9 \ \text{cm}, \ 40 \ \text{cm}. \quad \mathbf{411.} \quad 18 \ \text{km/s}, \ 15 \ \text{km/s}. \quad \mathbf{412.} \quad 15 \ \text{kún}, \ 10 \ \text{kún}. \quad \mathbf{413.} \quad 2)$$

$$x_{1,2} = \pm 5; \quad 4) \ x_1 = 0, \ x_2 = 7,5. \quad \mathbf{414.} \quad 2) \ x_1 = 13, \ x_2 = -4; \quad 4) \ x_1 = 3,6, \ x_2 = -7. \quad \mathbf{415.}$$

$$2) \ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}; \quad 4) \ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}. \quad \mathbf{416.} \quad 2) \ \text{eki}; \quad 4) \ \text{bir}. \quad \mathbf{417.} \quad 2) \ (x-8)(x-2);$$

$$4) \ (x-2)(2x+1). \quad \mathbf{418.} \quad 2) \ x(x+2); \quad 4) \ \frac{5x+1}{x-3}. \quad \mathbf{419.} \quad 2) \ x_{1,2} = \pm 3, \ x_{3,4} = \pm 2; \quad 4)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{3}, \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \mathbf{420.} \quad 2) \ x_2 = \pm \sqrt{5}; \quad 4) \ y = 1. \quad \mathbf{421.} \quad 20 \ \text{km/s}. \quad \mathbf{422.} \quad 15$$

$$\text{km/s}. \quad \mathbf{423.} \quad 3 \ \text{kún}, \ 5 \ \text{kún}. \quad \mathbf{424.} \quad 2) \ x_1 = 0, \ x_2 = 2. \quad \mathbf{425.} \quad 2) \ x_2 = 0,5; \quad 4) \ x_1 = 7,$$

$$x_2 = -13. \quad \mathbf{426.} \quad 2) \ x_1 = 0, \ x_2 = -5; \quad 4) \ x_{1,2} = \pm 4. \quad \mathbf{427.} \quad 2) \ x_1 = 9, \ x_2 = -12; \quad 4)$$

$$x_1 = 3, \ x_2 = -6. \quad \mathbf{428.} \quad 2) \ \text{Birewi de joq}; \quad 4) \ \text{eki}. \quad \mathbf{429.} \quad 2) \ x_1 = 3, \ x_2 = 1,4. \quad \mathbf{430.}$$

$$36 \ \text{kúnde}. \quad \mathbf{431.} \quad 1 \ \text{saat} \ 40 \ \text{min} \ \text{hám} \ 1 \ \text{saat} \ 20 \ \text{minut} \ \text{yaki} \ 2 \ \text{saat} \ \text{hám} \ 1 \ \text{saat}$$

$$40 \ \text{min}. \quad \mathbf{432.} \quad 12 \ \text{saat}, \ 6 \ \text{saat}. \quad \mathbf{437.} \quad 3 \ \text{saat}. \quad \mathbf{439.} \quad 12 \ \text{kún}, \ 8 \ \text{kún}. \quad \mathbf{440.} \quad 25$$

$$\text{saat}, \ 20 \ \text{saat}. \quad \mathbf{441.} \quad 60 \ \text{km/s}. \quad \mathbf{442.} \quad 8 \ \text{kún}, \ 12 \ \text{kún}. \quad \mathbf{444.} \quad 120; -120. \quad \mathbf{445.} \quad 6.$$

- 452.** 7 kunde. **453.** 20 km/s. **454.** 3 km/s. **455.** 8 kún. **456.** 37. **457.** 82. **458.** 20 kún, 30 kún, 60 kún. **459.** 9 saat. **460.** 10%. **461.** 5%. **462.** 10 km. **463.** 16 nafar. **464.** 35 nafar. **465.** 60 km/s, 50 km/s. **466.** 55 km/s.

IV bap

- 482.** 6 ta. **483.** 18. **484.** 27. **485.** 9. **487.** 9. **491.** 15. **492.** 492. 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.** $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. **506.** $64 \cdot 49 = 3136$. **508.** 1) $4 \cdot 60$; 2) $24 \cdot 58$; 3) $36 \cdot 55$; jámi 3612 usıł. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **522.** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. **523.** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. **524.** $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$. **525.** 10000. **527.** 24. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n \cdot (n-1):2$. **529.** $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **530.** 4.

V bap

- 544.** 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$; 36. **546.** $2a(30-a)$; -128. **547.** $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$ ta. **548.** $x = 1000a + c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2). **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 32$; 4) $x > 7,2$. **559.** 2) -15; -14; ...; -1; 0. **560.** 2) $x_1 = 8,1$, $x_2 = -2,1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3,4$; $x \geq 7,4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$.

- 564.** 2) $2(\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$ **565.** 2) \sqrt{x} ; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **571.** 2) Joq. **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

576. 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; 4) $x_1 = 0, x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0, x_2 = 12$. **577.** 2) $y_1 = 0, y_2 = 9$; 4) $x_1 = 0, x_2 = 9$; 6) $x_{1,2} = \pm 1,5$. **582.** $k > \frac{9}{16}$. **583.** $k_1 = 3, k_2 = -1$. **584.** 2) $x_1 = 1,2, x_2 = -2$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0,1\%$.

“Ózińizdi tekserip kóriń” tapsırmalarına juwaplar

I bap. 1. $b \neq 0, c \neq 1, d \neq -2$. 2. 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. 3. $\frac{1}{x-3}$; -3. 4. 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. 5. 1) 6; 2) $(y+x)xy$. 6. $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

II bap. 2. 1) $x < 2,4$; 2) $x \geq -15$; 3) $x < 5$. 3. 1) $4\frac{1}{3} < x < 6\frac{1}{4}$; 2) $x \geq 3$; 3) $x < -5$.

III bap. 1. 1) $x = 0$; 2) $x_1 = -1, x_2 = 2$; 3) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 0, x_2 = 1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2} = \frac{1}{2}$; 6) $x_1 = 17, x_2 = -1$; 7) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{3}$; 8) Sheshimi joq. 2. 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. 3. 9 km/s; 12 km/s.

IV. bap. 1. $18 \cdot 17 = 306$. 2. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 87480$. 3. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. 4. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. 5. 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Qızıqlı máselelerge juwaplar

1. 10 metr. 2. Múmkın emes. 3. Tárepleri 3 hám 6 birlik bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik yaki tárepi 4 birlik bolǵan kvadrat. 4. Sáykes túrde 8; 12; 6; -1. 5. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2006)$.

MAZMUNÍ

7-klass «Algebra» kursín tákirarlaw 3

I BAP ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLER

1- §. Algebralıq ańlatpalar	7
2- §. Algerbralıq bólshék. Bólshéklerdi qísqartırıw	12
3- §. Bólimlerdi ulıwma bólıwshige keltiriw	18
4- §. Algebralıq bólshéklerdi qosıw hám alıw	22
5- §. Algebralıq bólshéklerdi kóbeytiw hám bólıw	27
6- § Bólshék-racional ańlatpalardı onlıq bólshéklerge 30 almastırıw	
7- §. $y = \frac{k}{x}$ Funkciyá qásiyetleri, grafigi	34
8- §. Natural kórsetkishli dárejeniń arifmetikalıq koreni hám onń qágıydaları	39
9- §. Racional kórsetkishli dáreje hám onń qágıydaları	42
10- §. Racional kórsetkishli dáreje qatnasqan algebralıq ańlatpalardı ápiwayılastırıń	49
<i>I bapqa tiyisli shınıǵıwlар</i>	53
<i>I bapqa tiyisli sinaw esaplari – testler</i>	58
<i>Tariixiy maǵlıwmatlar</i>	61
<i>Ámelyi-usınilǵan hám pánlerara baylanıshlı másleleler</i>	62

II BAP TEŃSIZLIKLER

11- §. Sanlı teńsizlikler	68
12- §. Sanlı teńsizliklerdiń tiykarǵı qásiyetleri	71
13- §. Teńsizliklerdi qosıw hám kóbeytiw	75
14- §. Sanlı teńsizliklerdi dárejege kóteriw	80
15- §. Bir belgisizli teńsizlikler	85
16- §. Bir belgisizli teńsizlikler sistemaları. Sanlı aralıqlar	94
17- §. Sannıń moduli. Modul qatnasqan teńleme hám teńsizlikler	105
18- §. Shamalardıń juwıq mánisleri. Juwıqlasıw qáteligi	111
19- §. Qátelikti bahalaw	114

20- §. Sanlardí dóngeleklew	117
21- §. Salistírmalí qátelik	119
<i>II bapqa tiyisli shiniǵıwlar</i>	121
<i>II bapqa tiyisli shiniǵıwlar – testler</i>	124
<i>Tariyxiy máseleler</i>	127
<i>Tariyxiy maǵlıwmatlar</i>	128
<i>Ámeliy-usmilǵan hám pánlerara baylanıshlı máseleler</i>	129

III BAP kvadrat teńlemeler

22- §. Kvadrat teńleme hám oníń korenleri	135
23- §. Tolıq emes kvadrat teńlemeler	139
24- §. Kvadrat teńlemelerdiń korenlerin tabıw formulaları. Diskriminant	141
25- §. Viet teoreması. Kvadrat úsh aǵzalınıń síziqlı kóbeytiwshilerge jiklew	149
26- §. Kvadrat teńlemege keltiriletuǵın teńlemeler	156
27- §. Kvadrat teńlemeler járdeminde máseleler sheshiw	163
<i>III bapqa tiyisli shiniǵıwlar</i>	167
<i>III bapqa tiyisli shiniǵıwlar – testler</i>	170
<i>Tariyxiy máseleler</i>	172
<i>Tariyxiy maǵlıwmatlar</i>	175
<i>Ámeliy-usmilǵan hám pánlerara baylanıshlı máseleler</i>	176

IV BAP MAĞLÍWMARLAR ANALIZI

28- §. Maǵlıwmatlar analizi. Maglıwmatlardı beriw	188
29- §. Ortasha máni. Moda. Mediana	193
30- §. Tańlaw usılı menen kombinatoriyalıq máselelerdi sheshiw	200
31- §. Kombinarikanıń tiykargı qaǵıydası hám oní máseleler sheshiwde qollanıw ..	203
<i>IV bapqa tiyisli shiniǵıwlar</i>	210
<i>IV bapqa tiyisli sinaq shiniǵıwları – testler</i>	213
<i>Ámeliy-usmilǵan hám pánlerara baylanıshlı máseleler</i>	215

V BAP

8-klass «Algebra» kursín tákırarlaw ushín shíníǵıwlar	219
Shíníǵıwlarǵa juwaplar	227

Alimov Sh. A.

Algebra: Uliwma orta bilim beriw mektepleriniň 8-klası ushın sabaqlıq/
Sh.A.Alimov, A.R.Xalmuxamedov, M.A. Mirzaxmedov.
A51 – 4-basılımı. – Tashkent: „O‘qituvchi“ BPDÚ, 2019. – 240 b.

ISBN 978-9943-5750-1-1

UO‘K: 512(075.3)=512.121
KBK 22.14ya72

**Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov**

ALGEBRA

(Qoraqalpoq tilida)

Umumiyy o‘rta ta’lim maktabalarining

8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

„O‘QITUVCHI“ nashriyot-mabaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MCHJ da tayyorlandi.

Awdarmashi G. Nizanova

Redaktori G. Nizanova

Kórkem dizayneri R. Zaparov

Korrektori G. Nizanova

Kompyuterde betlewshi H. Safaraliyev

Tekstin teriwshi S. Niyazova

Baspa licenziyası AI 012. 20.07.2018. Original-maketten basıwǵa ruxsat etildi
26.07.2019. Ólshemi $70 \times 90^{\text{1/16}}$. Tayms garniturası. Ofset usilindä basıldı. Ofset qágazı.
Shártli baspa t. 17,55. Esap-poligraf t. 16,6. Nusqası 1315 nusqa. Buyıtpa №

Ózbekstan Respublkikası Prezidenti Administraciyası janndaǵı Málimleme hám ǵalaba
kommunikaciyalar agentliginiň „O‘qituvchi“ baspa-poligrafiyalıq döretiwshilik úyi.
Tashkent – 206, Yunusobod rayoni, Yangishahar kóshesi, 1-úy.
Shártnama № 58-19.

Ijaraǵa berilgen sabaqlıqtıń jaǵdayın kórsetiwshi keste

T/n	Oqıwshınıń atı familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alıngandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi	Sabaqlıqtıń qaytip tapsırılǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

**Sabaqlıq ijaraǵa berilgende hám, oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp
alınganda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishe
bahalawǵa muwapiq toltilarıldı**

Jańa	Sabaqlıqtıń paydalaniwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Muqabası pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminен ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, koshpegen, betlerinde jazıw hám sızıwlар joq.
Qanaatlanarlıq	Muqaba jazılgen, bir qansha sızılıp, shetleri jelingen, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajırlıw jaǵdayı bar, paydalaniwshı tárepinen qanaatlanarlıq ońlangan. Kóshken betleri qayta ońlangan, ayırm betleri sızılǵan.
Qanaatlandırmayıdı	Muqaba sızılǵan, ol jırtılǵan, tiykarǵı bóliminen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırsızlıq ońlangan. Betleri jırtılǵan, betleri jetispeydi, sızıp, boyap taslanǵan, sabaqlıqtı tiklewge bolmaydı.