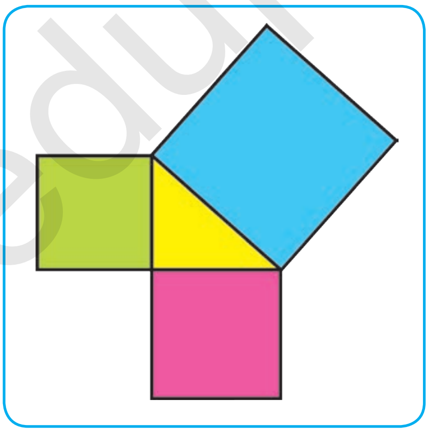
А.А.РАХЫМҚАРИЕВ, М.А.ТУХТАХУЖАЕВА

ГЕОМЕТРИЯ 8

Жалпы орта білім беретін мектептердің
8-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру
министрлігі баспаға ұсынған

Қайта өңделген және толықтырылған 4-басылымы



ТАШКЕНТ
“O‘ZBEKISTON”
2019

УЎК 514(075)
КВК 22.151
R 24

Пікір жазғандар:

Н.А.Умарова – Ташкент облысы ХБҚКД және МОХМ аға оқытушысы;
Г.А.Фозилова – Ташкент қаласы Юнусабад ауданындағы №274 жалпы білім беретін мектептің математика пәні оқытушысы.

Оқулық Республикалық білім орталығының 2018 жылғы 25 қарашадағы “Анық пәндердің блок модулі бойынша жалпы орта білімнің оқу бағдарламасы (VIII сынып)” негізінде жазылған. Оқулықта жалпы орта білім бойынша математика пәнін оқытудың белгіленген мақсаты мен міндеттері, оқу қызметі нәтижесінде оқушыларға қойылатын талаптар айқындалған. Оқулық оқушылардың бойында қалыптастырылатын тірек компоненттердің элементтерін қамтып алған.

Қайта дайындау үдерісінде эксперттер мен рецензенттердің ұсыныстары ескерілді. Әрбір тараудың соңында жазба түрдегі бақылау жұмыстарының үлгілері мен тестер келтірілді, олар оқушылардың бақылау жұмысына тиянақты дайындалуына көмектеседі. Тарихи мәліметтер айдарынан еліміздің және дүние жүзі ғалымдарының бұл пәнге қосқан салмақты үлестері мен тарихи-ғылыми жетістіктері орын алған.

“Ағылшын тілін үйренеміз” айдарында тақырыптарда кездесетін маңызды геометриялық ұғымдардың ағылшын тіліндегі аудармасы берілген.

Қайталауға ұсынылған мысалдарды жыл бойы пайдалана беруге болады.

Тақырыптарда қамтылған білімдерді тыңғылықты игеру жолында Сендерге жетістіктер тілейміз!

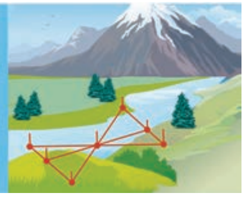
ОҚУЛЫҚТАҒЫ ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР

– ереже, қасиет, сипаттар;
? – белсенділікті арттыратын сұрақтар мен тапсырмалар;
– сыныпта орындалатын жаттығулар;
– біліктілікті дамытатын жаттығулар;
– есептер шешу үлгілері;
– үй тапсырмасына арналған жаттығулар.

Республикалық мақсатты кітап қорының қаржылары есебінен басылды.

ISBN 978-9943-25-814-3

7-СЫНЫПТА ӨТІЛГЕНДЕРДІ ҚАЙТАЛАУ



1. Үшбұрыштың ауданына, биссектрисасы мен биіктігіне қатысты есептер

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. Үшбұрыштың ауданы, медианасы, биіктігі және биссектрисасы деп нелерді айтады?

2. Ауданы 18 см-ге тең үшбұрыштың биссектрисасы оны ауданы 12 см-ге және 15-см-ге тең болатын үшбұрыштарға бөледі. Үшбұрыштың биссектрисасын тап (1-сурет).

3. Үшбұрыштың табанына түсірілген медианасы оны ауданын 18 см-ге және 24 см-ге тең болатын екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың кіші бүйір қабырғасы 6 см-ге тең. Оның үлкен бүйір қабырғасын тап (2-сурет).

4. ABC үшбұрышында $AB = BC$ және BD медианасы 6 см-ге тең. ABD үшбұрышының периметрі 24 см-ге тең. Берілген үшбұрыштың периметрін табыңдар (3-сурет).

Берілген: $\triangle ABC$-да: $AB=BC, BD=6$ см – медиана, $P_{ABD}=24$ см.

Табу керек: $P_{ABC}=?$

Шешімі: 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, бұдан:

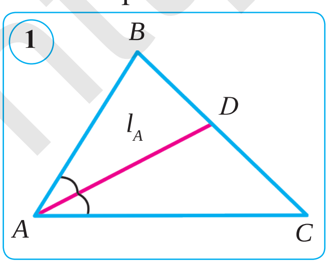
$24=AB+AD+6,\ AB+AD=24-6,\ AB+AD=18$ (см).

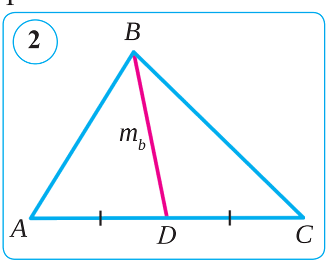
2) $AB=BC$ және $AC=2AD$, бұл жағдайда

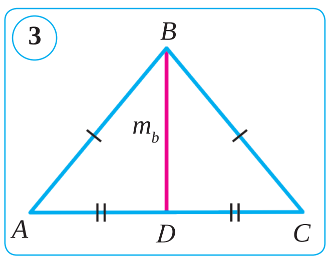
$P_{ABC}=AB+BC+AC=2(AB+AD)=2\cdot18=36$ (см). ***Жауабы:*** $P_{ABC}=36$ см.

5. Үшбұрыштың екі қабырғасы 0,5-ке және 8,7-ге тең. Үшінші қабырғасының ұзындығы натурал сан екендігін біле тұрып, сол қабырғаны табыңдар.

6. Периметрі 30-см-ге тең үшбұрыштың биссектрисасы оны 16-см-ге және 24-см-ге тең екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың биссектрисасын табыңдар.







7. Периметрі 36-см-ге тең үшбұрыштың биіктігі оны периметрлері 18 см-ге және 24-см-ге тең үшбұрыштарға бөледі. Берілген үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

8. Тең бүйірлі үшбұрыштың ауданы 22,5 см, ал бүйір қабырғасы 0,6 дм. Бұл үшбұрыштың табанын тап.

Үшбұрыштар теңдігінің белгілеріне, үшбұрыш бұрыштарының қосындысына және сыртқы бұрыштарының қасиеттеріне қатысты мәселелер

9. *ABC* және *DEF* үшбұрыштарында: $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$. Бұл үшбұрыштар өзара тең бе?

10. Үшбұрыштың 117°-тық сыртқы бұрышына сыбайлас емес ішкі бұрыштарының қатынасы 5 : 4. Осы ішкі бұрыштарды табыңдар.

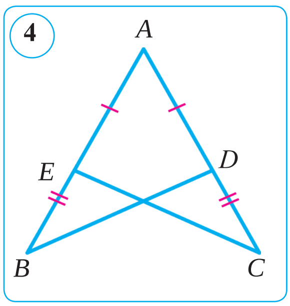
11. Тең бүйірлі *ABC* үшбұрышының *AD* және *BE* биссектрисалары *O* нүктесінде қиылысады. *ABC* үшбұрышының биссектрисалары арасындағы *AOE* бұрышын табыңдар.

12. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрышы доғал болуы мүмкін бе?
Шешуі. Бізге белгілі болғанындай, тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең. Бірақ екі доғал бұрыштың жиындысы 180°-тан үлкен болады. Бұл үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теоремаға қайшы. *Жауабы:* жоқ, мүмкін емес.

13. Үшбұрыштың 108°-тық сыртқы бұрышына сыбайлас емес ішкі бұрыштарының қатынасы 2 : 7. Сол ішкі бұрыштарды табыңдар.

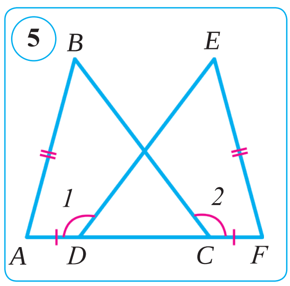
14. Бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышы сәйкес түрде екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен бұрышына тең. Бұдан сол үшбұрыштардың теңдігі келіп шыға ма?

15. *ABC* және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында *AB* және A_1B_1, *BC* және B_1C_1 қабырғалары тең және сәйкесінше *AB* және A_1B_1 қабырғаларына жүргізілген *CD* және C_1D_1 медианалары да тең. Осы үшбұрыштардын теңдігін дәлелдеңдер.



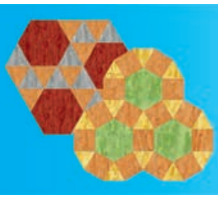
16. 4-суреттегі $AB = AC$ және $AE = AD$. $BD = CE$ екенін дәлелдеңдер.

17. 5-суреттегі $AD = CF$, $AB = FE$ және $CB = DE$. $\angle 1 = \angle 2$ екенін дәлелдеңдер.

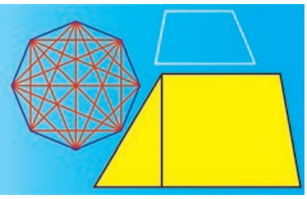


18. *ABC* үшбұрышының *B* бұрышы 42°-қа, ал A төбесіндегі сыртқы бұрышы 100°-қа тең. *ACB* бұрышын табыңдар.

19. Тік бұрышты *ABC* үшбұрышының *C* бұрышы — тік, ал *A* төбесіндегі сыртқы бұрышы 136°-қа тең. *B* бұрышын табыңдар.



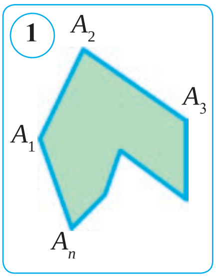
I ТАРАУ.
ТӨРТБҰРЫШТАР



§ 1. НЕГІЗГІ ТӨРТБҰРЫШТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. КӨПБҰРЫШТЫҢ ІШКІ ЖӘНЕ СЫРТҚЫ БҰРЫШТАРЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

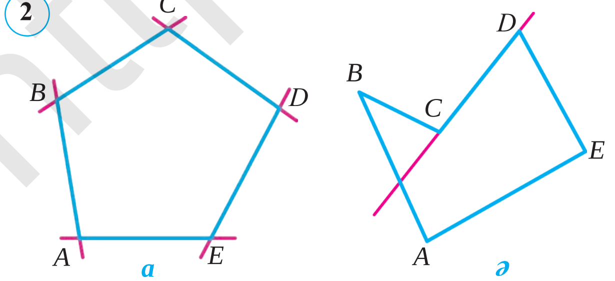
1. Көпбұрыштар. A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесінділерден түзілген фигураны қарастырамыз. Кесінділердің орналасуы сондай, көршілес екі кесінді (олардың төбесі ортақ) ешқашан бір түзудің бойында жатпайды, ол көрші емес кесінділердің ортақ нүктелері болмайды (1-сурет). Бұндай ***пішін көпбұрыш*** деп аталады A_1, A_2, ..., A_n нүктелер (төбелер) көпбұрыштың ***төбелері***, *ал* A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесінділер көпбұрыштың ***қабырғалары*** деп аталады.

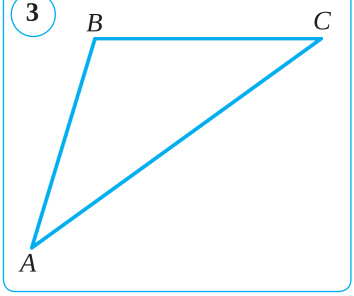


Көпбұрыштың қабырғаларының саны оның төбелерінің санына, яғни бұрыштарының санына тең. Көпбұрыштар төбелерінің (қабырғаларының) санына қарай үшбұрыштарға, төртбұрыштарға, бесбұрыштарға және басқаларға бөлінеді.

Егер тұйық сынық сызық өзімен -өзі қиылыспаса, онда бұндай сынық сызық жай ***тұйық сынық сызық*** деп аталады. Ол жазықтықтың сол сынық сызыққа тиесілі емес нүктелерін екі аймаққа – *ішкі* және *сыртқы аймаққа* бөледі, сөйтіп, ортақ шекара міндетін атқарады. 1-суретте ішкі аймақ боялып көрсетілген.

1-анықтама. *Егер көпбұрыш оның кез келген жағын өзінің ішіне алатын түзумен бір жарты жазықтықтың бойында жатса, ол* ***дөңес көпбұрыш*** *деп аталады. Бұнда түзудің өзі де сол жарты жазықтыққа тиесілі болып саналады.*





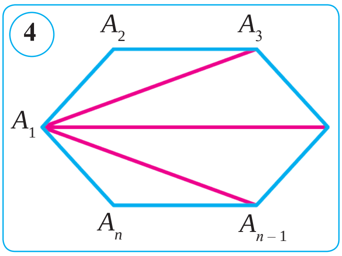
2- *а* және 3-суретте дөңес көпбұрыш, ал 2-*б*-суретте дөңес емес көпбұрыш бейнеленген. Ерікті үшбұрыш – дөңес көпбұрыш болып табылады (3-сурет).

2. Көпбұрыштың ішкі және сыртқы бұрыштарының қасиеті.

2-анықтама. *Көпбұрыштың берілген төбеде түйісетін қабырғаларын түзетін бұрыш* ***көпбұрыштың ішкі бұрышы*** *деп аталады.*

1 - теорема.

Дөңес n бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° $(n-2)$-ге тең, мұнда n — қабырғалар саны.

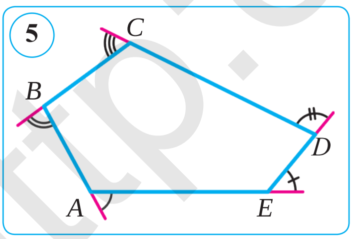


Дәлелдеу. $A_1A_2A_3...A_n$ — берілген дөңес n-бұрыш және $n>3$ болсын (4-сурет). Бірер төбесінен, мысалы A_1-ден көпбұрыштың барлық диагональдарын жүргіземіз. Бұл диагональдар оны $(n-2)$ үшбұрышқа бөледі. Шындығында да *екі шеткі үшбұрыштар* ($\triangle A_1A_2A_3$ және $\triangle A_1A_{n-1}A_n$) көпбұрыштың екі қабырғасы және бір диагоналінен, ал қалған үшбұрыштар көпбұрыштың бір қабырғасы және екі диагоналінен құралған. Сондықтан үшбұрыштардың саны $(n-2)$, яғни көпбұрыштың қабырғалары санынан екеуге кем болады. Көпбұрыштың бұрыштарының қосындысы оны құрайтын үшбұрыш бұрыштарының қосындысына, яғни $180°(n-2)$-ге тең болады. Теорема дәлелденді.

3-анықтама. ***Көпбұрыштың берілген төбедегі сыртқы бұрышы*** *деп, көпбұрыштың сол төбедегі ішкі бұрышымен сыбайлас бұрышты атайды.*

2 - теорема.

Дөңес n бұрыштың әрбір төбесінен бір-бірлеп алынғандағы сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болады.



Дәлелдеу. Көпбұрыштың әрбір төбесіне бір-бірден сыртқы бұрыш саламыз. Көпбұрыштың ішкі бұрышы және онымен сыбайлас сыртқы бұрышының қосындысы 180°-қа тең болады (5-сурет). Сол себепті барлық ішкі және әрбір төбесінен бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы $180°n$-ге тең. Бірақ көпбұрыштың барлық ішкі бұрыштарының қосындысы $180°(n-2)$-ге тең. Ол жағдайда әрқайсы төбесінен бір-бірлеп алынған сыртқы бұрыштардың қосындысы

$180°n - 180°\,(n-2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°$ болады.

Теорема дәлелденді.

1-есеп. Қабырғалары тең n бұрыштың әрбір ішкі бұрышы (α_n) неге тең?

Шешуі. Кез келген дөңес n бұрыштың бұрыштарының қосындысы 180°-қа $(n-2)$ тең екені белгілі. Дұрыс көпбұрыштың бұрыштары тең болғандығы себепті олардың, әрқайсысы төмендегілерге тең болады:

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

2-есеп. Қабырғалары тең n бұрыштың әрбір сыртқы бұрышы (β_n) неге тең?

Шешуі. Кез келген дөңес n бұрыштың, әрбір төбесінен бір-біреуден алынған сыртқы бұрыштардың қосындысы 360° -қа тең екендігі белгілі.

Сонымен қабырғалары тең n бұрыштың әрбір сыртқы бұрышы төмендегілерге тең болады: $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Көпбұрыштың берілген төбесіндегі ішкі бұрышы дегеніміз не? Сыртқы бұрышы дегеніміз ше?
2) Дөңес n бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?

2. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы: 1) 1080°-қа; 2) 1620°-қа; 3) 3960°-қа тең. Көпбұрыштың қанша қабырғасы бар?

3. 1) Төртбұрыштың; 2) онекібұрыштың; 3) отызбұрыштың; 4) елубұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын тап.
Үлгі. 1) $S_{13} = 180^\circ \cdot (13-2) = 180^\circ \cdot 11 = 1980^\circ$.

4. Егер төртбұрыштың үшеуден алынған бұрыштарының қосындысы сәйкесінше 240°, 260° және 280° болса, онда оның ең кіші бұрышы нешеге тең болады?

5. Ішкі бұрыштарының әрқайсысы: 1) 150° -қа; 2) 170° -қа; 3) 171° -қа тең дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

6. Көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы оның әрбір төбесінен біреуден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысынан үш есе үлкен. Сонда бұл көпбұрыштың қабырғаларының саны нешеу болғаны? Бос орындарға сәйкес сандарды орналастырыңдар.
Шешуі. Есептің шартына орай, $180^\circ(n-2) = \ldots \cdot 360^\circ$. Бұдан
$180^\circ(n-2) = \ldots \cdot 2 \cdot 180^\circ$, $n-2=6$, $n=\ldots$. ***Жауабы:*** $n=\ldots$.

7. Сыртқы бұрыштарының әрқайсысы: 1) 15°-қа; 2) 45°-қа; 3) 60°-қа тең дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

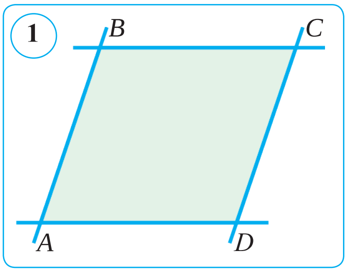
8. Егер төртбұрыштың үш бұрышы доғал болса, ондай жағдайда төртінші бұрышы сүйір болады. Осыны дәлелдеңдер.

9. Сыртқы бұрыштарының әрқайсысы: 1) 15°-қа; 2) 45° -қа; 3) 72° -қа тең болған дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

10. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары 1, 2, 3 және 4 сандарына пропорционал. Сол бұрыштарды табыңдар.

2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Параллелограмм. Жазықтықтағы екі параллеь түздің басқа екі параллель түзумен қиылысуынан туындаған төртбұрышты қарастырайық (1-сурет). Бұл төртбұрыштың ***параллелограмм*** деген арнайы атауы бар.



Анықтама. *Қарама-қарсы қабырғалары өзара параллель болатын төртбұрыш **параллелограмм** деп аталады.*

Егер $ABCD$ параллелограмм болса, $AB \| DC$ және $AD \| BC$ болады (1-сурет).

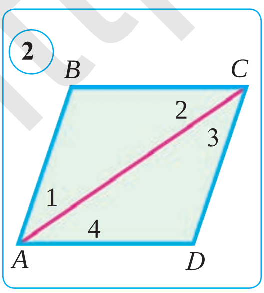
1-есеп. 2-суретте $\triangle ABC = \triangle CDA$. $ABCD$ төртбұрышының палаллелограмм екендігін дәлелдеңдер.

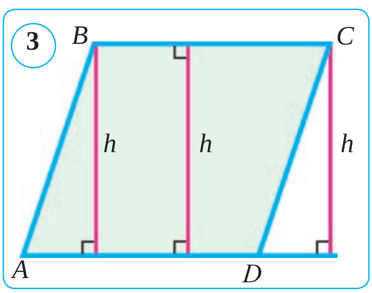
Шешуі. ABC және $CДA$ үшбұрыштарының теңдігінен мына жағдай келіп шығады: $\angle 1 = \angle 3$ және $\angle 2 = \angle 4$. 1 және 3-бұрыштар – AB мен CD параллель түзулер және AC қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болғандықтан, өзара тең. Нақ сол сияқты 2- және 4-бұрыштар BC және AD параллель түзулері мен AC қиюшы сызығынан түзілген ішкі айқыш бұрыштар болғандықтан, өзара тең болады. Параллель түзулердің белгілеріне орай мыналарға ие боламыз: $AB \| DC$ және $BC \| AD$. Демек, $ABCD$ төртбұрышындағы қарама-қарсы жақтар жұп-жұбымен бір-біріне параллель, яғни анықтамаға орай, $ABCD$ – параллелограмм.

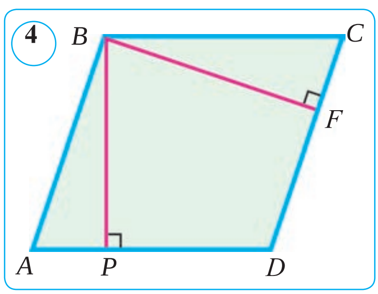
Параллелограмның бір жағында жатқан нүктеден қарама-қарсы жағын өз ішіне қамтитын түзуге түсірілген перпендикуляр түзу параллелограмның ***биіктігі*** деп аталады. Параллелограмның бір жағына шексіз көп биіктіктер жүргізуге болатыны айдан анық (3-сурет), олар параллель түзулер арасындағы қашықтықтар болғандықтан, өзара тең болады. Параллелограмның бір ұшынан оның түрлі жақтарына бір-бірінен ерекшеленіп тұратын екі биіктік жүргізуге болады. Мысалы, 4-суреттегі BP мен BF – осындай биіктіктер.

2. Параллелограмның қасиеттері.

1 - теорема. **(1-қасиет). Параллелограмның бір қабырғасында орналасқан бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.**







Дәлелдеу. Параллелограмның бір қабырғасында орналасқан бұрыштар ішкі бір қабырғалы бұрыштар болып табылады. Сондықтан да олардың қосындысы 180º-қа тең. Теорема дәлелденді.

2-теорема.

(2-қасиет). Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары мен қарама-қарсы бұрыштары өзара тең.

Дәлелдеу. $ABCD$ – берілген параллелограмм, яғни $AB||CD$ және $BC||AD$. Параллелограмның AC диагоналін жүргіземіз (2-суретке қара) де, ABC және CDA үшбұрыштарын қарастырамыз. Оларда AC қабырғасы – ортақ, 1- және 3-бұрыштар – AB және CD параллель түзулер және AC қиюшы түзу түзген ішкі айқыш бұрыштар болғандығы үшін өзара тең, ал 2- және 4-бұрыштар AD және BC параллель түзулері мен АС қиюшы түзу түзген ішкі айқыш бұрыштар болғандығы үшін өзара тең болады. Демек, үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісіне орай ABC және CDA үшбұрыштары өзара тең. Жалпы алғанда, бұдан $AB=CD$, $AD=BC$ және $\angle B=\angle D$ сондай-ақ $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$, яғни $\angle A=\angle C$ екені келіп шығады.

2-есеп. Параллелограмның екі бұрышының қосындысы 172º-қа тең. Оның өзге бұрыштарын табыңдар.

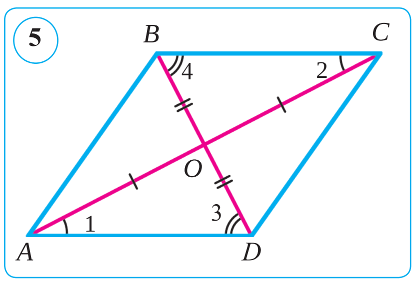
Шешуі. $ABCD$ *п*араллелограмы берілген делік. Паралллелограмның сыбайлас бұрыштарының қосындысы 180º-қа тең болғандықтан, берілген бұрыштар сыбайлас бұрыштар бола алмайды, яғни олар – қарама-қарсы бұрыштар. $\angle A+\angle C=172°$ болсын. Параллелограмның қарама-қарсы бұрыштары тең болғандықтан, бұл жағдайда бұрыштардың әрқайсысы $\angle A=\angle C=172°:2=86°$ болады. Параллелограмның барлық бұрыштарының қосындысы 360º-қа тең, сондықтан да оның қалған екі бұрышы $\angle B=\angle D=(360°-172°):2=94°$-тан болады. Жауабы: 86°, 94°, 86°, 94°.

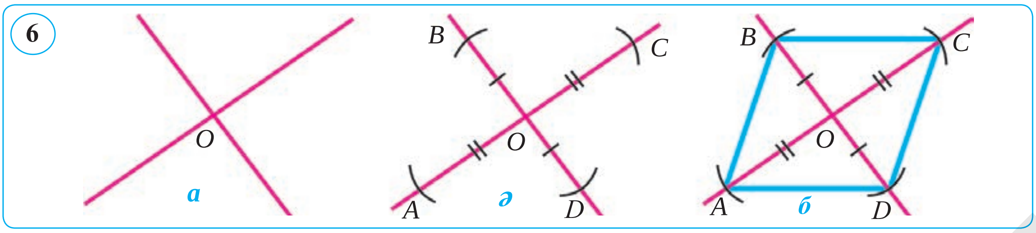
3-теорема.

(3-қасиет). Параллелограмның диагональдары қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Дәлелдеу. $ABCD$ берілген параллелограмм және O – AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі болсын (5-сурет). Енді $AO = OC$ және $DO = OB$ екенін дәлелдейміз.

Алдымен AOD және COB үшбұрыштарын қарастырамыз. Бұл үшбұрыштарда $AD=BC$ (параллелограмның 2-қасиетіне орай, оның қарама-қарсы қабырғалары тең), $\angle 1=\angle 2$ және $\angle 3=\angle 4$ (AD және BC параллель түзулерінің, сәйкесінше AC және BD қиюшылармен қиылысуынан түзілген ішкі айқыш бұрыштар болғандығы себепті). Демек, үшбұрыштар теңдігінің екінші





белгісіне орай, $\triangle AOD = \triangle COB$. Бұдан $AO = CO$ және $DO = OB$, яғни AC және BD диагональдарының әрқайсысы қиылысу нүктесі О-да тең екіге бөлінетіні келіп шығады. Теорема дәлелденді.

3-есеп. 3-қасиетті пайдаланып, параллелограмм жасаңдар.

1-қадам. Екі қиюшы түзу жүргіземіз және олардың қиылысу нүктесін O әрпімен белгілейміз (6- *а* сурет).

2-қадам. Циркульдің көмегімен түзулердің біреуіне өзара тең OA және OC кесінділерін, ал екіншісіне өзара тең OB және OD кесінділерін қоямыз (6-*б* сурет).

3-қадам. A, B, C және D нүктелерін бірінен соң бірін тұтастырып, іздестіріліп жатқан $ABCD$ параллелограмын жасаймыз (6- *ә* сурет).

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Қандай төртбұрыш параллелограмм деп аталады? Параллелограмның бір қабырғасына орналасқан бұрыштарының қосындысы неге тең?
? 2) Параллелограмның диагональдары туралы не деуге болады?

2. Параллелограмның ауданы 152 см, ал қабырғаларының бірі екіншісінен 25 см артық. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

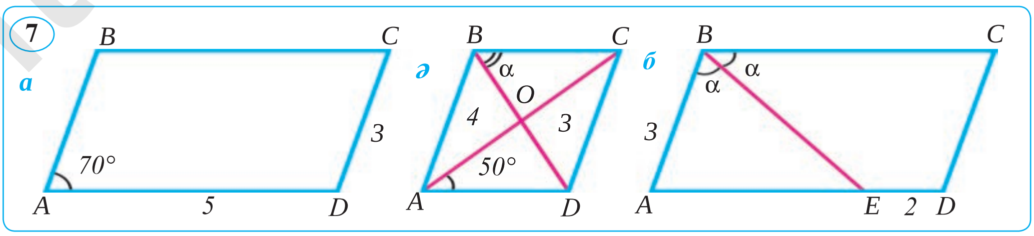
3. Параллелограмның екі бұрышының қосындысы: 1) 70°-қа; 2) 110°-қа; 3) 170°-қа тең болса, оның барлық бұрыштарын табыңдар.

4. $ABCD$ параллелограмында: $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 14$ см, $BD = 12$ см; O – диагональдардың қиылысу нүктесі екені белгілі. ABO және BOC үшбұрыштарының ауданын табыңдар.

5. Параллелограмның сыбайлас қабырғаларының қосындысы 20 см-ге, ал айырмасы 12 см-ге тең. Осы параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

6. Параллелограмның екі қабырғасының қатынасы 5 : 3-ке, ал ауданы 6,4 дм-ге тең. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

7. 7-суретте параллелограмның кейбір элементтерінің шамасы көрсетілген. Тағы қандай шамаларды табуға болады?

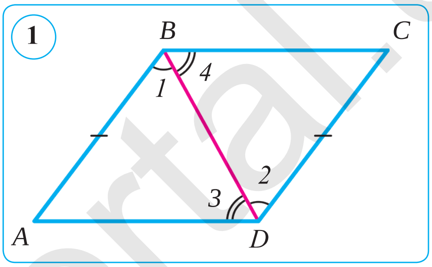


3. ПАРАЛЛЕЛОГРАМНЫҢ БЕЛГІЛЕРІ

Өткен тақырыпта қарастырғанымыздан белгілі болғанындай, параллелограмның қарама-қарсы бұрыштары мен қабырғалары тең. Сондай-ақ параллелограмда оның екі іргелес бұрышының қосындысы 180°-қа тең болатынын, параллелограмның диагоналі оны екі тең үшбұрышқа бөлетінін дәлелдедік. Енді параллелограмның белгілерімен танысамыз.

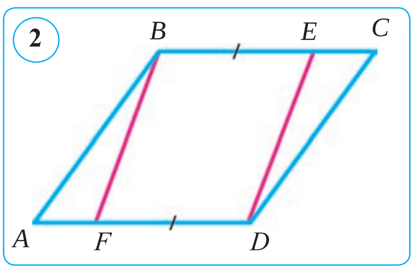
1-теорема.

(1-белгі). **Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болып табылады.**



Дәлелдеу. *ABCD* төртбұрышында *AB* || *CD* және *AB* = *CD* болсын. Оның *BD* диагоналін жүргізейік (1-сурет). Нәтижеде екі тең *ABD* және *CDB* үшбұрыштарға ие боламыз (екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышы бойынша), себебі оларда (*AC* қабырғасы — ортақ, ал теореманың шарты бойынша *AB* = *CD* (шартқа сәйкес), *BD* қабырға — ортақ, $\angle 1 = \angle 2$ (*AB* мен *CD* параллель түзулер, сондай-ақ *BD* қиюшымен қиылысуынан пайда болған ішкі айқыш бұрыштар болғандықтан). Үшбұрыштардың теңдігінен $\angle 3 = \angle 4$ бұрыштарының теңдігі келіп шығады. Ал бұл бұрыштар *AD* және *BC* түзулері мен *AC* қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болып табылады. Түзулердің параллельдік белгілеріне орай *AD* || *BC*. Сөйтіп, *ABCD* төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары жұп-жұбымен параллель. Сондықтан параллелограмның анықтамасы бойынша *ABCD* төртбұрыш — параллелограмм болып табылады. Теорема дәлелденді.

1-есеп. *ABCD* параллелограмының *BC* және *AD* қабырғаларына тең кесінділер қойылған: *BE* = *DF* (2-сурет). BEDF төртбұрышы параллелограмм бола ма?

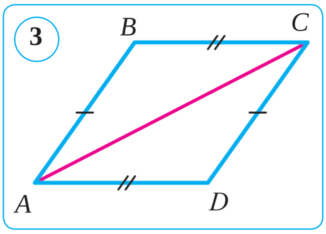


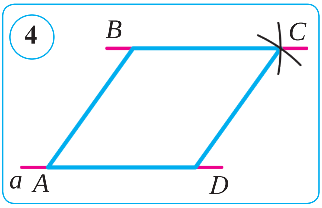
Шешуі. *BEDF* төртбұрышының *BE* және *DF* қарама-қарсы қабырғалары тең, және параллель. Сондықтан параллелограмның 1-белгісіне орай, BEDF төртбұрышы — параллелограмм. ***Жауабы:*** Иә, болады.

2-теорема.

(2-белгі). **Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысса және қиылысу нүктесінде қақ бөлінетін болса, онда бұл төртбұрыш — параллелограмм.**

Дәлелдеу. *ABCD* төртбұрышында *AB* = *CD* және *BC* = *DA болсын.*





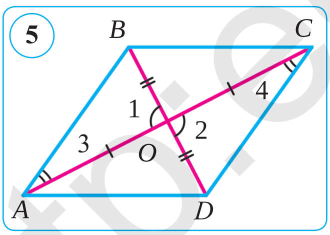
Оның AC диагоналін жүргізейік (3-сурет). Бұның нәтижесінде ABC және CDA үшбұрыштары пайда болады. Үшбұрыштар теңдігінің 3-белгісіне орай, бұл үшбұрыштар өзара тең (AC қабырғасы – ортақ, ал теореманың шарты бойынша $AB = CD$ және $BC = DA$). Үшбұрыштар теңдігінен CAB және ACD бұрыштарының теңдігі келіп шығады. Ал бұл бұрыштар AB және DC түзулері мен AC қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болып табылады. Түзулердің параллельдік белгілеріне орай, $AB \parallel CD$. Сөйтіп, $ABCD$ төртбұрышта AB мен CD қабырғалары тең және параллель, демек, параллелограмның 1-белгісі бойынша, $ABCD$ төртбұрыш – параллелограмм. Теорема дәлелденді.

2-есеп. Берілген нүктеден өтетін және берілген түзуге параллель түзу салыңдар.

Шешуі. a – түзу, B – оның, бойында жатпайтын нүкте делік. A түзуінің бойынан A және D нүктелерін белгілейік (34-сурет). B, D нүктелерінен радиустары сәйкес түрде AD және AB болатын шеңберлер сызамыз. Олардың қиылысу нүктесін C деп белгілейміз. Сосын BC түзуін жүргіземіз, ол іздестіріліп жатқан түзу болып табылады. Расында да $ABCD$ төртбұрышының қарама-қарсы қабырғалары тең болып шықты. Параллелограмның 3-белгісіне орай $ABCD$ төртбұрышы – параллелограмм. Сол себепті $BC \parallel AD$.

3-теорема.

(3-белгі). Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінсе, онда бұл төртбұрыш – параллелограмм.



Дәлелдеу. O–$ABCD$ төртбұрышының диагональдары қиылысатын нүкте болсын. Шартқа орай, $AO = OC$ және $BO = DO$ (5-сурет). Енді AOB және COD үшбұрыштарын қарастырамыз. Бұл үшбұрыштарда: $\angle 1 = \angle 2$ (вертикаль бұрыштар), $AO = CO$ және $BO = DO$ (шартқа орай). Демек, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісіне орай AOB және COD үшбұрыштары тең. Бұл үшбұрыштар теңдігінен олардың сәйкес қабырғалары мен бұрыштарының теңдігі келіп шығады: $AB = \angle 3 = \angle 4$. Түзулердің параллельдік белгілеріне орай, $AB \parallel CD$, өйткені 3- және 4-бұрыштар AB және CD түзулері мен AC қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болып табылады. $ABCD$ төртбұрышында $AB = CD$ және $AB \parallel CD$ болғандықтан, параллелограмның 1-белгісіне орай, $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болады. Теорема дәлелденді.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдей аласың ба? Параллелограмның 2- және 3-белгілерін бейнелеңдер.

2. (*Белсенділікті арттыратын есеп*). 1) Екі тең және параллель кесінділер берілген. Олардың соңы өзара қиылыспайтын кесінділермен тұтастырылған. Түзілген төртбұрыш параллелограмм бола ма?

3. $ABCD$ төртбұрышындағы AB және CD қабырғалары параллель, $AB = CD = 11$ см, $AD = 5$ см. Осы төртбұрыштың ауданын табыңдар.

4. Егер: 1) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, $\angle 3 = \angle 115°$ болса (6-сурет), ол жағдайда $ABCD$ төртбұрыш параллелограмм бола ма?

Шешуі. 1) $ABCD$ төртбұрышта екі AB мен CD қабырғалары параллель, себебі $\angle 1 + \angle 3 = 70° + 110° = 180°$. Бұл бұрыштар — AB мен DC түзулер, сондай-ақ AD қиюшы шығарған ішкі бір жақты бұрыштар. $AB \parallel DC$ болғандықтан, $\angle 1 = \angle 4$ болады (сәйкес бұрыштар). $ABCD$ төртбұрыштың қалған екі AD мен BC қабырғалары параллель емес, себебі ішкі айқыш 1- және 2- бұрыштар тең емес ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Демек, $ABCD$ төртбұрыш параллелограмм болмайды. 2) Дәл жоғарыдағыға ұқсас талқылау жасап, шешуді өздеріңе тапсырамыз.

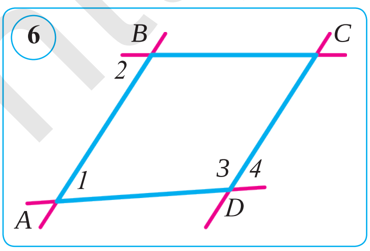
5. $ABCD$ параллелограмының BC қабырғасының ортасы E нүктесінен, AD қабырғасының ортасы F нүктесінен тұрады. $BEDF$ төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер (7-сурет).

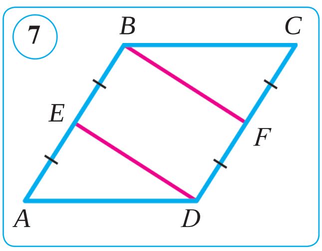
6. $ABCD$ төртбұрышында: $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (8-сурет). $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

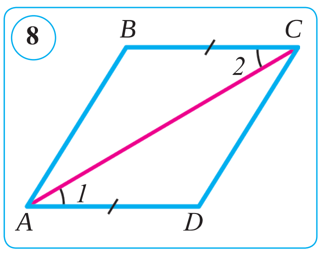
7. $ABCD$ төртбұрышында AB және CD қабырғалары параллель, $AB = CD = 9$ см, $AD = 4$ см. Осы төртбұрыштың ауданын табыңдар.

8. $ABCD$ төртбұрышында: $AB = CD$, $AD = BC$, A бұрышы В бұрышынан үш есе үлкен. Осы төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

9. Параллелограмм бұрыштарының біреуінің биссектрисасы өзі қиып өтетін қабырғаны 4 см-лік және 5 см-лік кесінділерге бөледі. Параллелограмның ауданын табыңдар.

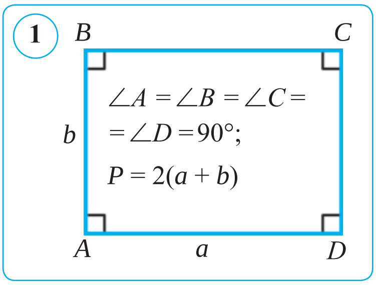






4. ТІК ТӨРТБҰРЫШ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Анықтама. *Барлық бұрыштары тік болатын параллелограмм* ***тік төртбұрыш*** *деп аталады* (1-сурет).

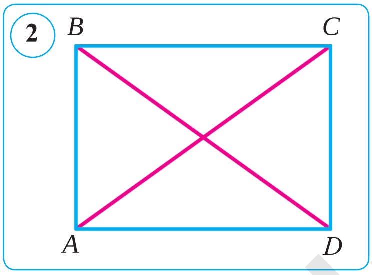


Тік төртбұрыш параллелограмның дербес жағдайы болғандықтан, ол параллелограмның барлық қасиеттеріне ие болады: тік төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең; диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді: тік төртбұрыштың диагоналі оны екі тең тік бұрышты үшбұрышқа бөледі.

Тік төртбұрыштың өзіне тән қасиеттерін қарастырамыз.

Теорема.

Тік төртбұрыштың диагональдары өзара тең.



Дәлелдеу. $ABCD$ тік төртбұрышында AC және BD диагональдар берілген болсын. $AC = BD$ болатынын дәлелдейміз (2-сурет).

Тік бұрышты ACD және DBA үшбұрыштардың екі катеті (AD — катеті ортақ, $AB = CD$) бойынша тең. Бұдан бұл үшбұрыштар гипотенузаларының теңдігі, яғни $AC = BD$ келіп шығады. Бұл теоремадан төмендегі кері теорема туындайды (**тік төртбұрыш белгісі**).

Кері теорема.

Егер параллелограмның диагональдары тең болса, онда ол тік төртбұрыш болып табылады.

Дәлелдеу. $ABCD$ параллелограмындағы AC және BD диагональдары тең, делік (2- суретке қараңдар). ABD және DCA үшбұрыштары үш қабырғалары бойынша тең, ($AB = DC$, $BD = CA$, AD – ортақ қабырға). Бұдан $\angle A = \angle D$ келіп шығады. Параллелограмның, қарама-қарсы бұрыштары тең болады, сондықтан $\angle A = \angle C$ және $\angle B = \angle D$. Сонымен $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм — дөңес төртбұрыш, сол себепті: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Бұдан $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, яғни $ABCD$ параллелограмының, тік көпбұрыш екені келіп шығады.

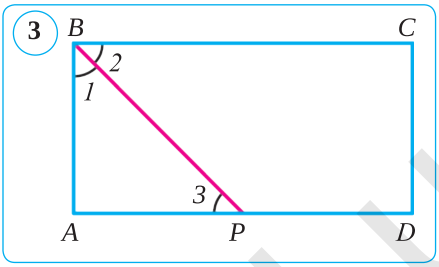
Теорема дәлелденді.

1-есеп. $ABCD$ тік төртбұрышының периметрі 24 см-ге, ал оның BD диагоналі 9 см-ге тең. ABD үшбұрышының периметрін табыңдар.

Шешуі. $AB + AD = P_{ABCD} : 2 = 24 : 2 = 12$ (см) — сыбайлас бұрыштардың қосындысы (2-суретке қараңдар).

$P_{ABD} = AB + AD + BD = 12 + 9 = 21$ (см). ***Жауабы:*** $P_{ABD} = 21$ см.

2-есеп. $ABCD$ тік төртбұрышындағы B бұрышының биссектрисасы AD қабырғасын P нүктеде қияды, сонымен қатар оны $AP = 17$ см және $PD = 21$ см-лік кесінділерге бөледі (3-сурет). Сол тік төртбұрыштың периметрін тап.



Шешуі. 1) $ABCD$ — тік төртбұрыш болғандықтан, $AD \parallel BC$ және сол үшін $\angle 2 = \angle 3$. Бірақ, шарт бойынша $\angle 2 = \angle 1$, демек, $\angle 1 = \angle 3$, сондай-ақ ΔABP — табаны BP болған тең бүйірлі үшбұрыш. Сөйтіп, $AB = AP = 17$ см.

2) $AD = AP + PD = 17 + 21 = 38$ см;

$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (17 + 38) = 2 \cdot 55 = 110$ см.

Жауабы: $P_{ABCD} = 110$ см.

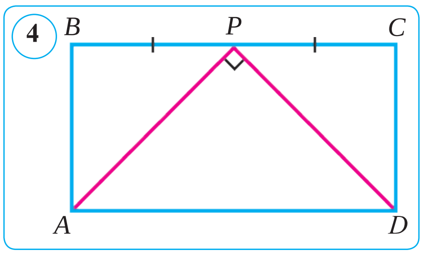
Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Қандай параллелограмм тік төртбұрыш деп аталады?
2) Тік төртбұрыштың қандай қасиеттері бар?
3) Тік төртбұрыштың белгілерін айт.

2. $ABCD$ тік төртбұрышында: $AB = 9$ см, $BC = 7$ см.
1) C нүктесінен AD қабырғасына дейінгі арақашықтықты табыңдар.
2) AB және CD түзулері ортасындағы қашықтықты табыңдар.

3. Тік төртбұрыштың ауданы 24 см. Тік төртбұрыштың кез келген ішкі нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі арақашықтықтар қосындысын табыңдар.

4. $ABCD$ тік төртбұрышының ауданы 24 см-ге тең. P нүктесі – BC қабырғасының ортасы, $\angle APD = 90°$ (4-сурет). Тік төртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.



5. Егер төртбұрыштың диагональдары тең болса және олар қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінсе, бұл төртбұрыш тік төртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

6. Параллелограмның қабырғалары 4 см және 7 см. Бұл параллелограмның диагональдары: 1) 12 см және 5 см; 2) 10 см және 3 см болуы мүмкін бе?

7. Тік төртбұрыштың ауданы 42 см, ал қабырғаларының бірі екінші қабырғасынан екі есе үлкен. Тік төртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

5–6. РОМБ ПЕН КВАДРАТТЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Ромб және оның қасиеттері.

Анықтама. *Қабырғалары тең параллелограмм* ***ромб*** *деп аталады (1-сурет).*

Ромб пішінді параллелограмның жалпы қасиеттерінен тыс төмендегі қасиеттері де бар:

Теорема.

Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр және ромбының бұрыштарын тең екіге бөледі.

Дәлелдеу. $ABCD$ ромб берілген болсын (2- сурет). O – оның диагональдарын қиятын нүкте. $AC\perp BD$ және әрбір диагональ ромбының сәйкес бұрыштарын тең екіге бөлетіндігін (мысалы, $\angle BAC=\angle DAC$) дәлелдейміз.

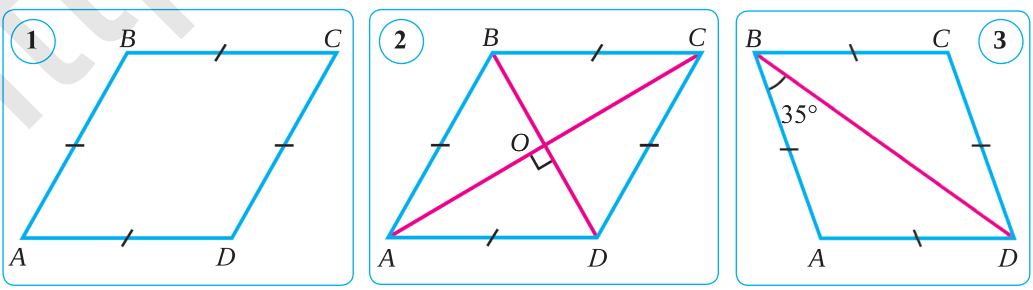
Ромбының анықтамасы бойынша $AB=AD$, сондықтан BAD үшбұрышы тең бүйірлі. Ромб параллелограмм болғандықтан, оның диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді, яғни $BO=OD$. Демек, AO — тең бүйірлі BAD үшбұрыштың медианасы. Тең бүйірлі үшбұрыштың қасиеті бойынша оның табанына жүргізілген медиана әрі биссектриса, әрі биіктік болады. Сондықтан, $AC\perp BD$ және $\angle BAC=\angle DAC$. Осыны дәлелдеу талап етілген еді.

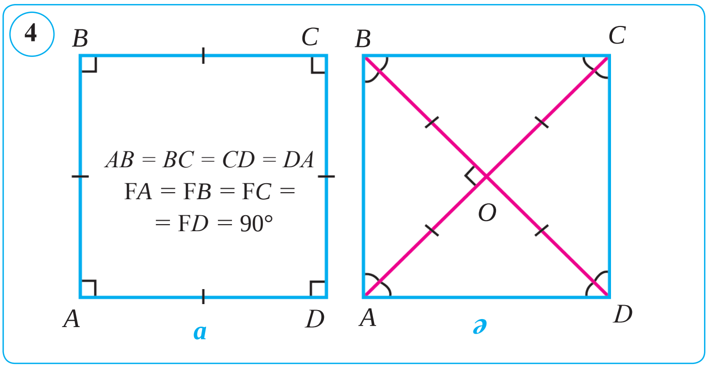
1-есеп. $ABCD$ ромбының BD диагоналі қабырғасымен 35°-тық бұрыш жасайды. Оның бұрыштарын табыңдар.

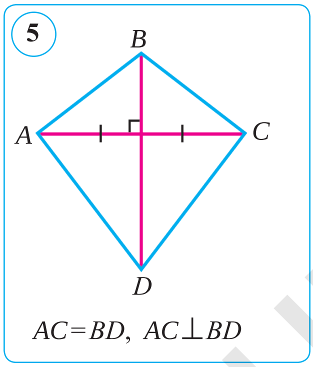
Шешуі. $\angle ABD = 35°$ делік (3-сурет). Ондай жағдайда $\angle CBD = 35°$ (ромбтың қасиеттеріне орай) болады. $\angle ABC = 2\ \angle ABD = 2\cdot 35° = 70°$, $\angle ADC = \angle ABC = 70°$ (параллелограмның 2-қасиетіне орай), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (параллелограмның, 1-қасиетіне орай). Демек, $\angle DAB = 180° - 70° = 110°$, $\angle BCD = \angle DAB = 110°$ (параллелограмның, 2-қасиетіне орай). ***Жауабы:*** 70°, 110°, 70°, 110° .

2-есеп. Әр түрлі ромбылардың, периметрлері тең болуы мүмкін бе?

Шешуі. Периметрлері тең ромбылар бір-бірінен бұрыштарымен ерекшеленіп тұрады. Егер ромбының сүйір бұрыштары: 1) 40° -қа тең болса, онда өзге бұрыштары да сәйкесінше 140°, 40°, 140° болады; 2) 15° -қа тең







болса, онда өзге бұрыштары да сәйкесінше 165°, 15°, 165° болады т.с.с. Сондай-ақ сүйір бұрыштың орнына басқа түрлі доғал бұрыштарды да алуға болады. ***Жауабы:*** Иә, мүмкін.

2. Квадрат және оның қасиеттері.

Анықтама. *Барлық қабырғалары тең тік төртбұрыш* ***квадрат*** *деп аталады.*

Квадрат пен ромбының анықтамаларынан квадрат бұрыштары тік болған ромбыдан тұратындығы келіп шығады (4-*а* сурет). Квадрат – әрі параллелограмм, әрі тік төртбұрыш, әрі ромб болғандықтан, бұлардың барлық қасиеттеріне ие. Квадраттың негізгі қасиеттерін келтіреміз:

1. Квадраттың барлық бұрыштары тік.

2. Квадраттың диагональдары өзара тең.

3. Квадраттың диагональдары өзара перпендикуляр және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді, сонымен қатар квадраттың бұрыштарын тең екіге бөледі (4-*б* сурет).

Осы қасиеттерді өз бетіңмен дәлелде.

3-есеп. Егер ромбтың диагональдары тең болса, онда бұндай ромбтың квадрат екенін дәлелдеңдер.

Дәлелдеу. Ромб параллелограмм болғандықтан, тік төртбұрыштың белгілеріне орай диагональдары тең болған ромбтың тік төртбұрыш екені келіп шығады. Демек, ол — квадрат.

4-есеп. Төртбұрыштың диагональдары перпендикуляр және өзара бір-бірімен тең. Бұл төртбұрыш квадрат бола ма?

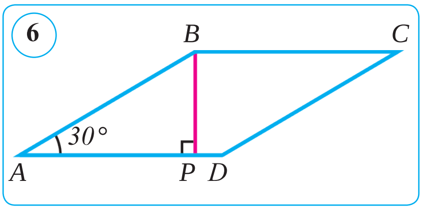
Шешуі: Есептің шартын қанағаттандыратын төртбұрыштардың біреуі 5-суретте бейнеленген. Онда диагональдардың біреуі тең екіге бөлінген. Әйтсе де бұл квадраттың 2-қасиетін және 3-қасиетінде келтірілген шарттың бір бөлігін, яғни өзара перпендикулярлық шартын ғана қанағаттандырады. Келтіріліп отырған жағдайда тек диагональдардың біреуі ғана тең екіге бөлінген, сол себепті бұл төртбұрыш квадрат бола алмайды. Белгілі бір жағдайда төртбұрыштың екі диагоналі де қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінуі мүмкін. Тек сол жағдайда ғана төртбұрыш квадрат бола алады. ***Жауабы:*** төртбұрыш квадрат болуы шарт емес.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Ромб дегеніміз не? Ромбтың қасиеттерін айт.
2) Квадрат деп нені айтады? Оның қасиеттерін айт.
3) Квадратқа: 1) «параллелограмм»; 2) «ромб; 3) «тік төртбұрыш» түсінігі бойынша анықтама бер.

2. Квадраттың қабырғасы 20 см-ге тең. Диагональдарының қиылысу нүктесінен қабырғаларының біреуіне дейінгі қашықтықты тап.

3. *ABCD* ромбысының қабырғасы 24 см-ге, ал *A* бұрышы 30° -қа тең. *D* төбесінен оған қарама-қарсы *AD* қабырғасына дейінгі қашықтықты табыңдар (6-сурет). Бас орындарға сәйкес сандарды қойыңдар.



Шешуі: *B* нүктесінен *AD* түзуіне дейінгі қашықтық *B* нүктесінен сол түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығына, яғни BP кесіндісінің ұзындығына тең. *ABP* үшбұрышын қарастырайық. Онда $\angle APB = ...°$, $\angle A = ...°$, $AB = ...$. Ондай жағдайда $BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ...$ (см) (...° -тық бұрыштың қарсысында жатқан катеттің қасиетіне орай). ***Жауабы:*** $BP = ...$ см.

4. 1) (*Практикалық тапсырма*). 1) Екі тең үшбұрыштан; 2) Төрт тең үшбұрыштан қалайша ромб және квадрат жасауға болады? Барлық ықтимал шешімдерді көрсетіңдер.

5. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың ішіне квадрат салынған. Оның екі төбесі гипотенузада, ал қалған екеуі катеттерде жатады. Егер гипотенузаның 21 см-ге тең екені белгілі болса, квадраттың қабырғаларын табыңдар.

6. Ромбының диагональдары мен қабырғалары арасында пайда болған бұрыштардың қатынасы 2:7 қатынасындай. Ромбының бұрыштарын тап.

7. Квадрат қабырғаларының ортасы бірінен соң бірі қиылысқан түзу кесінділерімен тұтастырылса, қандай пішін пайда болады?

8. Ромбының барлық биіктіктері өзара тең екенін дәлелде.

9. Төртбұрыштың қабырғалары 2 : 4 : 5 : 7 қатынастарында, ал ауданы 108 см-ге тең. Осы төртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

10. Бұрыштарының біреуі 60°, кіші диагоналінің ұзындығы 16 см болатын ромбының периметрін тап.

11. Ромбының: диагональдары ортасында түзілген бұрыштардың қатынасы 4:5-ке тең. Ромбының бұрыштарын тап.

12. Тік төртбұрыштың ұзындығы 32 см, ал ені 28 см-ге тең. Осы тік төртбұрыштың периметріне тең квадраттың қабырғасын тап.

13. Төртбұрыштың ең кіші қабырғасы 5 см-ге тең, қалған қабырғаларының әрқайсысы алдыңғысына сәйкес түрде 2 см-ге үлкен. Осы төртбұрыштың периметрін табыңдар.

7–8. ТРАПЕЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Трапецияның анықтамалары. Бізге мәлім болғанындай, кез келген параллелограмда екі жұп параллель қабырғалар болады. Енді біз тек бір жұп параллель қабырғалы төртбұрыштарды ғана қарастырамыз.

1-анықтама. *Екі қабырғасы параллель, өзге екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш* ***трапеция*** *деп аталады.*

Трапецияның параллель қабырғалары – оның *табандары*, ал параллель емес қабырғалары – *бүйірлері* деп аталады. 1-суреттегі *ABCD* трапециясында *AD* және *BC* қабырғалары – *табандар*, ал *AB* және *CD* қабырғалары – *бүйірлер* болып саналады.

2-анықтама. *Қабырғаларының біреуі табанына перпендикуляр болған трапеция* ***тік бұрышты трапеция*** *деп аталады* (2-сурет).

3-анықтама. *Бүйір қабырғалары тең болған трапеция* ***тең бүйірлі трапеция*** *деп аталады.*

3-суретте тең бүйірлі *ABCD* трапециясы бейнеленген: $AB = CD$.

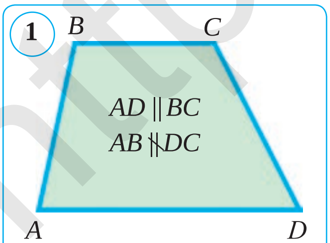
2. Трапецияның белгілері. Енді *ABCD* төртбұрышының трапеция болуы үшін қандай шарттарды қанағаттандыратынын қарастырайық.

Теорема

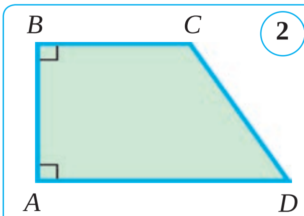
Егер төртбұрыштың бір жағына ауытқыған екі бұрыштың қосындысы 180°-қа тең және оған сыбайлас қабырғаларға жанасқан екі бұрышының қосындысы 180°-тан өзгешелеу болса, бұндай төртбұрыш *трапеция* болады.

Дәлелдеу. *ABCD* төртбұрышында: $\angle A+\angle B=180°$, $\angle A+\angle D \neq 180°$ болсын. Енді *ABCD* төртбұрышының трапеция екенін дәлелдейміз.

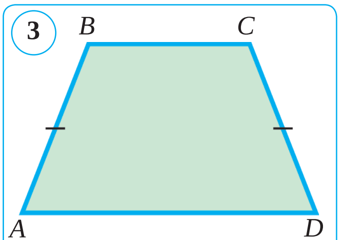
Біріншіден, бір жұп қарама-қарсы қабырғалардың бір-біріне параллель екенін көрсетеміз. *AB*, *BC* (l_1) және AD (l_2) түзулерін жүргіземіз (4-сурет). Шартқа орай $\angle A+\angle B=180°$, олай болса, *AD* және *BC* түзулері параллельдік белгілері бойынша өзара параллель болады. (Екі *a* және *б* түзулерін үшінші *c* түзуі қиып өткенде, ішкі бір төбелі бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болса, бұл жағдайда *a* және *б* түзулері параллель болады.)

1


AD мен *BC*– табандар, *AB* мен *DC* – бүйір қабырғалар

2


$\angle A=90°$, тік бұрышты трапеция

3


$AB=DC$, тең бүйірлі трапеция

Екіншіден, $ABCD$ төрбұрышының қалған екі қабырғасы параллель еместігін көрсетеміз. Шартқа орай, $\angle A + \angle D \neq 180°$, ондай жағдайда AB және DC кесінділері параллель бола алмайды (*Эвклидтің параллель түзулер туралы 5-аксиомасына орай, яғни түзулер параллельдігінің тиісті шарты орындалады*). Демек, $ABCD$ төртбұрышы трапеция болып шықты. Біз осыны дәлелдеуге тиіс едік.

Бұл теоремадан төмендегі салдар туындайды.

Салдар. Трапецияның бір бұрышы 90º болса, оның тағы бір 90º-тық бұрышы болуға тиіс.

4-анықтама. *Трапецияның табандарының бірінде жатқан нүктеден екінші табанды қамтитын түзуге түсірілген перпендикуляр* ***трапецияның биіктігі*** *деп аталады.*

Трапецияның табандарына перпендикуляр болған кез келген кесіндіні оның биіктігі ретінде алуға болады. Кез келген трапецияда қалағанымызша биіктік жүргізуімізге болады (5-сурет).

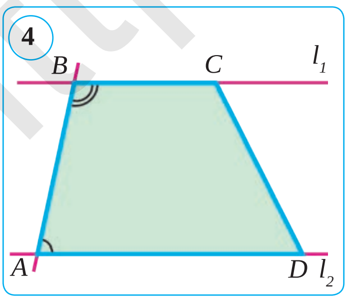
3. Тең бүйірлі трапецияның қасиеті.

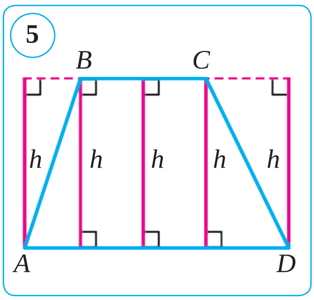
Тең бүйірлі $ABCD$ трапециясын қарастырайық. Бұнда $AD = a$ – үлкен табаны, $BC = b$ – кіші табаны болсын. Кіші табанның B төбесінен BP биіктік жүргізейік (6-сурет). Биіктіктің P табаны AD табанды AP және PD кесінділерге бөледі.

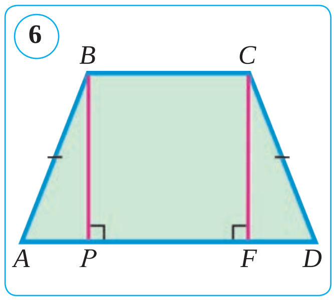
Теорема.

Тең бүйірлі трапецияның доғал бұрышы төбесінен жүргізілген биіктік үлкен табанын ұзындықтары табандары айырмасының жартысына және табандары қосындысының жартысына тең бөліктерге бөледі, яғни: $AP = \dfrac{a-b}{2}$, $PD = \dfrac{a+b}{2}$.

Дәлелдеу. C төбесінен $CF \perp AD$-ны жүргіземіз. Тікбұрышты ABP және DCF үшбұрыштар тең: $AB = DC$ — шарт бойынша, ал $BP = CF$ болса BC мен AD параллель түзулер арасындағы қашықтық болғандықтан. Үшбұрыштар теңдігінен $AP = FD$ келіп шығады. Түзуге перпендикуляр екі түзу өзара параллель болады: $BP \| CF$, өйткені, $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Параллель түзулердің арасындағы қашықтық тең болғандықтан, $BC = PF = b$. Демек,







$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2},\ PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Сөйтіп, $AP = \frac{a-b}{2}$ және $PD = \frac{a+b}{2}$ екен. Теорема дәлелденді.

1-есеп. Тең бүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.

Шешуі. $ABCD$ – тең бүйірлі трапеция, яғни $AB = DC$ және $AD \parallel BC$. Тең бүйірлі трапецияның AD және BC табандарындағы бұрыштардың теңдігін дәлелдейміз ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$).

Трапецияның доғал бұрыштарының (B мен C) төбелерінен табанына перпендикуляр түзу жүргіземіз: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (6-суретке қараңдар). Тік бұрышты ABP және DCF үшбұрыштары (гипотенузасы мен катеті бойынша) тең: $AB = DC$ – шартына орай, ал $BP = CF$ болса BC және AD параллель түзулері арасындағы қашықтық болғандығы үшін үшбұрыштар теңдігінен $\angle A = \angle D$ келіп шығады.

A және B, C және D бұрыштары AD және BC параллель түзулерін сәйкесінше AB және CD түзулерінің қиып өтуінен пайда болған ішкі бір қабырғалы бұрыштар болып табылады. Сондықтан $\angle A + \angle B = 180°$ және $\angle C + \angle D = 180°$. Бұдан $\angle B = \angle C$ келіп шығады.

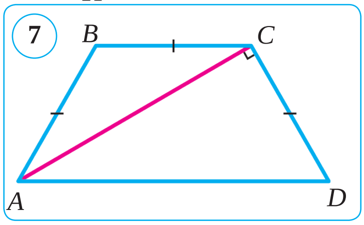
Сөйтіп, тең бүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштары тең екен: $\angle A = \angle D$ және $\angle B = \angle C$. Осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

2-есеп. Тең бүйірлі трапецияның кіші табаны бүйір қабырғасына тең, ал диагоналі бүйір қабырғасына перпендикуляр. Трапецияның бұрыштарын тап.

Шешуі. Тең бүйірлі $ABCD$ трапециясы берілген. Онда $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ болсын (7-сурет). Есептің шартына орай, AC – тең бүйірлі ABC үшбұрышының табаны. Демек, $\angle BCA = \angle CAB$. Бірақ $\angle A = \angle D$, өйткені тең бүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштары тең болады, ал CAD және BCA бұрыштары $AD \parallel BC$ мен AC қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болғандықтан өзара тең, яғни $\angle CAD = \angle BCA$.

Демек, $\angle A = 2\angle CAD$. Шартқа орай, ACD – тік бұрышты, сондықтан $\angle CAD + \angle D = 90°$, бірақ $\angle D = \angle A$, ондай жағдайда $90° = 3\angle CAD$, демек, $\angle CAD = 30°$ және бұл жағдайда $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

7

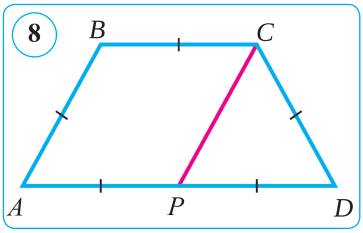


Жауабы: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

3-есеп. Тең бүйірлі трапецияның қабырғаларының қатынасы 1 : 1 : 1 : 2 сияқты болсын. Осы трапецияның бұрыштарын табыңдар.

Шешуі. $ABCD$ трапециясында $AB = BC = CD = 1$ және $AD = 2$ болсын. AD қабырғасының ортасын P-мен белгілейміз (8-сурет). $ABCP$ төртбұрышының AP және BC қабырғалары өзара тең және параллель.

8



Демек, параллелограмның белгілеріне орай, бұл төртбұрыш параллелограмм болады. Сол себепті $PC=AB=1$. PCD үшбұрышының барлық қабырғалары 1-ге тең, сондықтан $\angle PDC=60°$. Сонымен $ABCD$ трапециясындағы $\angle A=\angle D=60°$ және $\angle B=\angle C=120°$.

Жауабы: $\angle A=\angle D=60°$, $\angle B=\angle C=120°$.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Қандай төртбұрыш трапеция деп аталады?
2) Қандай трапеция: а) тең бүйірлі; б) тікбұрышты трапеция деп аталады?

2. Трапецияның төбесінен өтпеген биіктігі оны екі тік трапецияға бөледі. Соны сызып көрсет.

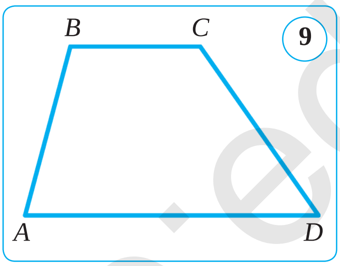
3. Тік бұрышты трапецияның бүйір қабырғаларының ара қатынасы 1 : 2. Трапецияның ең үлкен бұрышын табыңдар.

4. Трапецияның табандары 12 см және 20 см, ал бүйір қабырғалары 4 см және 11 см. Кіші табанының төбесінен кіші қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Осы параллель түзу бөлген үшбұрыштың периметрін тап.

5. AD және BC табандары бар $ABCD$ трапецияның B және С бұрыштарын тап, мұнда $\angle A=75°$ және $\angle D=55°$ (9-сурет). Бос орындарды толтыр.

Шешуі. A мен B, C мен D бұрыштар AD мен BC параллель түзулерді ... және ... қиюшылармен қиғанда пайда болған..., сондықтан $\angle A+\angle B=...°$ және $\angle C+\angle D=...°$. Шарт бойынша $\angle A=75°$ және $\angle D=55°$, ол жағдайда $\angle B = =...°-\angle A=...°-...° =..°$ және $\angle C=...°-\angle D=...°--...° =...°$.

Жауабы. $\angle B=...°$, $\angle C=...°$.



6. Тең бүйірлі трапецияның сүйір бұрыштарының бірі 60°-қа, бүйір қабырғасы 16 см-ге тең. Егер табандарының қосындысы 38 см-ге тең болса, трапецияның табандарын тап.

7. Тең бүйірлі трапецияның доғал бұрышы төбесінен жүргізілген биіктік үлкен табанын 3 см-лік және 17 см-лік кесінділерге бөледі. Осы трапецияның табандарын тап.

8. Тең бүйірлі трапецияның диагональдары тең екенін дәлелде.

9. Трапецияда: 1) үш тік бұрыштың; 2) үш сүйір бұрыштың; 3) үш бұрыштың қосындысы 180°-қа тең бола ала ма? Жауаптарыңды негіздеңдер.

10. Тік бұрышты трапецияның ең үлкен және ең кіші бұрыштарының қатынасы 5 : 4 -ке тең. Осы трапецияның бұрыштарын табыңдар.

11. $ABCD$ трапециясының кіші табаны 6 см-ге, ABE үшбұрышының $(BE||CD)$ периметрі 36 см-ге тең. Осы трапецияның периметрін табыңдар.

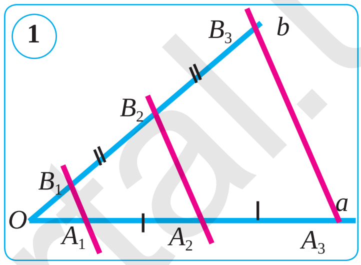
12. Тең бүйірлі трапецияның диагоналі доғал бұрышын тең екіге бөледі. Трапецияның табандары 10 см және 20 см. Оның периметрін табыңдар.

§ 2. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

9. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСЫ

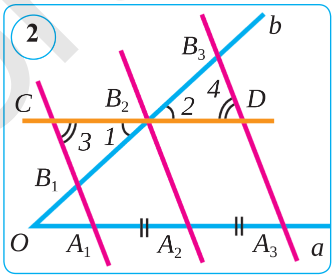
Теорема.

Егер бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер оның бір қабырғасынан тең кесінділер қиып түсетін болса, онда ол түзулер бұрыштың екінші қабырғасынан да тең кесінділер қиып түседі.



Дәлелдеу. O бұрыштың төбесінен бастап қабырғада (a сәуледе) өзара тең A_1A_2, және A_2A_3 кесінділерге бөлінген және олардың ұштары (A_1, A_2, A_3,) арқылы екінші қабырғаны (b сәулені) B_1, B_2, B_3, ... нүктелерде қиюшы A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 параллель түзулер жүргізілген болсын (1- сурет).

Енді пайда болған B_1B_2, B_2B_3 кесінділердің өзара теңдігін, егер A_1A_2 = A_2A_3 болса, B_1B_2= B_2B_3 болатынын дәлелдейміз.



Бұл үшін B_2 нүктесінен a сәулеге параллель CD түзуін жүргіземіз (2-сурет). Бұл түзу A_1B_1 және A_3B_3 түзулерімен сәйкес түрде C және D нүктелерінде қиылыссын. $A_1CB_2A_2$ және $A_2B_2DA_3$ төртбұрыштары – параллелограмм (анықтамасына орай), өйткені олардың қарама-қарсы қабырғалары, шартына және жасалуына орай, параллель болып табылады. Сондықтан $A_1A_2=A_2A_3$ және параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары болғаны себепті, $A_1A_2=CB_2$ және $A_2A_3=B_2D$-лардан $CB_2=B_2D$-ға ие боламыз.

B_1B_2C және B_3B_2D үшбұрыштарында $CB_2=B_2D$ (дәлелдеуге орай), сондай-ақ $\angle 1=\angle 2$ (вертикаль бұрыштар), $\angle 3=\angle 4$ (A_1B_1 және A_3B_3 параллель түзулер), сонымен қатар CD қиюшы кесіндісінен түзілген ішкі айқыш бұрыштар болғандығы үшін.

Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісіне орай, бұл үшбұрыштар өзара тең: $\angle B_1B_2C=\angle B_3B_2D$. Бұдан $B_1B_2=B_2B_3$ келіп шығады.

Сонымен, егер $A_1A_2=A_2A_3$ болса, онда $B_1B_2=B_2B_3$ болатыны дәлелденді. Бізден осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

Ескерту! *Фалес теоремасы шартында бұрыштың қабырғасының орнына кез келген екі түзуді алуға болады, сондықтан да теореманың қорытындысы сол күйінде қала береді.*

Салдар. Берілген екі түзуді қиып өткен және бір түзуден тең кесінділер қиып түсіретін параллель түзулер екінші түзуден де тең кесінділер қиып түседі.

1-есеп. *(Кесіндіні тең бөлікке бөлу.)* Берілген AB кесіндісін тең n бөлікке бөліңдер.

Шешуі. AB кесінді берілген. Оны тең n бөлікке бөлуді көрсетеміз. A нүктеден AB түзуде жатпайтын AC сәулені жүргіземіз және онда A нүктеден бастап n тең AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесінділерді, яғни берілген AB кесіндіні есептің шартына қарай неше бөлікке бөлу қажет болса, сонша тең кесінді саламыз (3- сурет, $n = 6$). Содан соң A_nB түзуді жүргіземіз (A_n нүкте – соңғы кесіндінің соңы) және A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} нүктелер арқылы A_nB түзуге параллель түзулер жүргіземіз. Бұл түзулер AB кесіндіні B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} нүктелерінде қияды және оны Фалес теоремасы бойынша тең n бөлікке бөледі:

$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B.$$

Демек, кез келген кесіндіні қалағаныңша тең бөліктерге бөлуге болады.

2-есеп. ABC үшбұрышының BC қабырғасы тең төрт кесіндіге бөлінген және бөліну нүктелері арқылы ұзындығы 18 см-ге тең AB қабырғасына параллель түзулер жүргізілген. Осы түзулердің үшбұрыш ішінде қалған кесінділерінің ұзындығын табыңдар.

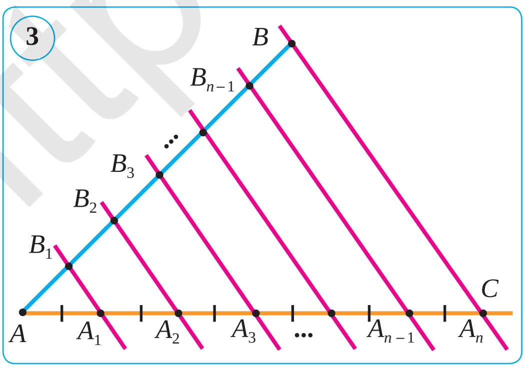
Берілгені: $\angle ABC$-да:
$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C$, $AB = 18$ см; $B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB$.
Табу керек: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (4-сурет).
Шешуі. 1) $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$ өткіземіз.
2) Фалес теоремасына орай:

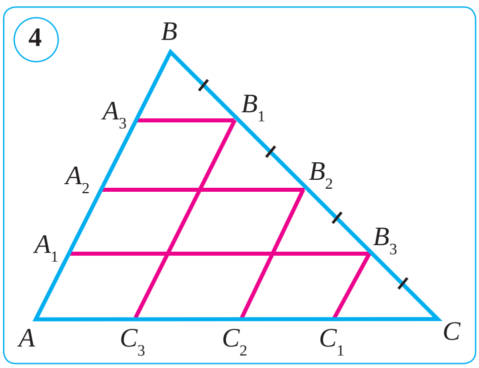
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB : 4 = 18 : 4 = 4{,}5 \text{ (см)}.$$

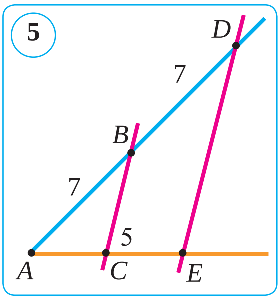
2) Анықтамаға орай $AA_1B_3C_1$ төртбұрышы – параллелограмм , өйткені $AA_1 \parallel C_1B_3$ (шартына орай) және $A_1B_3 \parallel AC_1$ (жасалуына орай).
Демек, $AA_1 = C_1B_3 = 4{,}5$ (см).
3) Анықтамаға орай, $AA_2B_2C_2$ төртбұрышы – параллелограмм, өйткені $AA_2 \parallel C_2B_2$ (шартына орай) және $A_2B_2 \parallel AC_2$ (жасалуына орай). Демек,

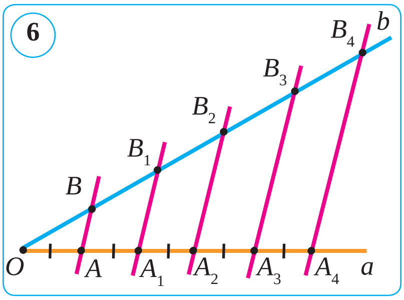
$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4{,}5 = 9 \text{ (см)}.$$

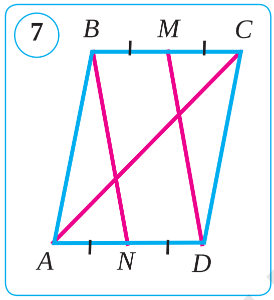
4) Анықтамасына орай, $AA_3B_1C_3$ төртбұрышы – параллелограмм, өйт-











кені $AA_3 \| C_3B_1$ (шартына орай) және $A_3B_1 \| AC_3$ (жасалуына орай). Демек, $AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$ (см).

Жауабы: $C_1B_3 = 4{,}5$ см, $C_2B_2 = 9$ см, $C_3B_1 = 13{,}5$ см.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Фалес теоремасын айтыңдар.
2) Фалес теоремасы тек бұрыштар үшін ғана орынды ма?
3) Берілген кесінді қалайша n бөлікке тең бөлінеді?

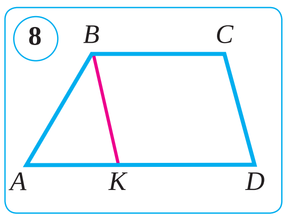
2. (*Практикалық тапсырма*). Циркуль мен сызғышты пайдалана отырып, берілген AB кесіндіні: 1) екі; 2) үш; 3) алты; 4) жеті тең бөлікке бөліңдер.

3. *Берілген:* $\angle A$, $AB = BD = 7$ см, $BC \| DE$, $CE = 5$ см (5-сурет).
Табу керек: AC.

4. *Берілген:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 = 8$ см (6-сурет).
Табу керек: OB_1, OB_2, OB_3.

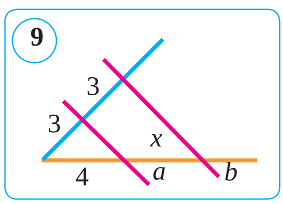
5. *ABCD* папаллелограмында *M* нүктесі – *BC* қабырғаның, *N* нүктесі *AD* қабырғаның ортасы. *BN* және *MD* түзулері параллелограмның *AC* диагоналін теңдей үш бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер (7-сурет).

6. *ABCD* трапециясында *B* төбесі арқылы *CD* қабырғасына параллель *BK* түзуі жүргізілген (8-сурет).
1) *KBCD* – параллелограмм екенін дәлелдеңдер.
2) Егер $BC = 4$ см, $P_{ABK} = 11$ см болса, онда трапецияның периметрін табыңдар.



7. Циркуль мен сызғышты пайдаланып, берілген *AB* кесіндісін: 1) төрт; 2) бес тең бөліктерге бөліңдер.

8. $a \| b$ екені белгілі. 9-суретте берілген мәліметтерді пайдаланып, *x*-ті табыңдар.



9. *Берілген:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18$ см
(6-суретке қараңдар).
Табу керек: OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. ҮШБҰРЫШТЫҢ ОРТА СЫЗЫҒЫНЫҢ ҚАСИЕТІ. ТРАПЕЦИЯ ОРТА СЫЗЫҒЫНЫҢ ҚАСИЕТІ

1. Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті.

Анықтама. *Үшбұрыштың екі қабырғасының орталарын қосатын кесіндіні үшбұрыштың* ***орта сызығы*** *деп атайды.*

ABC үшбұрышта $AD = DB$ және $CE = EB$ болсын, онда DE орта сызығы болады (анықтама бойынша). DE орта сызығына қарағанда AC қабырға *табаны* деп аталады (1-сурет). Кез келген үшбұрыштың үш орта сызығы болады (2-сурет).

1-теорема.
Үшбұрыштың берілген екі қабырғасының орталарын қосатын орта сызығы оның үшінші қабырғасына параллель және оның жартысына тең болады.

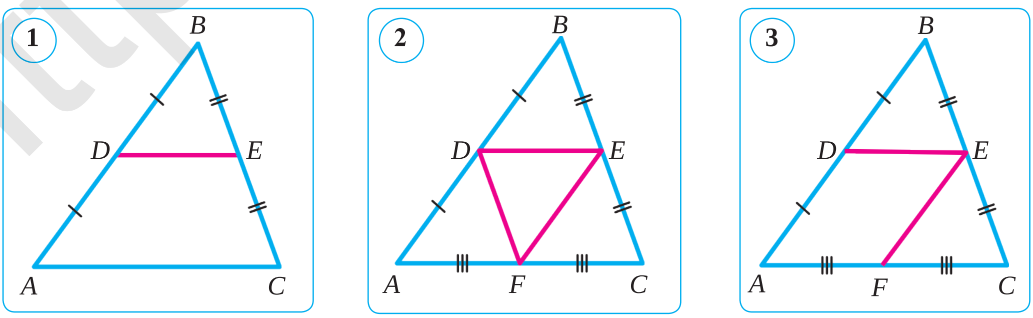
Берілген: $\triangle ABC$ да: $AD = DB$ және $CE = EB$, DE орта сызық (3-сурет).

Дәлелдеу керек: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2}AC$.

Дәлелдеу. *1)* DE кесінді ABC үшбұрышының орта сызығы болсын. D нүктесі арқылы AC қабырғасына параллель түзу жүргіземіз. Бұл түзу Фалес теоремасына орай ВС кесіндіні ортасынан қиып өтеді, яғни DE орта сызығын өзіне қаптып алады. Жасалуына орай $DE \parallel AC$.

2) Енді EF орта сызығын жүргізейік. 1-бапта дәлелденуіне орай, ол AB қабырғасына параллель болады: $EF \parallel AB$, бұдан $EF \parallel AD$. $ADEF$ төртбұрышының қарама-қарсы қабырғалары өзара параллель болғандықтан, сондай-ақ анықтамаға орай, параллелограмм болады. Параллелограмның қасиеттеріне орай $DE = AF$, Фалес теоремасына орай, $AF = FC$ болғандықтан, $DE = \frac{1}{2}AC$. Теорема дәлелденді.

1-есеп. Үшбұрыштың периметрі p-ге тең. Төбелері берілген қабырғаларының ортасындағы үшбұрыштың периметрін табыңдар.



Шешуі. Пайда болған үшбұрыштың қабырғалары берілген үшбұрыштың орта сызықтары болады (2-сурет). Демек, олар сәйкес қабырғаларының жартысына тең. Сол себепті іздестіріліп жатқан периметр берілген үшбұрыш периметрінің жартысына тең болады:

$P_{DEF} = DE + EF + FD = 0{,}5(AC + +AB + BC) = 0{,}5\ p.$ ***Жауабы:*** $0{,}5\ p.$

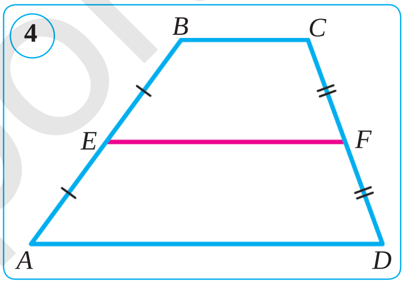
2. Трапеция орта сызығының қасиеті.

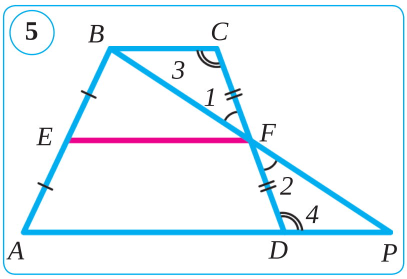
Анықтама. *Трапецияның бүйір қабырғаларының ортасын қосатын кесінді* ***трапецияның орта сызығы*** *деп аталады.*

$ABCD$ трапеция берілген болсын, онда AD және BC– трапецияның табандары; AB және DC оның бүйір қабырғалары, E және F нүктелер бүйір қабырғаларының орталары болсын (4-сурет). Мұнда EF – трапецияның орта сызығы болады.

2-теорема

Трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және олардың жарым қосындысына тең болады.





Дәлелдеу. EF табандары AD және BC болған $ABCD$ трапециясының орта сызығы болсын делік ($AD \| BC$). BF түзуін жүргіземіз де, оның AD түзуімен қиылысатын нүктесін P деп белгілейміз (5-сурет). Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісіне орай, BCF және PDF үшбұрыштары тең ($CF = DF$ шарты бойынша $\angle 1 = = \angle 2$ — вертикаль бұрыштар және $\angle 3 = \angle 4$ — және AD параллель түзулері мен CD қиюшы түзген ішкі айқыш бұрыштар болғандығы себепті). Бұл үшбұрыштардың теңдігінен қабырғалар тең деген қорытынды шығады: $BF = PF$ және $BC = DP$. Демек, трапецияның EF орта сызығы – ABP үшбұрышының да орта сызығы екен. Үшбұрыш орта сызығының қасиетіне орай: $EF \| AP$ және $EF = \frac{1}{2} AP$ келіп шығады. $AD \| BC$ болғаны үшін EF екі табанға да параллель болады және ол төмендегідей өрнектелуі мүмкін $EF = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Демек, $EF \| AD \| BC$ және $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорема дәлелденді.

Салдар. Трапецияның бүйір қабырғасының ортасынан өтетін және табандарына параллель болатын түзу екінші бүйір қабырғаны тең екіге бөледі.

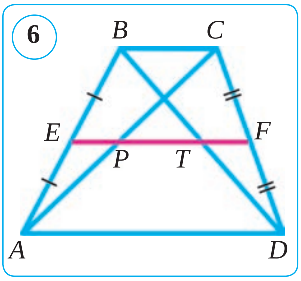
Бұны өздерің дербес дәлелдеңдер.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Үшбұрыштың орта сызығы деп нені айтады?
2) Үшбұрышта неше орта сызық салуға болады?

2. Үшбұрыштың қабырғалары 5 см, 7 см және 11 см-ге тең. Төбелері осы үшбұрыш қабырғаларының ортасында жататын үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

3. Үшбұрышщтың орта сызықтары 6 см, 7 см және 9 см-ге тең болатын үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.



4. Трапецияның диагональдары оның орта сызығы EF-ті E төбесінен бастап 5 см, 7 см және 4 см-лік кесінділерге бөледі (6-сурет). Трапецияның табандарын табыңдар.

5. ABC үшбұрышы қабырғаларының әрқайсысы үш тең кесіндіге бөлінген және бөліну нүктелері кесінділермен тұтастырылған. ABC үшбұрышының периметрі p-ге тең болса, 7-суретте пайда болған пішіннің периметрін табыңдар.

6. Трапецияның табандары: 1) 4,5 дм және 8,2 дм-ге; 2) 9 см және 21 см-ге тең. Оның орта сызығының ұзындығы қанша болады?

7. $ABCD$ трапециясында (8-сурет) EF кесіндісі CD қабырғасына параллель, ал Е нүктесі – АВ-ның ортасы. $EF = 0,5CD$ екенін дәлелдеңдер.

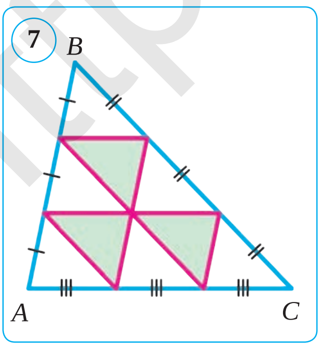
8. 9-суреттегі белгісіз ұзындықты есептеңдер.

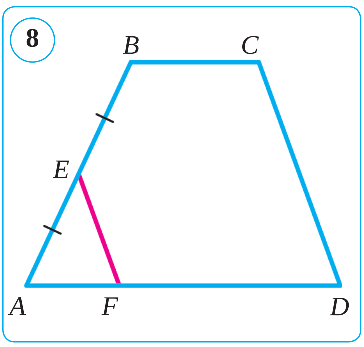
9. Трапецияның диагональдары оның орта сызығын әрқайсысы 6 см-лік кесінділерге бөледі. Осы трапецияның табандарын табыңдар.

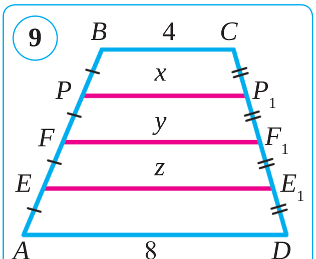
10. Тең бүйірлі трапецияның ұзындығы 6 см-ге тең диагоналі табанымен 60°-тық бұрыш жасайды. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

11. Трапецияның үлкен табаны кіші табанынан 3 есе үлкен және оның орта сызығы 20 см-ге тең. Трапецияның табандарын табыңдар.

12. Трапецияның периметрі 40 см-ге, ал параллель емес қабырғаларының қосындысы 16 см-ге тең. Осы трапецияның орта сызығын табыңдар.





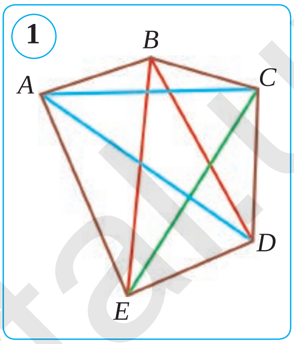


$ABCD$ – трапеция.
Табу керек: x, y, z.

12. ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

Зерттеуге арналған есептер.

1-есеп. Қабырғаларының саны n болған көпбұрышты салыңдар және оның диагональдарын жүргізіңдер. Онда: 1) $n = 5$; 2) $n = 7$; 3) $n = 8$. Көпбұрыштың түрлі диагональдарының санын (d_n) есептеу формуласын ойланып табыңдар.



Шешуі. 1) $n = 5$. A төбесінен 2 AC және AD, B төбесінен 2 BD және BE диагональдары шығады және т.б. Көпбұрыштың бес төбесінің әрқайсысынан 2-еуден диагональ шығады (1-сурет).

Бұдан дөңес бесбұрыштардың әрбір төбесінен шыққан диагональдары санының қабырғалары санынан 3-еуге аздығы, яғни 5 – 3 = 2-ге тең екені келіп шығады. Барлық төбелерден шыққан диагональдар санын табу үшін қабырғалардың санын 2-ге көбейтеміз: $5 \cdot (5 - 3) = 5 \cdot 2 = 10$.

Бұл көбейтіндіде әрбір диагональ екі реттен есепке алынған. Бірақ AC және CA, BD және DB т.б. – бір диагональдің екі түрлі белгіленуі болып табылады, яғни олар жаңа диагональдар емес. Сол себепті шыққан көбейтіндіні 2-ге бөліп, түрлі диагональдардың жалпы санын табамыз:

$$5 \cdot 2 : 2 = 5.$$

Демек, дөңес бесбұрыштардың түрлі диагональдарының жалпы саны төмендегіге тең:

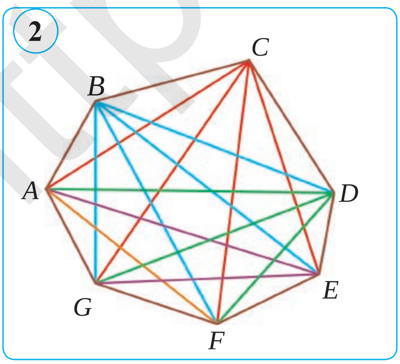
$$d_5 = \frac{5\cdot(5-3)}{2} = \frac{5\cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{5}.$$

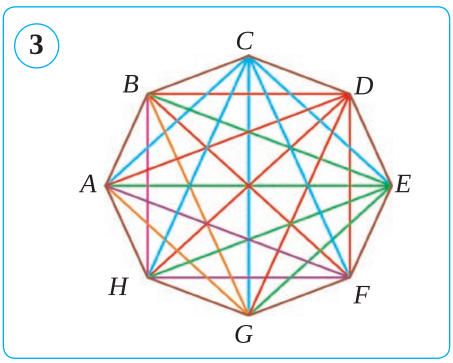
Жауабы: 5-еу.

2) $n = 7$. Дөңес жетібұрыштың түрлі диагональдарының жалпы саны жоғарыда көрсетілген мәселе сияқты етіп табылады. Жасалған талқылаулар барысында анықталған заңдылықтарға сүйеніп, дөңес жетібұрыштың диагональдары санын төмендегідей табамыз (2-сурет):

$$d_7 = \frac{7\cdot(7-3)}{2} = \frac{7\cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{14}.$$

Жауабы: 14.





3) Дөнес сегізбұрыштың барлық диагональдарының саны жоғарыда көрсетілген есептің шешуі сияқты табылады. Есептеулер бойынша анықталған заңдылықтар негізінде дөнес көпбұрыштардың диагональдары санын табамыз (3-сурет):

$$d_8 = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \mathbf{20}.$$ ***Жауабы:*** 20.

Демек, кез келген дөңес көпбұрыштың түрлі диагональдарының жалпы саны төмендегі формула бойынша табылады:

$$\boldsymbol{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}.$$

Ескерту! *Дөңес n бұрыштың бір төбесінен шыққан диагональдары оны (n – 2) үшбұрышқа бөледі.*

2-есеп. Көпбұрыштың 25 диагоналі болуы мүмкін бе?

Шешуі. n бұрыштың түрлі диагональдарының жалпы саны $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ -ға тең. Демек, $\frac{n(n-3)}{2} = 25$. Ондай жағдайда $n(n-3)=50$ немесе $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Бұдан көрініп тұрғанындай, 50 санын бір-бірінен айырмасы 3-ке тең болатын екі натурал санның көбейтіндісі көрінісінде өрнектеуге болмайды. Сондықтан да түрлі диагональдарының жалпы саны 25 болатын көпбұрыш жоқ. ***Жауабы:*** жоқ, болуы мүмкін емес.

3-есеп. Математика бөлмесіндегі суреттерде бейнеленген үшбұрыштар мен көпбұрыштардың саны 15. Бұл пішіндердің қабырғаларының жалпы саны 53. Сонда суреттерде неше үшбұрыш және неше төртбұрыш бейнеленген?

Шешуі. Төртбұрыш қабырғаларының саны натурал санның еркіті мәнінде төрт еселі, яғни жұп сан болады. Үшбұрыштың саны тақ сан болғанда ғана қосынды тақ болады.

Есептің шартына орай, теңдік түземіз: $3x + 4y = 53$.

Төменде мүмкін болған варианттарды қарастырамыз. Теңдіктегі белгісіздердің орнына тиісті мәндерді қойып, оны қанағаттандыратын шешімді табамыз.

1-жағдай. $x = 1$ және $y = 14$ болсын. Онда $3 \cdot 1 + 4 \cdot 14 = 53$, яғни $59 \neq 53$.
2-жағдай. $x = 3$, $y = 13$; $3 \cdot 3 + 4 \cdot 12 = 53$, яғни $57 \neq 53$.
3-жағдай. $x = 5$, $y = 10$; $3 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 53$, яғни $55 \neq 53$.
4-жағдай. $x = 7$, $y = 8$; $3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 53$, яғни $53 = 53$.

4-жағдай есептің шартын қанағаттандырады, сондықтан басқа жағдайлар қарастырылмайды. ***Жауабы:*** 7 үшбұрыш, 8 төртбұрыш.

Нығайтуға арналған қосымша жаттығулар.

1. Дөңес көпбұрыштың бір төбесінен шыққан диагональдардың саны 13. Осы көпбұрыштың қабырғаларының саны нешеу? Барлық диагональдарының саны ше?
2. Диагональдарының саны: 1) қабырғаларының санына тең; 2) қабырғаларының санынан аз; 3) қабырғаларының санынан артық көпбұрыш бола ма?

ПРАКТИКАЛЫҚ КОМПЕТЕНЦИЯНЫ (БІЛІКТІЛІКТІ) ДАМЫТАТЫН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

ТҰРАҚТЫ КӨПБҰРЫШТЫ ПАРКЕТТЕР

Сендер, әрине, паркет жөнінде белгілі бір түсінікке иесіңдер. Үйлердің, түрлі ғимараттардың едендері көбінесе тіктөртбұрышты, квадрат және тұрақты алтыбұрышты паркеттермен безендіріледі.

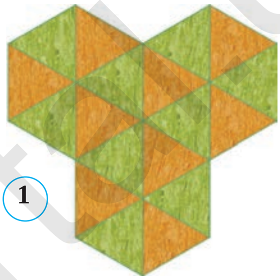
Математикалық көзқарас тұрғысынан алғанда, паркет – жазықтықты геометриялық пішіндермен бір-біріне тығыз және бір-бірімен қиылыспайтындай етіп орналастыру болып табылады. Алдымен тұрақты көпбұрыштарды – квадрат, төртбұрышты және алтыбұрышты паркеттерді қарастырамыз. Бірдей квадраттардан түзілген торкөзді дәптерлерің – ең қарапайым паркеттерге мысал бола алады. 1-суретте – тұрақты үшбұрыштардан; 2-суретте – квадрат пен тұрақты алтыбұрыштардан; ал 3-суретте – тұрақты алтыбұрыштардан, квадраттардан және тең қабырғалы үшбұрыштардан; 4-суретте – тұрақты алтыбұрыштар мен үшбұрыштардан жасалған әсем паркеттер бейнеленген.

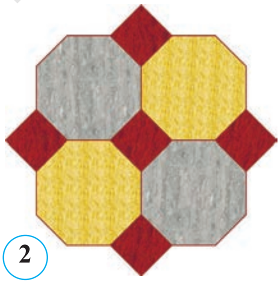
Жазық бетті көпбұрыштармен қаптау, онда ерікті екі көпбұрыштың ортақ қабырғаға немесе ортақ төбеге ие болуы не ортақ төбелерге мүлде ие болмауы – паркет деп аталады.

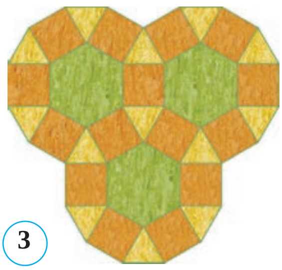
Егер паркет тұрақты көпбұрыштардан құралған болса және әрбір төбенің айналасында көпбұрыштар бірдей әдіспен орналасқан болса, бұндай паркет *тұрақты* деп аталады.

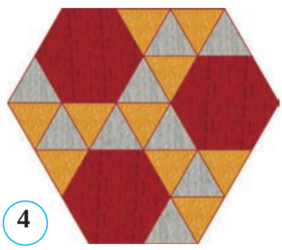
Тең қабырғалы үшбұрыштар, квадраттар және тұрақты алтыбұрыштар жазық бетті қаптайтын паркеттерге мысал бола алады. Бұлардан өзге тұрақты көпбұрыштармен жазық бетті қаптау мүмкін еместігін дәлелдейміз. Ол үшін паркеттің бір төбесінен шығатын көпбұрыштардың бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болуын пайдаланамыз.

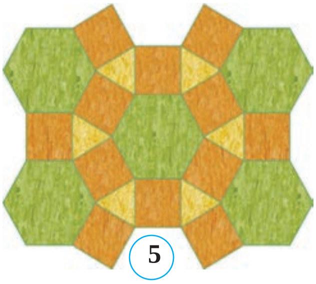
Бұл мақсат үшін тұрақты бесбұрышты қарастырайық. Бәрімізге белгілі болғанындай, тұрақты


1

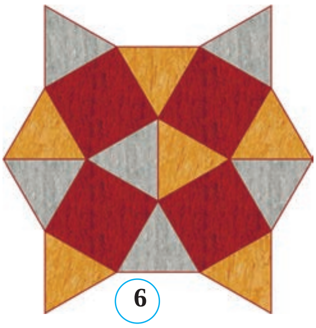

2


3


4



5



6

бесбұрыштың ішкі бұрыштары 108°-қа тең. Паркеттің бір төбесіне үш тұрақты бесбұрышты орналастыру мүмкін емес, өйткені ондай жағдайда бұрыштардың қосындысы 324°< 360° болады. Егер тұрақты бесбұрыштар саны 4-ке тең немесе одан үлкен болса, ондай жағдайда бұрыштардың қосындысы 432°>360° болады. Сондықтан тұрақты бесбұрыштардан құралған паркеттер жоқ. Нақ сол сияқты паркеттің бір төбесіне үш немесе одан артық тұрақты жетібұрышты, тұрақты сегізбұрышты және тағы басқа паркет бөлегін орналастыру мүмкін емес, өйткені олардың әрбір бұрышы 120°-тан үлкен және олардың қосындысы 360°-тан асып кетеді. Сол себепті тұрақты жетібұрыштан, тұрақты сегізбұрыштан және басқалардан жасалған паркеттер жоқ.

5-суреттегі тұрақты алтыбұрыштардан, квадраттардан және тең бүйірлі үшбұрыштардан құралған паркеттер 3-суреттегі паркеттерден орналасуы тұрғысынан ерекшеленіп тұрады. Ал 6-суретте тең бүйірлі үшбұрыштар мен квадраттардан құралған паркет бейнеленген. Келтірілген екі паркетте де жалпы заңдылықтың сақталғанын көруге болады, яғни әрбір төбесі айналасында орналасқан пішіндердің ішкі бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең екендігі айқын байқалады. Мысалы, 5-суретте 60° + 90° + 90° + 120° = 360°, яғни бір төбесінің айналасында бір тең бүйірлі үшбұрыш, 2 квадрат және бір тұрақты алтыбұрыш орналасқан; ал 6-суретте бір төбенің айналасында 3 тең бүйірлі үшбұрыш (әрбір ішкі бұрышы 60°-тан) және 2 квадрат (әрбір ішкі бұрышы 90°-тан) орын тепкен.

Жазықтықтың бетін қаптайтын тұрақты паркеттердің басқа түрлерімен төмендегі кестеден танысасыңдар. 5–6-суреттердегі паркеттерді өздерің жасап көріңдер.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Үшбұрыштардан жасалған паркет
60°	60°	120°	120°			Үшбұрыштар мен алтыбұрыштардан жасалған паркет
60°	90°	90°	120°			Үшбұрыш, квадрат және алтыбұрыштардан жасалған паркет
60°	150°	150°				Үшбұрыштар мен онекібұрыштардан жасалған паркет
90°	90°	90°	90°			Квадраттардан жасалған паркет
120°	120°	120°				Алтыбұрыштардан жасалған паркет

13–14. 1-БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ. ҚАТЕЛЕРМЕН ЖҰМЫС ІСТЕУ

1. Тік төртбұрыштың периметрі 40 см-ге, қабырғаларының қатынасы 3 : 5-ке тең. Осы тік төртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

2. Параллелограмның қабырғаларының біреуі екіншісінен 4 есе үлкен, ал периметрі 30 см-ге тең. Параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

3. Тік бұрышты трапецияның сүйір бұрышы 45°-қа, кіші бүйір қабырғасы мен кіші табаны 16 см-ге тең. Трапецияның үлкен табанын табыңдар.

4. *ABCD* трапециясында *AD* – үлкен табаны. *B* төбесі арқылы *CD* қабырғаға параллель және *AD* қабырғасын қиып өтетін түзу жүргізілген: *BC* = 7 см, *AE* = 4 см. 1) Трапецияның орта сызығын; 2) *ABE* үшбұрышының периметрі 17 см болса, сол трапецияның периметрін табыңдар.

1-ТЕСТ Өзіңді сынап көр!

1. Дөңес төртбұрыштың бұрыштарының бірі — тік бұрыш, ал қалғандары өзара 3:4:8 қатынасында. Төртбұрыштың сүйір бұрышын табыңдар.
А) 72°; Ә) 54°; Б) 144°; В) 90°.

2. Әрбір ішкі бұрышы 156° болған дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?
А) 10; Ә) 15; Б) 12; В) 8.

3. *ABCD* параллелограмының периметрі 32 см-ге, *BD* диагоналі 9 см-ге тең. *ABD* үшбұрышының периметрін табыңдар.
А) 16 см; Ә) 25 см; Б) 23 см; В) 41 см.

4. Екі бұрышының қосындысы 100°-қа тең параллелограмның үлкен бұрышын табыңдар.
А) 120°; Ә) 110°; Б) 150°; В) 130°.

5. Ромбының бұрыштарының біреуі 150°-қа тең, ал кіші диагоналі 4,5 см. Ромбының периметрін табыңдар.
А) 27 см; Ә) 18 см; Б) 13 см; В) 21,5 см.

6. *ABCD* трапециясының орта сызығы оны орта сызықтары 13 см-ге және 17 см-ге тең болған екі трапецияға бөледі. Трапецияның үлкен табанын табыңдар.
А) 19 см; Ә) 21 см; Б) 18 см; В) 30 см.

7. Үшбұрыштың орта сызығы оның табанынан 5,4 см қысқа. Үшбұрыштың орта сызығы мен табанының қосындысын табыңдар.
А) 13,5 см; Ә) 16,2 см; Б) 10,8 см; В) 21,6 см.

8. Тең бүйірлі трапецияның периметрі 36 см, орта сызығы 10 см. Бүйір қабырғасының ұзындығын табыңдар.
А) 10 см; Ә) 8 см; Б) 12 см; В) 13 см.

9. Трапецияның орта сызығы 9 см, табандарының біреуі екіншісінен 6 см қысқа. Трапецияның үлкен табанын табыңдар.
А) 15 см; Ә) 18 см; Б) 12 см; В) 10 см.

Ағылшын тілін үйренеміз!

Көпбұрыш – polygon
Тік төртбұрыш – rectangle
Ромб – rhombus
Квадрат – square
Биіктік – height

Периметр – perimeter
Диагональ – diagonal
Параллелограмм – parallelogramm
Трапеция – trapezoid
Бұрыш– angle

Тарихи мағлұматтар

Әбу Райхан Беруни
(973–1048)

Ежелгі Египет және Вавилон математикасында төртбұрыштардың төмендегі түрлері кездеседі: квадраттар, тік төртбұрыштар, тікбұрышты және тең бүйірлі трапециялар.

Ортаазиялық ғалымдардан **Әбу Райхан Беруни** де төртбұрыштардың түрлеріне толық тоқталған. Ол өзінің «Астрономия өнерінен бастауыш мағлұмат беруші кітап» атты шығармасында «Төртбұрыштардың түрі қандай?» – деп сұрақ қояды және төмендегідей жауап береді:

«**Бірінші** — квадрат, оның барлық қабырғалары тең, барша бұрыштары тік, диагональдары, яғни қарама-қарсы бұрыштарын (төбесін) түйістіретін сызықтары өзара тең.

Екінші — тік төртбұрыш, ол квадратқа қарағанда ұзындау, барлық бұрыштары тік, қабырғаларының ұзындықтары әр түрлі, олардың тек қарама-қарсы қабырғалары және диагональдары тең.

Үшінші — ромб, оның төрт қабырғасы тең, бірақ диагональдары әр түрлі, ал бұрыштары тік бұрыш емес.

Төртінші — ромбоид, оның диагональдары әр түрлі, тек екі-екіден қарама-қарсы қабырғалары тең.

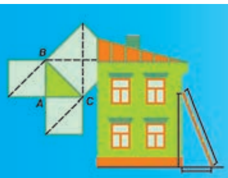
Бұл пішіндерден өзгеше төртбұрыштар трапеция деп аталады».

Квадрат латынша «төрт бұрышты» деген мағынаны береді. Беруни арабша «*мурабба* (төртбұрыш)» терминін қолданған, латыншаға осы арабша термин аударылған. Тік төртбұрыштың арабшасы «*мустатил*» — «созынқы».

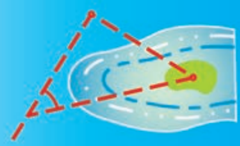
Ромб терминінің жүзеге келуі әр түрлі түсіндіріледі. Ол грекше сөз, ромб — «айналушы дене», «зырылдауық» деген мағынаны береді. Геометрияға бұл термин зырылдауық қимасы ромбқа ұқсағандықтан енген. Арабшада «ромб» үшін «нақты» термині алынған.

*Трапеция — грек сөзі, аудармасы «үстелше» (тама*қтанатын үстел) *деген*ге тура келеді, лексикалық мағынасы — төрт аяқты. Шынында да, грекше «трапедзион» — үстелше, тамақтанатын үстел.

Беруни де *«трапецияны»* – *«бесбұрыш»* деп атаған. Бұл термин – грекше *«трапедзионның»* арабшаға дәл аудармасы.



II ТАРАУ.
ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР



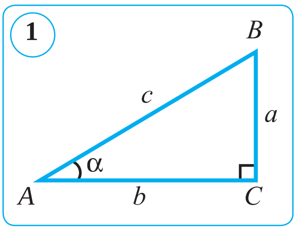
§ 3. СҮЙІР БҰРЫШТЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ

15. СҮЙІР БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ, ТАНГЕНСІ ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІ

Тригонометрия – математиканың бір бөлімі, ол үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары ортасындағы байланыстарды, тригонометриялық функциялардың қасиеттері мен олардың арасындағы қатынастарды зерттейді. **“Тригонометрия”** сөзі грек тіліндегі **“тригон”** – үшбұрыш және **“метрезис”** – өлшеу деген сөздерден алынған, қазақ тілінде **“үшбұрыштарды өлшеу”** деген мағынаны білдіреді.

Тригонометрияның негізгі міндеті *үшбұрыштарды шешу*ден тұрады. Үшбұрыш геометрияның ең маңызды пішіндерінің бірі болып саналады. Сондықтан да біз үшбұрыштарды оқып-үйренуді одан әрі жалғастырамыз. Бұл тараудың мақсаты үшбұрыштардың бірер элементін (қабырғалары мен бұрыштары) басқа элементтері арқылы өрнектеу болып табылады.

Катеттері $BC = a$ және $AC = b$, гипотенузасы $AB = c$ және сүйір бұрышы $\angle A = \alpha$ болған тік бұрышты $(\angle C = 90°)$ ABC үшбұрышы берілген дейік (1-сурет).



Бұл үшбұрыштың қабырғаларының қатынастарын жұп-жұбымен қарастырайық:

$\frac{a}{c}$ – α бұрыштың қарсысындағы катеттің гипотенузаға қатынасы;

$\frac{b}{c}$ – α бұрышқа түйіскен катеттің гипотенузаға қатынасы;

$\frac{a}{b}$ – α бұрыштың қарсысындағы катеттің сол бұрышпен түйісетін катетке қатынасы;

$\frac{b}{a}$ – α бұрышпен түйіскен катеттің сол бұрыштың қарсысындағы катетке қатынасы;

$\frac{c}{b}$ – гипотенузаның α бұрышпен түйісетін катетке қатынасы;

$\frac{c}{a}$ – гипотенузаның α бұрыштың қарсысындағы катетке қатынасы.

Сонымен барлығы 6 қатынасты да түзіп шықтық.

Нақ осылайша екінші сүйір бұрыш (B) үшін де осы тәртіппен қатынастар түзіп шығуымызға болады.

Бұл қатынастардың бастапқы төртеуі *арнайы атаулар* деп аталады.

1-анықтама. *Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына қарама-қарсы орналасқан катеттің гипотенузаға қатынасы* ***сүйір бұрыштың синусы*** *деп аталады.*

α бұрыштың синусы **sinα** деп белгіленеді және “*синус альфа*” деп оқылады. Анықтамаға орай $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

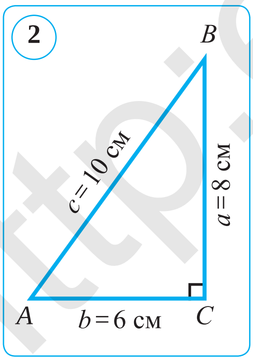
2-анықтама. *Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышымен түйіскен катеттің гипотенузаға қатынасы* ***сүйір бұрыштың косинусы*** *деп аталады.*

α бұрыштың косинусы **cosα** деп белгіленеді және “*косинус альфа*” деп оқылады. Анықтамаға орай: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

3-анықтама. *Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының қарсысындағы катеттің сол бұрышпен түйіскен катетке қатынасы* ***сүйір бұрыштың тангенсі*** *деп аталады.*

α бұрыштың тангенсі tgα деп белгіленеді және “тангенс альфа” деп оқылады. Анықтамаға орай: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

4-анықтама. *Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышымен түйіскен катеттің қарсысындағы катетке қатынасы* ***сүйір бұрыштың котангенсі*** *деп аталады.*



α бұрыштың котангенсі **ctgα** деп белгіленеді және “котангенс альфа” деп оқылады. Анықтамаға орай: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Тік бұрышты үшбұрышта катет гипотенузадан кіші болғандықтан, сүйір бұрыштың синусы мен косинусы бірден кіші болады.

Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері өзара тең, бірі екіншісінен үлкен яки кіші болуы да мүмкін. Сондықтан тангенс пен котангенстің шамалары 1-ден кіші, 1-ге тең және 1-ден үлкен болады.

Есеп. ABC үшбұрышында $\angle C=90°$, $AB=10$ см, $BC=8$ см, $AC=6$ см (2-сурет). A бұрышының тригонометриялық функцияларының шамаларын табыңдар.

Шешуі. Анықтамаға орай:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8; \qquad \mathrm{tg}A = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6; \qquad \mathrm{ctg}A = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Жауабы: $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; $\mathrm{tg}A = 1\frac{1}{3}$; $\mathrm{ctg}A = 0,75$.

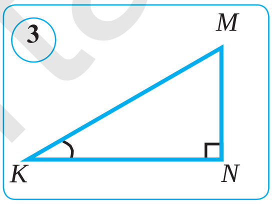
Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғаларынан қандай қатынастар құруға болады және олар қалай оқылады?

?

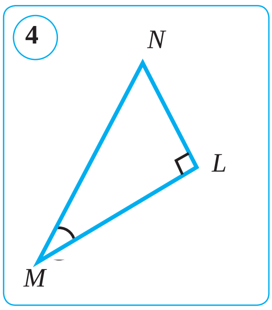
2) Тік бұрышты үшбұрышта сүйір бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі деп нелерді айтады және олар қалай белгіленеді?

2. Әрбір қалдықтың анықтамасына орай, К бұрыштың қайсы тригонометриялық функциясын өрнектейді (3-сурет): а) $\frac{KN}{KM}$; ә) $\frac{MN}{KN}$; б) $\frac{MN}{KM}$; в) $\frac{KN}{MN}$?



3. $\triangle ABC$ үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $AC = \sqrt{11}$ см (1-суретке қара). A және B бұрыштарының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі мәндерін табыңдар.

4. Тік бұрышты үшбұрышттың сүйір бұрышының синусы: а) 0,98; ә) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - 2$ -ге тең болуы мүмкін бе?



5. Тік бұрышты MNL үшбұрышында $\sin N = \frac{24}{25}$ -ға тең. Бұл теңдіктен үшбұрыштың қайсы қабырғаларын табуға болады (4-сурет)?

6. MNL үшбұрышында $\angle L = 90°$, $MN = 13$ см, $ML = 12$ см, $NL = 5$ см (4-сурет). M бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі мәндерін табыңдар.

. **7.** ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 17$ см, $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. A және B бұрыштарының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі мәндерін табыңдар.

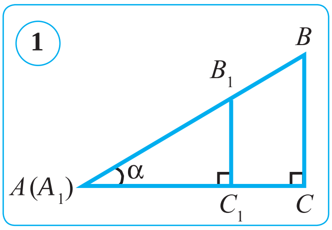
Біліп қойған жақсы!

- ***“Синус” термині латын тілінен алынған, ол “иілу” деген мағынаны білдіреді.***
- ***“Тангенс” термині латын тілінен аударғанда “жанама” деген мағынаны білдіреді.***
- ***“Косинус” және “котангенс” терминдері “комплементи синус” және “комплементи тангенс” – “толықтырғыш синус” және “толықтырғыш тангенс” терминдерінің қысқартылған түрі болып табылады.***

16. СҮЙІР БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ, ТАНГЕНСІ ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІ (ЖАЛҒАСЫ)

1. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары.

Тік бұрышты үшбұрыштағы сүйір бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің мәндері тек сүйір бұрыштың шамасына ғана тәуелді екенін және тік бұрышты үшбұрыштың таңдалуына байланысты еместігін дәлелдейміз.



Тік бұрышты ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) $\angle A = \angle A_1$ болсын (1-сурет).

Пропорцияның негізгі қасиеттеріне орай:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1};\ \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$$

Бұл теңдіктердің сол және оң бөліктері сәйкесінше A және A_1 сүйір бұрыштарының синустарына, косинустарына, тангенстеріне және котангенстеріне тең болады. Демек,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \mathrm{tg}A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \mathrm{ctg}A_1 .$$

Бұлардан көрініп тұрғанындай, A сүйір бұрышының синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі үшбұрыштың таңдалуына тәуелді емес. Егер сүйір бұрыштың мәні өзгерсе, бұл қатынастар да міндетті түрде өзгереді.

Сонымен, **сүйір бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі тек сүйір бұрыштың шамасына ғана тәуелді.**

Синус, косинус, тангенс және котангенс ***сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары*** деп аталады.

Жоғарыда келтірілген теңдіктерден төмендегідей маңызды тұжырым туындауы мүмкін: ***егер A және A_1 сүйір бұрыштары үшін тригонометриялық функциялардың біреуі тең келетін болса, онда A және A_1 сүйір бұрыштары өзара тең ($\angle A = \angle A_1$) болады.***

Былайша айтқанда, тригонометриялық функцияның әрбір мәніне жалғыз сүйір бұрыш сәйкес келеді.

2. Тангенс пен котангенстің синустар мен косинустар арқылы өрнектелуі.

Синус пен косинустың анықтамаларынан төмендегідей теңдіктер туындайды (15-тақырыпқа қараңдар):

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha, \text{ б.а. } \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \text{ б.а. } \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Осылайша сүйір бұрыштың тангенсі мен котангенсі синус пен косинус арқылы төмендегідей сипатталады.

Сүйір бұрыш синусының косинусына қатынасы ***сол бұрыштың тангенсі*** *деп аталады.*

Сүйір бұрыш косинусының синусына қаьтынасы ***сол бұрыштың котангенсі*** *деп аталады.*

(1) және (2) теңдіктерді жайымен көбейте отырып, төмендегі теңдікті түземіз:

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1. \tag{3}$$

Демек, α сүйір бұрышы тангенсі мен котангенсінің көбейтіндісі 1-ге тең. Бұдан α сүйір бұрышының тангенсі мен котангенсі өзара қарама-қарсы функциялар екені келіп шығады.

Сонымен біз α сүйір бұрышы үшін жаңа теңдікті (нақтылықты) туындаттық.

3. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы байланыстар.

Тригонометриялық функциялардың анықтамаларынан төмендегі ережелер туындайды.

1-ереже. α бұрыштың қарсысындағы катет гипотенуза мен α бұрыш синусының көбейтіндісіне тең:

$$a = c\sin\alpha.$$

2-ереже. α бұрыштың қарсысындағы катет екінші катет пен α бұрышы тангенсінің көбейтіндісіне тең:

$$a = b\,\mathrm{tg}\alpha.$$

3-ереже. α бұрышқа жанасқан катет гипотенуза мен α бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең:

$$b = c\cos\alpha.$$

4-ереже. α бұрышқа жанасқан катет қарсысындағы катеттің α бұрыш тангенсіне қатынасына тең:

$$b = \frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

5-ереже. Гипотенуза α сүйір бұрышының қарсысындағы катеттің α бұрышы синусына қатынасына тең:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

6-ереже. Гипотенуза α сүйір бұрышына жанасқан катеттің α бұрыш косинусына қатынасына тең:

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Есеп. *ABC* үшбұрышының *C* бұрышы 90°-қа тең. Егер:

1) $AB=18$ см және $\sin A = \frac{1}{3}$ болса, BC катетті; 2) $AC=15$ см және $\cos A = \frac{5}{6}$ болса, *AB* гипотенузаны; 3) $BC=26$ см және $\operatorname{tg} A = \frac{13}{15}$ болса, *AC* катетті есептеп көр.

Шешуі. 1) 1-ережені пайдалана отырып, *BC* катетін табамыз:

$$BC = AB\sin A = {}^{6}\cancel{18}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \text{ (см)}.$$ ***Жауабы:*** 6 см.

2) 6-ережені пайдалана отырып, *AB* гипотенузасын табамыз:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = {}^{3}\cancel{15}\cdot\frac{6}{\cancel{5}_1} = 3\cdot 6 = 18 \text{ (см)}.$$ ***Жауабы:*** 18 см.

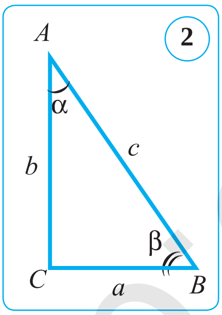
3) 4-ережені пайдалана отырып, *AC* катетін табамыз.

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg}A} = 26 : \frac{13}{15} = {}^{2}\cancel{26}\cdot\frac{15}{\cancel{13}_1} = 2\cdot 15 = 30 \text{ (см)}.$$ ***Жауабы:*** 30 см.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары деп нені айтамыз?
2) Сүйір бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің шамалары неге байланысты?

2. Төменде берілген теңдіктердің қайсысы дұрыс екенін анықтаңдар (2-сурет). Жауаптарыңды негіздеңдер.



а) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; ә) $b=c\sin\alpha$; б) $c=a\operatorname{tg}\alpha$; в) $a = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

3. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының тангенсі $\sqrt{2}$; 0,001-ге және 100-ге тең болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

4. *ABC* үшбұрышындағы *C* бұрышы 90°-қа тең. Егер: 1) $BC = 10$ см және $\operatorname{tg}A = \frac{5}{8}$ болса, *AC* катетін; 2) $BC=8$ см және $\sin A=0{,}16$ болса, AB гипотенузаны есептеңдер.

5. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары ортасындағы 6 қатынасты β бұрыш үшін келтіріп шығарыңдар (2-сурет).

6. *ABC* үшбұрышындағы *C* бұрышы 90°-қа тең. Егер $BC = 4$ см және $\sin A=0{,}25$ болса, *AB* гипотенузасы қандай болатынын есептеңдер.

7. *ABC* үшбұрышындағы *C* бұрышы 90°-қа тең. Егер $AC = 2$ см және $\cos A=0{,}4$ гипотенузасы қандай болатынын есептеңдер.

8. *ABC* үшбұрышындағы *C* бұрышы 90°-қа тең. Егер $BC = 14$ см және $\cos B = \frac{7}{25}$ болса, AB гипотенузасы қандай болатынын есептеңдер.

§ 4. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

17. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮРЛІ ДӘЛЕЛДЕУЛЕРІ

1. Пифагор теоремасы – геометрияның маңызды теоремаларының бірі.

Ұлы грек математигі Пифагор өмтрі жайлы мәліметтер өте кем. Пифагор мектебі пішіндерді (фигураларды) бөлу және түзу сызықты пішіндерді теңауданды пішіндерге ауыстырудың геометриялық әдісін теоремаларды дәлелдеу және есептер шешуде де пайдаланғандығы грек математиктерінің шығармаларынан ғана белгілі. Геометрияның пән есебінде қалыптасуына Пифагор және оның мектебі өте үлкен үлес қосқан. Төмендегі теорема Пифагордың есімімен аталады.

Теорема.

(Пифагор теоремасы)**. Тік бұрышты үшбұрыш гипотенузасының квадраты оның катеттерінің квадраттарының қосындысына тең болады.**

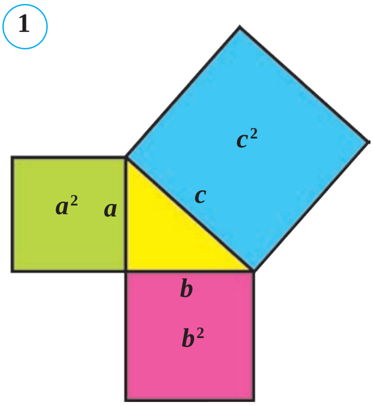
Бұл теорема тікбұрышты үшбұрыштарға қатысты болып, үшбұрыш қабырғаларына тең квадраттардың аудандары арасындағы қатынасты көрсетеді. Пифагор бұл теореманың теориялық дәлелін келтірген. Пифагор теоремасымен анықталған геометриялық қатынастардың дербес жағдайлары Пифагордан бұрын да түрлі елдерде белгілі еді, бірақ теореманың бұл жалпы тұжырымы Пифагор мектебінде айқындалған.

Катеттері a және b, гипотенузасы c болатын тік бұрышты ABC үшбұрыш берілген делік, онда Пифагор теоремасы

$$c^2=a^2+b^2, \qquad (1)$$

формуламен өрнектеледі, мұндағы a^2, b^2, c^2 —қабырғалары a, b, c болған квадраттардың аудандарына тең. Сондықтан бұл теңдік қабырғасы гипотенузаның ұзындығына тең квадраттың ауданы ***қабырғалары катеттеріне тең квадраттардың аудандарының қосындысына тең*** болатынын көрсетеді (1-сурет).

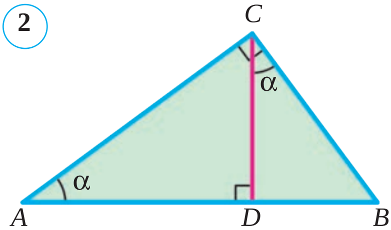
1



2. Пифагор теоремасының сүйір бұрыштың косинусы арқылы дәлелденуі.

Дәлелдеу. ABC – берілген тікбұрышты үшбұрыш, оның C бұрышы тікбұрыш болсын. Тікбұрышты үшбұрыштың C төбесінен CD биіктігін жүргіземіз (2-сурет).

2



Тікбұрышты ACD және ABC үшбұрыштарының бұрыш косинусының анықтамасына орай:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Бұдан $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Тікбұрышты BCD және ABC үшбұрыштарынан бұрыш косинусының анықтамасына орай:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Бұдан $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Пайда болған (2) және (3) теңдіктерді бір-біріне қосып және $AD + DB = AB$ екенін ескеріп,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot D + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

теңдігін түземіз. Теорема дәлелденді.

Тікбұрышты ABC ($\angle C = 90°$) үшбұрышының қабырғаларын сәйкесінше $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ деп белгілеп, Пифагор формуласын туындатамыз:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

3. Пифагор теоремасының беттер арқылы дәлелденуі.

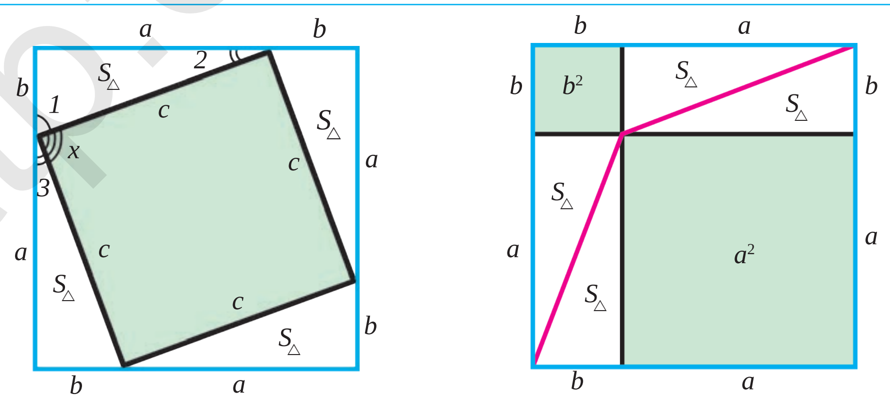
Катеттері a, $б$ және гипотенузасы c-ға тең тікбұрышты үшбұрыш берілген. Бұл үшбұрыш үшін Пифагор теоремасы орынды екенін дәлелдейміз, яғни:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

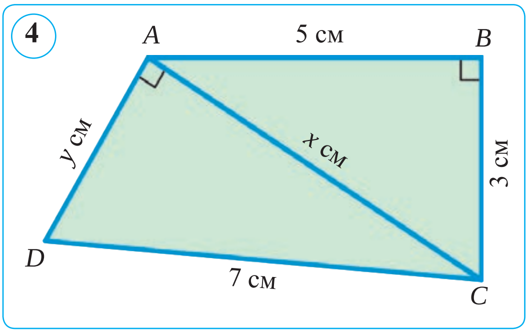
екенін көрсетеміз.

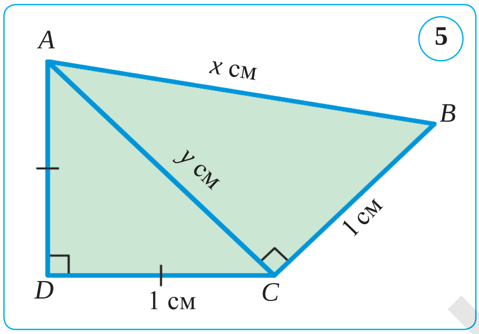
Дәлелдеу. Қабырғасы (a + $б$) -ға тең екі квадрат жасаймыз. Оларды 3-суретте көрсетілген әдіспен тікбұрышты үшбұрыштарға, квадраттарға және тік төртбұрыштарға бөліп шығамыз. 3- *а* суреттегі төртбұрыштың қабырғасы c болған квадрат екенін көрсетеміз. Шын мәнінде бұл төртбұрыш – ең алдымен ромб, өйткені оның қабырғасы катеттері a және $б$ болып табылатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c-ға

3



а *ә*





тең. Енді сызбадағы x бұрыштың дұрыс екенін көрсетеміз. Расында да $\angle x+\angle 1+\angle 3=180°$, $\angle 3=\angle 2$ (өйткені үшбұрыштар тең) және $\angle 1=$ $=90°-\angle 2$ екенін ескере отырып, табамыз: $\angle x=90°$. Сондықтан да бұл төртбұрыштың бұрыштарының біреуі 90°-қа тең болған ромб, яғни квадрат болып шығады. Қарастырылып отырған екі үлкен квадрат теңдес, яғни олардың сыртқы беттері тең. Сондай-ақ бірінші квадраттың беті $4S_\Delta+c^2$-қа, ал екінші квадраттың беті $4S_\Delta+a^2+b^2$-қа тең (3-*б* сурет). Сондықтан $4S_\Delta+c^2=4S_\Delta+a^2+b^2$.

Демек, $c^2=a^2+b^2$. Теорема дәлелденді.

Есеп. 4-суреттегі белгісіз кесінділердің ұзындықтарын табыңдар.

Шешуі. 1) $\triangle ABC$ – тік бұрышты, $\angle B=90°$ (4-сурет). Пифагор теоремасына орай: $x^2=5^2+3^2$, бұдан $x^2=34 \Rightarrow x=\sqrt{34}$ $(x>0)$.

2) $\triangle ACD$– тік бұрышты, $\triangle CAD=90°$ (4-сурет). Пифагор теоремасына орай, $y^2+\left(\sqrt{34}\right)^2=7^2$, одан $y^2+34=49$, $y^2=15$, $y=\sqrt{15}$ $(y>0)$.

Жауабы: $x=\sqrt{34}$ см; $y=\sqrt{15}$ см.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Пифагор теоремасының қандай дәлелдеулерін білесің?
2) "Гипотенузаның квадраты", "катеттің квадраты" деген тіркестерді қалай түсінесің?

2. Тік бұрышты үшбұрыштардың a және $б$ катеттері берілген. Егер: 1) $a=5$, $b=12$; 2) $a=4\sqrt{2}$, $b=7$; 3) $a=0{,}7$, $b=2{,}4$; 4) $a=5$, $b=6$; 5) $a=\frac{5}{13}$, $b=\frac{12}{13}$ болса, с гипотенузасын табыңдар.

3. Ромбтың диагональдары: 1) 12 см және 16 см; 2) 14 см және 48 см. Ромбтың периметрін табыңдар.

4. Белгісіз кесінділердің ұзындықтарын табыңдар (5-сурет).

5. Тікбұрышты үшбұрышта a мен $б$ – катеттер, c – гипотенуза. Егер: 1) $a=1{,}2$, $c=1{,}3$; 2) $a=7$, $c=9$; 3) $a=1{,}5$, $c=1{,}7$; 4) $a=2$, $c=2{,}5$ болса, $б$ катеті қандай болатынын табыңдар.

6. Тік төртбұрыштың қабырғалары: 1) 2,4 дм және 7 см; 2) 50 см және 12 дм; 3) 8 дм және 1,5 м. Оның диагоналін табыңдар.

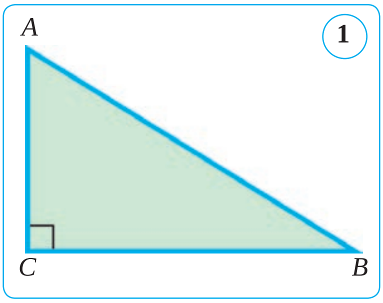
18. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫНА КЕРІ ТЕОРЕМА

1. Пифагор теоремасының кейбір салдарлары.

Пифагор теоремасының салдарлары ішінен біреуін қарастырайық.

Салдар. *Тік бұрышты үшбұрыштың кез келген катеті гипотенузадан кіші болады.*

Дәлелдеу. $\triangle ABC$ – тік бұрышты, онда $\angle C = 90°$ болсын (1-сурет).



Тік бұрышты үшбұрыштың кез келген катеті гипотенузадан кіші болатынын дәлелдейік.

Шынында да, Пифагор теоремасы бойынша катеттер үшін:

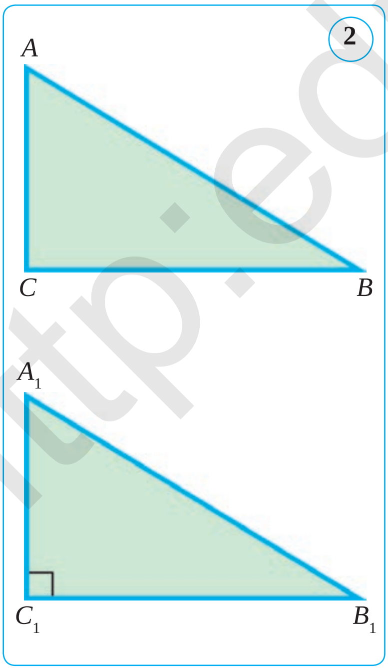
$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ we } BC^2 = AB^2 - AC^2$$

өрнектері орынды. Бұдан $AC^2 < AB^2$ және $BC^2 < AB^2$ келіп шығады. Демек, $AC < AB$ және $BC < AB$. Салдар дәлелденді.

2. Пифагор теоремасына кері теорема.

Теорема.

Егер үшбұрыштың қабырғаларының біреуінің квадраты оның басқа екі қабырғасы квадраттарының қосындысына тең болса, онда үшбұрыш тік бұрышты болады.



Дәлелдеу. $\triangle ABC$ үшбұрышта $AB^2 = AC^2 + BC^2$ болсын. $\angle C = 90°$ болатынын дәлелдейік (2-сурет).

C_1 бұрышы тік болған тік бұрышты $A_1B_1C_1$ үшбұрышын қарастырайық, онда $A_1C_1 = AC$ мен $B_1C_1 = BC$. Пифагор теоремасы бойынша $A_1B_1^2 = \; = A_1C_1^2 + \; + B_1C_1^2$. Демек, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Бірақ теореманың шарты бойынша $AB^2 = AC^2 + BC^2$, демек, $A_1B_1^2 = AB^2$. Бұдан табамыз: $A_1B_1 = AB$. Сонымен, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар үш қабырғасы бойынша тең. Сондықтан $\angle C = \angle C_1$, яғни ABC үшбұрыштың C төбесіндегі бұрышы тік бұрыш болатыны келіп шығады.

Теорема дәлелденді.

1-есеп. Егер үшбұрыштың қабырғалары: 1) $a=5$, $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ болса, ол тік бұрышты үшбұрыш бола ма?

Шешуі. 1) Екі кіші қабырғасы квадраттарының қосындысын есептейміз: $5^2+11^2=25+121=146$.

Енді үлкен қабырғасының квадратын есептейміз: $12^2=144$.

Алынған нәтижелерді салыстырсақ, $a^2+b^2\neq c^2$ қатынасы келіп шығады. Демек, берілген үшбұрыш тік бұрышты емес екен.

Жауабы: 1) $a=5$; $b=11$, және $c=12$ болғанда, үшбұрыш тік бұрышты болмайды.

2) Екі кіші қабырғасы квадраттарының қосындысын есептейміз:

$$7^2+6^2=49+36=85.$$

Содан соң үлкен қабырғасының квадратын есептейміз: $(\sqrt{85})^2=85$.

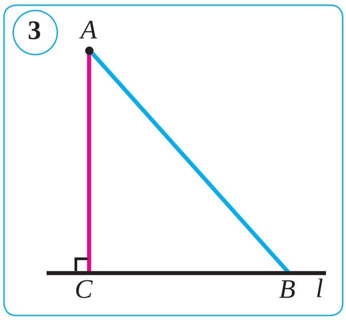
Демек, 85 = 85 – орынды. Соның нәтижесінде $b^2+c^2=a^2$ -қа ие боламыз. Бұдан үшбұрыштың тік бұрышты екендігі келіп шығады.

Жауабы: $a=\sqrt{85}$, $b=7$ және $c=6$ болғанда, үшбұрыш тік бұрышты болады.

3. Перпендикуляр және көлбеу.

l – түзуі және онда жатпайтын A нүктесі берілген делік. Анықтамасына орай, A -дан l түзуіне дейінгі ең қысқа қашықтық A -дан l -ге түсірілген AC перпендикулярының ұзындығына тең болады (3-сурет).

Расында да әрбір $B\in l$ үшін ACB үшбұрышы – тікбұрышты, бұнда AC мен CB – катеттер, ал AB гипотенуза болады. CB кесіндісі AB көлбеуінің l түзуіндегі ***проекциясы*** деп аталады.



Пифагор теоремасы AB – көлбеудің, AC – перпендикулярдың және CB – проекцияның ұзындықтарын төмендегі теңдікпен өрнектейді:

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Сондықтан *әрқашан* $AB > AC$ немесе $AB > BC$ болады. Былайша айтқанда, бір нүкте *арқылы жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің проекциясы көлбеуден кіші болады.*

Сондай-ақ *тең көлбеулердің проекциялары да тең болады; екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен болады.*

2-есеп. Диагональдары 10 см және 24 см-ге тең ромбының қабырғаларын табыңдар.

Шешуі. Ромбының диагональдары перпендикуляр және қиылысу нүктесінде тең екіге бөліну қасиетін пайдаланамыз. Бұнда ромбының катеттері 5 см-ге және 12 см-ге тең тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы болады. $5^2+12^2=25+144=169$, б.а. $169=13^2$.

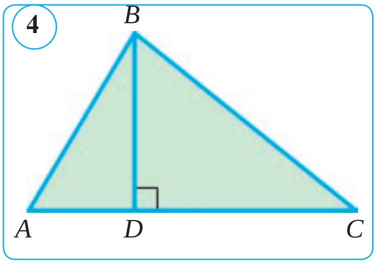
Демек, ромбының қабырғасы 13 см-ге тең екен. ***Жауабы:*** 13 см.

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

1. 1) Пифагор теоремасына кері теореманы өрнектеңдер.
2) Көлбеудің түзудегі проекциясы дегенде нені түсінеміз?
3) Катет гипотенузадан кіші екені дұрыс па?

2. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары төмендегі сандарға тең болуы мүмкін бе: 1) 11 см, 7 см, 17 см; 2) 3 см, 1,6 см, 3,4 см; 3) 3 см, 4 см, 6 см; 4) 2 см, $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{11}$ см? Жауабыңды негізде.

3. $\triangle ABC$-да $AB=13$ см, $BC=20$ см, BD– үшбұрыштың биіктігіне және 12 см-ге тең. AB, BC қабырғалардың AC қабырғаға түсірілген проекцияларының ұзындықтарын және AC қабырғаның ұзындығын табыңдар (4-сурет). Бос орындарға сәйкес жауаптарды қойыңдар.



Шешуі. $\triangle ABD$ және $\triangle BCD$ – тікбұрышты, өйткені $\angle ADB=\angle BDC=90°$. AB және BC қабырғалардың AC қабырғадағы проекциялары сәйкесінше AD және CD кесінділерінен тұрады.

$\triangle ABD$-дан Пифагор теоремасына орай:

$$AD^2=AB^2-BD^2=13^2-...^2=...-...=...(\text{см}).$$

Бұдан $AD=...$ см. $\triangle BCD$-дан Пифагор теоремасына орай:

$$CD^2=BC^2-BD^2=...^2-12^2=...-...=...\ (\text{см}).$$ Бұдан $CD=...$ см.

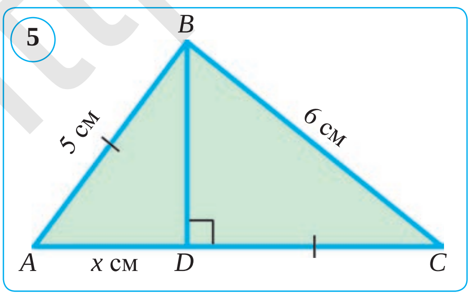
$AC=...+DC=...+...=...(\text{см})$.

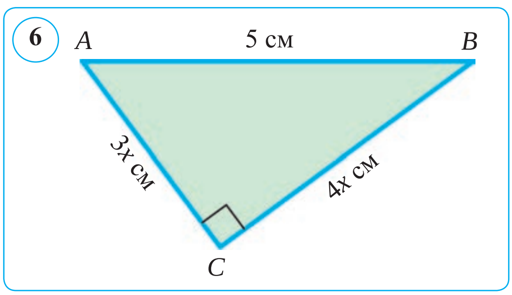
Жауабы: $AD=...$ см, $CD=...$ см, $AC=...$ см.

4. Белгісіз ұзындықтарды тап (5–6-суреттер).

5. Тікбұрышты үшбұрыштың екі қабырғасы 6 см және 8 см-ге тең. Үшінші қабырғаның ұзындығын табыңдар. Есептің шешімі нешеу?

6. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары төмендегі сандарға тең болуы мүмкін бе: 1) $a=12$, $b=35$, $c=37$; 2) $a=11$, $b=20$, $c=25$; 3) $a=18$, $b=24$, $c=30$; 4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?





19. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫНЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

Үш қабырғасы бойынша үшбұрыштың биіктігін табу.

Берілген ABC үшбұрыштың қабырғалары a, b және c болсын. Оның C төбесінен AB қабырғасына түсірілген $CD=h_c$ биіктігін табайық (1-*а*- сурет).

Биіктіктің табаны D нүктенің AB кесіндіге қарағанда қалай орналасуына қарай үш түрлі жағдай болады. Осы жағдайларды қарастырайық.

1-жағдай. D нүкте AB кесіндінің ішкі нүктесі болсын. Егер $AD=x$ белгілеу енгізсек, онда $DB=c-x$ болады (1-*а*- сурет). $\triangle ADC$ және $\triangle BDC$-лар тік бұрышты. Пифагор теоремасы бойынша:

$$h_c^2=b^2-x^2 \ (1) \ \text{және} \ h_c^2=a^2-(c-x)^2 \ (2).$$

Бұдан мынадай теңдік келіп шығады: $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$.

Бұл теңдіктен:

$b^2-x^2=a^2-c^2+2cx-x^2$, немесе $b^2=a^2-c^2+2cx$.

Соңғы теңдіктен x-ті табамыз:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{немесе} \quad x^2=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

x-тің бұл мәнін (1) теңдікке қойсақ:

$$h_c^2=b^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Бұл бөлшектің алымын көбейтінділерге бөлсек, төмендегіні шығарамыз:

$$h_c^2=\frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2}=\frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Шығарылған өрнектің алымындағы екі көбейтіндіні түрлендірсек:

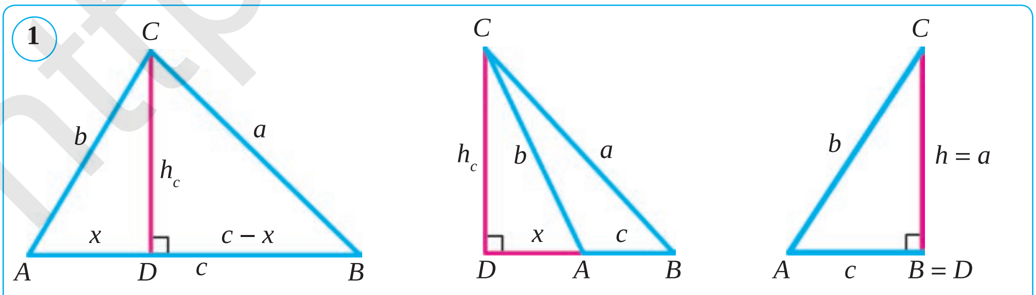
$$2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c) \ \text{және}$$

$$2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a).$$

Ол жағдайда $h_c^2=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2}$, бұдан

$$h_c=\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$$

Үшбұрыштардың жарты периметрін p деп белгілесек, онда:



а *ә* *б*

$$a + b + c = 2p,$$
$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Бұл өрнекті түбір астындағы өрнекке қойсақ:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Нақ сол сияқты

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{және} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2-жағдай. D нүкте AB-ның жалғасында жатады, яғни $DB = c + x$. Бұнда да дәлелденген нәтиже келіп шығады (1-*б* сурет).

3-жағдай. D нүкте B нүктемен, яғни $h = a$ биіктік катетпен беттеседі. Үшбұрыш тік бұрышты болады (1-*д* сурет).

Сұрақтар, есептер мен тапсырмалар

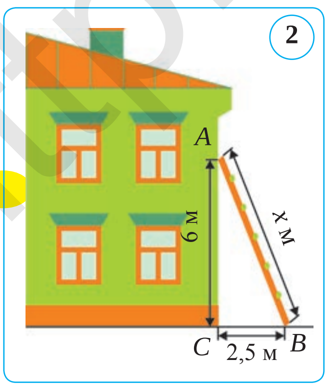
1. Қабырғалары: 1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 17 дм, 17 дм, 16 дм; 3) 4 дм, 13 дм, 15 дм болған үшбұрыштардың биіктіктерін тап.

2. Биіктігі h-қа тең болатын тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғасының ұзындығын тап. Егер: 1) h = 6 см; 2) h = 1,5 см болса, қабырғалары қандай болатынын табыңдар.

3. Үшбұрыштың қабырғалары: 1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $c = 6$ см; 2) $a = 13$ дм, $b = 14$ дм, $c = 15$ дм; 3) $a = 24$ см, $b = 25$ см, $c = 7$ см. Үлкен қабырғасына жүргізілген биіктікті тап.

4. Егер тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 12 см-ге тең болса, оның биіктігін тап.

5. Үшбұрыштың қабырғалары 8 см-ге, 10 см-ге және 12 см-ге тең. Осы үшбұрыштың ең үлкен және ең кіші биіктіктерін тап.



6. Қабырғалары: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8-ге тең болатын үшбұрыштың кіші биіктігін тап.

7. Үшбұрыштың қабырғалары a = 16 см, *б* = 12 см және с = 8 см. Үшбұрыштың кіші биіктігін табыңдар.

8. Сатының ұзындығын табыңдар (2-сурет).

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАҒИДАТТАР

20–21. НЕГІЗГІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАҒИДАТ ЖӘНЕ ОНЫҢ САЛДАРЛАРЫ

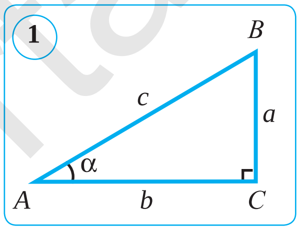
1. Негізгі тригонометриялық қағидаттар.

Бір бұрыштың тригонометриялық функциялары арасындағы байланысты бейнелейтін қағидаттарды қарастырамыз.

Теорема.

Кез келген α сүйір бұрышы үшін $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ теңдігі орынды.

Дәлелдеу. A төбесіндегі бұрышы α-ға тең сүйір бұрышты кез келген ABC үшбұрышын аламыз (1-сурет).



Пифагор теоремасына орай:

$BC^2+AC^2=AB^2$.

Теңдіктің екі жағын да AB^2-қа бөліп, төмендегі теңдікке ие боламыз:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1\,.$$

Бірақ $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Сонымен,

$$\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}. \qquad (1)$$

(1) теңдік **тригонометрияның негізгі қағидаты** деп аталады.

Бізге бір бұрыштың тригонометриялық функциялары арасындағы байланысты бейнелейтін үш теңдік белгілі:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (2),\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (3),\quad \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1\ (4).$$

(1) теңдіктің екі бөлігін де $\cos^2\alpha$-ға бөліп, (5) қағидатты шығарып аламыз:

$$\mathbf{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}}\quad \text{немесе}\quad \mathbf{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}. \qquad (5)$$

(1) теңдіктің екі жағын да $\sin^2\alpha$-ға бөліп, (6) қағидатты айқындаймыз:

$$\mathbf{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}}\quad \text{немесе}\quad \mathbf{1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}}. \qquad (6)$$

2. Негізгі тригонометриялық қағидаттан туындайтын салдарлар.

Кез келген α сүйір бұрышы үшін төмендегі теңдіктер орынды:

$$\mathbf{\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}}. \qquad (7)$$

$$\mathbf{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}}. \qquad (8)$$

1-есеп. Егер $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ болса, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$-ның мәндерін есептеңдер.

Шешуі. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Жауабы: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2-есеп. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 2) $1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$.

Шешуі. 1) Екі санның қосындысы квадратының формуласын және (6) негізгі тригонометриялық қағидатты пайдаланып, өрнекті ықшамдаймыз:

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\mathrm{ctg}^2\alpha.$$ ***Жауабы:*** $1+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

2) Айырманы жалпы түбірге (махражға) келтіреміз, содан соң алымдағы ұқсас мүшелерді ықшамдаймыз және (5) қағидатты пайдалана отырып табамыз:

$$1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha.$$ ***Жауабы:*** $1+\mathrm{tg}^2\alpha$.

3-есеп. Өрнекті ықшамдаңдар: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Шешуі. Екі санның қосындысының квадраты формуласын және негізгі тригонометриялық қағидатты пайдаланып, өрнекті ықшамдаймыз:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = 1$$ ***Жауабы:*** 1.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Қайсы теңдік тригонометрияның негізгі қағидаты деп аталады?

2) Тригонометриялық қағидаттарды өрнектейтін теңдіктердің қайсысын білесіңдер?

3)Негізгі тригонометриялық қағидаттан қандай салдарлар туындайды?

2. Егер: 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ болса, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ -ны; 2) $\cos\alpha = 0{,}8$ болса, $\sin\alpha$ -ны, $\mathrm{tg}\alpha$ -ны және $\mathrm{ctg}\alpha$ -ны; 3) $\cos\alpha = 0{,}28$ болса, $\sin\alpha$-ны, $\mathrm{tg}\alpha$-ны және $\mathrm{ctg}\alpha$-ны табыңдар.

3. Егер $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ болса, $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$-ны табыңдар.

Үлгі. Егер $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ болса, $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$-ны табыңдар.

Шешуі. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Демек, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Бұдан $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Енді sinα-ны есептейміз: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Жауабы: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

4. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Үлгі. Өрнекті ықшамдаңдар: $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Шешуі. Ықшамдау үшін қосылғыштарды топтастырып, жасаймыз:

$$1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Жауабы: $2\sin^2\alpha$.

5. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

6. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 7 см-ге және 24 см-ге тең. Үшбұрыштың ең кіші бұрышының тригонометриялық функциялары мәндерін табыңдар.

7. Егер: 1) $\mathrm{tg}A=2$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ болса, A сүйір бұрышы тригонометриялық функцияларының мәндерін табыңдар.

8. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Шешуі.

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}(1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha) = (1+\mathrm{tg}^2\alpha)(1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha) = 1+\mathrm{tg}^6\alpha.$$

Ықшамдау кезінде (5) қағидат және $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ формуласы пайдаланылды.

Жауабы: $1+\mathrm{tg}^6\alpha$.

9. Егер: 1) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ болса, cosα, tgα, ctg α -ны; 2) cosα = 0,6 болса, sinα, tgα және ctgα-ны табыңдар.

10. Бір бұрыштың синусы мен косинусы сәйкесінше төмендегі сандарға тең болатынын немесе тең болмайтынын анықтаңдар: 1) $\frac{1}{2}$ және $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$ және $\frac{3}{4}$.

11. Бір бұрыштың тангенсі мен котангенсі сәйкесінше төмендегі сандарға тең болатынын немесе тең болмайтынын анықтаңдар:

1) 0,4 және 2,5; 2) 1,1 және 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ және $\sqrt{5}-2$.

12. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

13. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 8 см-ге және 15 см-ге тең. Үшбұрыштың ең кіші бұрышы тригонометриялық функцияларының мәндерін табыңдар.

14. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. ТОЛЫҚТЫРҒЫШ БҰРЫШТЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫНА АРНАЛҒАН ФОРМУЛАЛАР

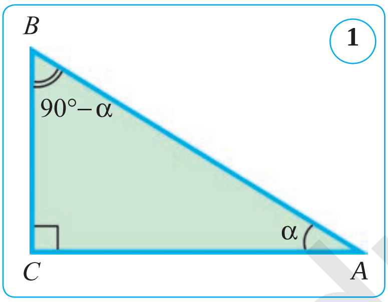
Толықтырғыш бұрыштардың тригонометриялық функцияларына арналған формулалар.

Қосындысы 90°-қа тең екі бұрышты толықтырғыш бұрыштар деп атайды. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары толықтырғыш бұрыштарға мысал бола алады, өйткені олардың қосындысы 90°-қа тең.

Біз қарастырған тригонометриялық қағидаттар бір бұрыштың түрлі тригонометриялық функциялары арасында өзара байланыстар орнатуға мүмкіндік береді. Енді тікбұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышы ортасындағы байланыстарды қарастырайық.

Теорема.

Кез келген тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы – α үшін $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ теңдіктері орынды.



Дәлелдеу. Гипотенузасы AB болған тікбұрышты ABC үшбұрышын қарастырамыз (1-сурет). Егер $\angle A = \alpha$ болса, онда $\angle B = 90°$-қа тең болады. Үшбұрыштың сүйір бұрыштарын синустар мен косинустар арқылы өрнектейміз. Анықтамаға орай:

$\sin B = \frac{AC}{AB}$ және $\cos A = \frac{AC}{AB}$, яғни $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; $\sin A = \frac{BC}{AB}$ және $\cos B = \frac{BC}{AB}$, яғни $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$.

Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теоремадан мынадай салдар келіп шығады:

Салдар. Кез келген сүйір бұрыш үшін $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$ теңдіктері орынды.

Бұл теңдіктердің дұрыстығын жоғарыда келтірілген формулаларды пайдаланып дәлелдеуді өздеріңе қалдырамыз.

A және *B* сүйір бұрыштары – бірін-бірі 90°-қа толықтырып тұратын бұрыштар. Осыны ескере отырып, жоғарыда шығарылған формулаларды төмендегідей етіп оқу керек:

– берілген бұрыштың синусы толықтырғыш бұрыштың косинусына тең;
– берілген бұрыштың косинусы толықтырғыш бұрыштың синусына тең;
– берілген бұрыштың тангенсі толықтырғыш бұрыштың котангенсіне тең;
– берілген бұрыштың котангенсі толықтырғыш бұрыштың тангенсіне тең.

1-есеп. A және B бұрыштары – тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары делік. Егер $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ болса, анда $\operatorname{tg}A$-ны табыңдар.

Шешуі. $\sin B = \cos A$, демек, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Енді A бұрышының синусын негізгі тригонометриялық қағидаттың салдарын пайдалана отырып табамыз: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Бұрыштың тангенсін синус пен косинус арқылы табамыз:

$$\operatorname{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Жауабы: 2.

2-есеп. Егер $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}20°$ болса, сүйір x бұрышты табыңдар.

Шешуі. $\operatorname{tg}20° = \operatorname{ctg}(90° - 20°) = \operatorname{ctg}70°$, демек, $\operatorname{ctg}x = \operatorname{ctg}70°$.

Бұдан $x = 70°$. *Жауабы:* $x = 70°$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Толықтырғыш бұрыштар деп нені айтады?
2) Тікбұрышты үшбұрыштардың екі сүйір бұрышы арасындағы қандай байланыстарды білесіңдер? Сәйкес формуланы табыңдар.

2. Егер: 1) $\sin x = \cos 40°$; 2) $\cos x = \sin 76°$; 3) $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}56°$; 4) $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}16°$ болса, сүйір x бұрышты табыңдар.

3. A және B бұрыштары – тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары. Егер $\cos A = 0{,}6$ болса, $\sin B$ мен $\cos B$-ны табыңдар.

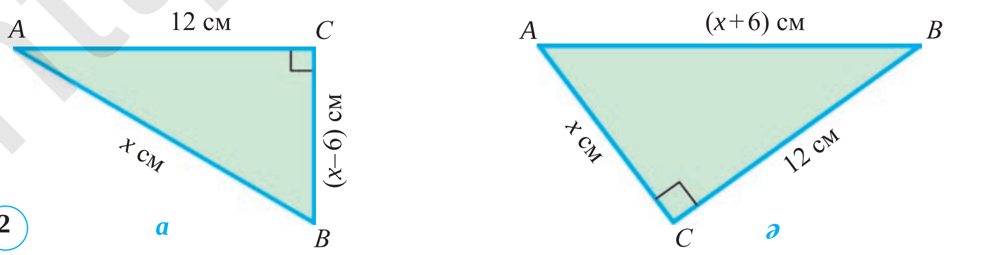
4. Бір бұрыштың синусы мен косинусы сәйкесінше төмендегі сандарға тең екенін яки тең еместігін анықтаңдар:
1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ және $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 және 0,4.

5. A және B бұрыштары – тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштары. Егер $\sin B = 0{,}5$ болса, $\cos A$ және $\operatorname{tg}A$-ны табыңдар.

6. Белгісіз ұзындықтарды табыңдар (2-сурет) және сүйір бұрыштардың синусын, косинусын, тангенсі мен котангенсін есептеңдер.

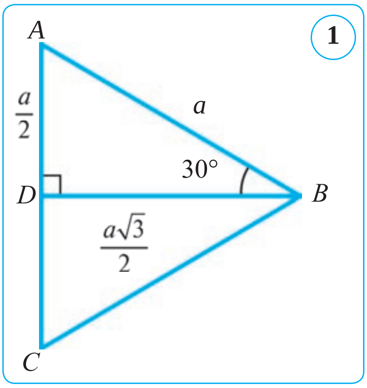
7. Егер $\sin(90° - \alpha) = 0{,}8$ болса, $\cos\alpha$ мен $\sin\alpha$-ны табыңдар.

8. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$.



2

23. 30°, 45°, 60°-ТЫҚ БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСЫН, КОСИНУСЫН, ТАНГЕНСІН ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІН ЕСЕПТЕУ



1. 30°-тық бұрыштың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін есептеу.

Тең бүйірлі ABC үшбұрышын алайық (1-сурет). Оған BD биіктігін жүргізсек, ол биссектриса мен медиананың міндетін атқарады. Сол себепті ABD үшбұрышы B төбесіндегі сүйір бұрышы 30°-қа тең тікбұрышты ($\angle D = 90°$) үшбұрыш болып табылады. Тең бүйірлі үшбұрыштың қабырғасы a-ға тең болсын делік. Ондай жағдайда $AD = \frac{a}{2}$. Пифагор теоремасына орай:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Анықтамаларға орай:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

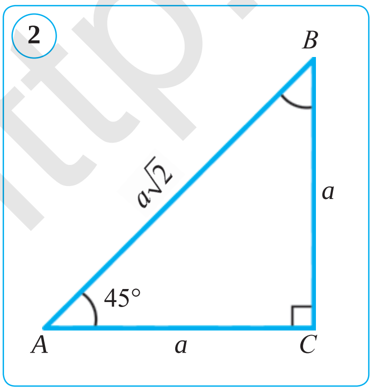
$$\mathrm{tg}30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \mathrm{ctg}30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

Толықтырғыш бұрыштың тригонометриялық функциялары үшін шығарылған формулалардың көмегімен ***60°-тық бұрыштың тригонометриялық функцияларының мәнін*** табамыз:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \mathrm{tg}60° = \mathrm{tg}(90° - 30°) = \mathrm{ctg}30° = \sqrt{3};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \mathrm{ctg}60° = \mathrm{ctg}(90° - 30°) = \mathrm{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 45°-тық бұрыштың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін есептеу.



45°-тық бұрыштың тригонометриялық функцияларын есептеу үшін тең бүйірлі тікбұрышты ABC үшбұрышын қарастырамыз (2-сурет). Бұл үшбұрышта $AC = BC = a$, $\angle A = \angle B = 45°$ болсын. Пифагор теоремасына орай, гипотенуза $AB = a\sqrt{2}$-ға тең болады. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциясының анықтамасы бойынша:

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

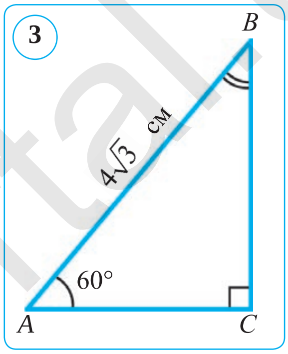
$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}45° = \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \ \mathrm{ctg}45° = \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

30° -тық, 45°-тық және 60°-тық бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі мәндерінің кестесін жасаймыз.

Сүйір бұрышты тригонометриялық функциялардың мәндерін, сандардың квадраттарын және олардан шығарылған арифметикалық квадрат түбірді арнайы кестелерден білуге немесе калькуляторды пайдаланып есептеуге болады.



Есеп. Тікбұрышты ABC үшбұрышының AB гипотенузасы $4\sqrt{3}$ см және $\angle A = 60°$ (3-сурет). Осы бұрыштың катеттерін табыңдар.

Шешуі. Бізге аян болғанындай, α бұрыштың қарама-қарсысындағы катет гипотенуза мен α бұрыш синусының көбейтіндісіне тең. Осыған орай:

$$BC = AB \sin A = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Бізге белгілісі сол, α бұрышқа жанасқан катет гипотенуза мен α бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең. Сол себепті:

$$AC = AB \cos A = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Жауабы: $BC = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Есептеңдер: 1) $\sin 30° + \mathrm{tg}45°$; 2) $\cos 30° \cdot \mathrm{tg}60°$; 3) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.
2. Тең қабырғалы үшбұрыш сал және оның биіктігін жүргіз. Қажетті өлшеулерді орындап, 30°-тық және 60°-тық бұрыштардың тригонометриялық функцияларын есепте, алынған нәтижелерді кестедегілермен салыстыр.
3. $ABCD$ параллелограмының BD диагоналі AB қабырғаға перпендикуляр және 16 см-ге тең. Егер BDA бұрышы 30°-қа тең болса, параллелограмның қабырғаларын тап.
4. Тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті $6\sqrt{3}$-ға, ал бұл катеттің қарсысындағы бұрыш 60°-қа тең. Гипотенуза мен екінші катетті табыңдар.
5. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$.
6. Тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті 2-ге, ал бұл катеттің қарсысындағы бұрыш 60°-қа тең. Гипотенуза мен екінші катетті табыңдар.
7. Өрнекті ықшамдаңдар: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.
8. Есептеңдер: 1) $\cos 45° \cdot \sin 45°$; 2) $\sin 60° \cdot \mathrm{tg}30°$; 3) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$.

§ 6. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ

24. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

Оқулықтың соңында бүтін санды градустар мен 1^{o}-тан 89^{o}-қа дейінгі бұрыштарға сәйкес келген тригонометриялық функциялар (он мыңнан бірге дейінгі дәлдікпен) көрсетілген кесте келтірілген. Бұл кесте төмендегідей түзілген: сол жақтағы бірінші бағанаға (жоғарғы жағына "градустар" деп жазылғанына) градустардың сандары 1^{o}, 2^{o}, 3^{o}, ...45^{o}-қа дейін орналастырылған; екінші бағанаға (жоғарғы жағына "синустар" деп жазылғанына) синустардың бірінші бағанада көрсетілген бұрыштарға сәйкес келетін мәндері қойылған; 3-бағанаға тангенстердің, одан соң котангенстердің және одан кейін косинустардың мәндері орналастырылған. Ең соңғы 6-бағанаға тағы да градустардың сандары: яғни 45^{o}, 46^{o}, 47^{o}, ... және ары қарай 89^{o}-қа дейін орналастырылған. Ал бұл (орынды үнемдеу үшін) төмендегіге негізделіп жасалған: толықтырғыш бұрыштың тригонометриялық функцияларына арналған формулаларға сәйкес $\sin a = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ және тағы басқалар. Демек, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ және т.б. Сондықтан жоғарыдағы "синустар" деп жазылған бағананың астына "косинустар"; жоғарыдағы "тангенстер" деген жазуы бар (сол жақтан 3-) бағананың астына "котангенстер" деп жазылған және т.б. Осылайша 1^{o}-тан 45^{o}-қа дейінгі бұрыштар үшін градус сандарын сол жақтағы бірінші бағанадан бастап, ал тригонометриялық функциялардың аттарын жоғарыдан бастап оқу, ал 45^{o}-тан 89^{o}-қа дейінгі бұрыштар үшін градус сандарын оң жақтағы соңғы бағанадан бастап, функциялардың аттарын бағаналардың астынан бастап оқу керек. Мәселен, кестеден тангенстің мәнін табайық: $tg 35° = 0{,}7002$.

1. Берілген бұрыш бойынша тригонометриялық функцияларды табу.

1-есеп. $\sin 20°$-ты табыңдар.

Шешуі. $1° \le 20° \le 45°$ болғандығы үшін *сол жақтағы* "градустар" сөзі жазылған бағанадан 20-ны аламыз және оған сәйкес жолдағы екінші («$\sin\alpha$») бағанадан 0,3420 мәнін табамыз. Міне, осы сан $\sin 20^{o}$-тың мәні болып табылады. Демек, $\sin 20° \approx 0{,}3420$.

2-есеп. $\sin 75°$ -ты табыңдар.

Шешуі. $45° \le 75° \le 89°$ болғандығы үшін *оң жақтағы* "градустар" сөзі жазылған бағанадан 75-ті алдамыз және оған сәйкес жолдың төртінші (төмендегі «$\sin\alpha$») бағанасынан 0,9659 мәнін табамыз. Міне, осы сан $\sin 75^{o}$-тың мәні болып табылады. Демек, $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

3-есеп. $\cos 33°$ -ты табыңдар.

Шешуі. $1° \le 33° \le 45°$ болғаны үшін *сол жақтағы* "градустар" сөзі жазылған бағанадан 33-ті аламыз және оған сәйкес жолдың төртінші («$\cos\alpha$») бағанасынан 0,8387 мәнін табамыз. Міне, осы сан $\cos 33^{o}$-тың мәні болып саналады. Демек, $\cos 33° \approx 0{,}8387$.

Тангенстер мен котангенстердің мәндері сәйкесінше синустардың және косинустардың мәндері кестеден қалай табылған болса, нақ солай табылады.

2. Бұрышты тригонометриялық функциялар бойынша табу.

4-есеп. Егер sin$x$ = 0,9848 болса, x сүйір бұрышты табу керек.

Шешуі. Синусы 0,9848-ге тең бұрышты табу үшін тригонометриялық функциялардың мәндері орналасқан бірінші яки төртінші бағанадан сол мәнді іздестіреміз. Бұл мән төртінші (sinα) бағанада бар, яғни іздестіріліп жатқан бұрыш 45º-тан үлкен, ал 89º-тан кіші. Осы жолға сәйкес оң жақтағы "градустар" бағанасынан 80 санын табамыз. Демек, іздестіріліп жатқан бұрыш шамамен 80º-қа тең. ***Жауабы:*** $x \approx 80°$.

Шешуі. Тангенсі 0,7002-ге тең бұрышты табу үшін тригонометриялық функциялардың мәндері орналасқан екінші немесе үшінші бағанадан осы мәнді іздестіреміз. Бұл мән екінші (tgα) бағанада бар, яғни іздестіріліп жатқан бұрыш 45º-тан кіші. Осы қатарға сәйкес сол жақтағы "градустар" бағанасынан 35 санын тауып аламыз. Демек, іздестіріліп жатқан бұрыш шамамен 35º-қа тең. ***Жауабы:*** $x \approx 35°$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Кестені пайдалана отырып табыңдар:

a) 1) sin3°; 2) sin21°; 3) sin50°; 4) sin82°; 5) sin40°;
b) 1) cos9°; 2) cos12°; 3) cos41°; 4) cos67°; 5) cos4°;
d) 1) tg5°; 2) tg89°; 3) tg15°; 4) tg60°; 5) tg50°;
e) 1) ctg10°; 2) ctg30°; 3) ctg75°; 4) ctg52°; 5) ctg5°.

2. Кестені пайдалана отырып, x сүйір бұрышты табыңдар:

a) 1) sin$x\approx$0,1392; 2) sin$x\approx$0,8590; 3) sin$x\approx$0,5150;
b) 1) cos$x\approx$0,7431; 2) cos$x\approx$0,6428; 3) cos$x\approx$0,0523;
d) 1) tg$x\approx$0,4663; 2) tg$x\approx$11,430; 3) tg$x\approx$0,1763;
e) 1) ctg$x\approx$0,9004; 2) ctg$x\approx$1,192; 3) ctg$x\approx$0,3640.

3. (*Практикалық жұмыс*). Транпортирдің көмегімен сүйір бұрышы 40º-қа тең тікбұрышты үшбұрыш салыңдар. Оның қабырғаларын өлшеп, сол бұрыштың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін есептеңдер.

4. Өрнектің мәнін табыңдар: $\mathrm{tg}15°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}60°\cdot\mathrm{tg}75°$.

Шешуі. $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$ және $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$ формулаларын пайдаланып, өрнектің мәнін есептеңдер (бос орындарға сәйкес жауапты жазыңдар):

$$\mathrm{tg}15°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}60°\cdot\mathrm{tg}75°=\mathrm{tg}15°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}(90°-30°)\cdot\mathrm{tg}(90°-15°)=$$
$$=(\mathrm{tg}15°\cdot\mathrm{ctg}...°)\cdot(\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{ctg}...°)=...\cdot...=....$$

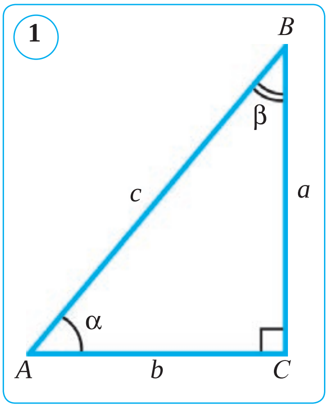
5. Дәлелдеңдер: $\mathrm{tg}1°\cdot\mathrm{tg}2°\cdot...\cdot\mathrm{tg}88°\cdot\mathrm{tg}89°=1$.

6. Өрнекті ықшамдаңдар: 1) $\cos^2\alpha+\cos^2(90°-\alpha)$; 2) $\sin^2\alpha-\cos^2(90°-\alpha)$.

7. Кестені пайдаланып табыңдар: 1) sin70°; 2) cos55°; 3) tg10°; 4) ctg18°.

8. Кестені пайдаланып, x сүйір бұрышты табыңдар: sin$x \approx$ 0,1392.

25. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ



Үшбұрыштарды шешу үшбұрыштың белгілі бұрыштары мен қабырғалары бойынша оның белгісіз қабырғалары мен бұрыштарын табудан тұрады. Тікбұрышты үшбұрышты қабырғасы мен сүйір бұрышы немесе екі қабырғасы бойынша шешуге болады. Тікбұрышты үшбұрыштарды шешу кезінде 1-суреттегі белгілеулерді пайдаланамыз. Бұл үшін мәселенің мәнінен туындайтын жағдайларды ескере отырып, тригонометриялық функциялардың мәндерін он мыңнан бір бөліміне дейін (оқулықтың соңындағы қосымшаға қараңдар) немесе қажет болған жағдайда мыңнан бір бөліміне дейін, қабырғалардың ұзындықтарын жүзден бірге дейін, бұрыштың градустық өлшемін бірге дейін дөңгелектеп пайдалануға келісіп аламыз.

Тікбұрышты үшбұрыштың элементтерін оның белгілі екі элементі бойынша есептеудің 4 жағдайын қарастырамыз.

1-жағдай. Үшбұрышты гипотенузасы және сүйір бұрышы бойынша шешу.

1-есеп. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $c = 10$ см және сүйір бұрышы $\alpha = 50^{\circ}$ берілген. *а, б* катеттерін және β сүйір бұрышын табыңдар.

Шешуі. 1) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда $\beta=90^{\circ}-\alpha=90^{\circ}-50^{\circ}=40^{\circ}$.

1-әдіс. 2) α бұрыштың қарсысындағы катет гипотенуза мен α бұрыш синусының көбейтіндісіне тең, яғни $a=c\ \sin\alpha$.

Демек, $a = 10\sin 50^{\circ} = 10\cdot 0,7660 \approx 7,66$ (см).

3) α бұрышқа жанасқан катет гипотенуза мен α бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең, яғни $b=c\ \cos\alpha$.

Демек, $b = 10\cos 50^{\circ} = 10\cdot 0,6428 \approx 6,43$ (см).

2-әдіс. 2) $a=c\ \cos\beta$; $a = 10\cos 40^{\circ} = 10\cdot 0,7660 \approx 7,66$ (см).

3) $b=c\ \sin\beta$; $b = 10\sin 40^{\circ} = 10\cdot 0,6428 \approx 6,43$ (см).

Жауабы: $a \approx 7,66$ см; $b \approx 6,43$ см; $\beta=40^{\circ}$.

2-жағдай. Үшбұрышты катеті және сүйір бұрышы бойынша шешу.

2-есеп. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті $a = 6$ см және сүйір бұрышы $\beta = 22^{\circ}$ берілген. *б* катетті, *с* гипотенузаны және α сүйір бұрышты табыңдар.

Шешуі. 1) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Ондай жағдайда $\alpha=90^{\circ}-\beta=90^{\circ}-22^{\circ}=68^{\circ}$.

1-әдіс. 2) Гипотенуза β сүйір бұрышқа жанасқан катеттің β бұрышының косинусына қатынасына тең, яғни $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

Демек, $c = \dfrac{a}{\cos\beta} = \dfrac{6}{\cos 22^\circ} = \dfrac{6}{0{,}9272} \approx 6{,}47\,(\text{см})$.

3) Анықтамаға орай: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$. Бұдан $b = a\operatorname{tg}\beta$, яғни

$$b = 6\operatorname{tg}22^\circ = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}42\ \ (\text{см}).$$

2-әдіс. 2) Гипотенуза α сүйір бұрыш қарсысындағы катеттің α бұрышының синусына қатынасына тең, яғни $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Демек, $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{6}{\sin 68^\circ} = \dfrac{6}{0{,}9272} \approx 6{,}47$ (см).

3) Анықтамаға орай: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$. Бұдан $b = a\operatorname{tg}\beta$, яғни

$b = 6\operatorname{tg}22^\circ = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}45$ (см). ***Жауабы:*** $c \approx 6{,}47$ см, $b \approx 2{,}42$ см, $\alpha = 68^\circ$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Тікбұрышты үшбұрышта ұзындығы 7 см-ге тең катет 60º-тық бұрышқа жанасқан. Осы үшбұрыштың гипотенузасын табыңдар.

2. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 12 см-ге, ал катеттерінің біреуі $6\sqrt{2}$ см-ге тең. Үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар.

3. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $c = 10$ см және сүйір бұрышы $\alpha = 42^\circ$ берілген. *а, б* катеттері мен β сүйір бұрышын табыңдар. Есепті екі әдіспен (мәтіндегі 1-есепке қараңдар) шешіңдер.

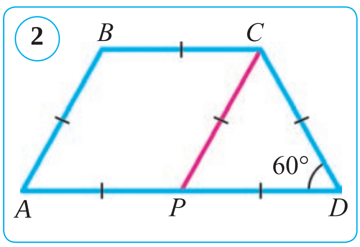
4. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті $б = 4$ см және сүйір бұрышы $\beta = 18^\circ$ берілген. *а* катетін, *c* гипотенузасын және α сүйір бұрышын табыңдар. Есепті екі әдіспен (мәтіндегі 2-есепке қараңдар) шешіңдер.

5. Өрнекті ықшамдаңдар: $\dfrac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} - \sin\alpha\cos(90^\circ - \alpha)$.

6. Тең бүйірлі трапеция негізіндегі бұрыш 60º-қа, бүйір қабырғасы шағын негізге, яғни $2\sqrt{2}$ см-ге тең. Осы трапецияның үлкен негізін табыңдар. Бос орындарға сәйкес жауаптарды қойыңдар.

Шешуі. *ABCD* трапециясы – тең бүйірлі, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AB = DC = BC = 2\sqrt{2}$ см. $CP \parallel BA$ жүргіземіз (2-сурет). Ондай жағдайда $\angle A = \angle CPD = 60^\circ$ ($CP \parallel BA$ мен AD және қиюшының қиылысуынан туындаған ... бұрыштар). *CPD* үшбұрышының бұрыштары ...º-тан, демек, ол ... қабырғалы. Сондықтан $CP = PD = ... = 2\sqrt{2}$ см. Ондай жағдайда $AD = 2 \cdot 2\sqrt{2} = ...$ (см).

Жауабы: $4\sqrt{2}$ см.



7. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $c = 8$ см және сүйір бұрышы $\alpha = 30^\circ$ берілген. Оның *а, б* катеттері мен β сүйір бұрышын табыңдар. Есепті екі әдіспен (мәтіндегі 1-есепке қараңдар) шешіңдер.

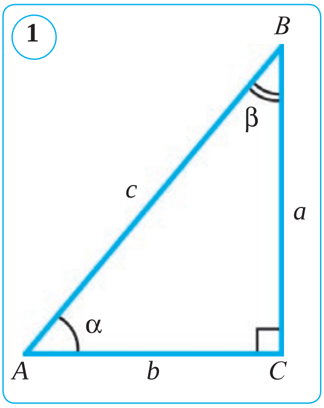
26. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ (ЖАЛҒАСЫ)

3-жағдай. Үшбұрышты гипотенузасы мен катеті бойынша шешу.

1-есеп. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $c = 13$ см және катеті $a = 5$ см берілген. Оның *б* катетін, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар.

Шешуі. 1) Пифагор теоремасына орай:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}.$$



1-әдіс. 2) α сүйір бұрышы синусының анықтамасы бойынша:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0,3846.$$

Бұдан $\alpha \approx 23°$.

3) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 23° = 67°.$$

Жауабы: $b = 12$ см, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

2-әдіс. 2) β сүйір бұрышы синусының анықтамасы бойынша:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0,9231.$$

Бұдан $\beta \approx 67°$.

3) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 67° = 23°.$$

Жауабы: $b = 12$ см, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

4-жағдай. Үшбұрышты екі катеті бойынша шешу.

2-есеп. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері а = 8 см және б = 15 см берілген. Оның гипотенузасын, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар.

Шешуі. 1) Пифагор теоремасына орай:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

1-әдіс. 2) α сүйір бұрышы тангенсінің анықтамасы бойынша:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0,5333.$$

Бұдан $\alpha \approx 28°$.

3) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда $\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°$. ***Жауабы:*** $c = 17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

2-әдіс. 2) β сүйір бұрышы тангенсінің анықтамасы бойынша:

$$\text{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

Бұдан $\beta \approx 62°$.

3) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 62° = 28°.$$

Жауабы: $c = 17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

3-әдіс. 1) α сүйір бұрышы котангенсінің анықтамасы бойынша:

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

Бұдан $\alpha \approx 28°$.

2) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең. Онда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

3) Пифагор теоремасына орай:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

Жауабы: $c = 17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 9\sqrt{2}$ см, катет $a = 9$ см. Осы үшбұрыштың $б$ катетін, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

2. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, катеттері $a = 6\sqrt{3}$ см және $b = 6$ см. Осы үшбұрыштың c гипотенузасын, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

3. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, катеттері $a = \sqrt{11}$ см және $b = 5$ см. Осы үшбұрыштың c гипотенузасын, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

4. CD кесінді – тікбұрышты ABC ($\angle C = 90°$) үшбұрышының гипотенузасына түсірілген биіктігі. Дәлелдеңдер:

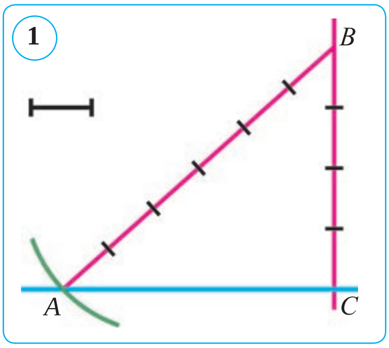
1) $\frac{CD}{\sin A} = AB \cos A$; 2) $AD\,\text{tg}A = BD\,\text{tg}B$.

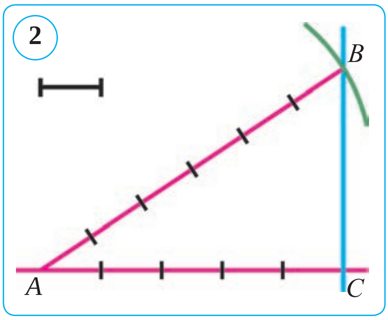
5. Есептеңдер: $2\sin 60° + 4\cos 60° - \text{ctg}30° - 2\text{tg}45°$.

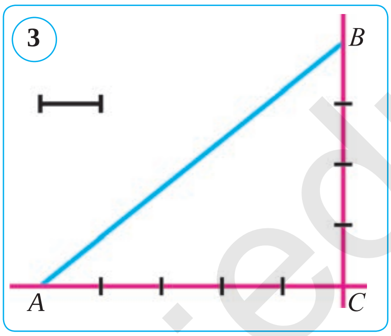
6. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 25$ см, катет $b = 24$ см. Осы үшбұрыштың а катетін, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

7. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, катеттері $a = 10$ см және $b = 24$ см. Осы үшбұрыштың с гипотенузасын, α және β сүйір бұрыштарын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

27. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫ САЛУ







1-есеп. Синусы $\frac{4}{5}$-ке тең бұрышты салу.

Бұл үшін *C* тік бұрышын саламыз және оның қабырғалараның бірінде бұрыштың төбесінен бастап 4 ерікті масштаб бірлігіне тең *CB* кесіндісін жүргіземіз (1-сурет). Орталығы *B* нүктеде жатқан және радиусы 5 масштаб бірлігіне тең радиусты доғаны бұрыштың екінші қабырғасымен қиылысқанша созамыз. Олардың қиылысу нүктесін *A*-мен белгілейміз. Сосын *A* және *B* нүктелерін біріктіріп, тікбұрышты *ABC* үшбұрышын жасаймыз. Бұндағы *A* – іздестіріліп жатқан бұрыш, оның синусы $\frac{4}{5}$-ке тең болады, яғни $\sin A = \frac{4}{5}$.

2-есеп. Косинусы $\frac{5}{6}$-ке тең бұрышты салу.

Бұл үшін *C* тік бұрышын саламыз және оның қабырғаларының бірінде бұрыш төбесінен бастап 5 ерікті масштаб бірлігіне тең *AC* кесіндісін жүргіземіз (2-сурет). Орталығы *A* нүктесінде және радиусы 6 масштаб бірлігіне тең радиусты доғаны бұрыштың екінші қабырғасымен қиылысқанша созамыз. Олардың қиылысу нүктесін *B*-мен белгілейміз. Содан соң *A* және В нүктелерін біріктіріп, тікбұрышты *ABC* үшбұрышын жасаймыз. *A* – іздестіріліп жатқан бұрыш, оның косинусы $\frac{5}{6}$ -ке тең болады, яғни $\cos A = \frac{5}{6}$.

3-есеп. Тангенсі $\frac{4}{5}$ -ке тең бұрышты салу.

Бұл үшін *C* тік бұрышын саламыз және оның қабырғаларының бірінде бұрыш төбесінен бастап 5 ерікті масштаб бірлігіне тең *CA* кесіндісін, ал екіншісінде 4 масштаб бірлігіне тең *CB* кесіндісін жүргіземіз (3-сурет). Содан соң *A* және *B* нүктелерін біріктіріп, тікбұрышты *ABC* үшбұрышын жасаймыз. *A* – іздестіріліп жатқан бұрыш, оның тангенсі $\frac{4}{5}$ -ке тең болады, яғни $\mathrm{tg}A = \frac{4}{5}$.

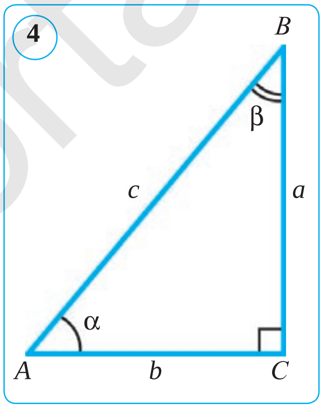
Берілген котангенс бойынша бұрыш салу талап етілгенде де нақ осындай жұмыстар жүргізуге тура келеді, тек ол кезде іздестіріліп жатқан бұрыш үшін AC-ге жанасқан катетті алу керек.

Тікбұрышты үшбұрыштың катеті әрқашан гипотенузадан кіші болады. Сондықтан сүйір бұрыштың синусы мен косинусы әрқашан 1-ден кіші болады.

Катеттердің ұзындықтарын салыстыру көрсеткеніндей, олар өзара тең, бірі екіншісінен үлкен немесе кіші болуы да мүмкін. Сондықтан сүйір бұрыштың тангенсі мен котангенсі кез келген оң сан болуы да ықтимал. Демек, олардың әрқайсысы катеттерге байланысты түрде 1-ден кіші, 1-ден үлкен және 1-ге тең болып келеді.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) $\operatorname{tg} A = \frac{3}{5}$; 2) $\sin A = \frac{2}{3}$ -ға тең болған, тікбұрышты ABC ($\angle C = 90°$) үшбұрышын салыңдар.



2. 1) $\sin A = \frac{5}{8}$; 2) $\cos A = \frac{3}{4}$ -ға тең болған, тікбұрышты ABC ($\angle C = 90°$) үшбұрышын салыңдар.

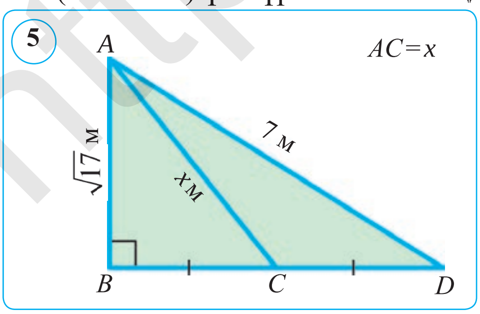
3. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 7\sqrt{2}$ см, катет $b = 7$ см. Үшбұрыштың a катетін, α және β сүйір бұрыштарын (4-сурет) табыңдар.

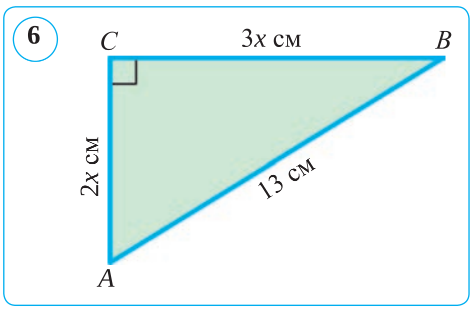
4. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 12$ см, $\alpha = 60°$. Үшбұрыштың а, б катеттерін, β сүйір бұрышын (4-сурет) табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.

5. Белгісіз ұзындықтарды табыңдар (5–6-суреттер).

6. Тікбұрышты ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 74$ см, $\sin\alpha = \frac{12}{37}$. Осы үшбұрыштың периметрін (4-сурет) табыңдар.

7. 1) $\sin A = \frac{4}{7}$; 2) $\cos A = \frac{3}{5}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{2}{5}$ -ге тең болған тікбұрышты ABC ($\angle C = 90°$) үшбұрышын салыңдар.





28. ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

1. Пифагор теоремасының практикалық қолданылуына қатысты есептер.

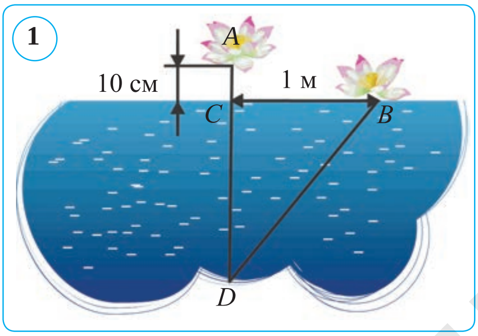
1-есеп. Лилия су гүлінің көл бетінен көрініп тұратын бөлігі 10 см. Егер гүлді бастапқы күйінен бір бүйірге қарай 1 м тартатын болса, ол су деңгейімен бірдей болады. Көлдің сол арадағы тереңдігін анықтаңдар.

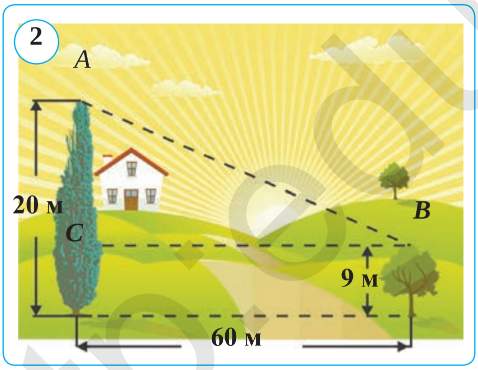
Шешуі. Көлдің іздестіріліп отырған CD тереңдігін x-пен белгілейміз (1-сурет). $BD = AD = AC + CD = 0{,}1 + CD = 0{,}1 + x$ (*м*)-ге тең болады. Бұл жағдайда тікбұрышты BCD үшбұрышынан Пифагор теоремасына орай төмендегілерге ие боламыз: $BD^2 - CD^2 = BC^2$, $(0{,}1 + x)^2 - x^2 = 1$, бұдан:

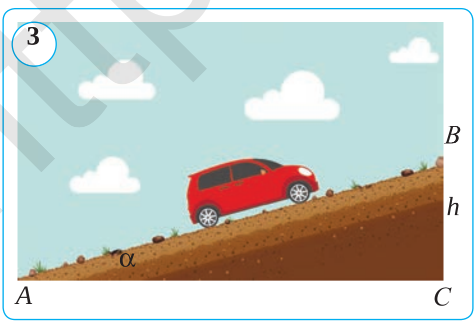
$$0{,}01 + 0{,}2x + x^2 - x^2 = 1; \qquad 0{,}2x = 0{,}99; \quad x = 0{,}99 : 0{,}2;$$

$$x = 9{,}9 : 2; \quad x = 4{,}95 \text{ (м)}.$$

Жауабы: көлдің тереңдігі 4,95 м.





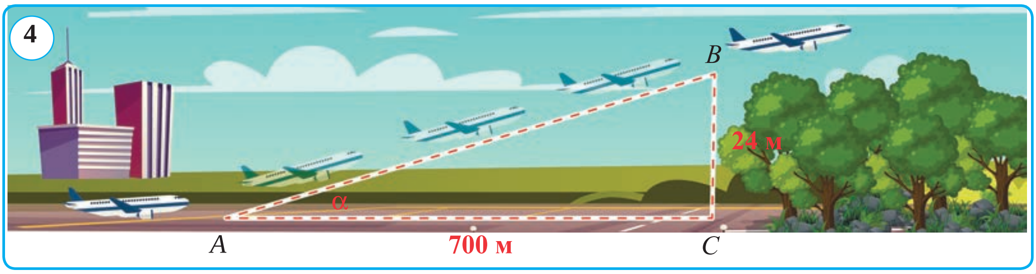


2-есеп. Бір ағаштың биіктігі 20 м, екіншісінікі 9 м. Бұл ағаштардың арасындағы қашықтық 60 м-ді құрайды. Осы екі ағаштың ұштары арасындағы қашықтықты табыңдар (2-сурет). Дербес шешіңдер.

3-есеп. Екі қарағай ағашының биіктіктері сәйкесінше 21 м және 28 м, ал ағаштардың арасындағы қашықтық 24 м-ді құрайды. Осы екі ағаштың ұштары арасындағы қашықтықты табыңдар (2-суретке қараңдар). Дербес шешіңдер.

2. Сүйір бұрыш синусының практикалық қолданылуына қатысты есеп.

Қия беткейге қарай өрлеген тегіс жолдың тіктігін көкжиекпен салыстырғандағы көтерілу бұрышы арқылы беруге болады (3-сурет). Көбінесе көтерілу бетінің тіктігін көтерілу бұрышынан гөрі басып өтілген жол ұзындығының көтерілу биіктігі арқылы берген қолайлы. Мысалы, машина 100 м қашықтықты басып өткенде 2 м биіктікке көтерілген делік. Бұндай жағдайда көтерілу орнының тіктігі биіктіктің басып өтілген жолға қатынасымен белгіленеді. Көтерілу биіктігі $\dfrac{2 \text{ м}}{100 \text{ м}} = 0{,}02$-ге тең. Бұл қаты-



нас басып өтілген жолға байланысты емес. Қия беткейден түскенде де нақ осындай пікір жүргізуге болады.

4-есеп. Жеңіл машина қиялығы 15°-тық беткеймен көтеріліп барады (3-суретке қараңдар). Ол беткейге көтерілер жерден 300 м-дей жолды басып өткеннен кейін көкжиекпен салыстырғанда неше метр биіктікте болады?

Нұсқау. Сүйір бұрыш синусының анықтамасын қолданып, көтерілу биіктігін табыңдар.

3. Сүйір бұрыш тангенсінің практикалық қолданылуына қатысты есептер.

5-есеп. Ұшақтың ұшу жолын бойлап әуеге көтерілу нүктесінен 700 м қашықтықта орман алқабы орналасқан, ондағы ағаштардың максималдық биіктігі 24 м-ге тең. Ұшақ осы ағаштарға тиіп кетпеу үшін әуеге қандай бұрышпен көтерілуге тиіс?

Шешуі. Тікбұрышты ABC ($\angle C=90°$) үшбұрышында $AC=700$ м, $BC=24$ м (4-сурет). Сүйір бұрыш тангенсінің анықтамасынан табамыз:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0,0343 \Rightarrow \alpha \approx 2°$$

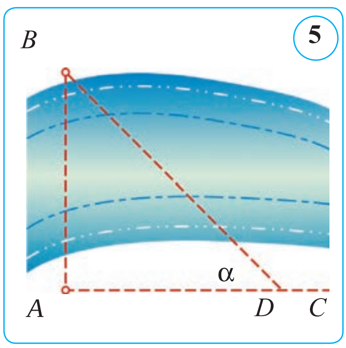
Жауабы: ұшақ ағаштарға тиіп кетпеу үшін әуеге ұшу нүктесінен 2°-тан төмен емес бұрыш бойынша көтерілуге тиіс.

6-есеп. A пунктінен өзеннің арғы бетіндегі баруға болмайтын B пунктіне дейінгі қашықтықты табыңдар (5-сурет).

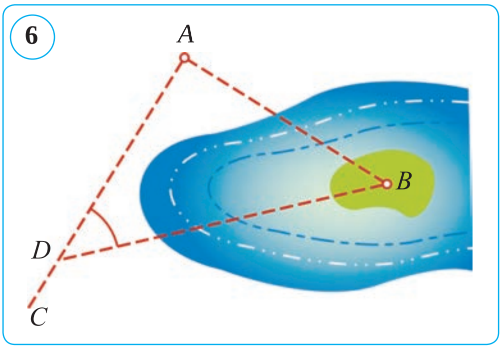
Шешуі. Устурлоб (астролябия, горизонталдық жазықта орналасқан бұрыштарды өлшеу үшін қолданылатын құрал, яғни бұрыш өлшегіш) немесе эккер көмегімен A нүктесінде тікбұрышты BAC бұрышын саламыз. AC түзуі бойынан кез келген D нүктесін алып, устурлобтың көмегімен ADB бұрышын өлшейміз. Ол 44°-тық бұрышқа тең болсын делік. Содан соң AD қашықтықты өлшейміз, ол 120 м-ге тең болсын. AB қашықтықты сүйір бұрыштың тангенсін пайдалана отырып табамыз:

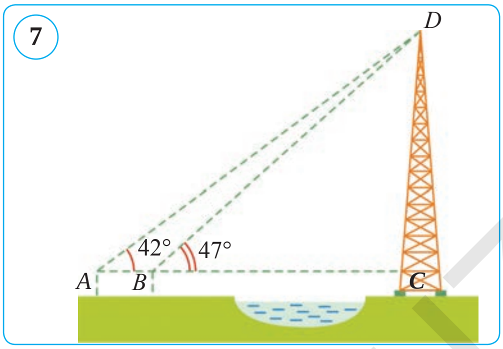
$$\frac{AB}{120} = \mathrm{tg}44° \Rightarrow AB = 120 \cdot \mathrm{tg}44° \approx 120 \cdot 0,9657 \approx 116 \text{ (м)}.$$

Жауабы: ≈ 116 м.



7-есеп. A пунктінен баруға болмайтын аралдағы B пунктіне дейінгі қашықтықты табыңдар (6-сурет).





Нұсқау. 5-есептегідей етіп талқылау керек. $\angle ADB = 48°$ және $AD = 200$ м деп алып, есепті шешіңдер.

8-есеп. Негізінде баруға болмайтын нысанның, мысалы, электр бағанасының биіктігін өлшеу талап етілген болсын (7-сурет).

Шешуі. Тікбұрышты ACD үшбұрышын қарастырамыз. Бұл үшбұрыштың A бұрышын устурлобтың көмегімен өлшеуге болады делік, ол 42°-қа тең болсын.

Тікбұрышты BCD үшбұрышындағы DBC бұрышын өлшейміз, ол 47°-қа тең болсын.

Сүйір бұрыш тангенсінің анықтамасы негізінде ACD-дан табамыз:

$$\frac{CD}{AC} = \text{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\text{tg}42°}. \qquad (1)$$

Сүйір бұрыш тангенсінің анықтамасы негізінде BCD-дан табамыз:

$$\frac{CD}{BC} = \text{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\text{tg}47°}. \qquad (2)$$

A, B және C нүктелері бір түзудің бойында жатады. (1)-ден (2)-ні айырып аламыз:

$$AC - BC = \frac{CD}{\text{tg}42°} - \frac{CD}{\text{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\text{tg}42°} - \frac{1}{\text{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781}.$$

$AC - BC$, яғни AB қашықтықты тікелей өлшеуімізге болады делік, ол 12 м-ге тең болсын. Онда

$$CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} = \frac{AB}{0{,}1781} = \frac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4 \text{ (м)}.$$

Жауабы: $\approx 67{,}4$ м.

Қарастырылған мәселелерге ұқсас жағдайлар айналамызда толып жатыр. Өздерің дербес есептер құрастырыңдар және шешіңдер.

29–30. 2-БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ. ҚАТЕЛЕР БОЙЫНША ЖҰМЫС ІСТЕУ

1. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 20 см-ге, сүйір бұрыштарының біреуінің синусы 0,5-ке тең. Үшбұрыштың катеттерін табыңдар.
2. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 13 см-ге, сүйір бұрыштарының біреуінің косинусы $\frac{5}{13}$ -ке тең. Үшбұрыштың катеттерін табыңдар.
3. Өрнекті ықшамдаңдар: $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.
4. Қабырғалары: 1) $a=c=17$ см, $b=16$ см; 2) $a=30$ см, $b=34$ см, $c=16$ см болған үшбұрыштың биіктігін табыңдар.

2-ТЕСТ Өзіңді сынап көр!

1. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің біреуі 12 см, ал гипотенузасы екінші катеттен 6 см ұзын. Гипотенузаның ұзындығын табыңдар.
A) 15 см; B) 25 см; D) 26 см; E) 18 см.
2. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің біреуі 12 см, ал екіншісі гипотенузадан 8 см қысқа. Осы үшбұрыштың гипотенузасын табыңдар.
A) 15 см; B) 16 см; D) 13 см; E) 25 см.
3. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 25 см, катеттері өзара 3 : 4 қатынасында. Осы үшбұрыштың кіші катетін табыңдар.
A) 10 см; B) 15 см; D) 9 см; E) 20 см.
4. Қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см-ге тең үшбұрыштың ең кіші биіктігі неше сантиметр болады?
A) 11,5 см; B) 11,1 см; D) 11 см; E) 11,2 см.
5. Ромбының диагональдары 14 см-ге және 48 см-ге тең. Осы ромбының периметрін табыңдар.
A) 60 см; B) 100 см; D) 80 см; E) 120 см.
6. Ромбының периметрі 68 см-ге, диагональдарының бірі 30 см-ге тең. Оның екінші диагоналін табыңдар.
A) 12 см; B) 8 см; D) 16 см; E) 20 см.
7. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің біреуі $5\sqrt{3}$ см-ге, ал оның қарама-қарсысындағы бұрыш 60°-қа тең. Үшбұрыштың гипотенузасын табыңдар.
A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
8. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің бірі $5\sqrt{3}$ см-ге, ал оған жанасқан бұрыш 30°-қа тең. Осы үшбұрыштың екінші катетін табыңдар.
A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
9. Тікбұрышты ABC ($\angle C=90°$) үшбұрышының гипотенузасы 17 см-ге, ал катеттері 15 см-ге және 8 см-ге тең. A бұрышының синусын табыңдар.
A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Тікбұрышты ABC ($\angle C=90°$) үшбұрышының гипотенузасы 37 см-ге, ал катеттері 12 см-ге және 35 см-ге тең. B бұрышының косинусын табыңдар.

A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.

Ағылшын тілін үйренеміз!

Пифагор теоремасы – Pythagorean theorem
Кері теорема – inverse function theorem
Тригонометрия – trigonometry
Гипотенуза – hypotenuse

Синус – sine
Косинус – cosine
Тангенс – tangent
Котангенс – cotangent

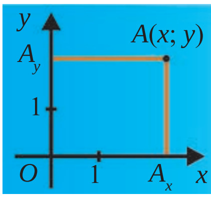
Тарихи мағлұматтар

Пифагор
(біздің заманымызға дейінгі 570–500 ж.)

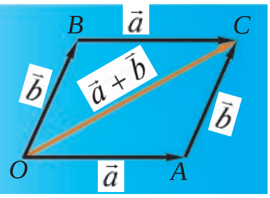
Ежелгі грек философы және математигі **Пифагор** біздің жыл санауымыздан бұрынғы VI ғасырдың екінші жартысында (б.э.дейінгі 570–500 жылдар) Эгей теңізінің Самос аралында туылған және Тарентте қайтыс болған деп жорамалданады. Пифагор Оңтүстік Италияның гректердің отары болған Кротон қаласына (шамамен б.э.дейінгі 530 жыл) көшіп келіп, сол жерде өз мектебінің негізін қалаған. Біз бұл мектеп жүргізген геометриялық зерттеу жұмыстарының нәтижелері туралы одан кейінірек өмір сүрген грек математиктерінің шығармалары арқылы білеміз. Пифагор жүргізген геометриялық жұмыстардың өзі бізге дейін жетіп келмеген.

Пифагор алғаш рет сандарды жұп және тақ, жай және күрделі сандар деп бөлген. Оның мектебінде "Пифагор сандары" деп аталатын натурал сандардың үштіктері егжей-тегжейлі қарастырылған. Пифагор теоремасы өте көп геометриялық есептеулердің негізін құрайды. Бүгінгі таңда Пифагор теоремасының жүзден астам дәлелдеулері бар. Олардың кейбіреулері квадраттарды бөлшектерге бөлуге негізделген, онда катеттерге салынған квадрат бөлшектерден гипотенузаға салынған квадрат түзілген; өзгелері тең пішіндерді толықтыруға, ал үшіншілері тікбұрыштың төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктіктің тікбұрышты өзара ұқсас екі үшбұрышқа бөлетініне негізделген.

Ертедегі Вавилонда тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы мен негізінің ұзындығы бойынша оның биіктігі табылған. Кейбір дереккөздерге қарағанда, Пифагор мектебінде түзу сызықты пішіндерді тең пішіндерге бөлудің геометриялық әдістері теоремаларды дәлелдеу мен есептерді шешу үшін пайдаланылған. Өйткені түзу сызықты пішіндерді геометриялық алмастыру мәселесі күнделікті қолданыстардан туындаған.



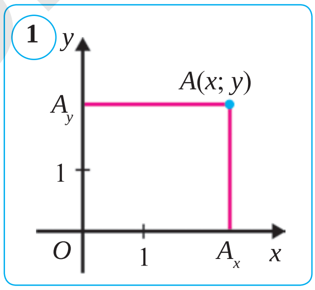
III ТАРАУ. КООРДИНАТАЛАР ӘДІСІ. ВЕКТОРЛАР

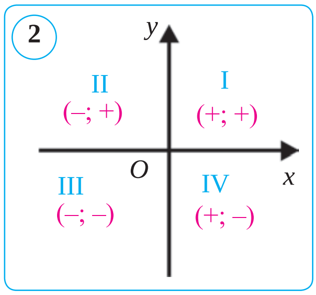


§ 7. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ

31. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ НҮКТЕНІҢ КООРДИНАТАЛАРЫ. КЕСІНДІ ОРТАСЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

1. Жазықтықтағы нүктенің координаталары. Жазықтықта өзара перпендикуляр *x* және *y* осьтерін жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктесін *O* әрпімен белгілейік. Бұл нүктені әрбір ось үшін *есеп басы* деп санап, әрбір оське өзара тең бірлік кесіндісін аламыз. *Ox* осіндегі бағыт "*солдан оңға*", ал *Oy* осіндегі бағыт "*төменнен жоғарыға*" деп жүргізіледі (1-сурет). Бұл жағдайды жазықтықтағы *xOy* тікбұрышты координаталар жүйесі анықталған деп атайды. Аталмыш жүйені ғылымға француз ғалымы ***Рене Декарт*** енгізгендіктен ***Декарт координаталар жүйесі*** дейді. *Ox* осі ***абсциссалар осі*** (яки *x* осі), ал *Oy осі ординаталар осі* (яки *y* осі) деп аталады. Абсциссалар осі көлбеу (горизонталь), ординаталар осі тік (вертикаль) орналасқан.





Декарт координаталар жүйесі жатқан жазықтық ***координаталар жазықтығы*** делінеді.

A – координата жазықтығынан алынған ерікті нүкте болсын. *A* нүктеден Ox және *Oy* осьтеріне параллель түзулер жүргіземіз. Олар *Ox* және Oy осьтерімен сәйкесінше *Ax* және Ay нүктелерінде қиылысады делік (1-суретке қараңдар).

AAx кесіндінің ұзындығы *x*, *AAy* кесіндінің ұзындығы *y* болсын. *x* сан *A* нүктенің ***абсциссасы***, ал *y* сан *A* нүктенің ***ординатасы*** делінеді.

x және *y* сандар жұбы *A* нүктенің ***координаталары*** болады және ол *A(x; y)* деп белгіленеді. Координаталарды өрнектегенде алдымен абсцисса, содан соң ордината жазылады.

Сонымен: 1) координата жазықтығында әрбір *A* нүктеге сандар жұбы *(x; y)* сәйкес келеді; 2) ерікті сандар жұбын *(x; y)* координата жазықтығындағы бірер A нүктенің координаталары деуге болады; 3) егер $x \neq y$ болса, ондай жағдайда *(x; y)* және *(y; x)* сандар жұптары координата жазықтығындағы әр түрлі нүктелерді өрнектейді.

Координата басы – *O* нүктенің координаталары *O*(0; 0)-ден тұрады.

Ox осіндегі ерікті *B* нүктенің координатасы *B(x; 0), Oy* осіндегі ерікті *C* нүктенің координатасы C(0;y) көрінісінде болады.

Ox және *Oy* осьтер жазықтықты төрт тікбұрышқа бөледі, олар ***координата ширектері*** немесе ***координата бұрыштары*** деп аталады. Координата ширектері рим цифрларымен белгіленеді және олар сағат тіліне қарама-қарсы бағыт бойынша нөмірленеді. Нүкте координаталарының ширектердегі белгіленуі 2-суретте көрсетілген.

Геометриялық пішіндер мен олардың қасиеттерін координаталарда қолданып үйренуді қарастырайық.

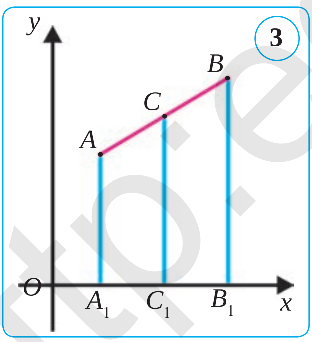
2. Кесінді ортасының координаталары.

Теорема.

Кесінді ортасының координаталары төмендегі формулалар бойынша есептеледі: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

бұл жерде $A(x_1; y_1)$ **және** $B(x_2; y_2)$ **– кесіндінің төбелері,** $C(x; y)$ **– кесіндінің ортасы.**

Дәлелдеу. C нүктенің *x* және *y* координаталарын табамыз. *AB* кесіндісі *Ox* осін қимаған болсын, яғни $x_1 < x_2$ жағдайын қарастырайық (3-сурет). *Ox* осіне AA_1, BB_1 және CC_1 перпендикуляр түзулерін жүргізейік. $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ және перпендикулярдың негіздері $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ және $C_1(x; 0)$ координаталарға ие екені белгілі. C нүкте *AB* кесіндінің ортасы болғандықтан, Фалес теоремасына орай, C_1 нүкте A_1B_1 кесіндінің ортасы болады. Демек, $A_1C_1 = C_1B_1$, яғни $x_2 - x = x - x_1$. Бұдан мына формуланы табамыз: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



$x_1 = x_2$, яғни *AB* кесінді *Oy* осіне параллель болса, үш нүкте – A_1, B_1 және C_1 бірдей негізге ие болады. Демек, бұл жағдайда бұл формула да орынды бола береді.

$x_1 > x_2$ болған жағдайда да жоғарыдағы нәтижеге ие боламыз (бұны дербес тексеріп көруді өздеріңе қалдырамыз).

C нүктенің ординатасы да осыған ұқсас жолмен табылады. *A, B* және *C* нүктелер арқылы *Oy* осіне перпендикуляр түзулер жүргізіледі. Сонда төмендегі формула келіп шығады:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Есеп. Төбелері $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ және $D(2; -2)$ нүктелерінде болған *ABCD* төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

Шешуі. Параллелограмның белгілеріне орай, төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінсе, бұл төртбұрыш параллелограмм болатыны белгілі. Берілген $ABCD$ төртбұрышының AC және BD диагональдары $x=\frac{-2+4}{2}=1$, $y=\frac{1+1}{2}=1$.

BD кесіндінің ортасы төмендегідей координаталарға ие:

$$x=\frac{0+2}{2}=1,\quad y=\frac{4+(-2)}{2}=1.$$

Сонымен, AC жана BD диагональдарының қиылысу нүктесі ортақ (1; 1) координаталарға ие болып шықты. Демек, параллелограмның белгілеріне орай, $ABCD$ төртбұрышы – параллелограмм. Осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Координата осьтері және олардың қиылысу нүктесі қалай аталады?
2) Координаталар жазықтығы деген не? Жазықтықтағы нүктенің координаталары дегенде нені түсінеміз?

2. *A(4; -5)* нүктеден координаталар осьтеріне перпендикулярлар жүргізілген. Осы перпендикулярлар негізінің координаталарын жазыңдар.

3. Егер: 1) $x=-4$, $y=-6$; 2) $x=-3$, $y=5$; 3) $x>0$, $y<0$; 4) $x>0$, $y>0$ болса, $A(x; y)$ нүктенің қайсы ширекте жататынын анықтаңдар.

4. Егер: 1) $A(-12; -3)$, $B(-8; 1)$; 2) $A(4; -11)$, $B(-4; 0)$ болса, AB кесіндісі ортасының координаталарын табыңдар.

5. C нүкте – AB кесіндінің ортасы. Егер $A(2;-3)$, $C(0{,}5; 1)$ болса, B нүктенің координатасын табыңдар.

6. $A(-4; 0)$, $B(-2; -2)$, $C(0; -6)$ және $D(-2; -4)$ нүктелер берілген. $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

7. Егер: 1) $A(-6; 2)$, $B(4; 4)$; 2) $A(-8; -4)$, $B(-1; 3)$ болса, AB кесіндісі ортасының координаталарын табыңдар.

8. C нүктесі – AB кесіндінің ортасы, ал D нүктесі BC кесіндінің ортасы. Егер: 1) 1) $A(-3; 3)$, $B(5; -1)$; 2) $A(-2; -1)$, $C(2; 3)$ болса, D нүктенің координаталарын табыңдар.

Біліп қойған пайдалы!

Жер бетіндегі нүктенің географиялық бойлығы мен ендігі сол нүктенің ***географиялық координаталары*** деп аталады. Жер бетіндегі әрбір нүктеге екі мөлшер – оның географиялық бойлығы мен ендігі сәйкес қойылады. Ал бұған керісінше, екі мөлшер – географиялық бойлық пен ендік бойынша жер бетіндегі нақты бір нүкте табылады. Бұнда параллельдер мен меридиандар тікбұрышты координаталар жүйесіндегі абсцисса және ордината осьтері міндетін атқарады.

Мәселен, Ташкент қаласы 069,20 шығыс бойлық (= 69°) пен 041,26 солтүстік ендікте (= 41°), ал Самарқант қаласы 066,93 шығыс бойлық (= 67°) пен 039,65 солтүстік ендікте (= 40°) орналасқан.

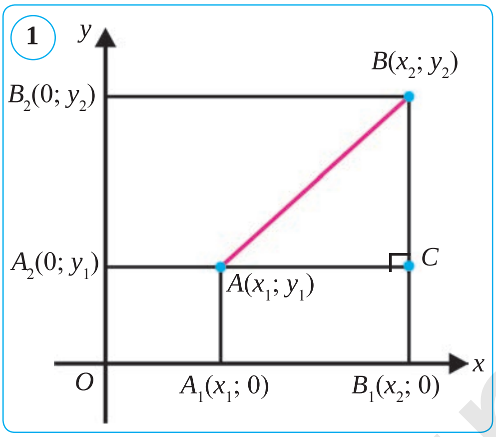
32–33. ЕКІ НҮКТЕНІҢ АРАСЫНДАҒЫ ҚАШЫҚТЫҚ. ШЕҢБЕР ТЕҢДІГІ

1. Екі нүктенің арасындағы қашықтық.

Т еорема.

$A(x_1;\ y_1)$ және $B(x_2;\ y_2)$ нүктелері арасындағы қашықтық төмендегі формулалар бойынша есептеледі:

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\ .$$



Дәлелдеу. Алдымен $x_1 \neq x_2$ және $y_1 \neq y_2$. жағдайын қарастырамыз. Берілген A және B нүктелер арқылы координаталар осьтеріне перпендикуляр жүргіземіз және олардың қиылысу нүктесін C-мен белгілейміз (1-сурет). A және C нүктелері арасындағы қашықтық $|x_2 - x_1|$ -ге ал B және C арасындағы қашықтық $|y_2 - y_1|$ -ге тең. Тікбұрышты ABC үшбұрышына Пифагор теоремасын қолданып табамыз:

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ немесе $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (1)

Нүктелер арасындағы қашықтық формуласы $x_1 \neq x_2$ және $y_1 \neq y_2$ жағдай үшін қарастырылған болса да, ол басқа жағдайлар үшін де өз күшін сақтайды. Расында да, $x_1 = x_2$ және $y_1 \neq y_2$ болса, $AB = |y_2 - y_1|$ (1) формула да сол нәтижені береді. $x_1 \neq x_2$ және $y_1 = y_2$ жағдайы да осылай қарастырылады. $x_1 = x_2$ және $y_1 = y_2$ жағдайда A және B нүктелері бетпе-бет түседі және (1) формула $AB = 0$ нүктені береді.

1-есеп. Төбелері $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ және $D(2;\ -2)$ нүктелерде болған $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

Шешуі. Параллелограмның 2-белгісіне орай, төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болса, бұл төртбұрыш параллелограмм екені белгілі. Берілген $ABCD$ төртбұрышының қабырғаларының ұзындықтарын табамыз:

$$AB = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}\ ;\ BC = \sqrt{(4-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}\ ;\ AD = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Сонымен, $AB = CD$ және $BC = AD$, яғни параллелограмның белгілеріне орай, $ABCD$ төртбұрышы – параллелограмм.

2. Жазықтықтағы пішіннің теңдігі. Жазықтықтағы пішіннің Декарт координаталар жүйесіндегі *теңдігі* деп пішінге тиесілі кез келген нүктенің координаталары қанағаттандыратын екі x, y белгісізі бар теңдікті айтады. Керісінше, бұл теңдікті қанағаттандыратын кез келген екі сан пішіннің бірер нүктесінің координаталары болады.

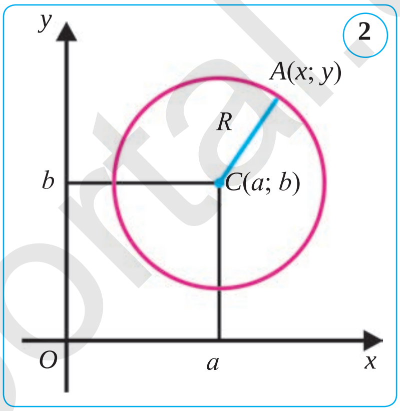
3. Шеңбердің теңдігі.

Теорема.

Тікбұрышты координаталар жүйесінде орталығы *С(а; б)* нүктеде жататын, ал радиусы *R*-ге тең шеңбердің *теңдеуі* төмендегідей көрініске ие: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Дәлелдеу. Тікбұрышты координаталар жүйесінде орталығы $C(a; b)$ нүктеде жататын R $(R > 0)$ радиусты шеңбер берілген делік (2-сурет). Шеңберден кез келген $A(x, y)$ нүктені аламыз. Шеңбердің анықтамасы бойынша, шеңбер орталығынан шеңбердің ерікті нүктесіне дейінгі ара қашықтық R-ге, яғни $CA = R$-ге тең, яғни $CA^2 = R^2$. Бұл теңдеуді координаталар көрінісінде жазып, төмендегіні табамыз:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$



A — шеңбердің ерікті нүктесі. Сондықтан да (2) теңдікті шеңбердегі ерікті нүктенің координаталары қанағаттандырады.

Керісінше, координаталары (2) теңдеуді қанағаттандыратын кез келген A нүктесі шеңберге тиесілі, өйткені одан C нүктесіне дейінгі ара қашықтық R-ге тең. Бұдан (2) теңдеу расында да орталығы C нүктеде болған және радиусы R-ден тұратын шеңбердің теңдеуі екендігі келіп шығады. Осылайша пішіннің теңдеуі анықтамасындағы екі талап та орындалады. Теорема дәлелденді.

Салдар. Орталығы координаталар басында, радиусы *R*-ге тең шеңбердің теңдеуі мынадай көрініске ие: $x^2+y^2=R^2$.

2-есеп. $x^2-4x + y^2+2y -11=0$ теңдеуімен берілген шеңбер орталығының координаталары мен радиусын анықтаңдар.

Шешуі. Берілген теңдеуді $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ көрінісіне келтіреміз. x^2-4x-і $(x-2)^2-4$ көрінісінде, ал y^2+2y-ті болса $(y+1)^2-1$ көрінісінде жазып аламыз. Бұл өрнектерді берілген теңдеулерге қойып, шығарамыз:

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0 \text{ немесе } (x-2)^2+(y+1)^2=4^2.$$

Бұл теңдеу орталығы $C(2; -1)$ нүктеде және радиусы 4 болған шеңбердің теңдігін береді.

Жауабы: $(2; 1)$, $R=4$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Нүктелер арасындағы қашықтық олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі?
2) Пішіннің Декарт координаталар жүйесіндегі теңдеуі қандай? Координаталар жазықтығында шеңбердің теңдігі қандай көріністе беріледі?

2. Егер: 1) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$; 2) $A(8;\ -1)$, $B(-7;\ 7)$; 3) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$ болса, AB кесіндінің ұзындығын табыңдар.

3. Егер: 1) $A(2;1)$ және $B(x;-2)$ нүктелер арасындағы қашықтық 5-ке; 2) $A(x;\ 0)$ және $B(2;\ -1)$ арасындағы қашықтық 1-ге тең болса, x-ті табыңдар.

4. Егер $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$ және $C(5;\ 2)$ болса, ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

5. Егер: 1) $C(7;\ 11)$, $R=5$; 2) $C(-2;\ 3)$, $R=1$ болса, орталығы C нүктеде, радиусы R болған шеңбердің теңдеуін табыңдар.

6. Төмендегі теңдеумен берілген шеңбер орталығының координаталарын және радиусын анықтаңдар:

$$1)\ (x-2)^2+(y-5)^2=7^2;\ 2)\ (x+1)^2+(y-5)^2=4.$$

7. 1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$ теңдеуімен берілген шеңбер орталығының координаталары мен радиусын анықтаңдар.

8. Егер үшбұрыштың төбелері 1) $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ және $C(2;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$, $B(2;\ \sqrt{3})$ және $C(8;\ 0)$ болса, ABC үшбұрышының түрін анықтаңдар.

9. Егер: 1) $C(9;\ 4)$, $R=7$; 2) $C(-3;\ -4)$, $R=2$ болса, орталығы C нүктеде, радиусы R болған шеңбердің теңдеуін түзіңдер.

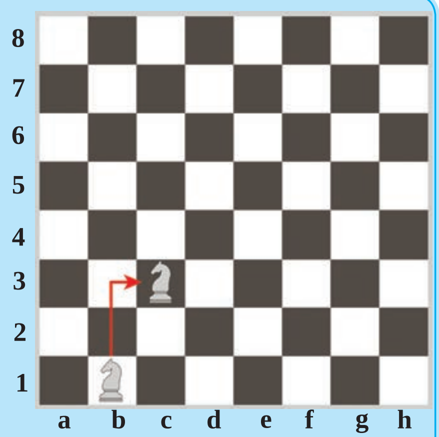
10. Төмендегі теңдеумен берілген шеңбер орталығының координаталары мен радиусын анықтаңдар: 1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. $x^2+y^2=100$ теңдігімен берілген шеңберде: 1) абсциссасы 8-ге тең; 2) ординатасы -6-ға тең нүктелерді табыңдар.

Біліп алған пайдалы!

Шахмат (парсы тілінде *шохмат* – шаһ жеңілді) – спорттың бір түрі, ойынның мақсаты қарсыластың шаһын мат етуден тұрады. Ақ және қара түстегі 64 торкөзді тақта үстінде әрбір жақ екі түрлі түстегі 16 дана (бір-біреуден шаһ пен ферзь; 2-ден ладья, піл және ат; 8-ден жаяу әскер) фигурамен ойнайды.

Сен шахмат партиясының тіркемесінен шахматшылардың ойын барысында фигуралармен жасаған барлық жүрістерін оқып, біліп алуыңа болады. Мысалы, ат bl-c3 деген жазу аттың bl торкөзден c3 торкөзге жасаған қимыл-қозғалысын білдіреді. Бұлардың барлығы да – шахмат тақтасындағы координаталар жүйесі болып табылады.



b1-c3

34. ТҮЗУ СЫЗЫҚ ТЕҢДЕУІ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР ШЕШУДІҢ КООРДИНАТАЛЫҚ ӘДІСІ

1. Түзу сызық теңдеуі.

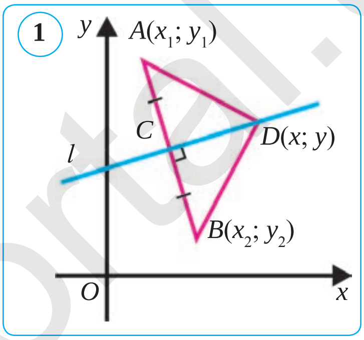
Теорема.

Түзу сызықтың тікбұрышты координаталар жүйесіндегі теңдеуі төмендегідей көріністе болады:

$$ax+by+c=0, \qquad (1)$$

бұндағы *a, б, c* – ерікті сандар, *a* және *б* сандарының бірі нөлге тең емес.

Дәлелдеу. l түзуі тікбұрышты координаталар жүйесіндегі ерікті түзу болсын. l-ге перпендикуляр етіп бірер түзу жүргіземіз және оған l түзуімен қиылысатын нүктесі C-дан бастап CA және CB тең кесінділерін қоямыз (1-сурет). x_1, y_1 – A нүктенің координаталары, x_2, y_2 – B нүктенің координаталары болсын. Орта перпендикуляр l түзуінде жатқан ерікті $D(x, y)$ нүкте A және B нүктелерден теңдей алыстайды, яғни $DA = DB$, бұдан $DA^2 = DB^2$. Бұл теңдікті координаталармен жазып, төмендегілерді туындатамыз:



$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \qquad (2)$$

Жақша ішіндегі өрнектерді квадратқа арттырып, теңдеулердегі ұқсас түбірлерді ықшамдаған соң, (2) теңдеу төмендегідей көрініске келеді:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2)=0. \qquad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 – ерікті сандар, сол себепті $2(x_2-x_1)=a$, $2(y_2-y_1)=b$ және $x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2=c$ деп белгілеп, оларды (3) теңдікке қойып:

$$ax+by+c=0$$

теңдеуін туындатамыз, бұнда a, $б$ және c – бірер сандар.

D – l түзуіндегі ерікті нүкте, сондықтан (1) теңдеуді берілген түзудегі ерікті нүктенің координатасы қанағаттандырады.

Бірер D_0 нүктенің x_0 және y_0 координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырсын. Ондай жағдайда $D_0A=D_0B$, яғни D_0 нүкте A және B нүктелерден теңдей ұзақтаған болады. Демек, AB кесіндінің орта перпендикуляры l түзуіне тиесілі болады. A мен B – әр түрлі екі нүкте болғандықтан (x_2-x_1) немесе (y_2-y_1) айырмалардың бірі, яғни a және $б$ сандарының бірі нөлге тең еместігін айтып өтеміз.

1-есеп. $A(1;\ -1)$ және $B(-3;\ 2)$ нүктелерінен өтетін түзу сызықтың теңдеуін түзіңдер.

Шешуі. AB түзуінің теңдеуі AB түзу сызығының теңдеуі $ax+by+c=0$ көрінісінде өрнектелетінін білеміз. A және B нүктелері AB түзуінің бойында жатады. Демек, олардың координаталарын түзу сызық теңдеуіне қойып, мынадай теңдеулерді туындатамыз:

$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\quad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0 \text{ немесе}$$
$$a-b+c=0,\ -3a+2b+c=0.$$

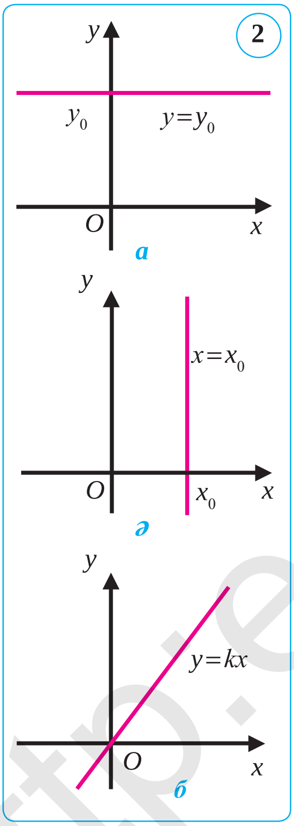
Бұл теңдеулерден a және $б$ коэффициенттерді c арқылы өрнектейміз: $a = 3c$, $b = 4c$. a және b-ның бұл мәндерін түзу сызық теңдеуіне қойып, табамыз: $3cx+4cy+c=0$, бұнда $c\neq 0$.

Бұл теңдеу AB түзуінің теңдеуі болып табылады. Жоғарыдағы теңдеуді c-ға қысқартып, төмендегідей көрініске келтіреміз:

$$3x+4y+1=0.$$

Бұл теңдеу іздестіріліп жатқан түзу сызық теңдеуі болып табылады.

2. Түзудің координаталар жүйесіне сәйкес орналасуы.



Енді $ax + by + c = 0$ түзу сызық теңдеуінің дербес үш жағдайын қарастырайық. Әрбір жағдай үшін түзу сызықтың координата осьтеріне сәйкес қалай орналасқанын анықтаймыз.

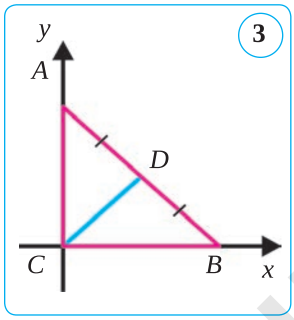
1-жағдай. $a=0$, $b\neq 0$. Бұл жағдайда түзу сызық теңдеуін $by+c=0$ немесе $y = y_0$ көрінісінде жазуға болады. Бұл жерде $y_0=-\frac{c}{b}$ – бірер сан. $y=y_0$ түзу сызықтың барлық нүктелері бірдей ординатаға ие, демек, ол абссиссалар осіне параллель (2-a сурет). Егер $c = 0$ болса, онымен бетпе-бет түседі. $y = 0$ – абссиссалар осінің теңдеуі.

2-жағдай. $a\neq 0$, $b=0$. Бұл жағдайда түзу сызық теңдеуін $ax + c = 0$ немесе $x = x_0$ көрінісінде жазуға болады. Бұл жерде $x_0=-\frac{c}{a}$ – бірер сан. $x = x_0$ түзу сызықтың барлық нүктелері бірдей абссиссаға ие, демек, ол ординаталар осіне параллель (2-сурет). Егер $c = 0$ болса, онымен бетпе-бет түседі. $x = 0$ – абссиссалар осінің теңдеуі.

3-жағдай. $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$. Бұл жағдайда түзу сызық теңдеуін $ax + бy = 0$ немесе $y = kx$ көрінісінде жазуға болады, бұл жерде $k=-\frac{a}{b}$ – бірер сан. $y = kx$ түзу сызық координаталар басынан өтеді (2-$д$ сурет).

3. Геометриялық есептерді шешудің координаталық әдісі. Көптеген геометриялық есептерді кесінді ортасының координаталарын және екі нүкте арасындағы қашықтықты есептеу формулаларын пайдаланып шешуге болады. Осы мақсатпен тікбұрышты координаталар жүйесін енгізу және есептің шартын координаталармен жазып алу керек. Содан соң есеп алгебралық есептеулер көмегімен шешіледі.

2-есеп. Тікбұрышты үшбұрышта гипотенузаның ортасы барлық төбелерінен теңдей алыстаған. Соны есептеңдер.



Шешуі. Тікбұрышты ABC ($\angle C=90°$) үшбұрышын қарастырамыз. AB кесіндінің ортасын D әрпімен белгілейік. 3-суретте көрсетілгеніндей, тікбұрышты координаталар жүйесін енгіземіз. Егер $BC=a$, $AC = b$ болса, ол жағдайда үшбұрыштың төбелері $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ және $A(0;\ b)$ координаталарға ие болады. Кесінді ортасының координаталары формуласына орай D нүктесінің координаталарын табамыз: $D(0{,}5a;\ 0{,}5b)$.

Нүктелер арасындағы қашықтықты табу формуласын пайдаланып, DC және DA кесінділерінің ұзындықтарын табамыз:

$$DC = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{0,25\left(a^2 + b^2\right)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

$$DA = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b - b)^2} = \sqrt{0,25a^2 + 0,25b^2} = \sqrt{0,25\left(a^2 + b^2\right)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Сонымен $DA = DB = DC$ екен. Бізден осыны дәлелдеу талап етілген еді.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Түзу сызықтың тікбұрышты координаталар жүйесінде $ax + бy + c = 0$ көрінісіндегі теңдеуге ие болатынын дәлелдеңдер.
2) Түзу сызықтың $ax + бy + c = 0$ теңдеуінде $a = 0 (б = 0;\ c = 0)$ болса, түзу сызық қалай орналасады?

2. $A(3;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ және $E(-9;\ -2)$ нүктелердің қайсысы $x–3y+3= 0$ теңдеуімен берілген түзу сызыққа тиесілі, қайсысы тиесілі емес?

3. 1) $A(1;\ 7)$ және $B(-3;\ -1)$; 2) $A(2;\ 5)$ және $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ және $B(-4;\ -5)$ нүктелерден өтетін түзу сызық теңдеуін түзіңдер.

4. $x+y+c=0$ түзу сызығы $(1;\ 2)$ нүктесінен өтсе, оның теңдеуіндегі c коэффициент неге тең болады?

5. Егер $ax+by-1=0$ түзу сызығының $(1;\ 2)$ және $(2;\ 1)$ нүктелерден өтетіні белгілі болса, оның теңдеуіндегі a және $б$ коэффициенттері неге тең болады?

6. 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y = 12$; 3) $4x-2y-10=0$ теңдеумен берілген түзу сызықтың координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар.

7. Егер: 1) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$ болса, $C(4;\ 2)$ нүкте AB кесіндінің ортасы болатын-болмайтынын тексеріңдер.

8. $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(-4;\ -5)$ нүктелерінің қайсысы $8x-4y-8=0$ теңдеуімен берілген түзу сызыққа тиесілі, қайсысы тиесілі емес?

9. Егер $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$ және $C(2;\ 2)$ болса, ABC үшбұрышының қабырғаларын қамтитын түзу сызықтар теңдеуін түзіңдер.

§ 8. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ВЕКТОРЛАР

35. ВЕКТОР ҰҒЫМЫ. ВЕКТОРДЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫ МЕН БАҒЫТЫ

1. Векторлық шамалар. Вектор. Саған белгілі шамалар екі көріністе болуы мүмкін. Сондай шамалар бар, олар өздерінің сан мәндерімен (берілген өлшем бірлігінде) толық анықталады. Мысалы, ұзындық, аудан, салмақ соларға жатады.

1-анықтама. *Тек сан мәнімен ғана анықталатын шамалар **скаляр шамалар** деп аталады.*

Тағы да сондай шамалар бар, оларды толық білу үшін бұл шамаларды өрнектейтін сан мәндерінен тыс, олардың бағыттарын да білу қажет болады. Мысалы, жылдамдық, күш және қысым соларға жатады.

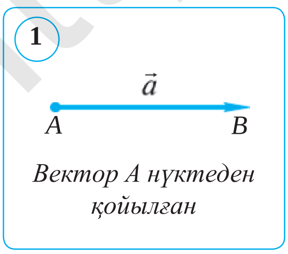
Вектор — геометрияның негізгі ұғымдарының бірі, ол санмен (ұзындық) және бағытпен толық анықталады. Көрнекі болуы үшін оны бағытталған кесінді көрінісінде елестетуге болады. Негізінде векторлар туралы айтылғанда, барлығы өзара параллель бірдей ұзындыққа және бірдей бағытқа бағытталған кесінділердің тұтас бір сыныбына назар аударсақ дұрыс болады.

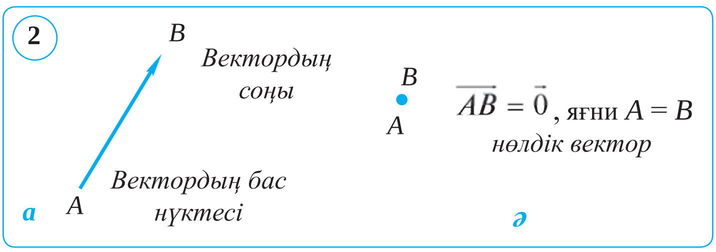
2-анықтама. *Сан мәнімен және бағытымен анықталатын (сипатталатын) шамалар **векторлық шамалар** немесе **векторлар** деп аталады.*

Физиканың, механиканың және математиканың санмен ғана емес, бәлкім бағытымен сипатталатын мөлшерлерін тексеретін түрлі мәселелер вектор ұғымына әкеледі. Мысалы, күш, жылдамдық — бұлар векторлар болып табылады.

Векторлық шамаларды біз өте көп жағдайларда кездестіреміз. Мысалы: көлікте келе жатқанында қозғалыс жылдамдығына, бұрылуға немесе тоқтауға байланысты векторлық шамаларды көруге болады. Табиғатты зерттейтін ғылымдарда бұл — үдеу, энергия күші, орталықтан тепкіш күш және соған ұқсас атаулармен аталады.

Біз векторлық шамаларды табиғи мағынасын есепке алмаған күйде оның математикалық табиғатын үйренеміз. Әрине, векторлық шаманың математикалық қасиеттері өзінің табиғи мағынасына ие болады.





Векторлық шаманың сан мөлшерін кесінді арқылы өрнектейміз. Олардың біреуін вектордың бас нүктесі деп, екінші ұшын векторлық шама бағытына сәйкес бағыттаймыз және стрелкамен белгілейміз. Бұны вектордың *ұшы* деп атаймыз.

3-анықтама. ***Вектор*** *(векторлық шама) деп белгілі бағыты бар кесіндіні айтамыз.*

Векторлық шама бағыты көрсетілген кесінді ретінде кескінделеді. Векторды өрнектейтін кесінді ұштары A және B нүктеде болса, A нүктеден B нүктеге бағытталған вектор $\overrightarrow{AB}$ сияқты белгіленеді. Сондай-ақ векторлар $\vec{a}$, $\vec{b}$ (латынның кіші әріптері) көрінісінде де белгілеуге болады (1-сурет).

Оқылуы: $\overrightarrow{AB}$ вектор немесе $\vec{a}$ вектор.

Вектордың бағытын анықтағанда оның бас нүктесі мен ұшын көрсетіп белгілейді. Мұнда вектордың бас нүктесі алдымен жазылады (1-*а* сурет).

AB сәуленің анықтап берген бағыты $\overrightarrow{AB}$ *вектордың бағыты* деп аталады. Бас нүктесі оның ұшымен дәл келіп беттесетін векторды *нөлдік вектор* деп атайды. $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ теңдік A және B нүктелердің дәл беттескенін білдіреді (1-*б* сурет).

Векторды өрнектейтін кесіндінің ұзындығы вектордың *модулі* немесе *абсолют шамасы* деп аталады.

Вектордың модулі $|\overrightarrow{AB}|$ немесе $|\vec{a}|$ сияқты белгіленеді (2-сурет).

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ вектордың модулі AB кесіндінің ұзындығы болып есептеледі: $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$. Сондықтан геометрияда вектордың модулі немесе абсолют шамасы оның *ұзындығы* деп те аталады. Нөлдік вектордың модулі нөлге тең: $|\vec{0}|=0$.

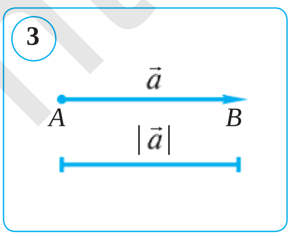
2. Векторлардың теңдігі.

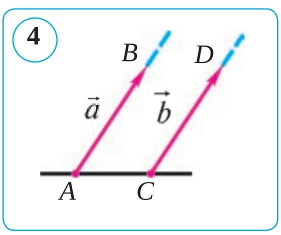
4-анықтама. *Бір түзудің бойында немесе параллель түзулерде жататын векторлар* ***коллинеар векторлар*** *деп аталады.*

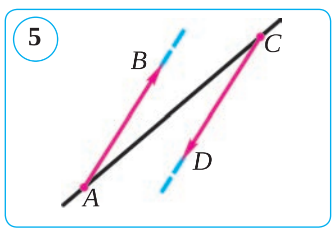
$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеарлығы $\vec{a}\parallel\vec{b}$ сияқты белгіленеді.

Егер параллель түзулерде жататын екі вектор олардың бас нүктесі арқылы өтіп: 1) түзудің бір жағында жатса, *бағыттас векторлар* деп аталады (4-сурет); 2) түзуге қарағанда әр түрлі бағытта жатса, *қарама-қарсы бағытталған векторлар* деп аталады (5-сурет).

$\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлар: 1) *бағыттас* болса, олар $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ сияқты;







2) *қарама-қарсы бағытталған* болса, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ сияқты белгіленеді.
Нөлдік вектор кез келген векторға коллинеар деп есептеледі.

5-анықтама. *Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының модульдері тең және бағыттары бірдей болса, бұл векторлар* ***тең векторлар*** *деп аталады.*

Сөйтіп, егер $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ және $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар тең болады. Векторлар теңдігі $\vec{a} = \vec{b}$ пішінінде жазылады. Векторлардың теңдігі оның бас нүктесі жазықтықтың кез келген нүктесінде болатындығын көрсетеді (6-сурет), яғни вектордың модулін өзгертпей, бағытын сақтай отырып, оның бас нүктесін жазықтықтың қалаған нүктесіне көшіруге болады. Мұны *векторды параллель көшіру қасиеті* деп атайды.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Вектор дегеніміз не? Векторлар қалай белгіленеді?
2) Қандай векторлар бірдей (қарама-қарсы) бағытталған векторлар деп аталады? Векторлардың модулі деген не?

2. *ABCD* параллелограммда (7-сурет): 1) $\overrightarrow{DC}$ вектормен бағыттас; 2) $\overrightarrow{AO}$ вектормен бағыттас; 3) $\overrightarrow{AD}$ векторға қарама-қарсы бағытталған; 4) $\overrightarrow{BD}$ векторға қарама-қарсы бағытталған; 5) $\overrightarrow{AB}$ векторға тең; 6) $\overrightarrow{OC}$ векторға тең; 7) $\overrightarrow{OB}$ векторға тең векторларды жаз.

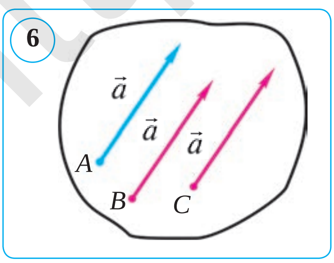
3. *ABCD* параллелограмның диагональдары *O* нүктеде қиылысады. Оның ұштары мен диагональдары қиылысу нүктесімен белгіленген векторларды жаз. Олардың ішіндегі қайсылары: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ мен $\overrightarrow{BO}$ векторларға коллинеар?

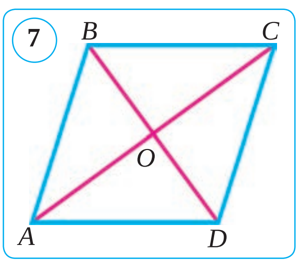
4. Егер: 1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ және $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{DC}$ векторлар коллинеар емес болса, *ABCD* төртбұрыштың түрін анықта.

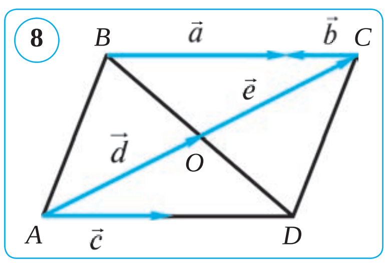
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ екені белгілі. Осы шешім дұрыс па?
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB|=|CD|$?

6. *ABCD* — параллелограмм. 8-суретте кескінделген векторлардың ішінен: 1) коллинеар; 2) бағыттас; 3) қарама-қарсы бағытталған; 4) тең ұзындықтарға ие болған векторлардың жұптарын көрсет.

7. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторларының бағыты туралы не деуге болады?







36–37. ВЕКТОРЛАРДЫ ҚОСУ ЖӘНЕ АЗАЙТУ

1. Векторларды қосу. Бізге $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар берілген болсын (1-*а* сурет). Кез келген *A* нүктені белгілейміз және бұл нүктеден $\vec{a}$ векторға тең $\overrightarrow{BC}$ векторды қоямыз. Содан соң *B* нүктеден $\vec{b}$ векторға тең $\overrightarrow{AB}$ векторды қоямыз.

Енді $\vec{a}$ вектордың басы *A* нүктеден $\vec{b}$ вектор ұшы *C*-ға бағытталған вектор жүргіземіз (1-*б* сурет). $\overrightarrow{AC}$ *вектор* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының қосындысы* деп аталады. Векторларды қосудың бұл ережесі «*үшбұрыш* (*үш нүкте*) *ережесі*» деп аталады. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қосындысы $\vec{a}+\vec{b}$ сияқты белгіленеді.

Үшбұрыш ережесін төмендегідей өрнектесек те болады: *егер A, B және C – кез келген нүктелер болса, ол жағдайда төмендегі теңдік орынды болады:*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Үшбұрыш ережесі кез келген *A*, *B* және *C* нүктелер үшін, сонымен қатар олардың екеуі немесе үшеуі беттескенде де орынды болады (1-*д* сурет).

2. Векторларды қосу ережелері. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары өзара тең және параллель болатыны белгілі. Егер бағыттары бірдей болса, параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең векторларды көрсетеді.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ — коллинеар емес векторлар делік. Кез келген *A* нүктесінен $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ және $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларын жүргіземіз, сондай-ақ қабырғалары осы вектордан тұратын *ABCD* параллелограмын саламыз (2-сурет). Үшбұрыштар ережесіне орай: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ мен $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$.

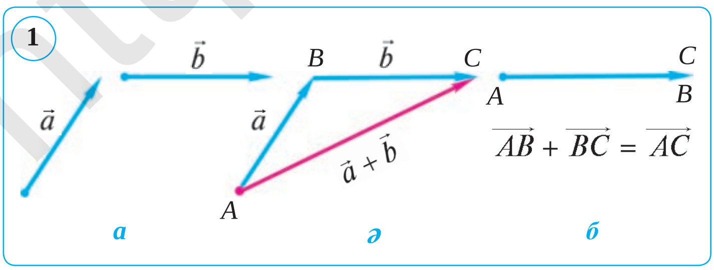
Бұлардан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ келіп шығады.

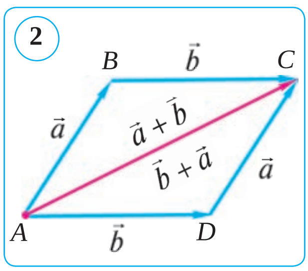
Демек, векторлардың қосындысы олардың қандай ретпен тізбектеп орналасуына байланысты емес, яғни кез келген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар үшін

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Бұл векторларды қосудың *орын алмастыру ережесі (заңы)* болып табылады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құралған *ABCD* параллелограмындағы ко-





сынды $\overrightarrow{AC}$ векторы қосылғыш векторлардың ортақ басынан шығатын диагональдан тұрады. Әдетте векторларды бұлайша қосу векторларды қосудың *параллелограмдық ережесі (әдісі)* деп аталады (2-сурет).

Енді $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлардың қосындысын қарастырайық. Кез келген A нүктеден $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ векторды, B нүктеден $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторды, C нүктеден $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ векторды қоямыз (3-сурет). Үшбұрыш ережесін қолданып, мына нәтижеге ие боламыз:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

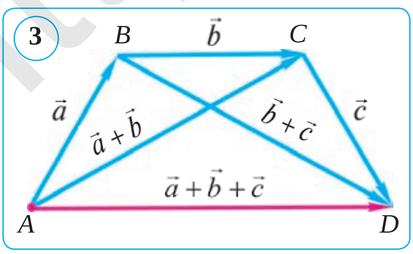
Бұдан кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ *векторлар үшін* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *теңдік орынды екені келіп шығады*. Бұл – векторларды қосудың *терімділік заңы (қасиеті)* болып табылады. Векторлардың әрбіреуі нөлден өзгеше болғанда, олардың қосындысы нөлдік вектор болуы мүмкін.

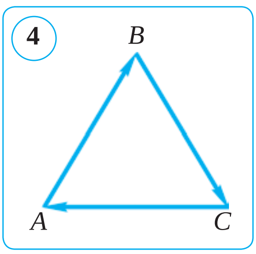
Мысалы, ABC үшбұрышты қарастырайық (4-сурет). Мұнда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{CA}$ векторлардың қосындысы нөлдік вектор болады, яғни: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$, себебі бірінші вектордың бас нүктесі мен үшінші вектордың ұшы дәл беттеседі. Демек, қосынды вектор нөльдік вектор — нүкте болады.

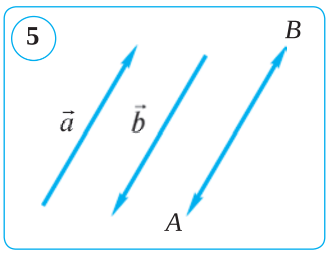
1-анықтама. *Екі вектордың қосындысы нөлдік вектор болса, онда олар* ***қарама-қарсы векторлар*** *деп аталады.*

Демек, $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$ болса, онда $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ векторға қарама-қарсы вектор деп аталады және $\vec{b} = -\vec{a}$, $\vec{a} = -\vec{b}$ сияқты жазылады (5-сурет). Егер қарама-қарсы векторларды (үшбұрыштар ережесі бойынша) қосатын болсақ, ондай жағдайда нөлдік вектор келіп шығады. Бұнда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар параллель болады да, түрлі жақтарға бағытталады. Демек, әрбір a вектор үшін оған қарама-қарсы $-\vec{a}$ вектор бар, ол $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ болады.

Егер нөлдік емес екі вектордың ұзындықтары тең және олар қарама-қарсы бағытталған болса, олар ***қарама-қарсы векторлар*** деп аталады.

3


4


5


Нөлдік вектор өзіне-өзі қарама-қарсы вектор болып саналады.

3. Векторларды азайту. Векторларды азайту дәл сандарды азайту сияқты қосуға кері амал болып табылады.

> **2-анықтама.** ***$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырмасы*** *деп, сондай $\vec{c}$ вектор айтылады, оның $\vec{b}$ вектормен қосындысы $\vec{a}$ векторды береді:*
>
> $$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}.$$

Бізге $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ берілген болсын (6-*а* сурет). $\vec{a}$ вектормен $\vec{b}$ векторға қарама-қарсы болған $-\vec{b}$ векторының қосындысын қарастырайық.

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырмасы (ол $\vec{a}-\vec{b}$ сияқты белгіленеді) $\vec{a}+(-\vec{b})$ векторға тең (6-*ә* сурет).

Кез келген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары үшін $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$ теңдік орынды.

Шынында да, $(\vec{a}+(-\vec{b}))+\vec{b} = \vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b}) = \vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар бір *O* нүктеден қойылған болса, ол жағдайда $\vec{a}-\vec{b}$ айырманы табу үшін

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

ережесін пайдаланған ыңғайлы (6-*б* сурет).

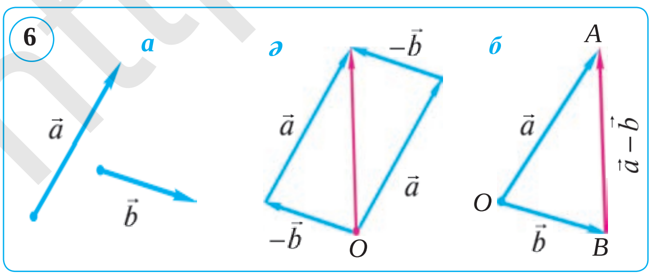
Жоғарыда айтылғандай, *азайғыш* вектордың *соңы – айырма* вектордың *басы*, ал *азаюшы* вектордың *соңы – айырма* вектордың *соңы* міндетін атқарады. Ережені есте сақтау қолайлы болу мақсатында ол сызба түрінде көрсетілді.

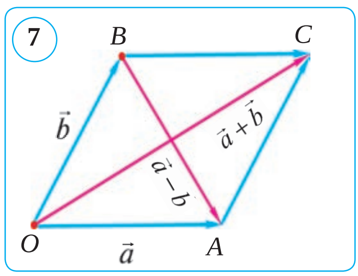
Векторды қосуда параллелограмм әдісін пайдалансақ (7-сурет), айырма вектор параллелограмның екінші диагоналінен құралады.

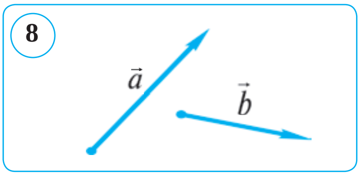
Есеп. *ABC* үшбұрыш берілген. Төмендегі: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ векторларды $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ және $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ векторлар арқылы өрнекте.

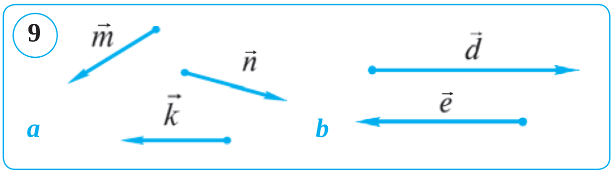
Шешуі. 1) $\overrightarrow{BA}$ және $\overrightarrow{AB}$ – қарама-қарсы векторлар, сондықтан $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ немесе $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

2) Үшбұрыш ережесі бойынша: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$. Бірақ $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, сондықтан $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}.$









Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Үшбұрыш және параллелограмм ережесі бойынша векторлардың қосындысы қалай табылады? Екі вектордың айырмасы деген не?
2) Берілген векторға қарама-қарсы вектор дегеніміз не?

2. 8-суретте $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар кескінделген. $\vec{a}+\vec{b}$ векторды екі әдіспен сал.

3. 9-суретте $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$, $\vec{d}$ және $\vec{e}$ векторлар кескінделген. Векторларды сал: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

4. 10-суретте $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ және $\vec{e}$ векторлар кескінделген. Векторларды сал: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

5. $ABCD$ параллелограмм берілген. $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ теңдік орындала ма? Тексер.

6. $ABCD$ ромбыда: $AD = 20$ см, $BD = 24$ см, O – диагональдарының қиылысу нүктесін $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$ тап.

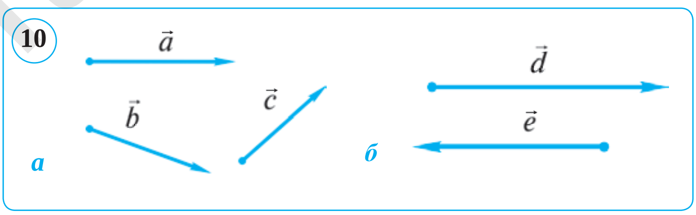
7. $ABCD$ – кез келген төртбұрыш. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ екенін дәлелде.

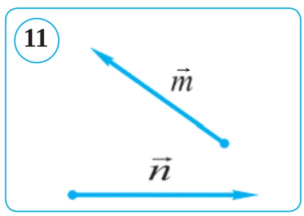
8. $ABCD$ – параллелограмм. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ вектор теңдігін дәлелдеңдер (векторларды қосудың "*параллелограмм ережесі*").

9. $ABCD$ параллелограмда: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ векторларын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнекте.

10. E мен F – ABC үшбұрыштың AB мен AC қабырғаларының орталары. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларды $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ және $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ векторлары арқылы өрнекте.

11. 11-суретте $\vec{m}$ мен $\vec{n}$ векторлар кескінделген. $\vec{m}+\vec{n}$ векторды екі әдіспен сал.





38–39. ВЕКТОРДЫ САНҒА КӨБЕЙТУ. ВЕКТОРДЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ.

1. Векторды санға көбейту. Кез келген $\vec{a}$ векторды аламыз және $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ қосындыны табамыз (1-сурет). Мұндай қосындыны $3\cdot\vec{a}$ деп белгілейміз және $\vec{a}$ вектордың 3 санына көбейтіндісі деп атауымыз табиғи.

Анықтама. *Нөл емес $\vec{a}$ вектордың k санына көбейтіндісі деп сондай $\vec{b} = = k\cdot\vec{a}$ вектор айтылады, мұнда оның ұзындығы $|k|\cdot|\vec{a}|$ санға тең. Бағыты $k \geq 0$ болғанда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ вектордың бағытымен бірдей, ал $k<0$ болғанда қарама-қарсы болады. Нөлдік вектордың кез келген санға көбейтіндісі нөлдік вектор деп есептеледі.*

$\vec{a}$ вектордың k санға көбейтіндісі $k\vec{a}$ сияқты белгіленеді (сан көбейтушінің сол жағына жазылады). Анықтама бойынша: $|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|$.

Вектордың санға көбейтіндісі анықтамасынан тікелей төмендегілер келіп шығады: 1) *кез келген вектордың нөлге көбейтіндісі нөлдік вектор болады;* *2) кез келген сан және $\vec{a}$ вектор үшін $\vec{a}$ мен $k\vec{a}$ векторлар коллинеар.*

Енді векторды санға көбейтудің негізгі қасиеттерін санап өтеміз.

Кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар мен k, l сандар үшін төмендегі теңдіктер орынды:

1) $(k\cdot l)\vec{a} = k\cdot(l\vec{a})$ – *топтастыру заңы;*

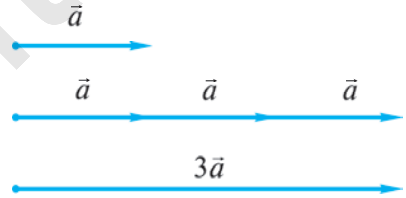
2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ – *бірінші бөліну заңы;*

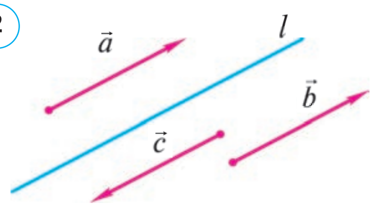
3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – *екінші бөліну заңы;*

4) $k\cdot\vec{0} = 0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

*Бір түзуге параллель болған векторлар **коллинеар векторлар** деп аталатынын ұмытпаңдар.*

l түзу және оған параллель $\vec{a}$, $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлар берілген болсын (2-сурет). Анықтама бойынша $\vec{a}$, $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторлар коллинеар векторлар болады. Мұнда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар бірдей бағытталған, ал $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларға қарағанда қарама-қарсы бағытталған.

1


2


Векторды санға көбейткенде көбейтінді вектордың бағыты берілген векторға параллель болатыны белгілі. Бұдан төмендегі қорытынды келіп шығады: *вектордың санға көбейтіндісі сол векторға коллинеар вектор болып табылады.*

Теорема.

Вектор өзінің модуліне тең санға бөлінсе, осы векторға коллинеар бірлік вектор пайда болады.

Дәлелдеу. $\vec{a}$ вектордың модулі $|\vec{a}|$ болсын. $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ санға $\vec{a}$ вектордың көбейтіндісін қарайық:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Демек, көбейтінді вектор модулі бір бірлікке тең.

Модулі бірге тең векторды *бірлік вектор* деп атаймыз. Егер $\vec{a}$ вектор бойынша бағытталған бірлік векторды $\vec{e}$ деп белгілесек, теорема бойынша: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ немесе бұл теңдікті $|\vec{a}|$ санға көбейтсек: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Біз векторларды үйренуде орасан зор маңызы бар теңдікті шығардық. *Кез келген вектор сол вектор модулімен өзара коллинеар бірлік векторының көбейтіндісіне тең екен.*

1-есеп. k-ның қандай мәнінде төмендегі пікір орынды болады?

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, бұл жерде $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Шешуі. 1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -де $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -де $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ яки $k > 1$;

3) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -де $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ яки $k = 1$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$-де $|\vec{a}| > 0$. Бізге белгілі болғанындай, теңсіздікті немесе теңдіктің екі бөлімін де оң санға бөлсек, қатынас өзгермейді.

Жауабы: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ яки $k > 1$; 3) $k = -1$ яки $k = 1$-де пікір өзгермейді.

2. Вектордың координаталары. Жазықтықта xOy Декарт координаталар жүйесі берілген, яғни координаталар басы O нүкте, координата осьтерінің бағыты және масштаб бірлігі – бірлік кесінді берілген болсын. Мұнда жазықтықтағы кез келген A нүкте өзінің абсциссасы x -ке және ординатасы y-ке ие болады: $A(x;\ y)$. Модулі бір бірлікте болатын және бағыты Ox осі бойынша бағытталған векторды $\vec{i}$ -мен, нақ сол сияқты, Oy осі бойынша бағытталған векторды $\vec{j}$ -мен белгілейміз (3-*а* сурет).

Жазықтықта координаталары $(x; y)$ болатын A нүкте берілген болсын. OA_xA үшбұрышты қарастырайық. Бұл үшбұрышта $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Бірақ $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ $OA_y = y$ болғандықтан, $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ болады. Бұдан

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

теңдік шығады. Бұл (1) теңдік вектордың *координата өрнегі* деп аталады.

Демек, басы координаталар басында, ұшы $A\ (x;\ y)$ нүктеде болатын векторды координата осьтері бойынша бағытталған $\vec{i}$ мен $\vec{j}$ векторлар арқылы (1) көріністе жазуға болады.

Мұнда $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\,)$ векторлар жұптығы — *базистік векторлар*, ал x пен y сандар — $\vec{a}$ вектордың *координаталары* деп аталады.

Егер вектордың (1) координата өрнегі белгілі болса, онда вектор координаталарымен берілген делінеді және қысқаша $\vec{a}\,(x; y)$ көрінісінде жазылады:

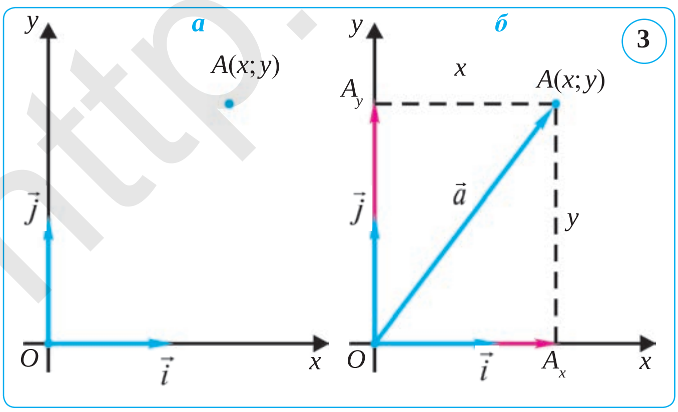
$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (2)$$

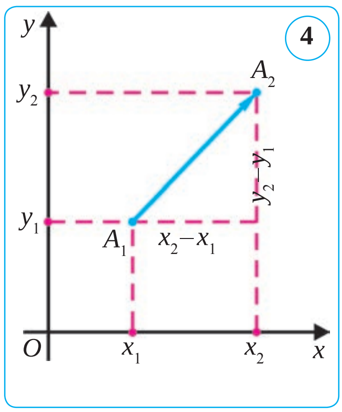
Анықтама. *Егер $A_1(x_1;\ y_1)$ мен $A_2(x_2;\ y_2)$ болса, $x_2 - x_1$ және $y_2 - y_1$ сандары $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторының координаталары болады* (4-сурет).

Вектордың координаталары әріптік белгілеуден кейін жақшаның ішіне жазылады: $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Кейбір жағдайларда координаталары берілген векторларды белгілеген кезде $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$ жазуы да қолданылады. Нөлдік вектордың координаталары нөлге тең екені айдан анық: $\vec{0}(0; 0)$.

Нүктелер арасындағы қашықтықты табу формуласына орай, $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ вектордың ұзындығы $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ формула бойынша есептеледі.

Ереже. *Вектордың координаталарын табу үшін оның соңының координаталарынан бас нүктесінің сәйкес координаталарын азайтса жеткілікті.*





Мысалы, $\overrightarrow{OA}$ векторының координаталары вектор ақыры A-ның координаталарымен толық анықталады, яғни вектор ақырының координаталарына тең болады. Егер $A(x;y)$ болса, $\overrightarrow{OA}(x;y)=\overline{(x;y)}$ болады.

Координаталары тең болған векторлардың қасиеті мен белгісін дәлелдеусіз келтиреміз.

Теорема.

Тең векторлар сәйкесінше тең координаталарға ие болады. Және, керісінше, егер векторлардың сәйкес координаталары тең болса, онда векторлар да тең болады.

1-қорытынды. Егер вектор ақырының координаталары вектордың координаталарымен тең болса, ол жағдайда берілген вектордың бас нүктесі координаталар басында болады (3-б сурет).

2-қорытынды. Егер $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ вектор мен оның ақыры болатын $B(x_2;\,y_2)$ нүктесінің координаталары берілген болса, ол жағдайда вектордың бас нүктесі $A(x_1;y_1)$ нүктенің координаталарын табу үшін B нүктенің координаталарынан $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ векторының координаталарын азайтса жеткілікті:

$$x_1=x_2-a_1;\,y_1=y_2-a_2 \qquad (1)$$

3-қорытынды. Егер $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ вектор мен оның бас нүктесі болатын $A(x_1;\,y_1)$ нүктесінің координаталары берілген болса, ол жағдайда вектордың ақыры $B(x_2;\,y_2)$ нүктенің координаталарын табу үшін A нүктенің координаталарына $\vec{a}\,(a_1;a_2)$ векторының сәйкес координаталарын қосу жеткілікті:

$$x_2=x_1+a_1;\,y_2=y_1+a_2. \qquad (2)$$

2-есеп. Егер $A(-2;1)$, $B(0;4)$ және $C(4;1)$ болса, $ABCD$ параллелограмның төртінші төбесінің координатасын табыңдар.

Шешуі. Егер $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болса, онда $\overrightarrow{AB}=$ $=\overrightarrow{DC}$ болады. *(x, y)* – іздестіріліп жатқан D төбенің координатасы болсын, $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{DC}$ векторлардың координаталарын табамыз:

$$\overrightarrow{AB}=\overline{(0-(-2);4-1)}=\overline{(2;3)},\quad \overrightarrow{DC}=\overline{(4-x;1-y)}.$$

Сонымен, $4-x=2$ және $1-y=3$, бұдан $x=2$ және $y=-2$.

Жауабы: $D(2;-2)$.

3-есеп. $A\,(-1;\,5)$ нүкте $\vec{a}\,(2;\,-3)$ векторының бас нүктесі болса, бұл вектордың соңы B-ның координаталарын тап.

Шешуі. Берілген мәндерді соңғы қатынастарға қойып, ізделінетін координаталарды табамыз: $x_2=-1+2=1$, $y_2=5+(-3)=2$.

Жауабы: $B\,(1;\,2)$.

4-есеп. $A(-3;\,0)$ және $B(5;\,-4)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторлардың координаталарын табыңдар.

Шешуі. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3);-4-0) = \overrightarrow{AB}(8;-4) = \overline{(8;-4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8;-4)} = \overline{(-8;-(-4))} = \overline{(-8;\ 4)}$. ***Жауабы:*** (8; −4); (−8; 4).

Ескерту! *Бірер вектордың координаталары белгілі болса, ондай жағдайда оған қарама-қарсы вектордың координаталарын қайта есептеп отырмастан, берілген вектордың координаталары шамасын қарама-қарсыға өзгертудің өзі жеткілікті.*

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Берілген вектордың санға көбейтіндісі не деп аталады?
2) Вектордың санға көбейтіндісінің қасиеттерін айтыңдар.
3) Координаталар осіндегі бірлік векторлар қалай белгіленеді?

2. Ұзындығы 2 см-ге тең болатын $\vec{a}$ векторды сал. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$ векторларды тап.

3. k-нің қандай мәндерінде $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$) және $k\vec{a}$ векторлар:
1) бағыттас; 2) қарама-қарсы бағытталған; 3) тең болады?

4. $ABCD$ параллелограмда O — диагональдардың қиылысу нүктесі, K нүкте — CD қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{OA}$ мен $\overrightarrow{AK}$ векторларын $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлары арқылы өрнекте.

5. C нүкте – AB қабырғасының ортасы. Өрнекте: 1) $\overrightarrow{AC}$ векторды $\overrightarrow{CB}$ вектор арқылы; 2) $\overrightarrow{AB}$ векторды $\overrightarrow{CB}$ вектор арқылы; 3) $\overrightarrow{AC}$ векторды $\overrightarrow{BA}$ вектор арқылы.

6. Өрнектерді ықшамдаңдар:
1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. 1) $A(-1;\ 4)$ және $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ және $B(1;-1)$; 3) $A(3;\ 2)$ және $B(3;2)$ нүктелер берілген. $\overrightarrow{AB}$ вектордың координаталарын табыңдар.

8. Егер: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0;-1)$ және $B(3;-5)$; 3) $A(2;-4)$ және $B(2;-1)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ вектордың ұзындығын табыңдар.

9. Егер: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ болса, $\overrightarrow{BA}$ вектордың координаталары неге тең болады?

10. $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ және $D(5;\ 2)$ нүктелер берілген. $\overrightarrow{AC}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторлары тең бе?

11. $\vec{a}(m;24)$ вектордың ұзындығы 25-ке тең. m-ны табыңдар.

12. $A(5;\ -3)$ нүкте $\vec{a}(-7;\ -8)$ вектордың басы болса, бұл вектордың соңы (B)-ның координаталарын табыңдар.

13. Егер: 1) $A(-3;1)$ және $B(5;-5)$; 2) $A(12;0)$ және $B(0;-5)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы қандай болатынын табыңдар.

40. КООРДИНАТАЛАРЫМЕН БЕРІЛГЕН ВЕКТОРЛАР БОЙЫНША ОРЫНДАЛАТЫН АМАЛДАР

Координаталарымен берілген векторларды қосу, азайту және көбейту амалдарымен танысамыз.

1. Координаталарымен берілген векторларды қосу.

Анықтама. $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ және $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ *векторларының қосындысы деп координаталары* $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$, $\vec{c}(c_1;c_2)$ болған векторды айтады.

Сөйтіп,

$\vec{a}(a_1;\ a_2)+\vec{b}(b_1;\ b_2)=\vec{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$ немесе $\overline{(a_1;\ a_2)}+\overline{(b_1;\ b_2)}=\overline{(a_1+b_1;\ a_2+b_2)}$

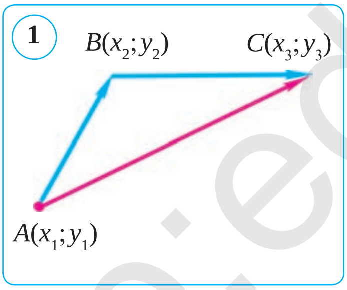
Кез келген $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ *және* $\vec{c}(c_1;c_2)$ *векторлар үшін төмендегі теңдіктер орынды болады:*

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Бұны дәлелдеу үшін теңдіктің оң және сол жақ бөлімдерінде тұрған векторлар координаталарының сәйкес координаталарын салыстыру жеткілікті.

Теорема.

***A, B, C* нүктелері қандай болса да, төмендегі вектор теңдігі орынды болып саналады: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$**



Дәлелдеу. $A(x_1;x_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – берілген нүктелер (1-сурет). Қосылғыш векторларды координаталар арқылы өрнектеп, табамыз:

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1),\ \overrightarrow{BC}(x_3-x_2;\ y_3-y_2).$$

Анықтамаға орай, қосынды вектордың координаталарын анықтау үшін $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторлардың сәйкес координаталарын қосамыз:

$$x_2-x_1+x_3-x_2=x_3-x_1,\ y_2-y_1+y_3-y_2=y_3-y_1.$$

Ал мынау $\overrightarrow{AC}$ вектордың координаталары: $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

Тең векторлар туралы теоремаға орай: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Теорема дәлелденді.

2-суретті пайдаланып, жоғарыдағы теңдіктің дұрыстығын дәлелдеуді өздеріңе ұсынамыз.

Сөйтіп, *векторларды қосу үшін олардың сәйкес координаталарын қосудың өзі жеткілікті екен.*

2. Координаталарымен берілген векторларды азайту.

Анықтама. $\vec{c}\,(c_1;c_2)$ векторының $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$ векторын: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ берсе, ол $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ және $\vec{b}\,(b_1;b_2)$ *векторларының айырмасы* деп аталады.

Бұдан $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ векторының координаталарын табамыз:

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=a_2-b_2.$$

Координаталарымен берілген векторларды азайту үшін олардың сәйкес координаталарын азайтудың өзі жеткілікті, яғни:

$$\vec{a}\,(a_1;\ a_2)-\vec{b}\,(b_1;\ b_2)=\vec{c}\,(a_1-b_1;\ a_2-b_2)\ \text{немесе}$$

$$\overline{(a_1;a_2)}-\overline{(b_1;b_2)}=\overline{(a_1-b_1;\,a_2-b_2)}\,.$$

3. Координаталарымен берілген векторларды санға көбейту.

Анықтама. $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$ векторы $\vec{a}\,(a_1,\ a_2)$ векторының k санға көбейтіндісі деп айтылады, яғни: $k\vec{a}=\overline{(ka_1;\ ka_2)}\,.$

Анықтамаға орай, $\overline{(a_1;\ a_2)}\cdot k=k\overline{(a_1;\ a_2)}\,.$

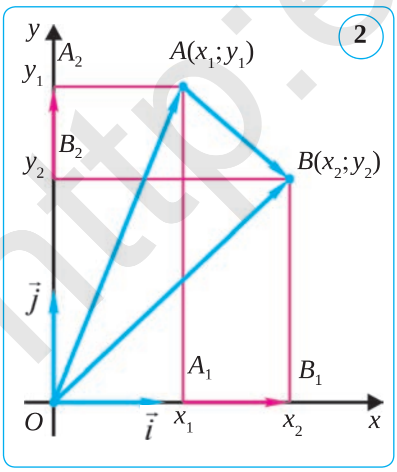
Демек, *векторды санға (яки к санын $\vec{a}$ векторға) көбейту үшін оның координаталарын сол санға көбейтудің өзі жеткілікті екен.*

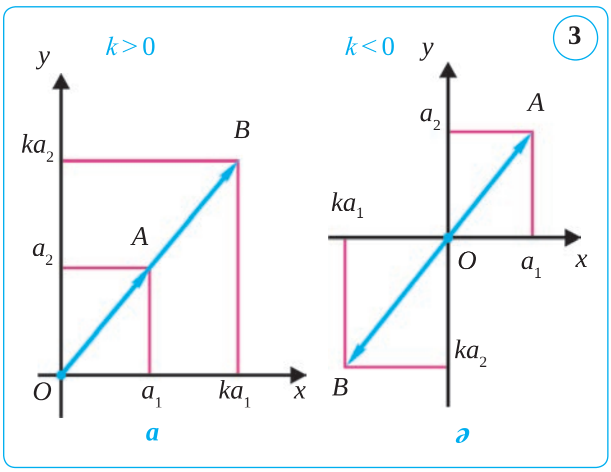
Векторды санға көбейтудің бұрын келтірілген анықтамасын 3-суретті пайдаланып тексеріп көріңдер. Оның қасиеттері координаталарда да орынды болады. Сол себепті оларды келтіріп отырмадық.

1-есеп. $\vec{a}(3;\ 5)$ және $\vec{b}(2;\ 7)$ векторлар қосындысын табыңдар.

Шешуі. $\vec{a}(3;\ 5)+\vec{b}(2;\ 7)=\overline{(3;\ 5)}+\overline{(2;\ 7)}=\overline{(3+2;\ 5+7)}=\overline{(5;\ 12)}\,.$

Демек, $\vec{a}+\vec{b}$ векторының координатасы (5; 12)-ге тең.





2-есеп. $\vec{a}(-3;\ 5)$ және $\vec{b}(3;\ -3)$ векторларының айырмасын табыңдар.

Шешуі. $\vec{a}(-3;\ 5)-\vec{b}(3;\ -3)=\overline{(-3;\ 5)}-\overline{(3;-3)}=\overline{(-3-3;\ 5-(-3))}=\overline{(-6;\ 8)}$.

Жауабы: $\overline{(-6;\ 8)}$.

3-есеп. $\vec{a}(3;\ 5)$ векторына қарама-қарсы $\vec{b}$ векторын табыңдар.

Шешуі. $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы $\vec{b}$ векторы төмендегіге тең:
$\vec{b}=-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}=-1\cdot\overline{(3;\ 5)}=\overline{(-3;\ -5)}$. ***Жауабы:*** $\vec{b}(-3;\ -5)$ немесе $\overline{(-3;-5)}$.

4-есеп. Егер $\vec{a}(-3;\ 4)$ болса, $\vec{b}=4\vec{a}$ векторының координаталарын табыңдар. *Шешуі.* $\vec{b}=4\vec{a}=4\cdot\overline{(-3;\ 4)}=\overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)}=\overline{(-12;\ 16)}$.

Жауабы: $\vec{b}(-12; 16)$ немесе $(-12; 16)$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Координаталары берілген екі вектор қалай қосылады?
? 2) Координаталары берілген екі вектор қалай азайтылады?
3) Координаталары берілген вектор санға қалай көбейтіледі?

2. Егер $\vec{a}(-4;\ 8)$ және $\vec{b}(1;\ -4)$ болса, бұл векторлардың: 1) қосындысының; 2) айырмасының координаталарын тап.

3. $\vec{a}(-2;6)$ және $\vec{b}(-2;4)$ векторлары берілген. 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$ векторының координаталарын тап.

4. $\vec{a}(2;\ 3)$ және $\vec{b}(-1;\ 0)$ векторлары берілген. Вектордың координаталарын тап: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$.

5. $\vec{a}(2;-3)$ және $\vec{b}(-2;-3)$ векторлары берілген. Осы векторлардың координаталарын тап: 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$.

6. $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{j}$ векторлары берілген. Координаталарын тап:
1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$.

7. $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ және $\vec{b}=3\vec{i}$ векторлары берілген. 1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ вектордың координаталарын тап.

8. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ және $\vec{b}=2\vec{j}$ векторлары берілген. 1) $\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

9. $\vec{a}=-3\vec{i}$ және $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$ векторлары берілген. 1) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ векторының координаталарын табыңдар.

41. ВЕКТОРЛАРДЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТҮСІНДІРМЕЛЕРІ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР ШЕШУДІҢ ВЕКТОРЛЫҚ ӘДІСІ

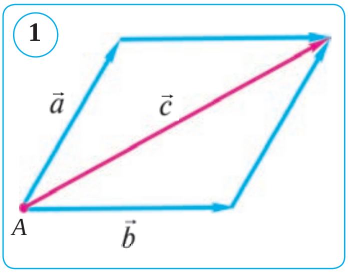
1. Вектордың физикалық және геометриялық түсіндірмелері.

1. Денеге түсірілген күшті вектормен кескіндеп көрсету қолайлы, сонда оның бағыты күш әсерінің бағытымен бірдей болады, ал абсолют шамасы күш шамасына пропорционал болып келеді. Тәжірибе көрсетіп отырғандай, күштерді осылайша кескіндеп көрсеткенде дененің бір нүктесінен түсірілген екі немесе бірнеше күштердің тең әсерлі күшін оларға сәйкес векторлардың қосындысымен бейнелейді. 1-суретте дененің A нүктесіне түсірілген екі күш $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларымен кескінделген. Ол күштердің тең әсерлі күші $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вектормен өрнектеледі.

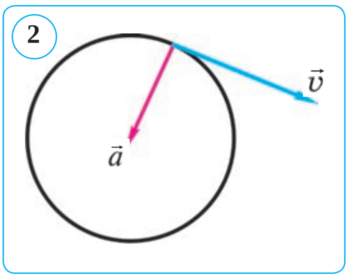
Күшті берілген екі бағытта әсер ететін күштердің қосындысы түрінде көрсету – *күшті осы бағыттар бойынша жіктеу* деп аталады.

2. Физикада дененің *ілгерілемелі қозғалысы* деп дененің барлық нүктелерінің бірдей уақыт аралығында, бірдей бағытта, бір қашықтыққа жылжуын айтады. Сөйтіп, физикадағы *жылжу векторы* оқулығымызда қабылданған мағынадағы вектор екен. Айырмашылығы сол, геометрия оқулығында тек жазықтықтағы вектор туралы сөз болады, ал физикада о бастан-ақ кеңістіктегі векторлар туралы әңгіме болады.

3. Физикада «вектор» сөзі кең мағынада қолданылады. Мысалы, жылдамдықты вектор деп атайды. Бірақ, геометриялық вектордың ұзындығы метрлермен, ал жылдамдықтың абсолют шамасы м/с (метр-секундпен) өлшенуінің өзінен-ақ жылдамдықтың геометрияда қабылданған мағынадағы вектор емес екені көрініп тұр. Біз геометрияда жылдамдықты вектор емес, *векторлық шама* дейміз.



1



2

Жалпы, векторлық шамалар өздерінің модулінен тыс бағытымен де анықталады. Масштаб таңдап алынғанда векторлық шамалар геометриялық векторлармен кескінделеді.

Мұнда векторлық шамаларды қосуға — оларды кескіндейтін геометриялық векторларды қосу, ал векторлық шамаларды сандарға көбейтуге — оларды кескіндейтін геометриялық векторларды осы сандарға көбейту сәйкес келеді.

Мысалы, 2-суретте $\vec{v}$ вектор — айналмалы қозғалыстың жылдамдығын, ал $\vec{a}$ вектор — үдеуді өрнектейді. Бірақ бұл векторларды физикалық тұрғыдан қозғау мағынасына ие емес.

Осылай болғанымен, физикада жылдамдық пен үдеуді вектор деп тікелей атайды. Дәл осы сияқты біз де кезінде үшбұрыш қабырғасының ұзындығын қысқаша ғана оның қабырғасы деп атауға келісіп алған едік.

2. Геометриялық есептерді шешудің векторлық әдісі.

Геометриялық есептерді шешу мен теоремаларды дәлелдеу кезінде векторлар кеңінен қолданылады.

1-есеп. C нүкте – AB кесіндінің ортасы, ал O нүкте – жазықтықтың ерікті нүктесі. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ екенін дәлелдеңдер (3- *а* сурет).

Шешуі. 1-әдіс. Үшбұрыштар ережесіне орай:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{және} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Бұл екі теңдікті қосып, төмендегі нәтижеге ие боламыз:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

C нүкте *AB* кесіндінің ортасы болғандықтан, $AC + BC = 0$, өйткені қарама-қарсы векторлардың қосындысы нөл векторға тең.

Сөйтіп, төмендегіге ие боламыз:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{немесе} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2-әдіс. OAB үшбұрышын параллелограммен толықтырамыз (3-*б* сурет).

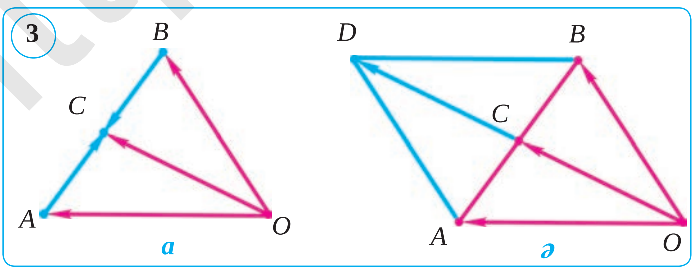
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (параллелограмның ережесіне орай). Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді, сондықтан $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

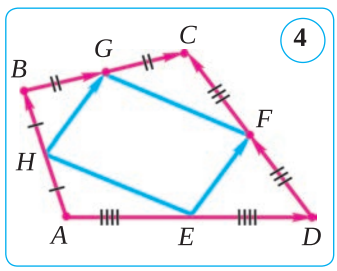
Демек, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Бұдан:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2-есеп. Ерікті *ABCD* төртбұрышы қабырғаларының ортасы параллелограмның төбелері болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. E, *F*, *G*, *H* – сәйкесінше *AB*, *BC*, *CD* және *DA* қабырғалардың орталары болсын (4-сурет). Параллелограмның 3-белгісіне орай, *EF* және *HG* кесінділерінің ұзындықтары тең әрі параллель екендігін дәлелдеу жеткілікті. Вектор тілімен айтқанда, бұл $\overrightarrow{EF}$ және $\overrightarrow{HG}$ векторларының теңдігін дәлелдеуден тұрады.





Расында да

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}),\ \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}).$$

Бұдан тыс $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ екені де айдан анық. Сондықтан $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Бұдан, EF және HG кесінділерінің ұзындық бойынша теңдігі және параллель екендігі келіп шығады. Демек, ерікті $ABCD$ төртбұрышы қабырғаларының орталары параллелограмның төбелері болады. Бізден осыны дәлелдеу талап етілген еді.

Келтірілген дәлелдерден көрініп тұрғанындай, есептер мен теоремаларды вектор әдісімен шешу алгебралық есептерді шешуге ұқсайды. Бұл есепті шешудің бір жағы ғана және ол үш сатыдан тұрады.

Бірінші саты. Есептің (теореманың) шартын вектор көрінісінде жазу және қолайлы векторларды енгізу (ұқсастық – белгісіздерді енгізу және алгебралық теңдіктер түзу).

Екінші саты. Есептің шарты вектор алгебрасының құралдары арқылы есепті вектор көрінісінде шешу мүмкіндігі туылатындай етіп алмастырылады (ұқсастық – алгебралық теңдеуді шешу).

Үшінші саты. Алынған векторлық шама бастапқы атаулар бойынша талданады (ұқсастық – теңдеуді алгебралық тұрғыдан шешкен соң жауабын жазу).

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Төбелері $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$ және $C(0;\ 2)$ болған үшбұрыштың CC_1 медианасының ұзындығын табыңдар.

2. K нүктесі —$ABCD$ параллелограмының $\overrightarrow{AD}$ қабырғасының ортасы. $\overrightarrow{KC}$ векторды $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлар арқылы өрнекте.

3. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ және $C(6;\ 14)$ нүктелер берілген. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ вектордың координаталарын табыңдар.

4. $ABCD$ квадратының қарама-қарсы екі төбесінің координаталары берілген: $A(0;4)$ және $C(6;0)$. Қалған екі төбесінің координаталарын табыңдар.

5. $A(-2;3)$ нүктесі $\vec{a}(-3;8)$ вектордың басы болса, бұл вектордың соңының ($B(x;y)$) координаталарын табыңдар.

6. Трапецияның орта сызығы табандарына параллель және олар ұзындығының жартысына тең екенін вектордың көмегімен дәлелдеңдер.

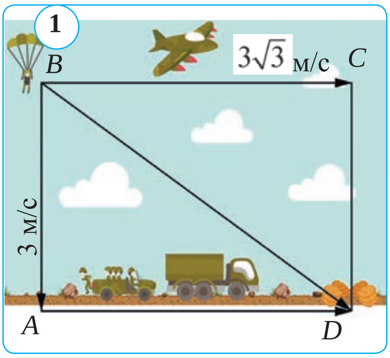
7. $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}(-2;4)$, $\vec{c}(-1;\ -3)$, $\vec{d}(-4;\ 4)$, $\vec{p}(3;\ 9)$, $\vec{q}(-1;\ 2)$ векторлар берілген. Солардың арасынан: 1) бағыттас векторларды; 2) бір жұп қарама-қарсы бағытталған векторларды табыңдар.

8. $ABCD$ ромбысындағы N нүктесі — CD қабырғаның ортасы. $\overrightarrow{AN}$ векторды $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AD}$ векторлар арқылы өрнектеңдер.

9. $ABCD$ – параллелограмм және сол параллелограмның сыртында жататын ерікті O нүкте берілген. $\overrightarrow{OD}$ векторды $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторлар арқылы өрнектеңдер.

42. ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

ПРАКТИКАЛЫҚ КОМПЕТЕНЦИЯНЫ ДАМЫТАТЫН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР



1. Векторлардың практикалық қолданылуына қатысты есептер.

1-есеп. Парашютші жерге 3 м/сек жылдамдықпен түсіп келеді, ал жел оны $3\sqrt{3}$ м/с жылдамдықпен итеріп барады. Бұндай жағдайда парашютші жерге қандай бұрыш астында түседі (1-сурет)?

Шешуі. Парашютші B нүктеде болсын делік. Ауырлық күші $\overrightarrow{BA}$ мен желдің күші $\overrightarrow{BC}$ -ның тең әсер етушісі $\overrightarrow{BD}$ болады және $ABCD$ – тікбұрышты төртбұрыш, AB – вертикаль. Демек, $\angle ADB$ бұрышының мәнін табу керек. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ және $BC=AD$ ($ABCD$ – тікбұрышты төртбұрыш, $\angle A=90°$). Пифагор теоремасына орай: $BD^2=AD^2+AB^2$, демек:

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6 \text{ (см)}.$$

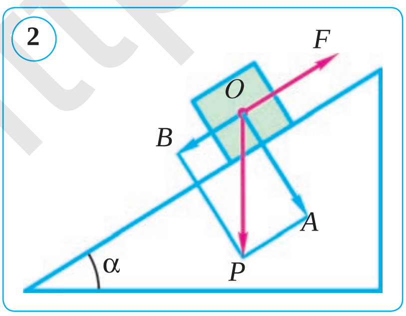
Сонымен, ABD үшбұрышындағы 3 см-лік AB катеті 6 см-лік BD гипотенузаға қарағанда екі есе кіші болып шықты. Демек, $AB=0{,}5BD$ болғандықтан, тікбұрышты үшбұрыштағы 30°-тық бұрыштың қарсысындағы катеттің қасиеті бойынша $\angle ADB=30°$ немесе $\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}=0{,}5$, бұдан $\angle ADB=30°$ келіп шығады.

Жауабы: $\angle ADB=30°$.

2-есеп. Парашютші жерге 4 м/сек жылдамдықпен түсіп келеді, ал жел оны $4\sqrt{3}$ м/с жылдамдықпен ықтырып барады. Бұндай жағдайда парашютші жерге қандай жылдамдықпен түседі (1-суретке қараңдар)? Есепті өздерің дербес шешіңдер.

3-есеп. Салмағы P болған жүк қия беткейден ылдиға қарай сырғанап түсіп кетпеуі үшін оны қандай F күшпен ұстап тұру керек (2-сурет)?

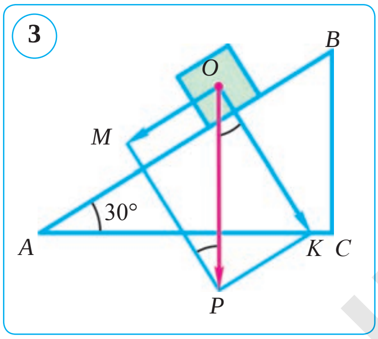
Шешуі. Жүктің ауырлық орталығы O-ға $\vec{P}$ күш қойылсын делік. $\vec{P}$ векторды өзара перпендикуляр екі бағыт бойынша 2-суретте көрсетілгендей етіп қоямыз. Қия беткейге перпендикуляр $\overrightarrow{OA}$ күш жүктің жылжуына жол бермейді. Жүкті ұстап тұратын $\vec{F}$ күш оған карама-карсы бағытталған $\overrightarrow{OB}$ күшке мөлшер тұрғысынан тең болуға тиіс. Бұдан төмендегідей қорытындыға келеміз: $F=P\sin\alpha$.



4-есеп. $P=50$ Н жүк ауытқитын жазықтықта жатыр. Егер жазықтықтың ауытқу бұрышы көкжиекке сәйкес 30º-қа тең болса, сырғанау күші мен қысым күшін табыңдар.

Берілгені: $P=50$ N, $\angle A = 30°$.

Табу керек: $F_{\text{ауыт}}$, $F_{\text{қысым.}}$



Шешуі. 1) $\vec{P}$ күшті екіге бөліп: сырғанау күші бағытына параллель және қысым күші ауытқу жазықтығына перпендикуляр күш етіп жазамыз.

2) Параллелограмм жасаймыз: $\overrightarrow{OP}$ вектор – оның диагоналі; $OM \| AB$, $OK \perp AB$, $PK \| AB$, $PM \perp AB$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{\text{ауытқу}}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{F}_{\text{қысым}}$-ды өткіземіз (3-сурет). 3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Тікбұрышты OPM үшбұрышынан: $OM=0,5OP=0,5 \cdot 50 = 25$; $F_{\text{ауыт.}} = 25$ N.

5) Тікбұрышты ОРК үшбұрышынан Пифагор теоремасына орай:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

яғни $F_{\text{қысым}} \approx 43$ N. ***Жауабы:*** $F_{\text{ауытқу}} = 25$ N, $F_{\text{қысым}} \approx 43$ N.

5-есеп. Тәжірибелер көрсетіп отырғанындай, егер A денеге a және $б$ күштер әсер етіп жатқан болса, онда олардың әсері жалғыз c күштің әсеріне ғана тең болады. Бұл c күш a және $б$ кесінділерінен жасалған параллелограмның диагоналімен кескінделеді. Теңдей әсер ететін күш "*параллелограмм ережесі*" бойынша табылады.

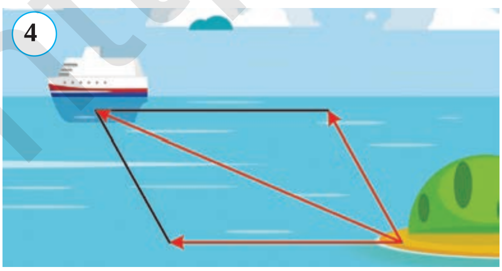
Мәселен, жүзіп келе жатқан кемеде (4-сурет) болған яки өзенде қайықпен жүзіп бара жатқан адамға көлденең қима және ағын бойымен бағытталған екі күш әсер етеді. Сол күштерді суретте кескіндеңдер. Бұл есепке ұқсас басқа есептер құрастырып, сәйкесінше суреттерде бейнелеңдер.

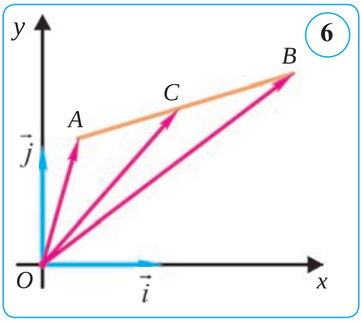
2. Жүйенің ауырлық орталығының координаталарын табу.

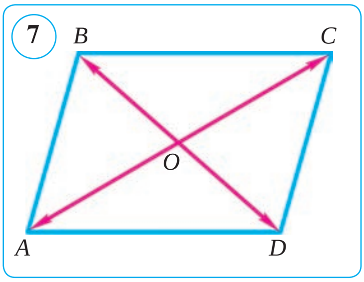
6-есеп. Кесіндіні берілген қатынас бойынша бөлу (координата көрінісінде).

Егер $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ болса, C нүкте AB кесіндіні λ қатынасында бөледі (6-сурет). Егер кесінді соңының координаталары $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ белгілі болса, C нүктенің x, y координаталарын тап.

Шешуі. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ және $\overrightarrow{OB}$ векторларды саламыз. $\overrightarrow{OA}\,(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OC}\,(x; y)$,







$\overrightarrow{OB}(x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x;\ y_2-y)$ және λ санға көбейткенде, оның координаталары λ санға көбейтілетінін ескеріп, төмендегілерге ие боламыз:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,(x - x_1;\ y - y_1) =$$

$$= \lambda\overrightarrow{CB}\,(x_2 - x;\ y_2 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$$

Демек, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

7-есеп. $M_1(x_1;\ y_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2)$ нүктелерге сәйкесінше m_1 және m_2 -ге тең жүктер орналастырылған. Бұл массалар жүйесінің ауырлық орталығы (C нүкте) координаталарын табыңдар.

Шешуі. Ауырлық орталығы C – M_1M_2 кесіндіде және M_1, M_2 нүктелерге қойылған m_1 және m_2 массалардан кері пропорционал қашықтықта жатады, яғни екі материалдық нүктелер жүйесінің ауырлық орталығы болған C нүкте M_1M_2 кесіндіні $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$ қатынасында бөледі. λ -нің мәнін 5-есептегі формулаларға қойып, пішін алмастырған соң, C нүктенің координаталарын табамыз:

$$x_C = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. Вектор қатынасын дәлелдеуге қатысты есеп.

8-есеп. $ABCD$ – параллелограмы және оның диагональдары қиылысқан O нүктесі берілген. Дәлелдеңдер: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Берілген: $ABCD$ – паралллелограмм, O – AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі, $AO = OC$, $BO = OD$ (7-сурет).

Дәлелдеу керек: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Дәлелдеу. Бұл вектор теңдігін дәлелдеудің бірнеше әдістерін келтіреміз. Айырманың нөл векторға теңдігін көрсетеміз:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Пішін алмастыру үдерісінде қосындыдан қосындыны азайту ережесі, топтастыру заңы, үшбұрыштар ережесі, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары және бағыттас векторлар), нөлдік вектор анықтамалары пайдаланылады.

2 $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$

Пішін алмастыруда қосындыдан қосындыны азайту және үшбұрыш ережелері, топтастыру заңы, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ екені және нөлдік вектор анықтамалары пайдаланылады.

43–44. 3-БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ. ҚАТЕЛЕР БОЙЫНША ЖҰМЫС ІСТЕУ

1. $A(-2;3)$ және $B(4;0)$ нүктелерінен өтетін түзу сызық теңдеуін түзу.
2. Егер $C(4;9)$ және $R=5$ болса, орталығы C нүктеде, радиусы R болған шеңбердің теңдеуін жаз.
3. $\vec{a}(1;\ 0)$, $\vec{b}(1;\ 2)$ және $\vec{c}\ (1;\ 3)$ векторлар берілген. $\vec{a}-\vec{b}$ және $\vec{b}+\vec{c}$ векторларының координаталарын табыңдар.
4. $\vec{c}\ (1;\ 0)$ және $\vec{d}(1;\ 2)$ вектолары берілген. $2\vec{c}+3\vec{d}$ векторының координаталарын табыңдар.

3-тест Өзіңді сынап көр!

1. $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$ нүктелерінен өтетін түзу сызық қайсы ширектерде орналасқан?

   А) III, IV, I; Ә) I, II, III; Б) II, III, IV; В) II, IV.

2. $A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 2)$ нүктелерінен өтетін түзу сызық қайсы ширектерде жатады?

   А) I, II, III; Ә) II, III; Б) II, IV; В) III, IV, I.

3. Төбелері $A(-4;\ 0)$, $B(-4;\ 4)$ нүктелерде болған AB кесіндісі ортасының координаталарын табыңдар.

   А) $(-2;\ 0)$; Ә) $(0;\ 2)$; Б) $(2;\ -4)$; В) $(-4;\ 2)$.

4. Төбелері $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 0)$ нүктелерде болған үшбұрыштың AC қабырғасы ортасының координаталарын табыңдар.

   А) $(-1;\ 1)$; Ә) $(1;\ 0)$; Б) $(0;\ 0)$; В) $(0;\ 1)$.

5. $\vec{a}(-3;\ 1)$ және $\vec{b}(5;-6)$ векторлар берілген. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ вектордың координаталарын табыңдар.

   А) $(14;\ -9)$; Ә) $(4;\ -3)$; Б) $(14;\ -3)$; В) $(9;\ 3)$.

6. $A(-3;\ 0)$ және $B(-5;\ 4)$ нүктелер берілген. $\overline{BA}$ векторының координаталарын табыңдар.

   А) $(-8;\ -4)$; Ә) $(-8;\ 4)$; Б) $(2;\ -4)$; В) $(8;\ -4)$.

Ағылшын тілін үйренеміз!

Шеңбер теңдеуі – circle equation
Түзу сызық теңдеуі – straight-line equation
Коллинеар векторлар – collinear wectors
Вектор ұзындығы – wector length
Тең векторлар – equal wectors
Скаляр – scalar
Қарама-қарсы векторлар – opposite wectors
Бірлік вектор – onyt wector
Бағыттас – equiwelent

Тарихи мағлұматтар

Рене Декарт
(1596–1650)

1. Тікбұрышты координаталар жүйесін ғылымға француз ғалымы Рене Декарт енгізген. Тікбұрышты координаталар жүйесі кейде Декарт координаталар жүйесі деп те айтылады.

Рене Декарт (1596 –1650) – француз философы, математигі, физигі, физиологы. Ла-Флэш иезуит колледжінде білім алған, грек және латын тілдерін, математика мен философияны үйренген. Декарт философиясы оның математикасымен, космогониясымен және физикасымен тығыз байланысты. Математикада аналитикалық геометрияның негізін қалаушылардың бірі (тікбұрышты координаталар жүйесі оның атымен аталады). Декарт XVII – XVIII ғасырлар философиясы мен ғылымының дамуына салмақты үлес қосқан.

XVII ғасырда Декарттың ізденістері арқасында бүкіл математикада, атап айтқанда, геометрияда ұлы төңкеріс жасап, оны қайта құрған координаталар жүйесі дүниеге келді. Алгебралық теңдеулерді геометриялық график арқылы талдау және геометриялық мәселелердің шешімін аналитикалық формулалар және теңдеулер жүйелерінің көмегімен іздестірудің мүмкіндігі пайда болды.

Бүгінгі таңға дейін сақталып келген қолайлы белгілердің енгізілуінде, яғни белгісіздерді белгілеу үшін x, y, z; коэффициенттерді белгілеу үшін a, b, c латын әріптерін енгізуде, дәрежелерді x^2, y^2, z^2 көрінісінде белгілеуде де Декарттың сіңірген еңбектері өлшеусіз.

2. Вектор ұғымы XIX ғасырдың орта шенінде бір мезгілдің өзінде бірнеше математиктің істерінде кездесе бастады. Жазықтықта векторлармен жұмыс істеуді алғаш рет 1835 жылы итальян ғалымы **Белливитис** (1803–1880) бастап берді. Бұдан тыс **К. Гаусстың** (1777–1855) 1831 жылы жазылған “Биквадраттық салыстырулар теориясы” атты шығармасында және **И. Арган** (1768–1822) мен **К. Вессельдің** (1745–1818) кешенді сандарды геометриялық кескіндеуге қатысты ізденістерінде вектор ұғымы тілге алынған. Ақыр соңында **В. Гамильтон** (1805–1865) мен **Р. Грассманның** (1854–1901) векторлар бойынша орындалатын амалдарға қатысты шығармалары дүниеге келді. Гамильтон 1845 жылы бірінші болып вектор және скаляр шамалардың айырмашылығын түсіндіріп берді. Гамильтонның сол ізденісі нәтижесінде *“скаляр”, “вектор”* дейтін терминдер пайда болды.

Гамильтон “*вектор*” терминін латынша vehere – *“тасу”, “сүйреу”* сөзінен алған. Сонда вектор – “*тасымалдаушы*”, *“жеткізуші”* дегенді білдіреді. 1806 жылы **И. Арган** бағытталған кесінділерді әріптің үстіне сызық қою арқылы белгілеген. Векторлардың басы мен соңын көрсету үшін **А. Муобиус** (1790–1868) оны AB көрінісінде белгілеген. Грассман векторларды “кесінділер” деп атаған, ол координата осьтері бойымен бағытталған e_1, e_2 бірлік векторларды, сондай-ақ векторларды $x_1e_1+x_2e_2$ көрінісінде кескіндеуді ұсынған. Гамильтон мен **Дж. Гибсс** (1839–1903) векторларды грек әріптерімен белгілеген. Векторларды қара әріптермен белгілеуді 1891 жылы **А. Хевисайд** (1850–1925) ұсынған. Ал вектордың ұзындығын |AB| көрінісінде белгілеуді 1905 жылы **Р. Ганс** (1880–1954) енгізген.

IV ТАРАУ. АУДАН

§ 9. КӨПБҰРЫШТЫҢ АУДАНЫ

45. АУДАН ТУРАЛЫ ҰҒЫМ

1. Аудан туралы ұғым.

Пішіндердің ауданын анықтау мәселесі өте ерте замандарға барып тіреледі. Бұл мәселенің дүниеге келуін адамдардың практикалық қызметі талап еткен. Әрқайсысымыздың күнделікті өмірімізде аудан жөнінде азды-көпті ұғымымыз бар. Мәселен, Сен тік төртбұрыштың (айталық, өзің тұратын бөлменің) және квадраттың ауданын таба аласың. Біз енді пішіндердің ауданы туралы ұғымдарды анықтаумен және оларды өлшеудің әдіс-амалдарын табумен шұғылданамыз.

Егер геометриялық пішінді шекті сандағы үшбұрыштарға бөлу мүмкін болса, бұл пішін *қарапайым пішін* деп аталады.

Біз үшбұрыш деп жазықтықтың үшбұрышпен шектелген шекті бөлігін айтамыз. Дөңес көпбұрыш өзінің бірер төбесінен шыққан диагональдарымен үшбұрыштарға бөлінеді (1-*а* сурет).

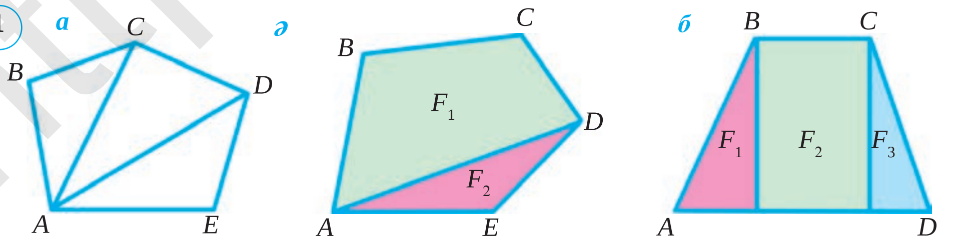
Аудан оң мөлшер (шама) болып саналады, оның сандық мәні төмендегі негізгі қасиеттерге (аксиомаларға) ие.

1-қасиет. *Тең пішіндердің аудандары да тең болады.*

2-қасиет. *Егер көпбұрыш бірін-бірі қамти алмайтын көпбұрыштардан құралған болса, онда оның ауданы сол көпбұрыштар аудандарының қосындысына тең болады.*

F көпбұрышы бірін-бірі қамти алмайтын көпбұрыштардан құралған дегені: 1) F – бұл көпбұрыштардың қосындысынан тұратындығын және 2) көпбұрыштардың екеуінің ешқайсысы ортақ ішкі нүктелерге ие еместігін білдіреді. Мәселен, 1-*б* және 1-*д* суреттерде бірін-бірі қамти алмайтын көпбұрыштардан құралған көпбұрыштар бейнеленген.

1



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$

$S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

1- және 2- қасиеттер ауданның негізгі қасиеттері болып саналады.

2. Ауданды өлшеу. Ауданды өлшеу кесінділерді өлшеу секілді өлшеу бірлігі үшін қабылданған пішіннің беті арқылы берілген пішінді салыстыруға негізделген. Соның нәтижесінде берілген *пішін бетінің сандық мәнін* аламыз.

Аудан – жазық пішіндерді сипаттайтын негізгі математикалық мөлшерлердің бірі. Қарапайым жағдайларда аудан жазық пішінді толықтыратын бірлік квадраттармен – қабырғасы ұзындық бірлігіне тең квадраттар санымен өлшенеді.

3-қасиет. *Қабырғасы бірдей ұзындық өлшеу бірлігіне тең болған квадраттың ауданы бірге тең.*

Сонымен төмендегі теорема орынды болады.

Теорема.

Қабырғасының ұзындығы *a*- ға тең болған квадраттың ауданы a^2-қа тең.

Қалыпты жағдайда аудан латынның бас әрпі S-пен белгіленеді. Демек, квадрат үшін $\boldsymbol{S = a^2}$ формуласы орынды болады. Ұзындық өлшемінің бірлігі квадратымен бірге айтылады.

3. Теңауданды пішіндер.

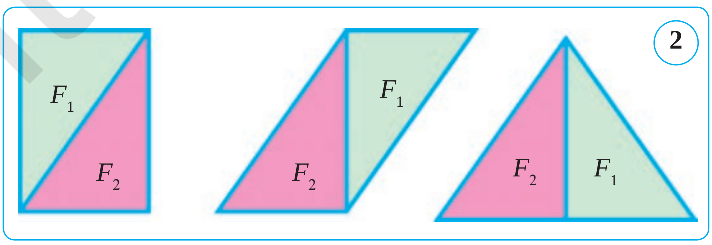
Анықтама. *Егер екі көпбұрыштың біреуін бірнеше бөлікке бөліп, бұл бөліктерді өзгеше орналастырғанда екінші көпбұрыш пайда болса, бұндай көпбұрыштар* ***тең құрылғандар*** *деп аталады.*

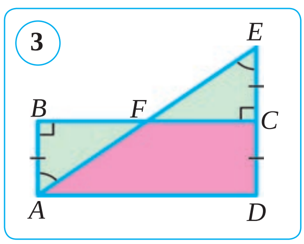
Егер екі көпбұрыштың аудандары тең болса, олар ***теңауданды көпбұрыштар*** деп аталады. 2-суреттегі көпбұрыштар теңауданды болып саналады.

Тең көпбұрыштар – теңауданды (1-қасиет), бірақ бұл кері аксиома, жалпы айтқанда, дұрыс емес: егер екі пішін теңауданды болса, бұдан олардың теңдігі келіп шықпайды.

Есеп. $ABCD$ тік төртбұрышының DC қабырғасының жалғасында C төбесіне сәйкес симметриялы E нүктесі белгіленген (3-сурет). ADE үшбұрышы ауданының $ABCD$ тік төртбұрышы ауданына тең екенін дәлелдеңдер.

Дәлелдеу. AE және BC қабырғалары F нүктесінде қиылыссын делік. ABF және ECF үшбұрыштары өзара тең (катеті мен сүйір бұрышына орай: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$). Соның нәтижесінде ADE үшбұрышы $AFCD$ тра-





пециясы мен *ECF* үшбұрышынан, ал *ABCD* тік төртбұрышы сол *AFCD* трапециясы мен *ECF*-ке тең болған *ABF* үшбұрышынан құралған. Демек, *ADE* үшбұрышы мен *ABCD* тік төртбұрышы тең түзілген (яғни теңауданды) болып табылады. Бізден осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

Аудан шама болғандықтан, шамалардың барлық қасиеттеріне ие болады. Оларды бір түрдегі шамалардағыдай қосуға да, оң санға көбейтуге де болады. Екі ауданды қосқанда және санға көбейткенде де аудан пайда болады.

Практикада ауданы бар кез келген пішіннің ауданын өлшеуге немесе есептеуге болады. Көбінесе түрлі аудандарды анықтау ісінде формулалар пайдаланылады. Кейбір пішіндердің аудандарын есептеу формулаларын шығару келесі тақырыптарда айтылады.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Қарапайым пішін деп нені айтамыз?
2) Пішіннің ауданы дегенде нені түсінесіңдер?
3) Ауданның негізгі қасиеттерін бейнелеңдер.
4) Қандай екі көпбұрыш теңқұрылған деп аталады?
5) Теңауданды пішіндер деген не? Теңауданды пішіндер тең бола ма?

2. Квадраттың қабырғасы: 1) 1,3 см; 2) 0,15 дм; 3) 2,5 см; 4) 18 дм; 5) 2,5 м. Квадраттың ауданын табыңдар.

3. Квадраттың ауданы: 1) 16 дм^2; 2) 144 см^2; 3) 121 см^2; 4) 49 мм^2; 5) 196 см^2; 6) 0,64 дм^2; 7) 6,25 м^2. Квадраттың қабырғасын табыңдар.

4. Периметрінің қабырғалары 54 см-ге және 42 см-ге тең тіктөртбұрыштың периметріне тең болатын квадраттың ауданын табыңдар.

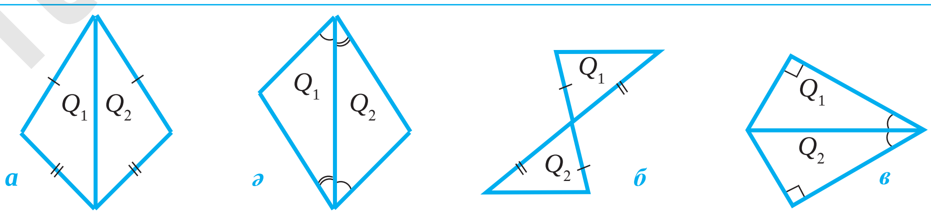
5. 4-суреттегі Q_1 және Q_2 үшбұрыштар теңауданды. Осыны дәлелдеңдер.

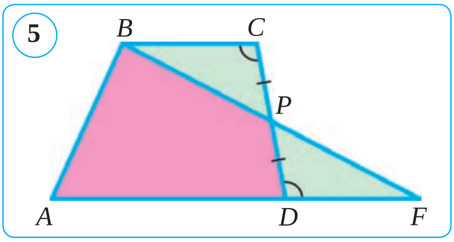
6. Квадраттың ауданы 36 см². Егер оның барлық қабырғаларын:
1) екі есе ұзартса; 2) үш есе қысқартса; 3) 2 см-ге ұзартса, оның ауданы қалай өзгереді?

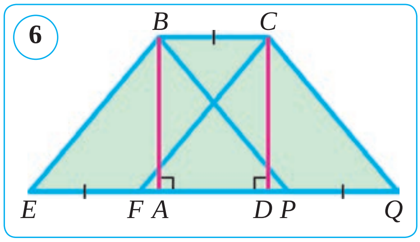
Үлгі. Ауданы 81 см²-қа тең квадраттың барлық қабырғалары 1 см-ге қысқартылса, оның ауданы қалай өзгереді?

Шешуі. Берілген квадраттың қабырғасы $a=9$ см. Жаңа квадраттың қабырғасы $a_1=a-1=9-1=8$ (см). Ондай жағдайда $S_у=8^2=64$ (см^2). Берілген квадраттың қабырғалары 1 см-ге қысқартылса, оның ауданы $S-S_{ж.}=81-64=17$ (см^2) қа азаяды. ***Жауабы:*** 17 см²-қа азаяды.

4







7. Тең құрылған екі тік төртбұрыштан: 1) бұл тік төртбұрыштың теңдігі; 2) олардың теңаудандылығы келіп шыға ма?

8. Егер квадраттың барлық қабырғалары: 1) n есе ұзартылса; 2) k есе қысқартылса, оның ауданы қалай өзгереді?

9. (*Практикалық жұмыс*). Бірер квадратты сыз. Қабырғасы осы квадраттың қабырғасынан екі есе үлкен болатын екінші квадратты сыз. Екінші квадраттың ауданы бірінші квадраттың ауданынан неше есе үлкен?

10. AD – $ABCD$ трапецияның үлкен қабырғасы болсын. CD қабырғаның ортасы P нүкте және B төбесі арқылы AD сәулені F нүктеде қиып өтетін түзу жүргізілген (5-сурет). $S_{ABCD}=S_{ABF}$ екенін дәлелде.

Дәлелдеу. 1) $\triangle BCP=\triangle FDP$ – қабырғасына және оған жанасқан екі бұрышына орай ($CP=...$ – ..., $\angle BCP=\angle...$ – ... және ... параллель түзулерді ... қиюшы қиып өткенде пайда болған ... бұрыштар, $\angle BPC=\angle...$ – ... болғандықтан) тең, яғни $S_{BCP}=...$.

2) $S_{ABCD}=S_{ABPD}+...$, $S_{ADP}=S_{ABPD}+...$, сондықтан $S_{ABCD}=...$.

Нүктелердің орнына сәйкес жауаптарды жазыңдар.

11. Ауданы: 1) 2,25 см^2; 2) 0,81 дм^2; 3) 289 мм^2; 4) 5,76 м^2; 5) 400 дм^2-ге тең болған квадраттың периметрін табыңдар.

12. 6-суретте бейнеленген көпбұрыштар арасынан теңаудандыларды табыңдар.

13. Өзбекстанның жер алаңы 448,9 мың км². Бұл алаңның шамамен 80%-ын жазықтықтар құрайды. Алаңның жазық бөлігі неше мың квадрат километрден тұрады?

Біліп қойған пайдалы!

- ***S*** – латынша ***“superfacies”*** сөзінен алынған, ол ***“бет, аудан”*** деген мағынаны береді.
- *Құрлықтар мен мемлекеттердің аумақтары квадрат километрмен, үлкен егін алқаптарының аудандары гектарлармен, онша үлкен емес жер алқаптары ар (жүздік)-мен өлшенеді.*

Өзбекстан Республикасының жер алаңы – 448 900 км².

46–47. ТІК ТӨРТБҰРЫШ ПЕН ПАРАЛЛЕЛОГРАМНЫҢ АУДАНЫ

1. Тік төртбұрыштың ауданы.

Сен тік төртбұрыштың ауданы оның қабырғалары ұзындықтарының көбейтіндісіне тең болатын есептер шығарғансың.

Қазір бұл орындалған амалдың теориялық тұрғыдан дұрыс екендігін көрсетеміз.

Теорема.

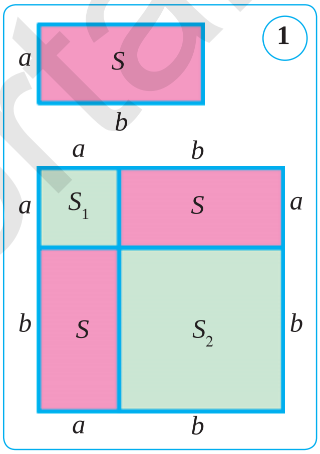
Қабырғалары *a* және *b* болған тік төртбұрыштың ауданы

$$S = a \cdot b$$

формула бойынша есептеледі.

Дәлелдеу. Қабырғалары a және b болған тік төртбұрыштың ауданы a және b — кез келген оң сандар. $S = a \cdot b$ екендігін дәлелдейміз.

Теореманы дәлелдеу үшін қабырғасы $(a+b)$ болатын квадрат саламыз. Бұл квадратты 1-суретте көрсетілген пішіндердей бөліктерге бөлеміз. Бұнда квадраттың ауданы, қабырғалары a және b-ға тең екі квадраттан, сондай-ақ қабырғалары a және b болған екі тік төртбұрыштан құралғанын байқау қиын емес.



Демек, қабырғасы $(a+b)$ болатын квадраттың ауданы $S_1 + 2S + S_2$-ге тең. Екінші жағынан аудан туралы аксиома бойынша бұл аудан $(a+b)^2$-қа тең, яғни

$$S_1 + 2S + S_2 = (a+b)^2, \text{ немесе}$$

$$S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Бұл теңдікте $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ екенін есепке алсақ, $S = a \cdot b$ формула келіп шығады. Теорема дәлелденді.

1-есеп. Тік төртбұрыштың ауданы 150 см^2-қа тең, ал қабырғаларының қатынасы 3 : 2. Осы тік төртбұрыштың периметрін табыңдар.

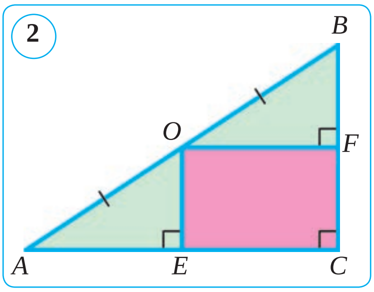
Шешуі. Тік төртбұрыштың кіші қабырғасы $b = 2x$ см болсын. Ондай жағдайда үлкен қабырғасының ұзындығы $a = 3x$ см-ге тең болады.

$$S = 3x \cdot 2x, \text{ б. а. } S = 6x^2.$$

Бұдан $x^2 = S : 6$, $x^2 = 150 : 6$, $x^2 = 25$, $x = 5$ (см).

Демек, тік төртбұрыштың кіші қабырғасы: $b = 2 \cdot 5 = 10$ (см)-ге, ал үлкен қабырғасы $a = 3 \cdot 5 = 15$ (см)-ге тең болады.

2



Енді оның периметрін есептейміз:

$$P = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (15+10) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (см)}.$$

Жауабы: $P = 50$ см.

2-есеп. Тік бұрышты төртбұрыштың катеттері 12 см-ге және 24 см-ге тең. Гипотенузаның қақ ортасынан үшбұрыш катеттеріне перпендикуляр түзулер жүргізілген. Пайда болған тік төртбұрыштың ауданын табыңдар.

Берілгені: тік бұрышты $\triangle ABC$ да: $AO=OB$, $OE\perp AC$, $OF\perp CB$, $AC=24$ см, $BC=12$ см (2-сурет).

Табу керек: S_{CEOF}.

Шешуі. Бізге белгілі болғанындай, бір түзуге жүргізілген екі перпендикуляр өзара параллель болады. Фалес теоремасына орай:

$$AE=EC=0{,}5AC=0{,}5\cdot 24=12 \text{ (см)},$$
$$CF=FB=0{,}5BC=0{,}5\cdot 12=6 \text{ (см)}.$$

Демек, $S_{CEOF} = CE\cdot CF = 12\cdot 6 = 72$ (см^2). ***Жауабы:*** 72 см^2.

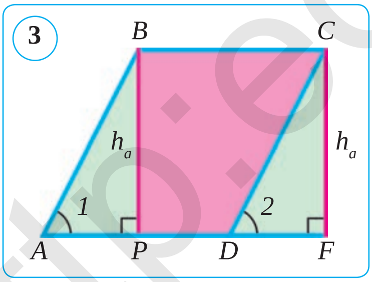
2. Параллелограмның ауданы.

Параллелограмның кез келген қабырғасын оның *табаны* деп алуға болады, осы қабырғадан қарама-қарсы қабырғасына дейінгі қашықтық оның *биіктігі* болады. Биіктік қабырғаға немесе қабырғаның жалғасына түсуі мүмкін. 3-суреттегі *BP* және *CF* – *ABCD* параллелограмның биіктігі болып табылады.

Теорема.

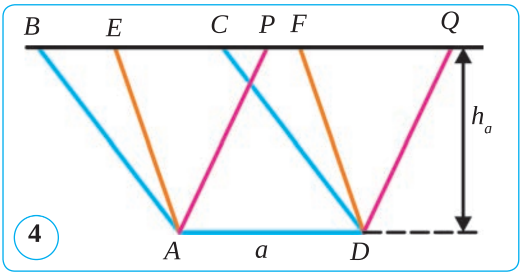
Параллелограмның ауданы оның қабырғасын осы қабырғаға түсірілген биіктікке көбейткенге тең болады: $S=a\cdot h_a$.

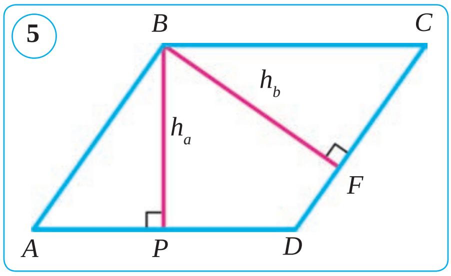
3



Дәлелдеу. *ABCD* параллелограмды қарастырайық. Бұл параллелограмның табаны ретінде $AD = a$ қабырғасын аламыз, ал биіктігі h-қа тең болсын. $S=a\cdot h_н$ екендігін дәлелдеу талап етіледі (3-сурет).

Табаны параллелограмның *BC* табанынан, ал биіктігі h-тан тұратын *PBCF* тік төртбұрышын салайық. *ABP* және *DCF* үшбұрыштары өзара тең (гипотенузасы мен сүйір бұрышына орай: $AB = DC$ – гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ – сыбайлас бұрыштар). *ABCD* параллелограмы *PBCD* трапециясымен *ABP* үшбұрышынан, ал *PBCF* тік төртбұрышы сол *PBCD* трапециясымен *ABP*-ға тең *DCF* үшбұрышынан құралған. Демек, *ABCD* параллелограмы мен *PBCF* тік төртбұрышы тең құрылғандар (яғни теңаудандылар) болып табылады. Бұдан *ABCD* параллелограмының ауданы *PBCF* тік төртбұрышының ауданына, яғни h_a-қа теңдігі келіп шығады.





Осылайша табаны a және оған түсірілген биіктігі h болып саналатын параллелограмның S ауданы төмендегі формула бойынша есептеледі:

$$S = a \cdot h_н.$$

Осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

Салдар. Егер екі параллелограмның табандары ортақ, ал биіктіктері тең болса, онда олар өзара тең болып табылады.

Берілгені: $ABCD$, $AEFD$ және $APQD$ параллелограмдары ортақ $AD = a$ табанға ие және олардың биіктіктері тең ($h_н$) (4-сурет).

Дәлелдеу керек: $ABCD$, $AEFD$, $APQD$ параллелограмдары тең құрылған.

Дәлелдеу. Мысалы, $ABCD$ және $AEFD$ параллелограмдарының тең құрылғанын дәлелдейміз. BAE және CDF бұрыштары өзара тең (үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісіне орай), өйткені $BA = CD$, $AE = DF$ және $\angle BAE = \angle CDF$ (сәйкес қабырғалары параллель бұрыштар болғаны үшін). Демек, $ABCD$ параллелограмы $AECD$ трапеция мен BAE үшбұрышынан, ал $AEFD$ параллелограмы $AECD$ трапециясы мен BAE үшбұрышқа тең болған CDF үшбұрышынан құрылған. Демек, $ABCD$ және $AEFD$ параллелограмдары тең құрылған.

Осылайша қалған параллелограмдардың да тең құрылғаны дәлелденеді.

3-есеп. Параллелограмның қабырғалары 25 см және 20 см, бірінші қабырғасына жүргізілген биіктік 8 см. Сол параллелограмның екінші қабырғасына жүргізілген биіктікті тап.

Берілген: $ABCD$ параллелограмында:

$$AD = a = 25 \text{ см}, \ DC = b = 20 \text{ см}, \ h_н = 8 \text{ см (5-сурет)}.$$

Табу керек: $h_б$.

Шешуі. 1) $S = ah_н = 25 \cdot 8 = 200$ (см^2).

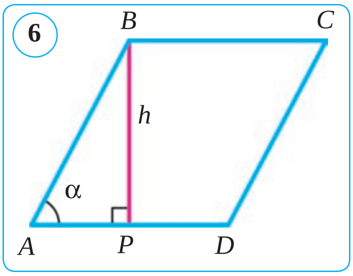
2) $S = bh_б$, яғни $200 = 20 \cdot h_б$. Бұдан $h_б = 200 : 20 = 10$ (см). ***Жауабы:*** 10 см.

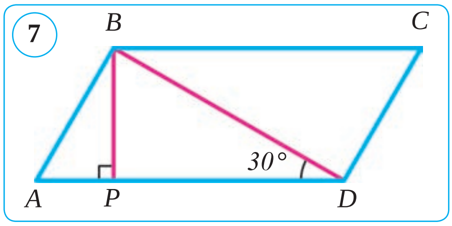
2-салдар. Параллелограмның ауданы оның екі қабырғасы мен олар арасындағы бұрыштың синусы көбейтіндісіне тең. Осыны дәлелдеңдер

Шешуі. $ABCD$ параллелограмында $AD = a$, $AB = b$ және $\angle BAD = \alpha$ болсын. Ондай жағдайда параллелограмның ауданы $\boldsymbol{S = ab \sin\alpha}$ формуласы бойынша есептеледі. Осыны дәлелдейміз.

$ABCD$ параллелограмының BP биіктігін жүргіземіз және оны $BP = h_н = h$ деп белгілейміз (6-сурет). Ондай жағдайда h биіктік тікбұрышты ABP үшбұрышы α сүйір бұрышының қарсысында жатқан катет болады. h-ты b қабырға мен α бұрыш синусының көбейтіндісімен өрнектейміз:

$$h = b \sin\alpha.$$





Параллелограмның ауданын есептеу $S=ah$ формуласына h-тың осы өрнегін қойып, мына формуланы шығарамыз:

$$S=ab\sin\alpha.$$

4-есеп. *Берілгені:* $ABCD$ – параллелограмм, $AD=20$ см, $BD=16$ см, $\angle BDA=30°$.

Табу керек: S_{ABCD}.

Шешуі. 1-әдіс. 1) Берілген параллелограмның BP биіктігін жүргіземіз және BDP үшбұрышын қарастырамыз (7-сурет). Ол тік бұрышты, өйткені $BP \perp AD$. Енді BP биіктігін табамыз. 30°-тық бұрыштың қарсысындағы катет гипотенузаның жартысына тең болады.

Сондықтан $BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8$ (см).

2) Сонымен, $ABCD$ параллелограмының ауданы

$S=AD\cdot BP=20\cdot 8=160$ (см^2)-қа тең болады.

2-әдіс. Тікбұрышты BDP үшбұрышынан BP-ны BD қабырға (гипотенуза) және $\angle BDP=30°$ бұрыштың синусымен өрнектейміз және параллелограмның ауданы формуласына қойып, іздестіріліп жатқан ауданды табамыз:

$$S=AD\cdot BP=AD\cdot BD\cdot\sin\angle BDP=20\cdot 16\cdot\sin 30°=20\cdot 16\cdot 0{,}5=160 \text{ (см}^2).$$

Жауабы: $S=160$ см^2.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

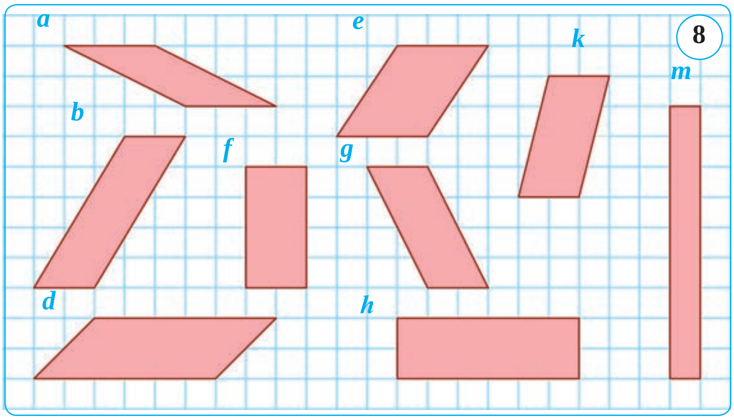
1. 1) Тік төртбұрыштың ауданы неге тең?

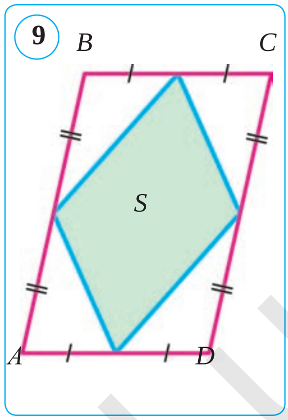
2) Параллелограмның табаны мен биіктігі дегенде нені түсінесіңдер?

3) Параллелограмның ауданы оның екі сыбайлас қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыш бойынша қалай табылады?

2. Тік төртбұрыштың екі қабырғасы: 1) 30 см және 2,9 см; 2) 34 дм және 0,6 дм; 3) 2,5 дм және 12 см. Осы тік төртбұрыштың периметрі мен ауданын табыңдар.

3. Тік төртбұрыштың бір қабырғасы 15 дм, ал екінші қабырғасы одан 5 есе артық. Осы тік төртбұрыштың периметрі мен ауданын табыңдар.





4. Ауданы 240 м² болған баскетбол алаңы спорт алаңының 15%-ын құрайды. Спорт алаңының ауданы бүкіл мектеп алаңының 32%-ын құрайды. Мектеп алаңының ауданын табыңдар.
5. Тік төртбұрыштың бір қабырғасы 23 см, ал екінші қабырғасы одан 17 см ұзын. Тік төртбұрыштың периметрі мен ауданын табыңдар.
6. Егер тік төртбұрыштың ауданы 20 см² және 1) ұзындығы 5 см-ге; 2) ұзындығы енінің 125%-ына; 3) қабырғаларының біреуі x -ке тең болса, периметрі неге тең болады?
7. Егер $ABCD$ тік төртбұрышында: 1) $AB=9$ см, $BC=4$ см; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48$ см болса, оның ауданын табыңдар.
8. Параллелограмның қабырғасы 16 см-ге, ал оған түсірілген биіктік 9 см-ге тең. Осы параллелограмдағы теңауданды квадраттың қабырғасын табыңдар.
9. a – параллелограмның табаны, h – биіктігі, S – ауданы. Егер:
1) $a=10$ см, $h_н=0{,}5$ м болса, S-ті; 2) $h_н=4$ см, $S=48$ см² болса, a-ны; 3) $a=24$ см, $S=120$ см² болса, $h_н$ -ны табыңдар.
10. 8-суреттегі теңауданды параллелограмдарды табыңдар.
11. Егер тік төртбұрыштың: 1) табаны 5 есе азайтылып, биіктігі 8 есе ұзартылса; 2) табаны да, биіктігі де 2,5 есе азайтылса, оның ауданы қандай болады?
12. 9-суреттегі S пішіннің ауданы параллелограмм ауданының қандай бөлігін құрайды?
13. Тік төртбұрыштың екі қабырғасы: 1) 24 см және 20 см; 2) 3,5 дм және 8 см; 3) 8 м және 4,5 м; 4) 3,2 дм және 1,5 дм. Оның ауданын табыңдар.
14. Параллелограмның ауданы 36 см², биіктіктері 3 см және 4 см. Осы параллелограмның периметрін табыңдар.
15. Параллелограмның қабырғалары 20 см және 28 см, олардың арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Осы параллелограмның ауданын екі әдіспен табыңдар.

48. ҮШБҰРЫШТЫҢ АУДАНЫ

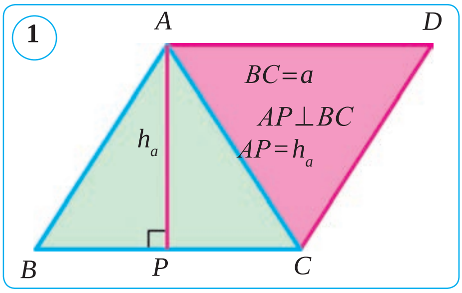
Үшбұрыш ауданын есептейтін формуланы шығару үшін параллелограмм түріне келтіру тәсілін пайдаланамыз.

Теорема.

Үшбұрыштың ауданы оның табаны мен осы табанына түсірілген биіктіктің жарты көбейтіндісіне тең болады:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a \cdot h_a},$$

бұл жерде: *a* – үшбұрыштың табаны, $\boldsymbol{h_a}$ – табанға түсірілген биіктік.



Дәлелдеу. *ABC* үшбұрышы берілген делік (1-сурет). $\triangle ABC$ суретте көрсетілгендей *ABCD* (табаны *BC*) параллелограмына айналдырамыз. $\triangle BAC=\triangle DCA$ өзара тең, өйткені параллелограмның диагоналі оны тең екі үшбұрышқа бөледі. Демек, *ABCD* параллелограмының ауданы $\triangle ABC$ екі еселенген көлеміне тең болады. Яғни $2S=a\cdot h_н$.

Бұдан $S=\frac{ah_a}{2}$. Теорема дәлелденді.

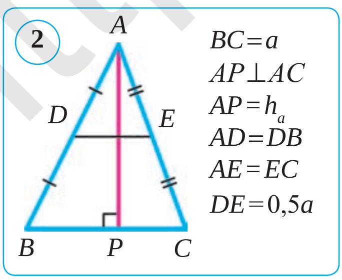
Үшбұрыштың ауданын есептеу формуласын басқаша оқуға да болады: ***үшбұрыштың ауданы оның орта сызығы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең*** (2-сурет):

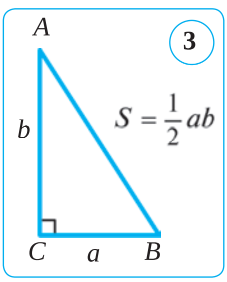
$$S=\frac{a}{2}\cdot h_a.$$

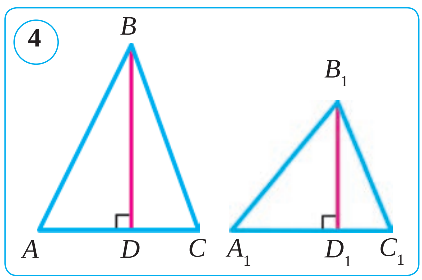
1-салдар. *Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы катеттерінің көбейтіндісінің жарымына тең,* себебі бір катетті — табан, ал екіншісін – биіктік етіп алуға болады. (3-сурет).

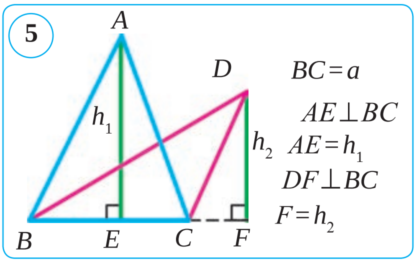
2-салдар. *Екі үшбұрыш аудандарының өзара қатынасы олардың табандары мен биіктіктерінің қатынасындай болады* (4-сурет).

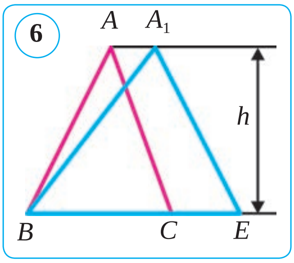
Дәлелдеу. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{0{,}5AC\cdot BD}{0{,}5A_1C_1\cdot B_1D_1}=\frac{AC\cdot BD}{A_1C_1\cdot B_1D_1}.$

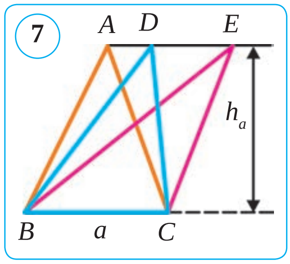












3-салдар. *Табандары тең екі үшбұрыш аудандарының қатынасы биіктіктерінің қатынасындай* (5-сурет).

Дәлелдеу. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}}=\dfrac{0{,}5a\cdot h_1}{0{,}5a\cdot h_2}=\dfrac{h_1}{h_2}$.

4-салдар. *Биіктіктері тең екі үшбұрыш аудандарының қатынасы табандарының қатынасындай* (6-сурет).

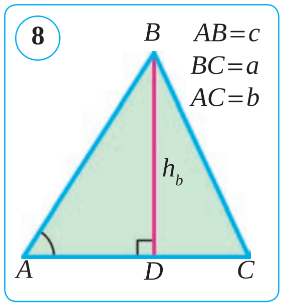
Дәлелдеу. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}}=\dfrac{0{,}5 BC\cdot h}{0{,}5 BE\cdot h}=\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{a}{a_1}$, бұдан $BC=a$, $BE=a_1$.

5-салдар. *Табандары мен биіктіктері тең үшбұрыштар – теңаудандары* (7-сурет).

Дәлелдеу. $S_{BAC}=S_{BDC}=S_{BEC}=0{,}5ah_н$.

6-салдар. *Үшбұрыштың ауданы оның екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыш синусы көбейтіндісінің жартысына тең (8-сурет).*

Дәлелдеу. ABC үшбұрышының қабырғалары $BC=a$, $AC=б$, $AB=c$ болсын. Ондай жағдайда $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ екенін дәлелдейміз. Бұл үшін ABC үшбұрышының $BD=h_b$ биіктігін жүргіземіз (8-сурет). h_b-ны c қабырға мен A бұрыштың синусымен өрнектейміз: $h_b=c\sin A$. Үшбұрыштың ауданын есептеу формуласы $S=\dfrac{1}{2}bh_b$-ға h_b-ның осы өрнегін қойып, мына формуланы шығарамыз:



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Үшбұрыштың ауданын a, $б$ қабырғалары және C бұрышының синусы, a, c қабырғалары және B бұрышының синусы арқылы есептеу формулалары осыған ұқсап шығарылады.

Сонымен үшбұрыштың ауданы екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыш синусына орай осы формулалар бойынша есептеледі:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Үшбұрыштың ауданын қабырғалары арқылы есептеу формуласын I ғасырда өмір сүрген ежелгі грек ғалымы **Герон** тапқандықтан, ол

Герон формуласы деп аталады. Герон формуласы үшбұрыштың үш қабырғасының ұзындығы белгілі болғанда оның ауданын табу үшін қолданылады.

Герон формуласының дәлелдемесін келтіріп шығарамыз.

Белгілі болғанындай, үшбұрыштың ауданы оның табаны мен биіктігі көбейтіндісінің жартысына тең:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Биіктіктің орнына оның үшбұрышы қабырғалары арқылы өрнектелгенде:

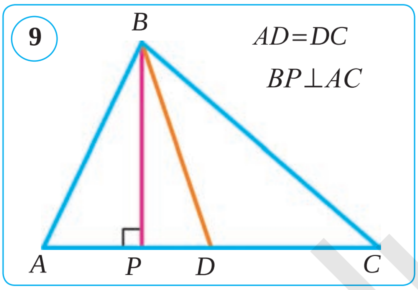
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \beta = 90°,\ h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ және}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ларды қойып, оны ықшамдап, мына Герон формуласын шығарамыз:

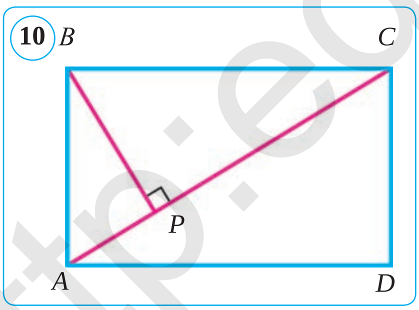
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ бұл жерде } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

1-есеп. Үшбұрыштың медианасы оны екі теңауданды үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер.



Дәлелдеу. BD — ABC үшбұрышының медианасы делік (9-сурет). ABD және CBD үшбұрыштарының AD және DC қабырғалары өзара тең, сондай-ақ олардың ортақ BP биіктігі де бар, яғни олар үшбұрыштардың 5-салдарына орай теңаудандылар болып табылады: $S_{ABD} = S_{CBD}$.

2-есеп. Берілгені: $ABCD$ — тік төртбұрыш, AC = 20 см, BP= =12 см $BP \perp AC$ (10-сурет).



Табу керек: S_{ABCD}.

Шешуі. 1) $S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot BP =$
$= 0{,}5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$ (см^2).

2) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$ (см^2).

Жауабы: $S_{ABCD} = 240$ см^2.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Үшбұрыштың ауданы неге тең?
2) Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы қалай есептеледі?
3) Қабырғаларына орай үшбұрыштың ауданы қалай есептеледі?

2. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері: 1) 4 см және 7 см;
2) 1,2 дм және 25 см. Тік бұрышты үшбұрыштың ауданын тап.

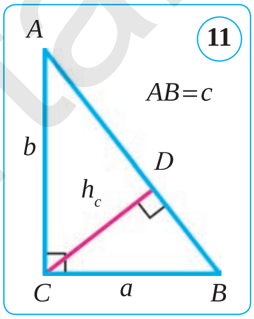
3. Бір үшбұрыштың табаны 20 см, биіктігі 8 см. Екінші үшбұрыштың табаны 40 см. Үшбұрыштар теңауданды болуы үшін екінші үшбұрыштың биіктігі қандай болуы керек?

4. ABC үшбұрышта $AB=5AC$. Үшбұрыштың C және B төбелерінен жүргізілген биіктіктерінің қатынасы нешеге тең?

5. a — үшбұрыштың табаны, h — табанына түсірілген биіктік, S — үшбұрыштың ауданы. Белгісіз шамаларды тап.

	1	2	3	4	5	6
	69 см	0,8 дм	?	0,25 м	?	0,9 м
	0,5 м	?	20 дм	100 см	4,8 см	?
	?	4 см^2	2000 см^2	?	9,6 мм^2	36 дм^2

6. Катеттердің (a және b) көбейтіндісі гипотенуза (c) мен тікбұрыш төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктіктің (h_c) көбейтіндісіне тең (11-сурет).



Шешуі. Егер катеттердің біреуін табан деп қабылдасақ, ол жағдайда екіншісі биіктік болады. Сондықтан тікбұрышты үшбұрыштың ауданы катеттер көбейтіндісінің жартысына тең болады:

$S=\frac{1}{2}ab$, бұдан $ab=2S$; $S=\frac{1}{2}ch_c$, бұдан ç$_c=2S$.

Демек, $ab=$ç$_c$ екен. Осыны дәлелдеу талап етілген еді.

Үшбұрыштың катеттері: 1) 12 см және 16 см; 2) 5 см және 12 см-ге тең. c-ны (Пифагор теоремасына орай) және h_c ($ab=$ç$_c$ -қа орай) табыңдар.

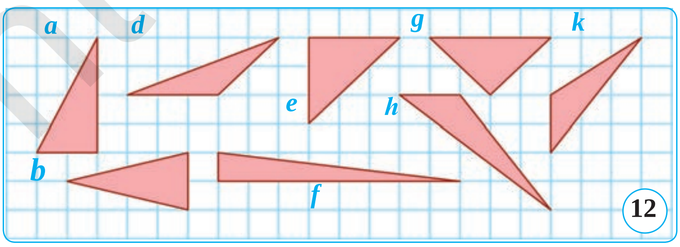
7. 12-суреттен теңауданды үшбұрыштарды көрсетіңдер. Жауаптарыңды негіздеңдер.

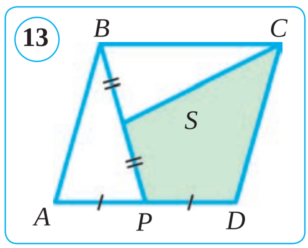
8. Қабырғалары: 1) 39 см, 42 см, 45 см; 2) 35 см, 29 см, 8 см; 3) 20 см, 20 см, 32 см-ге тең болған үшбұрыштың ауданын табыңдар.

9. 13-суреттегі S пішіннің ауданы параллелограмм ауданының қандай бөлігін құрайды?

10. Үшбұрыштың ауданы 150 см²-қа тең. Үшбұрыштың биіктіктері 15 см, 12 см және 20 см-ге тең болса, оның периметрін табыңдар.

11. Үшбұрыштың екі қабырғасы 5 дм және 6 дм, олардың арасындағы бұрыш 30°. Үшбұрыштың ауданын табыңдар. Есепті екі әдіспен шешіңдер.





49–50. РОМБ ПЕН ТРАПЕЦИЯНЫҢ АУДАНЫ

1. Ромбының ауданы. Ромб — параллелограмм болғандықтан, қабырғасы a және биіктігі h болатын ромбының ауданы

$$S = ah_н$$

формуласы бойынша есептеп шығарылады.

Бізге мәлім болғанындай, ромбының барлық биіктіктері өзара тең.

Бұдан тыс ромбының ауданын диагональдары арқылы да есептеп табуға болады.

Теорема.

Ромбының ауданы оның диагональдары көбейтіндісінің жартысына тең:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 ,$$

бұндағы d_1 және d_2 – ромбының диагональдары.

Дәлелдеу. Белгілі болғанындай, ромбының AC диагоналі оны өзара тең екі тең бүйірлі үшбұрышқа бөледі (1-сурет). Ал екінші диагоналі біріншісіне перпендикуляр болғандықтан, пайда болған үшбұрыштардың биіктіктерінің қосындысына тең болады. Сондықтан да ромбының ауданы:

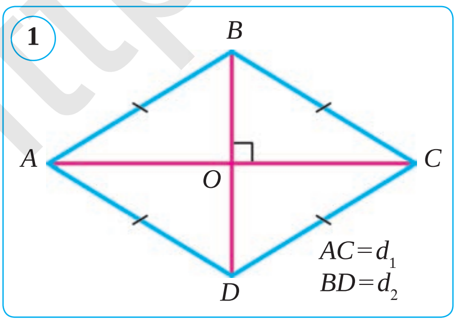
$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO + DO) =$$

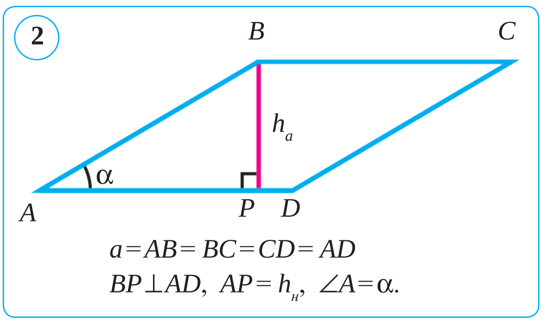
$$= \frac{1}{2} \underline{AC} \cdot \underline{\underline{BD}} = \frac{1}{2} \underline{d_1} \cdot \underline{\underline{d_2}}.$$

Демек, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Теорема дәлелденді.

1-есеп. $ABCD$ ромбының қабырғасы a-ға, ал сүйір бұрышы α -ға тең. Осы ромбының ауданын табыңдар. α = 30°-та оның ауданы қандай болатынын табыңдар.

Шешуі. 1) $ABCD$ ромбыда $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle A = \alpha$ болсын. $BP \perp AD$-ны жүргіземіз (2-сурет). Ондай жағдайда $h_н$ биіктік тікбұрышты ABP үшбұрышының α сүйір бұрышының қарсысында жатқан катет болады. h_a-ны α бұрыштың синусымен өрнектейміз: $h_a = a \sin \alpha$. Ромбының ауданын есептеу формуласы $S = ah_a$-қа h_a-ның осы өрнегін қойып, мына формуланы шығарамыз: $S = a^2 \sin\alpha$.





2) Ромбының ауданын $S=a^2\sin\alpha$ формуласын пайдаланып табамыз:

$$S=a^2\sin 30°=a^2\cdot 0{,}5=0{,}5a^2 \text{ (кв. бірл.)}.$$

Жауабы: $S=0{,}5a^2$ кв. бірл.

2-есеп. Ромб диагональдарының біреуі екіншісінен 1,5 есе үлкен, ал ромбының ауданы 27 см²-қа тең. Осы ромбының диагональдарын табыңдар.

Берілгені: $ABCD$ – ромб; $S_{ABCD}=27$ см²; $AC=1{,}5BD$ (1-суретке қ.)

Табу керек: AC, BD.

Шешуі. $BD=x$ см болсын, ондай жағдайда $AC=1{,}5x$ см болады.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Бұған тиісті белгілерді қоямыз: $27=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5x\cdot x$. Бұл жағдайда $x^2=36$ болады, бұдан $x=6$ (см) келіп шығады. Сонымен $BD=6$ см және $AC=1{,}5\cdot 6=9$ (см). ***Жауабы:*** 9 см, 6 см.

2. Трапецияның ауданы. Әрбір көпбұрышты диагональдар жүргізу арқылы үшбұрыштарға бөлуге болатыны белгілі. Бұдан кез келген көпбұрыштың ауданын есептеу үшін оны алдымен үшбұрыштарға бөліп аламыз. Содан соң үшбұрыштардың ауданы есептеледі. Ал көпбұрыштың ауданы оны құраған бір-бірін қаптамайтын үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады. Параллелограмм мен трапецияның аудандарын есептеуде осындай тәсілді пайдаланамыз.

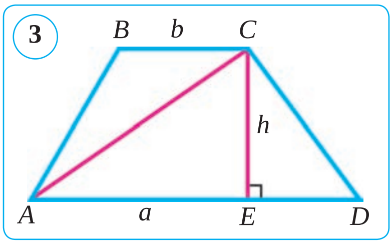
Теорема.

Трапецияның ауданы оның табандарының жарым қосындысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h,$$

бұндағы *a* және *b* – трапецияның табандары, *h* – биіктігі.

Дәлелдеу. Табандары $AD=a$, $BC=b$ және биіктігі $CE=h$ ($CE\perp AD$) болатын $ABCD$ трапецияны қарастырайық (3-сурет).



Трапецияның AC диагоналін жүргіземіз. Бұнда $ABCD$ трапеция ABC және ACD үшбұрыштарға бөлінеді. Трапецияның ауданы бұл үшбұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады.

Параллель түзулер арасындағы қашықтық тұрақты болғандықтан, ABC және ACD үшбұрыштарының биіктіктері өзара тең.

Бұдан $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{1}{2}b\cdot h$ және $S_{ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}a\cdot h$.

Трапецияның ауданы $S=S_{ABC}+S_{ACD}$, яғни:

$S=\frac{1}{2}a\cdot h+\frac{1}{2}b\cdot h$ немесе $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$. Теорема дәлелденді.

Салдар. *Трапецияның ауданы оның орта сызығы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.*

Бұл салдар трапецияның орта сызығы оның табандары қосындысының жартысына теңдігінен келіп шығады.

3-есеп. Трапецияның табандары 15 см-ге және 30 см-ге, ал ауданы 225 см^2-қа тең. Осы трапецияның биіктігін табыңдар.

Шешуі. Трапецияның орта сызығы

$\frac{a+b}{2} = \frac{15+30}{2} = \frac{45}{2} = 22,5$ (см)-ге тең.

Демек, трапецияның биіктігі төмендегідей:

$h = S_{\text{tr.}} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22,5 = 10$ (см). ***Жауабы:*** $h = 10$ см.

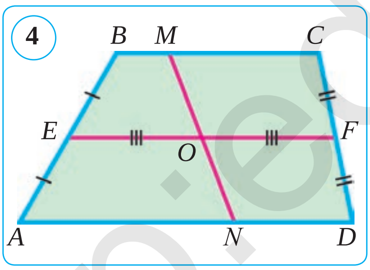
4-есеп. Трапецияның орта сызығынан өтіп, табандарын қиятын түзу бұл трапецияны екі теңауданды бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер.

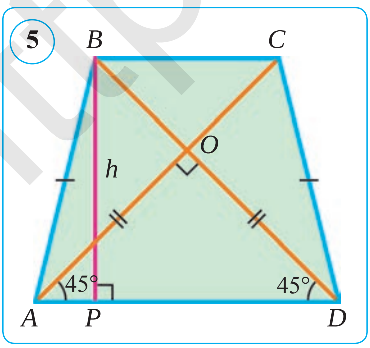
Дәлелдеу. $ABCD$ — берілген трапеция $(AD \parallel BC)$, EF — оның орта сызығы, ал MN – орта сызықтың O нүктесі арқылы өтетін және табандарын M және N нүктелерінде қиятын түзу болсын делік (4-сурет). $ABMN$ және $MNDC$ трапециялары сәйкесінше өзара тең EO және OF түзулеріне, сондай-ақ берілген трапецияның биіктігіне тең болатын биіктікке ие. Демек, бұл трапециялардың аудандары да тең, өйткені олар теңауданды болып табылады:

$$S_{ABMN} = S_{MNDC}.$$

Бізден осыны дәлелдеу талап етілген болатын.

5-есеп. Тең бүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр болса, ондай жағдайда трапецияның биіктігі оның орта сызығына, ал ауданы биіктігінің квадратына тең болады. Осыны дәлелдеңдер.





Берілгені: $ABCD$ — тең бүйірлі трапеция $(AB = DC)$, $AC \perp BD$, $AD = a$, $BC = b$ болсын (5-сурет).

Дәлелдеу керек: 1) $h = \frac{a+b}{2}$;

2) $S_{\text{tr.}} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Шешуі. 1) $\Delta\ AOD$ — тең бүйірлі, тік бұрышты. Сондықтан $\angle ADO = 45°$.

2) B төбеден $BP \perp AD$-ны жүргіземіз. Пайда болған BPD үшбұрышы тең бүйірлі және тік бұрышты, өйткені $\angle ADO = = 45°$. Бұдан: $DP = BP$. Бізге белгілі болғанындай, тең бүйірлі трапецияның кіші табаны төбесінен өткізілген биіктіктің қасиетіне орай:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ немесе $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Сонымен тең бүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр болғанда, оның биіктігі орта сызығына, ал ауданы биіктігінің квадратына теңдігі толық дәлелденді.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Қабырғасы және биіктігі белгілі ромбының ауданын қалай табуға болады?
2) Диагональдары берілген ромбының ауданы қалай табылады? Оны өрнектеңдер. 3) Трапецияның ауданы неге тең болады?

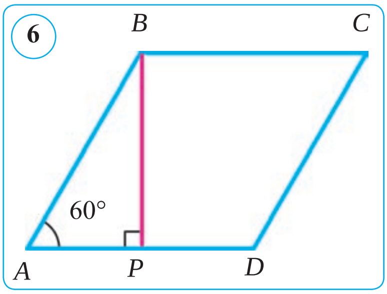
2. Ромбының ауданы 40 см^2, ал биіктігі 5 см-ге тең. Осы ромбының периметрін табыңдар.

3. Егер ромбының: 1) биіктігі 16 см, ал сүйір бұрышы 30°; 2) қабырғасы 1,8 дм, сүйір бұрышы 30°-қа тең. Осы ромбының ауданын табыңдар.

4. Ромбының ауданы 60 см^2, диагональдарының біреуі 10 см-ге тең. Осы ромбының екінші диагоналін табыңдар.

5. Ромбының ауданы 30 см^2, ал периметрі 24 см-ге тең. Осы ромбының биіктігін табыңдар.

6. *Берілгені:* $ABCD$ — ромб. $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ см (6-сурет).



Табу керек: S.

Шешуі. Тік бұрышты BPA үшбұрышын қарастырамыз. Сүйір бұрыш синусының анықтамасына орай: $\sin A = \frac{BP}{AB}$. Бұған берілгендерді қойып, AB-ны табамыз:

$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

Қабырғасы мен сүйір бұрышына орай ромбының ауданын табу формуласына $AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ мәндерін қойып, төмендегіні табамыз:

$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

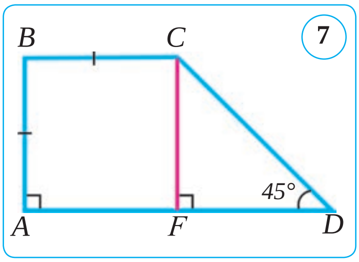
Жауабы: $96\sqrt{3}$ см^2.

7. Диагональдары: 1) 1,5 дм және 1,8 дм; 2) 24 см және 15 см; 3) 3,2 см және 0,5 дм болатын ромбының ауданын табыңдар.

8. 1) Трапецияның табандары 11 см-ге және 18 см-ге, ал биіктігі 6 см-ге тең. Осы трапецияның ауданын табыңдар.

2) Трапецияның табандары 26 см, биіктігі 10 см, ауданы болса 200 см^2. Осы трапецияның екінші табанын табыңдар.

9. *ABCD* тік бұрышты трапециясында $AB=BC=18$ см, $\angle D=45°$ (7-сурет). Трапецияның ауданын табыңдар. Бос орындарға сәйкес жауаптарды жазыңдар.



Шешуі. $CF \perp AD$-ны жүргіземіз. 1) *ABCF* — квадрат, өйткені *ABCF* төртбұрышының сыбайлас қабырғалары *AB* және ..., сондықтан $AF = CF = ...$(см).

2) ΔCFD — тік бұрышты, жасалуына қарай $\angle F = 90°$ және шартына қарай $\angle D = 45°$, сондықтан да $\angle DCF = ...°$, демек, ΔCFD — ... және $DF = ... = ...$ см.

3) $AD=AF+...=... + ...=...$ (см) және $S_{ABCD}=...\cdot...=...\cdot...=...$ (см^2).

Жауабы: ... см^2.

10. Ромб бұрыштарының қатынасы 1 : 5 -ке, ал қабырғасы *a* -ға тең. Осы ромбының ауданын табыңдар.

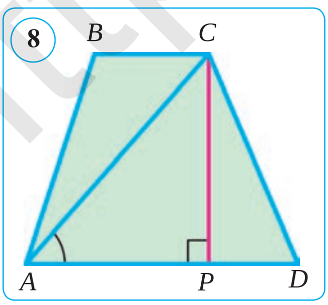
11. *ABCD* трапециясында: $AD = 20\sqrt{2}$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $AC=24$ см, $\angle CAD=45°$ (8-сурет). Трапецияның ауданын табыңдар.

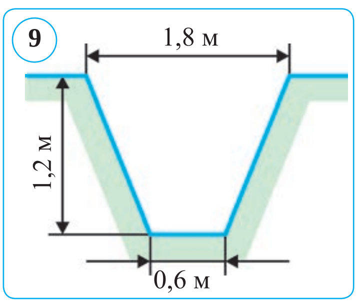
12. Диагональдары: 1) 3,5 дм және 1,4 дм; 2) 28 см және 17 см; 3) 4,2 см және 1,5 дм болған ромбының ауданын табыңдар.

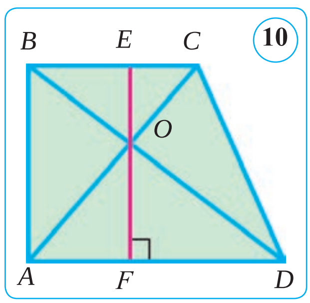
13. Тең бүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр және биіктігі 5 см-ге тең. Осы трапецияның ауданын табыңдар.

14. Тең бүйірлі трапеция пішініндегі ордың көлденең қимасының ауданын табыңдар (9-сурет).

15. Трапецияның табандары 16 см және 12 см. Диагональдарының қиылысу нүктесінен табандарына дейінгі қашықтық 6 см-ге және 4 см-ге тең (10-сурет). Осы трапецияның ауданын табыңдар.

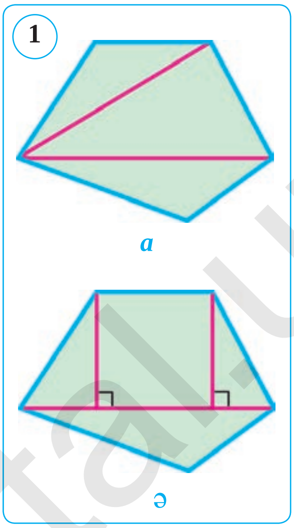






51. КӨПБҰРЫШТЫҢ АУДАНЫ

Көпбұрыштың ауданын есептеу үшін оны өзара қиылыспайтын, яғни ортақ ішкі нүктелері болмайтын үшбұрыштарға бөлу арқылы олардың аудандарының қосындысын табуға болады. Дөңес көпбұрышты үшбұрыштарға бөлу үшін, мысалы, оның біреуінің төбесінен диагональдар жүргізу мүмкін (1-*а* сурет). Кейбір жағдайда басқаша бөлуді пайдаланған ыңғайлы (1-*б* сурет).



1-есеп. $ABCDE$ көпбұрыштың $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ екендігі белгілі (2-сурет)

$S_{ABCDE}=0,5(BD \cdot CP+AE \cdot OP)$ болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. Берілген пішіннің трапециядан және үшбұрыштардан құралғанын байқау қиын емес. Сондықтан ауданның қасиеті бойынша:

$$S_{ABCDE}=S_{BCD}+S_{ABDE}=0,5BD \cdot CO+0,5(AE+BD) \cdot OP=$$
$$=0,5(\underline{BD} \cdot \underline{CO}+AE \cdot OP+\underline{BD} \cdot \underline{OP})=0,5(BD \cdot (CO+OP)+$$
$$+AE \cdot OP)=0,5(BD \cdot CP+AE \cdot OP).$$

Демек, $S_{ABCDE}=0,5(BD \cdot CP+AE \cdot OP)$.

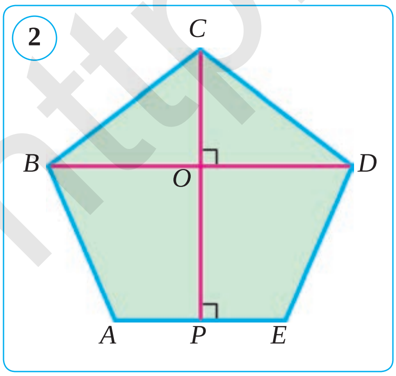
2-есеп. AC және BD – $ABCD$ төртбұрыштың диагональдары, O — диагональдарының қиылысу нүктесі (3-сурет). Егер $S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ және $S_{AOD}=S_4$ болса, $S_1 \cdot S_3=S_2 \cdot S_4$ болатынын дәлелде.

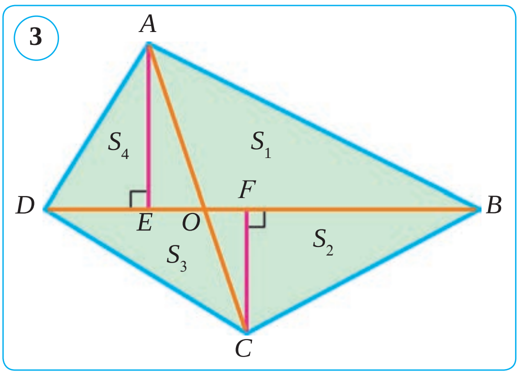
Дәлелдеу. 1) $AE \perp BD$ және $CF \perp BD$-ларды жүргіземіз.

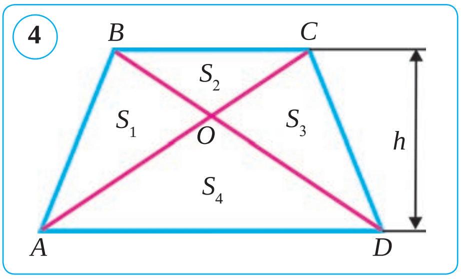
2) $\dfrac{S_1}{S_4}=\dfrac{0,5OB \cdot AE}{0,5OD \cdot AE}=\dfrac{OB}{OD}$ (1) және $\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{0,5OB \cdot CF}{0,5OD \cdot CF}=\dfrac{OB}{OD}$ (2).

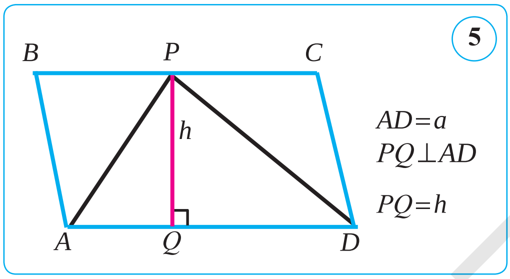
3) (1) және (2)-ден табамыз:

$$\frac{S_1}{S_4}=\frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3=S_2 \cdot S_4.$$









3-есеп. BC және AD — $ABCD$ трапецияның табандары, O — AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі (4-сурет). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ және $S_{AOD}=S_4$ болса, төмендегіні дәлелде:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$.

Дәлелдеу. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Бізге $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ екендігі белгілі. $S_1 = S_3$-ті назарға алсақ, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ келіп шығады. Есептің бірінші бөлігі дәлелденді.

3) Трапецияның ауданы төрт үшбұрыш аудандарының қосындысына тең болатынын және жоғарыдағы салдарларды назарға алып, келтіріп шығарамыз:

$$S_{tr.} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2.$$

Демек, $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$. Есептің екінші бөлігі дәлелденді.

4-есеп. Параллелограммен табаны және биіктігі ортақ үшбұрыштың ауданы параллелограмм ауданының жартысына тең болады.

Дәлелдеу. AD табан және h биіктік $ABCD$ параллелограмы және APD үшбұрышы үшін ортақ (5-сурет). $S_{APD}=0,5S_{ABCD}$ екенін дәлелдейміз.

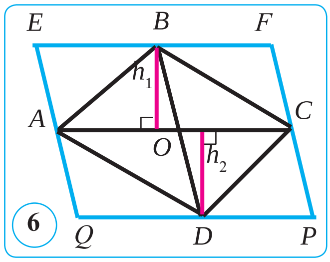
$S_{ABCD}=ah$ (1) жана $S_{APD}=0,5ah$ (2) болғаны белгілі. (2) теңдеудегі ah -тың орнына S_{ABCD} -ті қойып, табамыз: $S_{APD}=0,5ah=0,5S_{ABCD}$.

Ескерту! Жоғарыда келтірілген есепті төмендегідей шешуге де болады: *Үшбұрышпен табаны және биіктігі ортақ параллелограмның ауданы үшбұрыштың ауданынан екі есе үлкен.*

5-есеп. Дөңес төртбұрыштың төбелері арқылы оның диагональдарына параллель түзулер жүргізілсе, онда пайда болған параллелограмның ауданы берілген төртбұрыштың ауданынан екі есе үлкен болатынын дәлелдеңдер.

Дәлелдеу. $ABCD$ — берілген дөңес төртбұрыш, O — AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі, h_1 мен h_2 — төртбұрыштың B және D төбелерінен AC диагоналіне түсірілген биіктіктер, $EFPQ$ — төртбұрыштың төбелері арқылы оның диагональдарына параллель жүргізілген түзулердің қиылысуынан пайда болған параллелограмм (6-сурет). $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$ екенін дәлелдейміз.

Жасалуына қарай, параллелограмның EF және QP қабырғалары AC диагоналіне параллель әрі тең болып табылады. Сондықтан AC диагоналі пайда болған $EFPQ$ параллелограмын екіге — $AEFC$ және $ACPQ$ параллелограмдарына бөледі.



Жоғарыда келтірілген ескертудегі қорытындыны қолданып, $S_{EFPQ} = =2S_{ABCD}$ екенін дәлелдейміз:

$$S_{EFPQ} = S_{AEPC} + S_{ACPQ} = 2S_{ABC} + 2S_{ADC} = 2(S_{ABC} + S_{ADC}) = 2S_{ABCD}.$$

Демек, $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$.

1. 7-суреттегі пішіннің ауданын табыңдар.

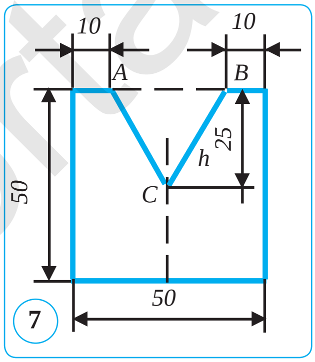
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

Шешуі. Суретте кескінделген пішіннің ауданын A және B нүктелерін тұтастырып, оны квадратқа айналдыру арқылы тапқан қолайлы. Берілген пішіннің ауданы түзілген квадраттың ауданы мен ABC үшбұрышы ауданының айырмасына тең:

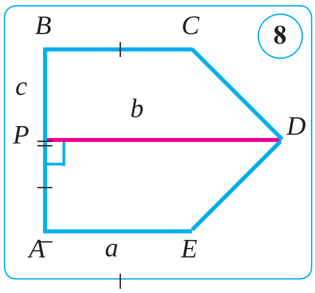
$$S = S_{кв.} - S_{ABC} = ...^2 - 0{,}5 \cdot (50 - 2 \cdot 10) \cdot ... =$$
$$= ... - 375 = ... \text{ (кв. бірлігі.).}$$

Нүктелердің орнына сәйкес сандарды орналастырыңдар.

Жауабы: ... кв. бірлігі.



2. 8-суретте кескінделген пішіннің ауданын есептеу үшін формуласын қорытып шығар. Бұнда $AE \parallel BC \parallel PD$, $AE = BC$, $AP = PB$, $PD \perp AB$.

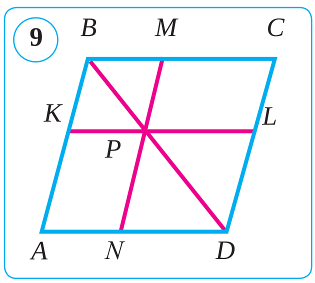


3. *Берілгені:* $ABCD$ – тік төртбұрышында $AB = 12$ см, $AD = 16$ см., F, P және Q нүктелері — сәйкес қабырғалардың орталары.

Табу керек: S_{EFCPQA}.

4. *Берілгені:* $ABCD$ – параллелограмм, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (9-сурет).

Дәлелдеу керек: $S_{AKPN} = S_{PMCL}$.



5. AC және BD — $ABCD$ төртбұрыштың диагональдары, O — олардың қиылысу нүктесі. $S_{AOD} = 12$, $S_{BOC} = 8$, $S_{AOB} = 6$. S_{COD} -ны тап.

6. Тік төртбұрыш пішініндегі жер көлемінің ауданы 400 га. Егер: 1) жер көлемінің ұзындығы 10 км болса; 2) жер көлемі квадрат пішінде болса, оның периметрі қандай болады.

52. ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

I. Зерттеуге арналған есептер.

1-есеп. Тік төртбұрыштың қабырғалары натурал сан және периметрі 4 еселі болған есепті қарастырамыз.

Периметрі 72 см-ге тең және қабырғалары натурал сан болған барлық тік төртбұрыштар арасынан ауданы ең үлкенін табыңдар. Ол қандай пішін болады? Қорытынды шығарыңдар.

Шешуі. Тік төртбұрышта: $P=2\cdot(a+b)=72$ см – периметр, $p=a+b=36$ см – жарты периметр, яғни сыбайлас қабырғалардың қосындысы, a мен $б$ -ның мәндері белгілі болғанда ғана $S=a\cdot b$-ны есептей аламыз. Есепте қойылған сұраққа жауап беру үшін тік төртбұрыштың сыбайлас қабырғаларын табуға әрекет жасаймыз.

Бұл үшін 36-ны екі натурал санның қосындысы түрінде өрнектейміз:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=...=33+3=34+2=35+1.$$

Бұдан көрініп тұрғанындай, сыбайлас қабырғалардың қосындысы 36 см-ге тең болған 35 түрлі тік төрбұрыш бар. Мәліметтерді кестеге енгізіп, оларды талдаймыз және қорытынды шығарамыз:

a см	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b см	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a+b)$ см	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S=a\cdot b$ см^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

Кестеден көрініп тұрғанындай, есеп ең кіші ауданға $a=1$ см және $b=35$ см немесе $a=35$ см және $b=1$ см болғанда, ең үлкен ауданға ие $a=b=18$ см – қабырғасы 18 см-ге тең квадрат болғанда ғана шешіледі. Қалған тік төртбұрыштардың периметрлері 72 см болса да, аудандары

$$18\cdot18=324\ (\text{см}^2)$$

-тан кіші болады.

Кестені талдаудың нәтижесінде төмендегідей қорытындыға келеміз.

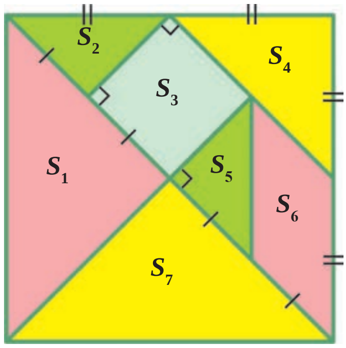
1-қорытынды. Егер тік төртбұрыштың қабырғалары натурал сан, ал периметрі 4 еселі болса, онда ең үлкен аудан төмендегі формула бойынша табылады:

$$S_{\max}=\left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ кв. бірл.}$$

2-қорытынды. Егер тік төртбұрыштың қабырғалары натурал сан, ал периметрі 2 еселі болса, онда периметрлері тең болған барлық тік төртбұрыштар арасынан қабырғаларының біреуі 1-ге, ал екінші қабырғасы 1-ді жарты периметрге толықтыратын сан болғанда ғана ең кіші ауданға ие болады.

3-қорытынды. Тік төртбұрыштың сыбайлас қабырғаларының ұзындықтары бір-біріне жақындаған сайын, аудан ұлғая береді.

1



2

2-есеп. Қытайша "танграм" ойынында квадрат 1-суретте көрсетілгеніндей үшбұрыштар мен төртбұрыштарға бөлінген. Олардан алуан түрлі пішіндер жасауға болады. Егер квадраттың қабырғасы 8 см-ге тең болса, бөлінген пішіндердің аудандарын табыңдар.

Шешуі. $a = 8$ см – квадраттың бір қабырғасы. $S = a^2 = 8^2 = 64$ (см^2) – берілген квадраттың ауданы. Енді пішіндегі бөлекшелердің аудандарын табамыз.

1) S_1 және S_7 – квадрат аудандарының төрттен біріне тең. Демек,

$$S_1 = S_7 = S : 4 = 64 : 4 = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың ауданы гипотенуза квадратының төрттен біріне тең. Демек,

$$S_2 = S_5 = 0{,}25 \cdot (a : 2)^2 = 0{,}25 \cdot 4^2 = 0{,}25 \cdot 16 = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) S_3 квадраттың ауданы екі S_2 үшбұрыштары аудандарының қосындысына тең. Демек, $S_3 = 2S_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (см^2).

4) S_4 үшбұрыштың катеттері берілген квадрат қабырғасының жартысына тең, яғни $a : 2 = 8 : 2 = 4$ (см). Тең бүйірлі үшбұрыштың ауданы катеті квадратының жартысына тең, яғни $S_4 = 0{,}5 \cdot 4^2 = 0{,}5 \cdot 16 = 8$ (см^2).

5) Табандары мен биіктіктері тең болған квадрат пен параллелограмм – теңауданды. Сондықтан $S_6 = S_3 = 2 \cdot 4 = 8$ (см^2).

Жауабы: $S_1 = S_7 = 16$ см^2; $S_2 = S_5 = 4$ см^2; $S_3 = S_4 = S_6 = 8$ см^2.

3-есеп. Шебер ұзындығы 2,25 м және ені 1,8 м тік төртбұрыш пішініндегі қабырғаның бір бөлігін кафельмен қаптамақ. Бұл үшін оған қабырғасы 15 см-лік квадрат пішініндегі кафельден қанша керек болады (2-сурет)?

Шешуі. 1) Қапталуға тиіс қабырғаның ауданын табамыз және оны квадрат сантиметрмен өрнектейміз:

$$2{,}25 \cdot 1{,}8 = 4{,}05 \text{ (м}^2\text{)} = 4{,}05 \cdot 10\,000 \text{ см}^2 = 40500 \text{ см}^2.$$

2) Бір дана кафельдің ауданын табамыз: $a^2 = 15^2 = 225$ (см^2).

3) Тіктөртбұрыш пішініндегі қабырғаны қаптау үшін қанша кафель керек болатынын табамыз:

$$40500 : 225 = 180.$$

Жауабы: 180 дана кафель керек.

Төмендегі есепті шешуді өздеріңе қалдырамыз.

4-есеп. Қабырғасы 4 м-ге тең квадрат пішініндегі жолдың бетін қаптау үшін қабырғасы 20 см-лік кафельден қанша керек?

ПРАКТИКАЛЫҚ БІЛІКТІЛІКТІ ДАМЫТАТЫН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

ТОРКӨЗДІ ҚАҒАЗ БОЙЫНША АУДАНДАРДЫ ЕСЕПТЕУ

Берілген дөңес және дөңес емес көпбұрыштардың аудандарын торкөзді қағазбен есептеу үшін **"Пик формуласы"** деп аталатын формуланы келтіреміз. Әрбір торкөз қабырғасының ұзындығы 1 см болсын. Торкөзді қағаздағы түзулердің қиылысу нүктелерін – квадрат бірліктерінің төбелерін **түйін нүктелер** деп атаймыз. Онда көпбұрыштардың ауданы төмендегі формула бойынша табылады:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1 \cdot$$

Бұл формуладағы M – көпбұрыш шекарасында жатқан түйін нүктелердің саны, N – көпбұрыштың ішінде жатқан түйін нүктелердің саны.

Бұл формуланы төбелері түйін нүктелерде жатқан кез келген көпбұрыш үшін қолдануға болады.

1-есеп. 1-суреттегі пішіннің ауданын есептейміз.

Шешуі. 1-әдіс. 1) Барлық толық квадраттардың саны 59, олардың ауданы 59 см²; квадраттың жартысына тең болған үшбұрыштар саны 16, олардың ауданы 16 : 2 = 8 (см²); бір табаны 2 см-ге, биіктігі 3 см-ге тең үшбұрыш бар, оның ауданы 3 см²-қа тең.

Сонымен берілген көпбұрыштың ауданы:

$$S = 59 + 8 + 3 = 71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2-әдіс. Осы жауаптың Пик формуласының көмегімен қалай табылатынын қарастырып көрейік. Түйін нүктелерді белгілеп аламыз.

1) Пішін ішінде жатқан түйін нүктелерді (қара түспен берілген) санаймыз: олар 50, яғни $N = 50$.

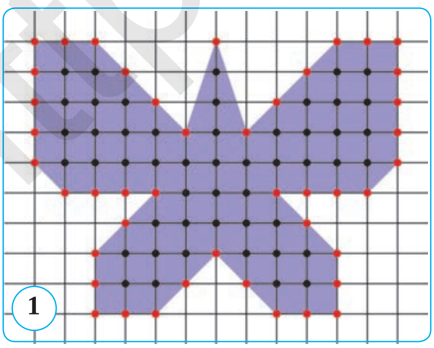
2) Фигураның қабырғаларында жаткан түйін нүктелерді (кызыл түспен белгеленген) санаймыз: олар 44 дана, яғни $M = 44$. Пик формуласын қолданамыз:

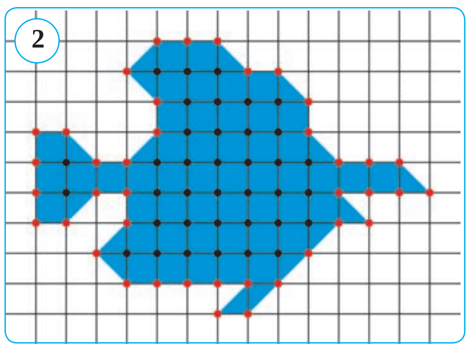
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Демек, екі әдіспен де бірдей нәтиже келіп шықты.   ***Жауабы:*** 71 см².

2-есеп. 2-суреттегі көпбұрыштың ауданын есептеңдер.

Шешуі. 1) Көпбұрыштың қабырғаларында жатқан түйін нүктелерді



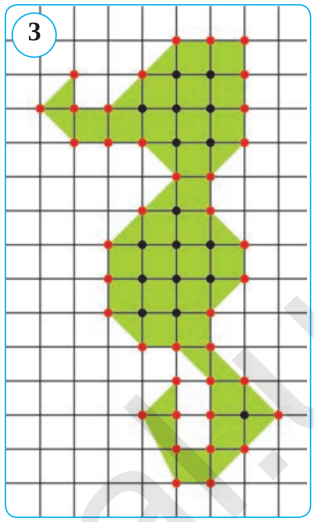


(қызыл түспен белгіленген) санаймыз: олардың саны 40, яғни $M = 40$.

2) Көпбұрыштың ішінде жатқан түйін нүктелерді (қара түспен белгіленген) санаймыз: олар 37, яғни N = 37. Пик формуласы бойынша:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Жауабы: 56 см^2.



3-есеп. 3-суреттегі көпбұрыштың ауданын есептейміз.

Шешуі. 1-әдіс. 1) Көпбұрыштың қабырғаларында жатқан түйін нүктелерді (қызыл түспен белгіленген) санаймыз: олардың саны 39, яғни M = 39.

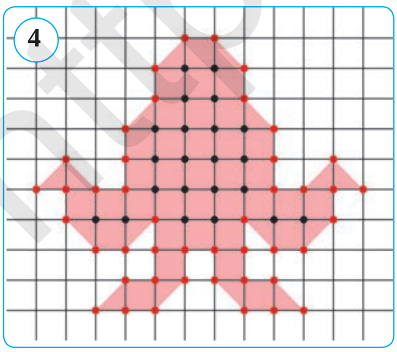
2) Көпбұрыштың ішінде жатқан түйін нүктелерді (қара түспен белгіленген) санаймыз: олардың саны 17, яғни N = 17.

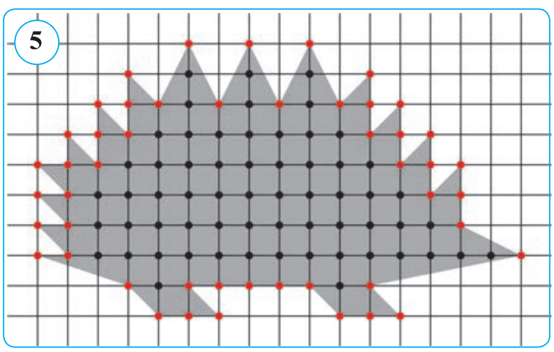
Пик формуласына орай: $S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19{,}5 + 16 = 35{,}5$ (см^2).

2-әдіс. Алынған жауаптың дұрыс екеніне тағы бір рет көз жеткізбек болсаңдар, алғаш берілген көпбұрышты сан қилы әдістермен тексерілген дөңес көпбұрыштарға бөліңдер. Содан соң пайда болған пішіндердің аудандарын тиісті формулалардың көмегімен табыңдар. Алынған нәтижелерді қосып, 1-әдіспен шығарылған нәтижемен салыстырыңдар. Егер есептеулер дұрыс шығарылған болса, алынған екі нәтиже де міндетті түрде бірдей болады. Берілген көпбұрыш сызбада түрлі пішіндерге бөлініп көрсетілмесе де бола береді. Есептеу әдісін таңдау өздеріңе байланысты. Есептеулерді ауызша орындауға да болады.

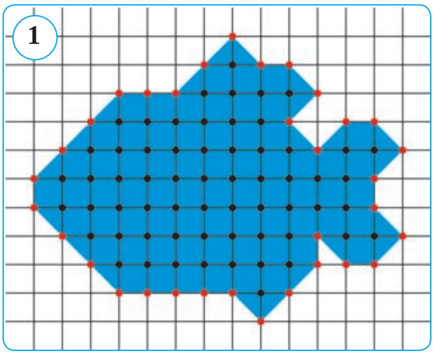
Барлық толық квадраттар саны 26, олардың ауданы 26 см^2; квадраттың жартысына тең үшбұрыштар саны 17, олардың ауданы $17:2=8{,}5$ (см^2); бір табаны 2 см, биіктігі 1 см-ге тең үшбұрыш бар? оның ауданы 1 см^2-қа тең. Сонымен, берілген көпбұрыштың ауданы: $26+8{,}5+1=35{,}5$ (см^2). Демек, екі нәтиже де бірдей. ***Жауабы:*** 35,5 см^2.

4-есеп. 4- және 5-суреттердегі көпбұрыштардың ауданын Пик формуласын қолданып есептеңдер.





53–54. 4-БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ. ҚАТЕЛЕР БОЙЫНША ЖҰМЫС



1. Қабырғалары 27 см және 21 см-ге тең тік төртбұрыштардың периметріне тең болған квадраттың ауданын табыңдар.

2. Тік төртбұрыштың ауданы 540 см², екі қабырғасының қатынасы 3 : 5. Осы тік төртбұрыштың периметрін табыңдар.

3. Параллелограмның ауданы 24 см². Егер оның биіктіктері 3 см және 4 см-ге тең болса, оның периметрін табыңдар.

4. 1-суретте кескінделген пішіннің ауданын бөліктерге бөліп, содан соң Пик формуласын қолданып табыңдар.

4-ТЕСТ Өзіңді сынап көр!

1. Егер тік төртбұрыштың қабырғалары 4 есе артса, оның ауданы неше есе артады?
A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

2. Тік төртбұрыштың ауданы 400 га, қабырғаларының қатынасы 4 : 1-ге тең; Осы тік төртбұрыштың периметрін тап.
A) 10 км; B) 5 км; D) 2 км; E) 8 км.

3. Тік төртбұрыштың ұзындығы 25%-ға арттырылды. Оның ауданы өзгермеуі үшін енін неше пайызға кемейту керек?
A) 20%; B) 16%; D) 25%; E) 18%.

4. Квадраттың қабырғасын неше есе азайтқанда, оның ауданы 4 есе кішірейеді?
А) 1,5 есе; Ә) 2 есе; Б) 3 есе; В) 3,5 есе.

5. Ауданы 144 см², биіктігі 8 см және 12 см болған параллелограмның периметрін тап.
A) 40 см; B) 30 см; D) 80 см; E) 60 см.

6. *ABCD* параллелограмның *AC* диагоналіне *BO* перпендикуляр түсірілген. $AO = 8$, $OC = 6$ және $BO = 4$ болса, параллелограмның ауданын тап.
A) 50 см²; B) 28 см²; D) 52 см²; E) 56 см².

7. Ромбының ауданы 40 см²-қа, ал периметрі 20 см-ге тең. Осы ромбының биіктігін табыңдар.
A) 2 см; B) 8 см; D) 4 см; E) 16 см.

8. Табандары 5 см-ге және 9 см-ге тең трапецияның ауданы 35 см²-қа тең болды. Осы трапецияның биіктігін табыңдар.
A) 9 см; B) 8 см; D) 5 см; E) 10 см.

9. Табандары 8-ге және 12-ге тең болған тең бүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр. Трапецияның ауданын тап.

A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.

10. Трапецияның ауданы 30 см^2-қа, биіктігі 6 см-ге тең болса, оның орта сызығы қаншаға тең болады?

A) 2,5 см; B) 5 см; D) 7,5 см; E) 4,5 см.

Ағылшын тілін үйренеміз!

Квадрат түбір – square root
Үшбұрыш – triangle
Орта сызық – midline
Герон формуласы – формула of Heron
Аудан – area

Тарихи мағлұматтар

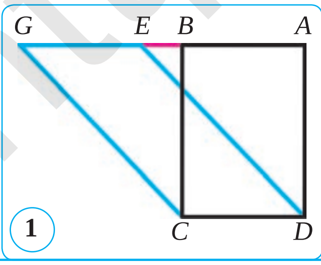
Әбу Әли ибн Сина
(980–1037)

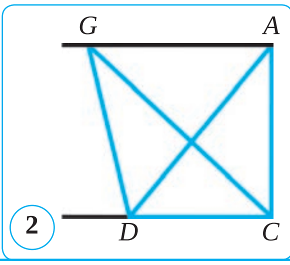
Ибн Сина «Білімнама» деген шығармасының V тарауын «Төртбұрыштар, оларда орналасқан үшбұрыштар және олардың байланыстарына қатысты негізгі геометриялық есептерге» арнаған. Шығармада параллель түзулер туралы төмендегідей бағалы пікірлер айтылған.

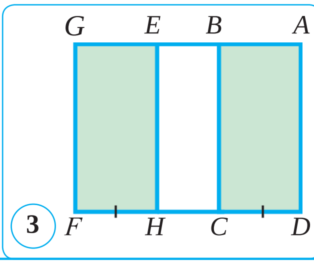
1-теорема. **Өзара параллель екі түзу арасына орналасқан, ортақ табаны бар және қарама-қарсы қабырғалары параллель пішіндер теңауданды болады (яғни олардың аудандары тең).** Мысалы, табандары *CD* болған *ABCD* және *EGCD* жазық пішіндер өзара теңауданды болады (1- сурет).

2-теорема. **Өзара параллель түзулер арасына орналасқан және ортақ табаны бар үшбұрыштар теңауданды болады.** Мысалы, *CD* табаны бар *ACD* және *GCD* үшбұрыштар теңауданды болады (2- сурет).

3-теорема. **Өзара параллель түзулер арасына орналасқан және табандары тең төртбұрыштар теңауданды болады.** Мысалы, *ABCD* және *GEHF* төртбұрыштар теңауданды (3- сурет).







V ТАРАУ. ШЕҢБЕР

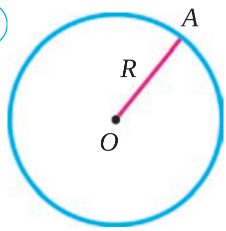
§ 10. ШЕҢБЕРДЕГІ БҰРЫШТАР

55. ТҮЗУ МЕН ШЕҢБЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ. ШЕҢБЕРГЕ ЖАНАМА ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Шеңбер туралы бастапқы мәліметтер.

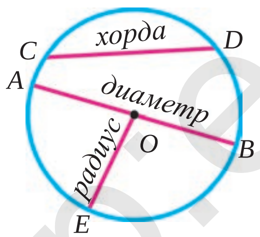
Анықтама. ***Шеңбер*** *деп берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын пішінді (фигураны) айтады.*

1



а

Ортасы O, радиусы R шеңбер, яғни (O, R)



CD – хорда, OE – радиус, AB – диаметр

ә

Шеңбер жазықтықта берілген O нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелерден құралған. Берілген O нүкте ***шеңбердің ортасы*** деп аталады. Шеңбердің кез келген нүктесін оның ортасымен қосатын кесінді ***шеңбердің* радиусы** делінеді. Шеңбер нүктесін оның ортасымен қосатын кез келген кесінді де оның радиусы болады. Әдетте ортасы O және радиусы R шеңбер мынадай белгіленеді: (O, R) (1-*а* сурет).

Шеңбердің кез келген екі нүктесін қосатын кесінді *хорда* делінеді. Шеңбердің ортасынан өтетін кесінді оның *диаметрі* деп аталады.

1-*б* суретте шеңбердің радиусы мен екі хордасы бейнеленген, хордалардың бірі шеңбердің диаметрі: OE – радиус, CD – хорда, AB – диаметр.

Әдетте диаметр d әрпімен белгіленеді. Бізге мәлім болғанындай, диаметр радиустан екі есе үлкен, яғни $d = 2R$-ге тең.

2. Түзу мен шеңбердің өзара орналасуы.

Бұл тақырыпта жазықтықта түзу мен шеңбердің өзара орналасуын қарастырамыз. Егер түзу шеңбердің ортасынан өтетін болса, онда ол шеңберді екі нүктеде, яғни бұл түзуде жататын диаметрдің ұштарында қиылысатыны айқын. Берілген l түзумен (O, R) шеңбердің қанша ортақ нүктесі бар деген сұрауға жауап беру үшін шеңбердің ортасы O-дан l түзуге дейінгі d қашықтықты осы шеңбердің R радиусымен салыстыру керек.

Шеңбердің ортасынан түзуге түсірілген перпендикуляр ***шеңбер ортасынан түзуге дейінгі ара қашықтық*** деп аталады.

Бұнда үш жағдай болуы мүмкін: 1) $d>R$; 2) $d=R$; 3) $d<R$. Енді осы үш жағдайды қарап шығайық.

1-жағдай. *Егер шеңбердің ортасынан түзуге дейінгі ара қашықтық шеңбердің радиусынан үлкен болса, түзу мен шеңбердің ортақ нүктесі болмайды, яғни қиылыспайды.*

Шынында да, егер $d>R$ болса (2- *а* сурет), l түзудің O ортасына ең жақын нүктесі (демек, бұл түзудің кез келген нүктесі де) (O, R) шеңберге тиісті болмайды, себебі ол ортадан, шеңбер радиусынан үлкен ара қашықтықта болады. Демек, l түзуі мен шеңбердің ортақ нүктесі жоқ.

2-жағдай. *Егер шеңбердің ортасынан түзуге дейінгі ара қашықтық шеңбердің радиусына тең болса, онда түзу мен шеңбердің бір және тек бір-ақ ортақ нүктесі болады.*

Шынында да, егер $d=R$ болса (2-*б* сурет), l түзудің O ортаға ең жақын нүктесі шеңбердің радиусына тең қашықтықта жатады, демек, ол нүкте (A) шеңберге де тиісті болады. l түзудің (A)-дан басқа (B) нүктесі шеңберден тысқарыда жатады, өйткені OB қашықтық шеңбердің OA радиусынан үлкен болады ($OB>OA$). Демек, l түзуі мен шеңбердің жалғыз-ақ ортақ нүктесі (A) бар.

3-жағдай. *Шеңбердің ортасынан түзуге дейінгі ара қашықтық шеңбердің радиусынан кіші болса* ($d<R$), *онда түзу мен шеңбердің екі ортақ нүктесі болады.*

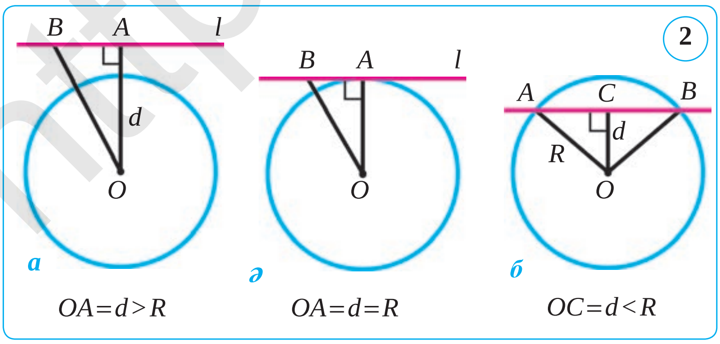
Түзудің шеңбер ішіндегі бөлігі *хорда* болады (2-*д* сурет). Бұл жағдайда түзу шеңберге қарағанда *қиюшы* деп аталады.

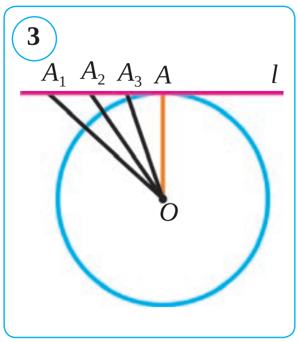
Хорданың ұзындығы AB-ны шеңбердің радиусы мен ортасынан түзуге дейінгі қашықтық d арқылы өрнектеуге болады:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}\,.$$

Бұл өрнекті өзің дәлелде.

Қорытынды. *Түзу мен шеңбер ортақ нүктелерге ие болмауы, кейде бір немесе екі ортақ нүктеге ие болуы мүмкін.*





2. Шеңберге жанама.

Анықтама. *Шеңбердің бір-ақ нүктесі арқылы өтетін және жүргізілген радиусқа перпендикуляр болатын түзу* ***жанама*** *деп, ал олардың ортақ нүктесі* ***жанасу нүктесі*** *деп аталады.*

2-*б* суретте l түзу – O орталы шеңберге жанама, A — жанама нүктесі. Шеңбер l түзуге жанасады десек те болады.

Жанаманың қасиеті туралы теореманы дәлелдейік.

1-теорема.

Шеңберге жанама осы шеңбердің жанасу нүктесіне жүргізілген радиусқа перпендикуляр болып табылады.

Дәлелдеу. l түзу шеңберге A нүктеде жүргізілген жанама болсын (3-сурет). $R=OA$-ның l-ге перпендикуляр болатынын дәлелдейміз. Шарт бойынша l түзу сызықтың A нүктесінен басқа барлық нүктелері шеңберден сыртта жатады. Сондықтан бұл түзудің A-дан басқа кез келген A_1 нүктесі үшін $OA_1>OA$. Демек, OA қашықтық – O нүктеден l түзудің нүктелеріне дейін болатын қашықтықтардың ең қысқасы. Нүктеден түзуге дейінгі ең қысқа қашықтық осы түзуге түсірілген перпендикуляр болады. Бұдан $OA\perp l$ екені келіп шығады. Теорема дәлелденді.

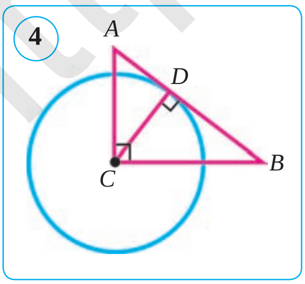
Енді жанаманың қасиетіне кері теореманы дәлелдейміз.

2-теорема.

Радиусқа перпендикуляр және оның шеңберде жатқан төбесінен өтетін түзу осы шеңберге жанама болады.

Дәлелдеу. Егер шеңбер ортасынан түзуге дейінгі қашықтық шеңбер радиусына тең ($d=R$) болса (2-*б* суретке қара), l түзудің O ортаға ең жақын нүктесі шеңбердің радиусына тең болады, демек, ол нүкте шеңберге де тиісті болады. l түзу сызықтың қалған барлық нүктелері O орталы шеңбердің радиусынан тысқарыда жатады, демек, шеңберге тиісті болмайды. Анықтамаға орай, l түзуі осы шеңберге жанама болады. Теорема дәлелденді.

Есеп. Тікбұрышты ACB ($\angle C=90°$) үшбұрыштың катеттері $AC=3$ см және $BC=4$ см. Орталығы C нүктеде болған, радиусы 2,4 см-ге тең шеңбер жүргізілген. Бұл шеңбер мен AB түзуі өзара қандай қатынаста болады?



Шешуі. $\triangle ACB$ ($\angle C=90°$)-да: $AC=3$ см, $BC=4$ см. Пифагор теоремасына орай:

$$AB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \text{ (см)}.$$

$CD\perp AB$-ны жүргіземіз (4-сурет). Үшбұрыштың ауданын екі түрлі әдіспен табуға болады, яғни

$CA \cdot CB = AB \cdot CD$ теңдігі орынды. Бұдан $CD = CA \cdot CB : AB = 3 \cdot 4 : 5 = 2{,}4$ (см). Демек, C нүктеден AB түзуіне дейінгі қашықтық радиустың ұзындығына тең болғандықтан, AB түзуі шеңберге жанама болады.

Жауабы: AB – жанама.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Шеңбер дегеніміз не? Оның ортасы, радиусы деген не? Қандай түзу шеңберге жанама деп айтылады?

2) Жанаманың қандай қасиетін және белгісін білесің?

2. d – R радиусты шеңбердің ортасынан l түзуге дейінгі қашықтық. Егер: 1) $R=8$ см, $d=6$ см; 2) $R=10$ см, $d=8{,}4$ см; 3) $R=14{,}4$ дм, $d=7{,}4$ дм; 4) $R=1{,}6$ дм, $d=24$ см; 5) $R=4$ см, $d=40$ мм болса, l түзу мен шеңбер өзара қалай орналасады?

3. $ABCD$ квадраттың қабырғасы 8 см-ге және ортасы A нүктеде болатын шеңбердің радиусы 7 см-ге тең. AB, BC, CD және BD түзулердің қайсысы осы шеңберге қарағанда қиюшы болады?

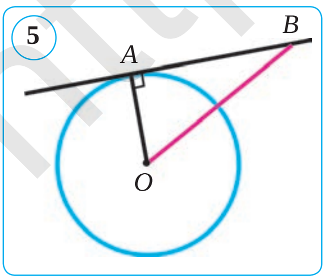
4. AB түзуі – O орталықты шеңбердің A нүктесіне жүргізілген жанама. Егер $AB = 24$ см-ге, ал шеңбердің радиусы 7 см-ге тең болса, OB қиюшының ұзындығы қандай болатынын табыңдар (5-сурет).

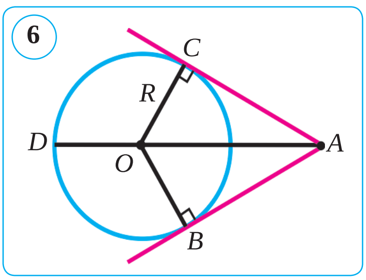
5. Тік бұрышты ACB ($\angle C=90°$) үшбұрышта $AB=10$ см, $\angle ABC=30°$. Ортасы A нүктеде болған шеңбер жүргізілген. Бұл шеңбердің радиусы қандай болғанда: 1) шеңбер BC түзуге жанасады; 2) BC түзуімен ортақ нүктесі болмайды; 3) BC түзуімен екі ортақ нүктесі болады?

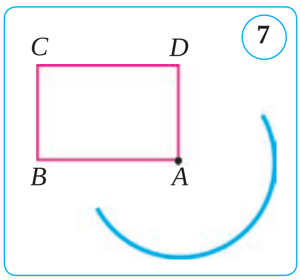
6. Шеңберден тысқарыдағы нүктеден осы шеңберге екі жанама жүргізілген. Сол нүктеден жанама нүктелеріне дейінгі қашықтықтар тең. Осыны дәлелдеңдер (6-сурет).

7. Егер шеңбердің радиусы 5 см-ге тең, шеңбердің ортасынан түзу сызыққа дейінгі қашықтық: 1) 6 см; 2) 5 см; 3) 4 см болса, түзу сызық пен шеңбер өзара калай орналасады?

8. $ABCD$ тік төртбұрышы берілген, онда $AB=16$ см, $AD=12$ см (7-сурет). AC, BC, CD және BD түзулердің қайсысы радиусы 12 см, ортасы A болатын шеңберге жанама болады?





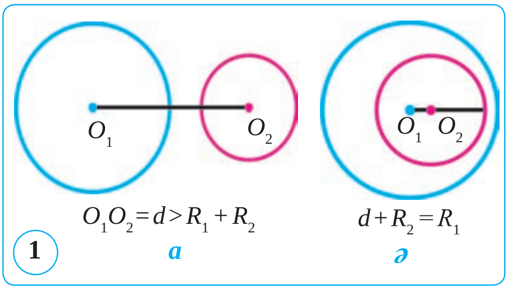


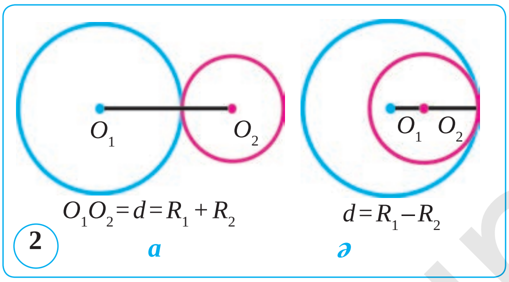
56. ЕКІ ШЕҢБЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ. ОРТАЛЫҚ БҰРЫШ ЖӘНЕ ОРЫННЫҢ ГРАДУСТЫҚ ӨЛШЕМІ

1. Екі шеңбердің өзара орналасуы.

Қос шеңбердің өзара орналасу жағдайларын қарастырайық.

1) Екі шеңбердің ортақ нүктесі болмайды. Бұл жағдайда олар шеңберден тысқарыда (1- *а* сурет) немесе бірі екіншісінің ішінде орналасады (1-б сурет).





2) Екі шеңбер бір ортақ нүктеге ие болады (2-сурет). Бұл жағдайда шеңберлер бір-біріне жанама болады. Дегенмен бұл жағдайда шеңберлер бір-біріне сыртқы жағынан (2-*а* сурет) немесе ішкі жағынан жанамалануы мүмкін (2-*б* сурет).

3) Екі шеңбер қос ортақ нүктеге ие болуы ықтимал (3-сурет). Бұл жағдайда шеңберлер бір-бірімен қиылысады. Ортақ нүктеге ие болған шеңберлер *концентрлік шеңберлер* деп аталады (4-сурет).

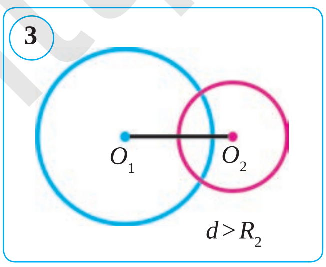
Екі шеңбердің өзара орналасуы олардың радиусы мен орталықтары арасындағы қашықтыққа тәуелді болады.

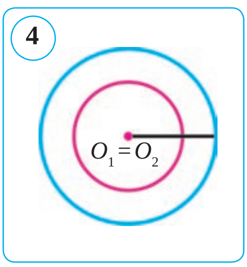
Теорема.

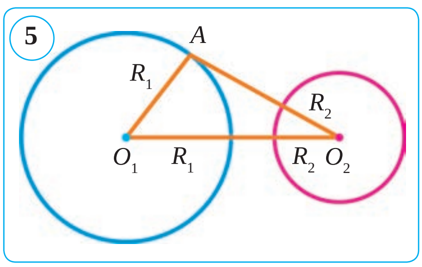
Егер екі шеңбердің орталықтары арасындағы қашықтық олардың радиустарының қосындысынан үлкен яки жартысынан кіші болса, онда бұл шеңберлер ортақ нүктеге ие болмайды.

Дәлелдеу. O_1, O_2 орталықты және радиустары сәйкесінше R_1, R_2 ($d=R_1+ R_2< O_1O_2$) болған екі шеңбер берілген делік (5-сурет). Шеңбердегі A нүктені қарастырайық: $O_1A=R_1$. Ол жағдайда $O_2A \geq O_1O_2-O_1A>R_1+R_2- R_1= R_2$ Демек, A нүктесі екінші шеңберге тиесілі емес. Олай болса, бұндай шеңберлер ортақ нүктеге ие болмайды.

Екі шеңбер бір ортақ нүктеге ие болған жағдайды, сондай-ақ екі шеңбер екі нүктеге ие болған жағдайды өздерің дербес қарастырып көріңдер.





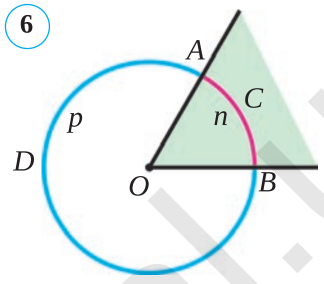


2. Орталық бұрыш.

Анықтама. *Төбесі шеңбердің ортасында болған бұрыш* ***орталық бұрыш*** *деп аталады.*

Ортақ төбесі шеңбердің O орталығында болған екі сәуле – OA және OB екі орталық бұрышты белгілейді, олардың біреуі дөңестеу саламен шекараланған болады. Шеңбердің екі – A және B нүктелері оны тең екі доғаға бөледі. Бұл доғалар бір-бірінен ерекшеленіп тұруы үшін олардың әрқайсысына біреуден аралық нүкте (доғаның төбелерінен тыс) немесе латынша кіші әріп қойылып белгіленеді. Олар ACB (немесе ApB) және ADB (немесе ApB) *доғалар* деп аталады (6-сурет). Доғаларды төмендегідей етіп белгілеу қабылданған: $\cup ACB$ (немесе $\cup AnB$) және $\cup ADB$ (яки $\cup ApB$). Кей жағдайларда доғалар аралығы нүктесіз белгіленеді: $\cup AB$ (сөз екі доғаның қайсысы жөнінде екені түсінікті болғанда). Егер доғаның төбелерін тұтастыратын кесінді шеңбердің диаметрі болса, онда доға жарты *шеңбер* деп аталады. 7-*б* суретте екі жарты доға бейнеленген, олардың біреуі ерекше бөлініп көрсетілген.

6



$\angle AOB$ – *Орталық бұрыш*

3. Доғаның градустық өлшемі.

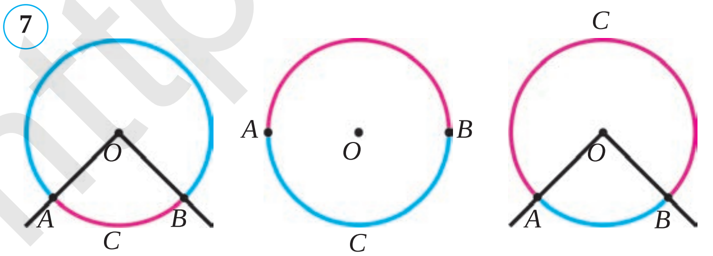
Анықтама. ***Шеңбер доғасының бұрыштық өлшемі*** *деп шеңбердің осы доғаға сәйкес орталық бұрышының өлшемін айтады.*

Шеңбер доғасы градуспен өлшенеді. *Егер ортасы O шеңбердің ACB доғасы жарым шеңберден кіші немесе жарым шеңберге тең болса, онда оның градустық өлшемі AOB орталық бұрыштың градустық өлшеміне тең болып саналады* (7- *а, б* сурет). *Егер ACB доға жарым шеңберден үлкен болса, онда оның градустық өлшемі* 360° – $\angle AOB$*-ға тең деп есептеледі* (7-*д* сурет).

Бұдан *соңы ортақ болатын шеңбердің екі доғасы градустық өлшемдерінің қосындысы* 360°*-қа* теңдігі келіп шығады.

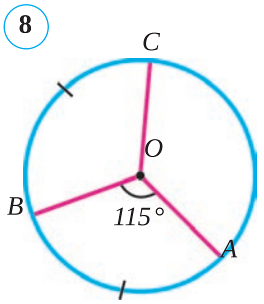
Екі бұрыштың шамалары тең болғанда ғана бұл бұрыштар тең болатыны белгілі.

7



$\cup ACB = \cup AOB$ — *а*; $\cup ACB = 180°$ — *ә*; $\cup ACB = 360° - \angle AOB$ — *б*

8



Шеңбердің екі доғасының бұрыштық өлшемдері (яғни оларға сәйкес орталық бұрыштар) тең болғанда және тек сонда ғана бұл доғалар тең болады.

Есеп. O нүктесі — шеңбердің ортасы, $\angle AOB=115°$, $\cup BC=\cup AB$ (8-сурет). AOC бұрышын табыңдар.

Шешуі. AOB бұрышы – шеңбердің орталық бұрышы, AB доғасы – жарты шеңберден кіші, сондықтан $\cup AB=\angle AOB=115°$. Есептің шартына орай, $\cup \mathrm{BC}=\cup \mathrm{AB}$, демек, BC доғасы 115^0-қа тең. $\cup \mathrm{ABC} = \cup \mathrm{AB} + \cup \mathrm{BC} = 230° > 180°$, яғни ABC доғасы жарты шеңберден үлкен, сол себепті $\angle AOC=360°-ABC==360°-230°=130°$. ***Жауабы:*** $\angle AOC=130°$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Шеңбер берілген нүктеде жанамаланады дегенде нені түсінуге болады?
? 2) Концентрлік шеңберлер деп нені айтады?
3) Орталық бұрыш деген не? Шеңбер доғасы қалай белгіленеді?
4) Шеңбер доғасының бұрыштық шамасы деген не?

2. Егер екі шеңбердің орталықтары арасындағы қашықтық 2 см, радиустары сәйкесінше: 1) 3 см және 5 см; 2) 2 см және 5 см болса, олар бір-бірімен салыстырғанда өзара қалай орналасады?

3. Егер радиустары 4 см-ге және 6 см-ге тең шеңберлер: 1) сыртқы жанама болса; 2) ішкі жанама болса, олардың орталықтары арасындағы қашықтық неге тең болады?

4. Шеңбердің ортасынан өтетін екі түзу бұл шеңберде неше доға және неше орталық бұрыш жасайды?

5. Берілген шеңбердің нүктесі арқылы радиусқа тең екі хорда жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты анықтаңдар.

6. Орталық бұрышқа сәйкес доға шеңбердің: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ бөлігіне тең. Осы орталық бұрышты табыңдар.

7. Шеңбер екі нүкте арқылы екі доғаға бөлінеді. Егер: 1) олардың біреуінің бұрыштық шамасы екіншісінің бұрыштық шамасынан 40^{o} артық болса; 2) бұл доғалардың бұрыштық шамалары 2 : 7 қатынасында болса, онда қайсы бұрыштың үлкен болатынын табыңдар.

8. A, B, C нүктелері орталығы O нүктеде орналасқан шеңберде жатады. Егер $\cup ABC=70°$ болса, AOC бұрышын табыңдар.

9. Шеңбердің: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ бөлігін құрайтын AB доғасына сәйкес келетін орталық бұрыштарды табыңдар. Бұл жағдайлардың әрқайсысында AB доғасының шамасы қандай болатынын белгілер көмегімен жазыңдар.

10. Шеңбердің радиусы: 1) 7,8 см; 2) 10,5 см; 3) 0,8 дм. Шеңбердің диаметрін табыңдар.

57. ШЕҢБЕРГЕ ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН БҰРЫШ

Анықтама. *Төбесі шеңберде жататын, ал қабырғалары осы шеңберді қиып өтетін бұрыш* ***шеңберге іштей сызылған бұрыш*** *делінеді.*

1-суретте ABC бұрыш шеңберге іштей сызылған, AnC доға осы бұрыштың ішінде орналасқан. Бұндай жағдайда іштей сызылған ABC бұрыш AnC доғаға тірелген деп те айтылады.

Теорема.

Шеңберге іштей сызылған бұрыш өзі тірелген доғаның жарымымен өлшенеді:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

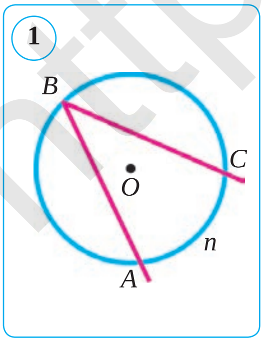
Дәлелдеу. $\angle ABC$ – ортасы O шеңбердің AC доғаға тірелген іштей сызылған бұрышы болсын (2-сурет). Шеңбер ортасының осы іштей сызылған бұрышқа қарағанда орналасуының үш жағдайын қарастырайық.

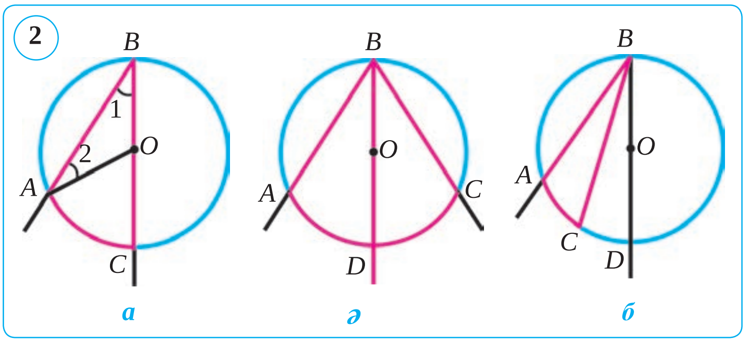
1-жағдай. Шеңбер ортасы іштей сызылған бұрыштың қабырғаларының біреуінде, мысалы, BC қабырғасында жатады (2-*а* сурет). OA радиусын жүргіземіз және AOC ортасы бұрышты қарастырамыз. Ол – BOA үшбұрыштың сыртқы бұрышы. Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Бірақ $\angle OBA = \angle OAB$, себебі AOB үшбұрыш тең бүйірлі ($OA = OB = R$). Ал OBA және OAB бұрыштар – тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштар. Демек, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Орталық бұрыштың шамасы осы бұрышқа сәйкес доғаның градустық өлшеміне тең болатынын білесің (56-тақырып). Бұл жағдайда AC доға жарым шеңберден кіші, сондықтан орталық бұрыштың қасиеті бойынша: $\angle AOC = \cup AC$ (2).

(1) және (2) теңдіктерден: $2\angle ABC = \cup AC$, яғни $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Теорема 1-жағдай үшін дәлелденді.

2-жағдай. Шеңбердің ортасы O іштей сызылған бұрыштың қабырғаларының арасында жатады. BO сәулені жүргіземіз, ол AC доғаны бір D





нүктеде қиып өтеді (2-*б* сурет). *D* нүкте *AC* доғаны екі $\cup AD$ және $\cup DC$ доғаларға бөледі. Демек, дәлелденуі бойынша (1-жағдай):

$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ және $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Бұл теңдіктерді мүшелеп қоссақ:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3-жағдай. *Шеңбердің ортасы O іштей сызылған бұрыштың сыртында жатады.* Бұл жағдайдың дәлелін 2-*д* суретті пайдаланып, өзің дәлелде.

1-салдар. *Бір доғаға тірелген барлық іштей сызылған бұрыштар өзара тең* (3-*а* сурет):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2} \cup AC.$$

2 -салдар. *Диаметрге (жарым шеңберге) тірелген барлық іштей сызылған бұрыштар тік бұрыш болады* (3-ә сурет):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90°.$$

Есеп. Шеңбердің радиусына тең хорда жүргізілген. Бұл хорда: 1) шеңбер ортасынан; 2) берілген хорда төбелерінің бірінен қарағанда кез келген нүктеден қандай бұрыш астында көрінеді?

Шешуі. *AB* — *O* орталы шеңбердің радиусына тең хорда болсын делік (4-сурет). Ондай жағдайда *AOB* үшбұрышы — тең бүйірлі, демек, орталық бұрыш (шеңбер ортасынан *AB* хордасы көрінетін бұрыш) 60°-қа тең. *A* және *B* нүктелерінің бірімен салыстырғанда кез келген *C* нүктесінен іштей сызылған *ACB* бұрышы (*C* нүктесінен *AB* хордасы көрінетін бұрыш) орталық бұрыштың жартысына, яғни 30°-қа тең болады.

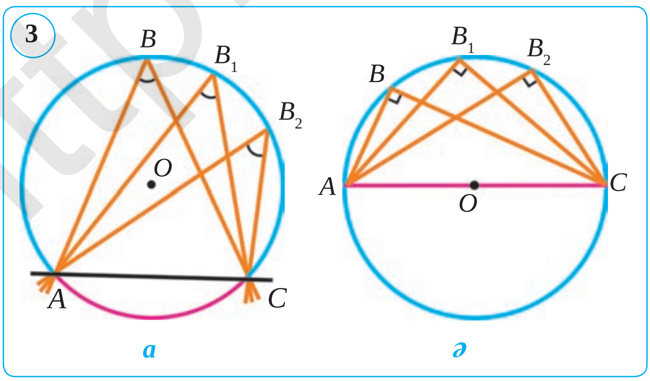
Жауабы: 1) 60°; 2) 30°.

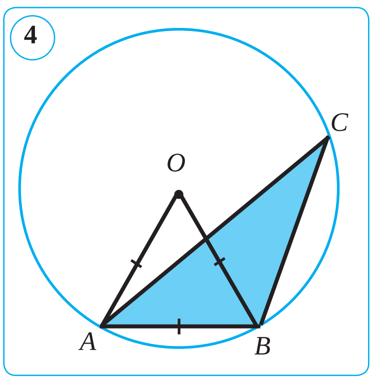
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Қандай бұрыш шеңберге іштей сызылған бұрыш делінеді?

2) Іштей сызылған бұрыш қалай өлшенеді?

3) Жарым шеңберге тірелген іштей сызылған бұрыш неге тең?





2. *(Ауызша).* Іштей сызылған бұрыш 25°-қа тең. Осы ішкі бұрышқа түйісетін доғаның шамасын табыңдар.

3. AB және BC — ортасы O нүктеде болатын шеңбердің хордалары, $\angle ABC = 30°$. Егер шеңбердің радиусы 10 см-ге тең болса,, AC хорданың ұзындығын тап.

4. 1) 5-суретте O нүкте — шеңбердің ортасы, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$-ны тап.

Шешуі. AOB бұрыш берілген шеңбердің ... бұрышы болады және ...°қа тең. Демек, $\cup ADB = ...°$. ACB бұрыш ... сызылған бұрыш болады және ... доғаға тіреледі, сондықтан $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup ... = ..°$

Жауабы: $\angle ACB = ...°$.

2) 6-суретте $\cup CAB = 130°$. $\angle CAB$-ны тап.

Шешуі. CAB бұрыш шеңберге **іштей** сызылған бұрыш болады және $\cup CDB$ доғаға тірелген. $\cup CDB = 360° - \cup CAB = 360° - \mathbf{130°} = = \mathbf{230°}$

$\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{230°} = \mathbf{115°}$.

Жауабы: $\angle CAB = 115°$.

3) 7-суретте $\angle APE = 46°$, $\angle BCE = 34°$. $\angle AEP$-ні тап.

Шешуі. PAB және BCP іштей сызылған бұрыштар, біреуі BP ..., демек, $\angle PAB = \angle ... = ...$. AEP үшбұрыштан ие болатынымыз:

$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$.

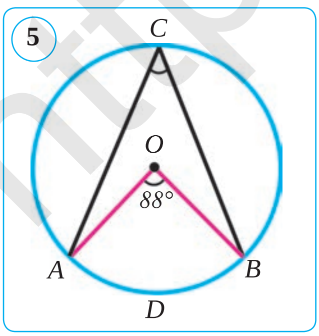
Жауабы: $\angle AEP == ...$.

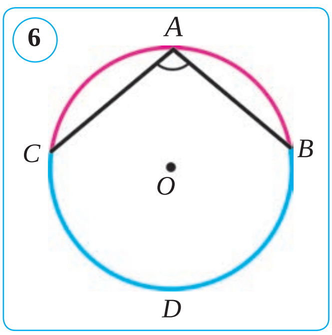
5. Шеңберде жататын A, B, C нүктелері бұл шеңберді үш доғаға бөледі. Бұл доғалардың градустық, яғни бұрыштық өлшемдерінің қатынасы 3 : 5 : 7 қатынасындай. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

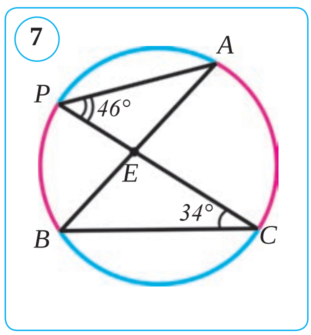
6. Хорда шеңберді екі доғаға бөледі. Егер бұл бұрыш шамаларының қатынасы: 1) $5:4$; 2) $7:3$ қатынасындай болса, хорда шеңбер нүктесінен қандай бұрышпен көрінеді?

7. Шеңбердің AB диаметрі және AC хордасы жүргізілген. Егер AC және CB доғаларының градустық өлшемі $7:2$ қатынасында болса, BAC бұрышты тап.

8. AB және AC — шеңбердің хордалары, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. AC доғаның градустық өлшемін тап.







58. ШЕҢБЕРДІ ҚИЮШЫЛАР ЖАСАҒАН БҰРЫШТАР

1. Жанама мен хордадан жасалған бұрыш.

1-теорема.

Жанама мен хордадан жасалған бұрыш өзі қамтитын доғаның жарымымен өлшенеді.

Дәлелдеу. AB жанама және BC хорда болсын. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$ болатынын дәлелдейміз (1- сурет). Ол үшін C нүктеден $CD \parallel AB$-ны жүргізсек, $\angle ABC = \angle BCD$, себебі олар – ішкі айқыш бұрыштар.

Бірақ $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$ және $CD \parallel AB$ болғандықтан, $\cup BnD = \cup BmC$ және $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$. Теорема дәлелденді.

1-есеп. AB хорда 56°-тық доғаны керіп тұрады. Осы хорданың төбелерінен шеңберге жүргізілген жанамалар мен хордадан пайда болған бұрыштарды табыңдар.

Берілгені: $(O,\ R)$, AB – хорда, $\angle AOB = 56° - AB$ хорданы керіп тұрған орталық бұрыш $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (2-сурет).

Табу керек: $\angle CAB$, $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

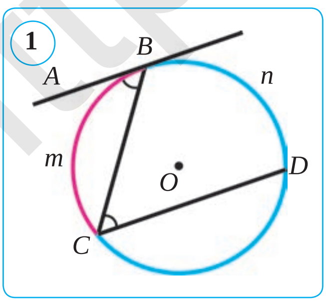
Шешуі. Жанама мен хорда арасындағы доға $\cup AB = 56°$ (1-жағдай) немесе $\cup AnB = 360° - 56° = 304°$ (2-жағдай) болады.

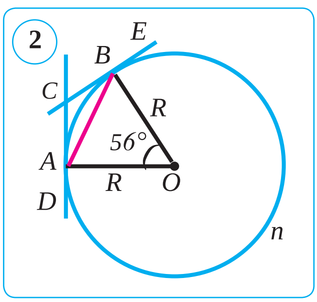
Сонымен, 1-жағдайда $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56° = 28°$, ал 2-жағдайда $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304° = 152°$ -қа ие боламыз.

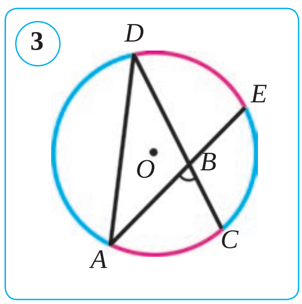
Бізге белгілі болғанындай, шеңбер сыртындағы бір нүктеден шеңберге жүргізілген жанамалардың жанасу нүктелеріне дейінгі қиюшылары тең болады. Сондықтан да ΔACB – тең бүйірлі.

Демек, $\angle CAB = \angle CBA = 28°$ және $\angle BAD = \angle ABE = 152°$.

Жауабы: $\angle CAB = \angle CBA = 28°$, $\angle BAD = \angle ABE = 152°$.







2. Екі хорданың қиылысуынан пайда болатын бұрыштар.

2-теорема.

Кез келген екі хорданың қиылысуынан пайда болған кез келген вертикаль бұрыш олардың қабырғалары тірелген доғалар қосындысының жарымына тең болады.

Дәлелдеу. $\angle ABC$ – CD және AE хордалардың қиылысуынан пайда болған бұрыштардың біреуі болсын (3-сурет).

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$ болатынын дәлелдейміз. Ол үшін A және D нүктелерді қосамыз, онда $\angle ABC - \triangle ABD$-ға қарағанда сыртқы бұрыш болады. Демек, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Бірақ $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$ және $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$. Сондықтан $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$.

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$ екендігі дәл жоғарыдағыдай дәлелденеді. Бұны өзіңе ұсынамыз.

2-есеп. AB және CD – бір шеңбердің хордалары, P – олардың қиылысу нүктесі. Егер BPD бұрышы BPC бұрышынан 4 есе үлкен, ал CDA бұрышы BPC-дан 26º-қа үлкен болса, онда CBP бұрышын табыңдар.

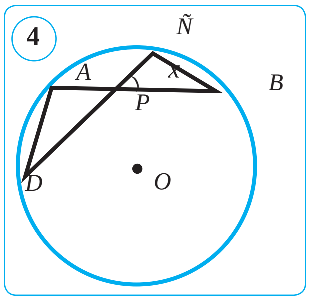
Берілгені: $\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26°$ (4-сурет).

Табу керек: $\angle CBP$.

Шешуі. $\angle BPD + \angle BPC = 180°$,

$4\angle BPC + \angle BPC = 180°$, бұдан $5\angle BPC = 180°$ және $\angle BPC = 36°$. $\angle CDA = \angle BPC + 26° = 36° + 26° = 62°$. $\angle CBA = \angle CDA = 62°$, өйткені олар $\cup AC$ мен бір доғада түйісетін іштей сызылған бұрыштар. Бұдан $\angle CBP = \angle CBA = 62°$.

Жауабы: $\angle CBP = 62°$.

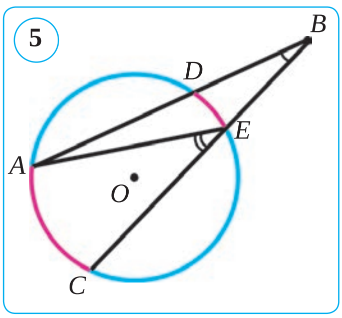


3. Шеңберден тыс алынған бір нүктеден оған жүргізілген екі қиюшы арасындағы бұрыш.

3-теорема.

Шеңберден тыс алынған бір нүктеден оған жүргізілген екі қиюшы арасындағы бұрыш (ABC) қиюшылар арасындағы доғалар (AC және DE) айырмасының жарымына тең.

Дәлелдеу. B — шеңберден тысқары алынған нүкте, BA және BC қиюшылар болсын. $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$ болатынын дәлелдейміз. Ол үшін A және E нүктелерді қосамыз (5-сурет).



$\angle AEC - \triangle AEB$-ға сыртқы бұрыш болады. Демек, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, бұдан $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$. Бірақ бұл теңдіктің оң жағындағы бұрыштар оларға сәйкес AC және DE доғаларының жартысымен өлшенеді,

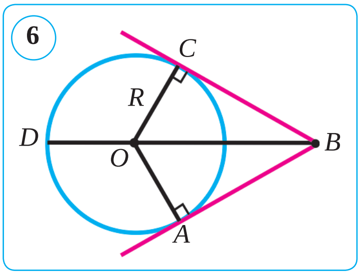
$$\angle B = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE).$$

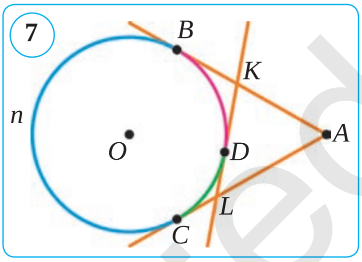
Демек, $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$. Теорема дәлелденді.

4. Шеңберден тысқары алынған бір нүктеден оған жүргізілген екі жанаманың қасиеті.

4-теорема.

Шеңберден тысқары алынған бір нүктеден оған екі жанама жүргізілсе, шеңбердің ортасы олар арасындағы бұрыш биссектрисасында жатады, бұл бұрыш 180° пен жанамалар тірелген доға айырмасына тең.





Дәлелдеу. Шеңбер тысқарысындағы екі нүктеден жүргізілген екі қиюшы арасындағы бұрышты өлшеу жөніндегі 3-теорема бойынша (6-суретке қ.): $\angle A = 0{,}5(\cup BDC - \cup BC) = 0{,}5(360° - \cup BC - \cup BC) = 180° - \cup BC$, демек, $\angle A = 180° - BC$ болады. Теорема дәлелденді.

OA және OC радиусы жүргізілсе, $OA \perp BA$ және $OC \perp BC$ болғандықтан: $\triangle AOB$ және $\triangle COB$ – тік бұрышты. $\triangle AOB = \triangle COB$, өйткені BO гипотенуза ортақ, $OA = OC = R$. Үшбұрыштар теңдігінен: $AB = BC$. Енді $OC = OA = R$ және $OA \perp BA$, $AB = BC$ және $OC \perp BC$ болғандықтан, O орталық әрқашанBD биссектрисада жатады. Шеңбердің сыртындағы бір нүктеден жүргізілген екі қиюшы арасындағы бұрышты өлшеу туралы теорема-ға негізінде:

$\angle B = 0{,}5(\cup ADC - \cup AC) = 0{,}5(360° - \cup AC - \cup CA) = 180° - \cup AC$.

Демек, $\angle B = 180° - \cup AC$ болады. Теорема дәлелденді.

3-есеп. Шеңбердің A, B және C нүктелері оны 11 : 3 : 4 қатынасындағы доғаларға бөледі. A, B және C нүктелерінен жанамалар жүргізіліп, бір-бірімен қиылысқанша жалғастырылған. Пайда болған үшбұрыштардың бұрыштарын табыңдар.

Шешуі. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11 : 3 : 4$, жанасу нүктелеріне жанамалар жүргізуден пайда болған үшбұрыш AKL болсын (7-сурет). A, AKL және ALK бұрыштарын табамыз:

$\cup BnC = \frac{360°}{11+3+4} \cdot 11 = 220°$; $\cup CD = \frac{360°}{11+3+4} \cdot 3 = 60°$; $\cup DB = \frac{360°}{11+3+4} \cdot 4 = 80°$;

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60° + 80° = 140°$;

F$A = 180° - \cup CDB = 180° - 140° = 40°$,

F$BKD = 180° - \cup DB = 180° - 80° = 100°$,

F$AKL = 180° - \angle BKD = 180° - 100° = 80°$,

F$ALK = 180° - ($F$A + \angle AKL) = 180° - (40° + 80°) = 180° - 120° = 60°$.

Жауабы: $\angle A = 40°$, $\angle AKL = 80°$, $\angle ALK = 60°$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Жанама мен хордадан жасалған; екі хорданың қиылысуынан пайда болған; екі қиылысушы хорда арасындағы бұрыш қалай өлшенеді?

2) Бір нүктеден жүргізілген екі жанама қандай қасиетке ие?

2. Шеңбердің радиусына тең AB хорда A нүктесінде жүргізілген жанамамен қандай бұрыштар жасайды?

3. Шеңберді қиятын екі хорданың арасындағы бұрыштардың бірі 70º-қа тең. Осы бұрышқа сыбайлас бұрыштардың қосындысын табыңдар.

4. 8-суретте кескінделген x белгісіз бұрышты тап.

5. Екі радиус арасындағы бұрыш 150º-қа тең. Бұл радиустардың соңынан шеңберге жүргізілген жанамалар арасындағы бұрышты табыңдар.

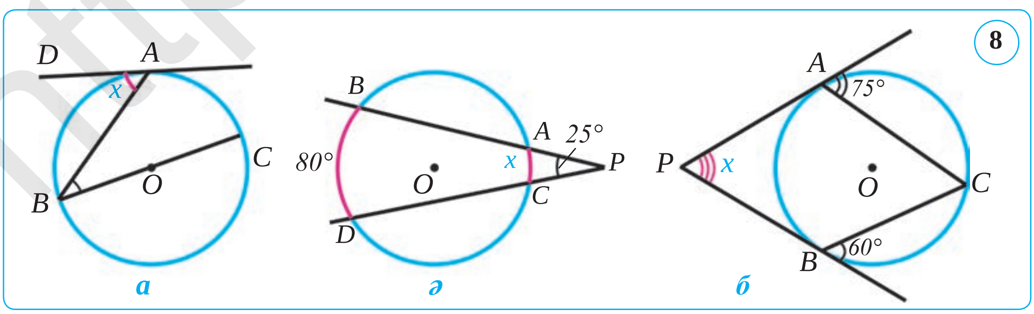
6. B нүктеден шеңберге жүргізілген BA және BC жанамалар шеңберді жанасу нүктелерінде: 1) $5:4$; 2) $12:6$; 3) $9:6$; 4) $13:7$; 5) $2:3$ қатынасында екі доғаға бөледі. ABC бұрыштың мөлшерін тап.

7. Шеңберді: 1) $2:7$; 1) $4:5$ қатынаста бөлетін хорданың төбелерінен екі жанама жүргізілген. Пайда болған үшбұрыштың бұрыштарын тап.

8. Шеңберден тысқарыдағы нүктеден жүргізілген екі жанаманың жанасу нүктелері шеңберді: 1) $1:9$; 2) $4:15$; 3) $7:11$; 4) $3:7$ қатынасындағы екі доғаға бөледі. Жанамалар арасындағы бұрышты тап.

9. 1) 52°; 2) 74°; 3) 104°-тық орталық бұрыш жасаған екі радиустың төбелеріне жүргізілген жанамалар арасындағы бұрыш табылсын.

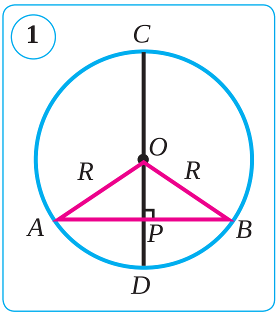
10. Шеңбердің радиусы диаметрінен 40 мм қысқа. Шеңбердің диаметрін табыңдар.



59. ШЕҢБЕРДІҢ ХОРДАСЫ МЕН ДИАМЕТРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1-теорема.

Хордаға перпендикуляр диаметр осы хорданы да, оны керіп тұрған доғаны да тең екіге бөледі.



Дәлелдеу. Ортасы O нүктеде және радиусы R болған шеңбер берілген. AB — шеңбер хордасы, CD — хордаға перпендикуляр диаметр болсын (1-сурет). $AP=PB$ және $\cup AD=\cup DB$ екендігін дәлелдеуіміз керек. Егер AB хордасы диаметр болса, P нүкте O нүктемен бетпе-бет түседі және сол нүктеде AB хорда мен оны керіп тұрған жарты шеңбердің ADB доғасы тең екіге бөлінеді, яғни дәлел орынды болады. AB хорда диаметр болмасын. Ол үшін OA және OB радиустарын жүргіземіз. Пайда болған AOB — тең бүйірлі үшбұрыш, себебі $OA=OB=R$.

Демек, OP — тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен AB табанына түсірілген биіктік. Тең бүйірлі үшбұрыштың қасиеттеріне орай, ол үшбұрыштың медианасы мен биссектрисасы болады. Хорданың ортасы арқылы өткен диаметр AB хорданы тең екіге бөледі, яғни $AP=PB$. Оның биссектриса екендігінен $\angle AOP=\angle BOP$-ны шығарамыз. Бұл бұрыштар тірелген доғалар болғандықтан, $\cup AD=\cup DB$. Теорема дәлелденді.

2-теорема.

Шеңбердің хордасы оның диаметрінен үлкен бола алмайды.

Дәлелдеу. OPB үшбұрыш — тік бұрышты (1-суретке қара). Бұл үшбұрыштың OB — гипотенузасы, PB — катеті. Белгілі болғанындай, катеті гипотенузадан үлкен емес, яғни $PB \le OB$. Бұдан $2PB \le 2 \cdot OB$, $2PB=AB$ және $2OB=2R=d$. Демек, $AB \le d$ келіп шығады.

1 -салдар. *Хорданың ортасы арқылы өтетін диаметр осы хордаға перпендикуляр болады.*

2 -салдар. *Хорданың орта перпендикуляры шеңбердің диаметрі болады.*

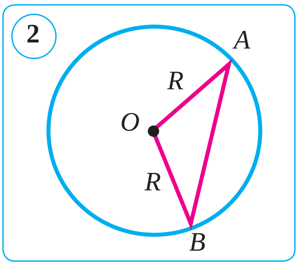
Бұл салдарларды дәлелдеуді өздеріңе қалдырамыз.

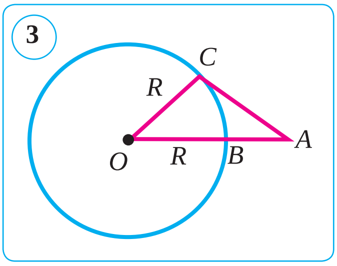
1-есеп. Диаметр ең үлкен хорда екенін дәлелдеңдер.

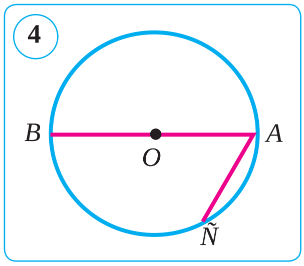
Шешуі. O орталықты және P радиусты шеңбер мен диаметрі ерікті AB хордасы берілген делік (2-сурет). OA және OB қиюшыларын жүргіземіз. AOB үшбұрышындағы AB қабырғасы өзге екі қабырғаның қосындысынан кіші, яғни $AB<OA+OB=R+R=2R$. Демек, AB хордасы диаметрден кіші болады.

2-есеп. A нүкте R радиусты шеңберден тысқарыда және осы шеңбердің O орталығынан d қашықтықта орналасқан. A нүктеден осы шеңбердегі нүктеге дейінгі ең қысқа қашықтық нешеге тең?

Шешуі. B – шеңбердің OA қиюшымен қиылысқан нүктесі болсын







(3-сурет). *AB* қашықтық *A* нүктеден шеңбердегі нүктелерге дейін ықтимал қашықтықтар ішінде ең қысқасы екенін көрсетеміз. Расында да шеңбердің кез келген *C* нүктесі үшін $AB+BO<AC+CO$ теңсіздігі орындалады. $BO = CO = R$-ді ескеріп, соңғы теңсіздіктен $AB<AC$ теңсіздігін шығарамыз. $AO=d$ және $BO=R$-ды ескерсек, іздестіріліп жатқан ең қысқа қашықтық *AB* қиюшының ұзындығына, яғни $d – R$-ге тең екені келіп шығады.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 1) Хордаға перпендикуляр диаметрдің қандай қасиеті бар?
? 2) Шеңбердің хордасы диаметрінен үлкен болмайтынын дәлелде.
3) Хорданың орта перпендикуляры диаметр болмауы мүмкін бе?

2. Шеңбер салыңдар және оның бір-біріне перпендикуляр болатын екі *AB* және *CD* диаметрлерін жүргізіңдер. *A, B, C* және *D* нүктелері бөлген шеңбер доғаларының градустық өлшемін табыңдар.

3. Ұзындығы 8 см хорда шеңберден 90°-тық доға бөледі. Шеңбердің ортасынан хордаға дейінгі қашықтықты тап.

4. Берілген шеңбердің нүктесінен радиусына тең екі хорда жүргізілген. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

5. Шеңбердің берілген нүктесінен диаметр және радиусқа тең хорда жүргізілген. Диаметр мен хорда арасындағы бұрышты табыңдар (4-сурет).

6. Шеңберден 90°-тық доға бөлетін екі параллель хорда жүргізілген. Олардың біреуінің ұзындығы 8 см. Хордалардың арасындағы қашықтықты тап.

7. Шеңбердің ортасынан басқа нүктеде қиылысатын екі хорда қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінбейтінін дәлелде.

8. Шеңбердегі *A* нүктеден шеңбердің радиусына тең екі хорда – *AB* және *AC* жүргізілген. *B* және *C* нүктелер түзумен қосылған. Шеңбердің радиусы 12 см. Шеңбердің ортасынан *BC* хордаға дейінгі қашықтықты тап.

9. Шеңберден 90°-тық доға бөлетін екі параллель хорда жүргізілген. Олардың біреуінің ұзындығы 10 см. Хордалардың арасындағы қашықтықты тап.

10. Шеңбердің радиусы 13 см-ге тең. Осы шеңбер арқылы 10 см-ге тең хорда жүргізілген. Шеңбердің ортасынан хордаға дейінгі қашықтықты табыңдар.

11. *AB* қиюшы – орталығы *O* нүктеде болған шеңбердің биіктігі, *AC* және *CB* – сол шеңбердің тең хордалары. *COB* бұрышты табыңдар.

60. ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

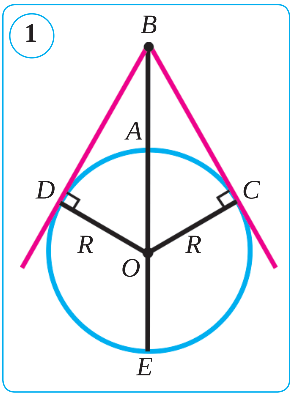
ПРАКТИКАЛЫҚ БІЛІКТІЛІКТІ ДАМЫТАТЫН ҚОСЫМША МАТЕРИАЛДАР

КӨКЖИЕКТІҢ ҰЗАҚТЫҒЫ

1-есеп. *(Тірек есеп.)* Қиюшы мен оның сыртқы бөлігінің көбейтіндісі жанаманың квадратына тең. Осыны дәлелдеңдер.

Шешуі. O орталықты шеңбердің сыртындағы B нүкте арқылы BE қиюшы, BC және BD жанамалар жүргізілген делік (1-сурет).

$BC^2 = BE \cdot BA$ екенін дәлелдейміз. Бұл үшін тікбұрышты BOC ($\angle C = 90°$) үшбұрышын қарастырайық. Бұдан Пифагор теоремасына орай: $BC^2 = BO^2 - OC^2$.



Бұл теңдікке $BO = BA + AO = BA + R$ және $OC = R$ белгілерін қойып, пайда болған теңдіктің пішінін алмастырамыз:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Бізден осыны дәлелдеу талап етілген еді.

1. Көкжиек жайлы ұғым.

Алысты көру үшін ешкім, ешнәрсе кедергі келтірмейтін ашық жерде тұрып, сонау көз ұшына қарағаныңда, сен өзіңді бейне жердің бетінде (теңіздің бетінде) тұрып, аспанмен астасып кеткендей, одан ары қарай ештеңе жоқтай көрінетін шеңбердің ортасында тұрғандай сезінесің. Бұл – көкжиек (горизонт). Көкжиек сызығы өзін ешқашан ұстатпайды: сен оған жақындаған сайын, ол сенен алыстай береді. Оған ешқашан бара алмайсың, бірақ, соған қарамастан, ол шын мәнінде бар. Әрбір бақылау нүктесі үшін сол арадан тұрып қарағаныңда жердің бетін көре алатын белгілі бір шекара бар және ол шекараның алыс-жақындығын есептеу қиын емес. Көкжиекке байланысты геометриялық қатынастарды түсіну үшін Жер шарының белгілі бір бөлігін бейнелейтін 1-суретке (яки 2-суретке) жүгінеміз. Жерден BA биіктіктегі B нүктеде бақылаушының көзі орналасады. Сол бақылаушы бір орында тұрып, өзінің айнала-төңірегін қаншалықты ұзақтан көре алады? Көру сәулесі Жердің бетіне соқтығысатын C және D 1-сурет) яки C (2-сурет) нүктелерге дейін екені анық: одан әріде Жер көру сәулесінен төменде болады. Бұл нүктелер (және DAC доғасында жатқан өзге нүктелер де) Жердің беті көрінетін бөлігінің шекарасын бейнелейді, яғни көкжиек сызығын жасайды. Бақылаушыға нақ сол жерде көк жүзі жермен тұтасып кеткендей болып көрінеді, өйткені бақылаушы бұл нүктелерде бір мезгілдің өзінде әрі аспанды, әрі жердегі нәрселерді көреді.

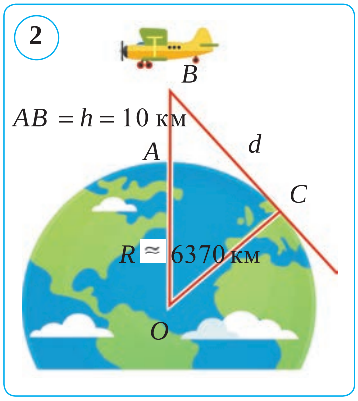
2. Көкжиектің ұзақтығы.

Көкжиек сызығы бақылаушыдан қандай қашықтықта болады? Былайша айтқанда, тегіс жерде біз ортасында өзімізді көрген шеңбер радиусының үлкендігі қандай? Бақылаушының жер бетінен көтерілген биіктігі белгілі болса, көкжиектің ұзақтығы қалай есептеледі?

Мәселе бақылаушының көзінен жердің бетіне түсірілген жанама (2-сурет) BC қиюшының ұзындығын табуға барып тіреледі. 1-есептен белгілі болғанындай, жанаманың квадраты қиюшының сыртқы кесіндісі $BA=h$ пен қиюшының барлық ұзындығына, яғни $BE=h+2R$ -дің көбейтіндісіне тең: $d^2=(h+2R)\cdot h$, бұнда R – Жердің радиусы, $BC=d$ – бақылаушыға көрінетін ең ұзақ қашықтық. Бақылаушы көзінің жерден көтерілуі Жердің диаметріне ($2R$-ге) қарағанда өте-мөте шағын, мәселен, ұшақтың ең жоғары көтерілу биіктігі Жер шары диаметрінің шамамен 0,001 үлесін ғана құрайды. Ондай жағдайда $2R+h\approx 2R$ деп алуға болады. Онда формула бұрынғыдан да оңайырақ болады: $d^2\approx 2Rh$.

Демек, көкжиектің ұзақтығын өте оңай формула бойынша табуға болады: $d\approx\sqrt{2Rh}$, бұнда: R – Жер шарының радиусы (шамамен 6400 км немесе, анығырағы, 6371 км), h – жердің бетінен бақылаушы көтерілген биіктік, $\sqrt{6400}=80$, онда формула төмендегідей көрініске ие болуы мүмкін: $d\approx 80\sqrt{2h}\approx 113\sqrt{h}$, бұндағы h міндетті түрде километрдің бөліктері бойынша өрнектелуге тиіс.

2-есеп. Жерден 10 км биіктікте ұшып бара жатқан ұшақтан қандай қашықтықты көруге болады? (Жердің радиусы шамамен 6370 км.)



Шешуі. $OA=R\approx 6370$ км, $AB=h=10$ км. $BC=d$ ны табамыз (2-сурет). Қиюшы мен оның сыртқы бөлігінің көбейтіндісі жанаманың квадратына тең екендігін білесіңдер, яғни

$$d^2=(h+2R)\cdot h \quad \text{немесе}$$
$$d^2=(10+2\cdot 6370)\cdot 10=127\,500,$$

бұдан:

$$d=\sqrt{127500}=\sqrt{51\cdot 2500}=50\sqrt{51}\approx$$
$$\approx 50\cdot 7{,}141=357{,}05\approx 360 \text{ (км)}.$$

Жауабы: ≈ 360 км.

3-есеп. Жерден 4 км биіктікке көтерілген әуе шарынан қандай қашықтықты көруге болады? Жердің радиусы шамамен 6370 км. ***Жауабы:*** $\approx 225{,}8$ км.

4-есеп. Кавказдағы Эльбрус шыңы теңіз деңгейінен ≈ 5600 м (анығы 5642 м) биіктікте орналасқан. Осы шыңнан қандай қашықтықты көруге болады? Жердің радиусы шамамен 6370 км. ***Жауабы:*** ≈ 270 км.

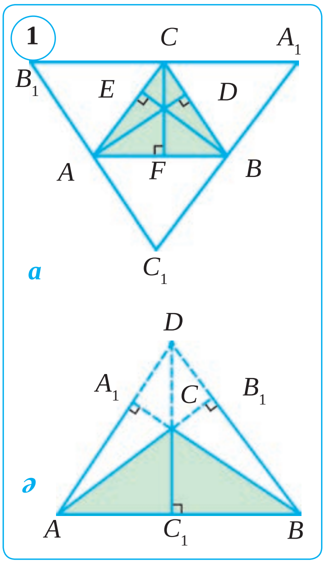
Ескерту! *Жоғарыда шешілген есептерде көкжиектің ұзақтығына әсер ететін физикалық себепшарттарды ескермедік. Көкжиектің ұзақтығы көптеген себепшарттарға байланысты түрде біраз көбеюі немесе азаюы мүмкін.*

Үшбұрыштың төрт ғажайып нүктесін қарастырайық.

1. Үшбұрыш биіктіктерінің қиылысу нүктесі.

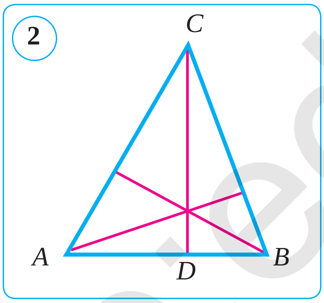
1-теорема.

Үшбұрыштың биіктіктері (яки олардың жалғасы) бір нүктеде қиылысады.



Дәлелдеу. AD, BF және CE – ABC үшбұрышының биіктіктері (1-*а* сурет). Үшбұрыштың төбелері арқылы қарама-қарсы жатқан қабырғаларына параллель түзулер жүргізіп, қабырғалары ABC үшбұрышының биіктіктеріне перпендикуляр болатын жаңа $A_1B_1C_1$ үшбұрышын саламыз. Жасалуына орай, C_1BCA жана B_1ABC төртбұрыштары – параллелограмм, бұдан $C_1A = BC$ және $BC = AB_1$ екені келіп шығады. Демек, A нүктесі – B_1C_1 қиюшының ортасы. Нақ сол сияқты B нүктесі – A_1C_1 дің ортасы, ал C болса A_1B_1 дің ортасы екені дәлелденеді.

Сонымен AD, BF және CE биіктіктері $A_1B_1C_1$ үшбұрышының орта перпендикулярында жатады. Демек, олар бір нүктеде қиылысады. Үшбұрыштың биіктіктерінің қиылыспауы да мүмкіндігін атап өтеміз. Доғал бұрышты үшбұрыштың биіктіктері олардың жалғасында бір нүктеде қиылысады, бірақ биіктіктердің өзі қиылыспайды (1 – *б* сурет).



Үшбұрыш биіктіктерінің (немесе олардың жалғасының) қиылысу нүктесі оның *ортоорталығы* деп те аталады.

Есеп. Үшбұрыш қабырғаларының қайсысы ортоорталыққа жақын орналасқан?

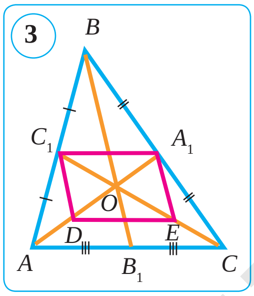
Шешуі. ABC үшбұрышында $AC > BC$ болсын (2-сурет). Үшбұрыштың CD биіктігі үшін $AD > BD$ теңсіздік болады. Демек, $\angle ACD > \angle BCD$ теңсіздігінің орындалуын пайдаланамыз. Бұл – биіктіктің нүктелері сол төбеден шығатын қабырғалардың ең кішісіне жақын орналасқанын білдіреді. Демек, үшбұрыштың ортоорталығы кіші қабырғаға таяу орналасады.

2. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі.

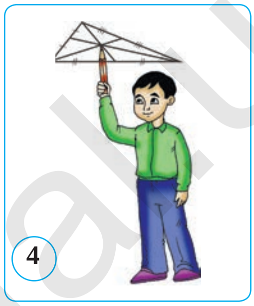
2-теорема.

Үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және бұл нүктеде төбесінен бастап есептегенде 2 : 1 қатынасында бөлінеді.

Дәлелдеу. ABC үшбұрышында AA_1, BB_1 және CC_1 медианалар жүргізілген делік (3-сурет). Олардың бірер О нүктеде қиылысатынын және $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ болатынын дәлелдейміз.



O – AA_1 және CC_1 медианаларының қиылысу нүктесі, D және E сәйкесінше AO және CO қиюшыларының ортасы болсын. C_1A_1 қиюшы ABC үшбұрышының орта сызығы және үшбұрыштың орта сызығының қасиеттеріне орай: $C_1A_1 \parallel AC$, $C_1A_1=0{,}5AC$. Бұдан тыс $DE-AOC$ үшбұрышының орта сызығы және сол қасиетке орай: $DE \parallel AC, DE=0{,}5AC$. Демек, DC_1A_1E төртбұрышының екі қабырғасы параллель және тең. Сонымен DC_1A_1E – параллелограмм, оның DA_1 және C_1E диагональдары қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді. Демек, $AD=DO=OA_1, CE=EO=OC_1$, яғни AA_1 және CC_1 медианалар O нүктеде 2 : 1 қатынаста бөлінеді.



Нақ сол сияқты үшінші BB_1 медиана – AA_1 және CC_1 медианалардың әрқайсысымен қиылысу нүктесінде $2:1$ қатынасында бөлінетіні дәлелденеді. Әрбір медиана үшін бұндай бөліну бірыңғай және үш медиана бір нүктеде қиылысады.

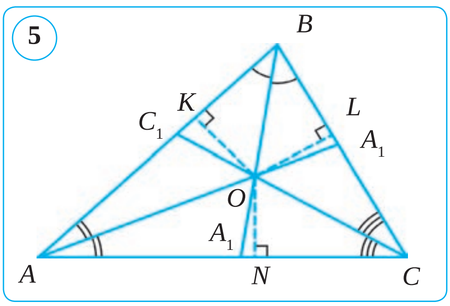
Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі *центроид* немесе *ауырлық орталығы* деп те айтылады. Бұндай атауларды төмендегі тәжірибе арқылы тексеріп көріңдер: картон қағаздан ерікті үшбұрыш қиып алыңдар және оның медианаларын жүргізіңдер, содан соң инені яки өткір ұшты қаламды медианалардың қиылысу нүктесіне қойып, тепе-теңдікте ұстауға әрекет жасаңдар (4-сурет).

3. Үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесі.

3-теорема.

Үшбұрыштың үш биссектрисасы бір нүктеде қиылысады.

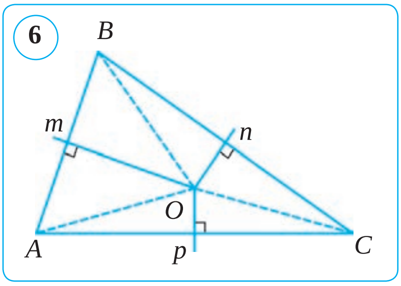
Дәлелдеу. ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 биссектрисалары қиылысқан нүктесін О-мен белгілейік. Ол нүктеден сәйкесінше AB, BC және CA түзулеріне OK, OL және OM перпендикулярларын жүргіземіз (5-сурет). Бізге белгілі болғанындай, бұрыш биссектрисасының ерікті нүктесінен бұрыш қабырғаларына дейінгі қашықтықтар тең. Соның негізінде $OK=OK$ және $OK=OL$. Сондықтан $ON=OL$, яғни O нүкте ACB бұрыштың қабырғаларынан тең алыстайды және, демек, сол бұрыштың CC_1 биссектрисасында жатады. Бұдан АВС үшбұрышының үш биссектрисасы да О нүктеде қиылысатыны келіп шығады. Теорема дәлелденді.



4. Үшбұрыш орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі.

4-теорема.

Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярлары бір нүктеде қиылысады.



Дәлелдеу. ΔABC берілген (6-сурет). Оның AB және BC қабырғаларына m және n орта перпендикулярларын жүргіземіз. Олар бірер O нүктеде қиылысады (қиюшы түзулерге перпендикуляр түзулер қиылысады). Бізге белгілі болғанындай, қиюшы орта перпендикулярының еркіті нүктесінен қиюшының төбелеріне дейінгі қашықтықтар тең. Осыған орай, $OA = OB$ (1) және $OB = OC$ (2) болады. (1) мен (2) теңдіктерден табамыз: $OA = OC$. Демек, AC қабырғаның орта перпендикуляры p де O нүктеден өтеді. Сонымен, O нүкте ΔABC-ның үш төбесінен де теңдей алыстаған болады: $OA = OB = OC$. Бұдан ΔABC-ның қабырғаларына жүргізілген үш m, n және p орта перпендикулярлары O нүктеде қиылысатыны келіп шығады.

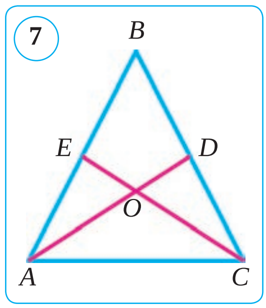
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

Теорема дәлелденді.

1. 1) Үшбұрыштың биіктіктері әрқашан қиылыса бере ме?
2) Үшбұрыштың неше ғажайып нүктесін білесіңдер? Оларды атаңдар.

2. Тең қабырғалы үшбұрыштың ғажайып нүктелері қалай орналасқан?

3. Егер үшбұрышта екі медиана тең болса, онда олар тең бүйірлі болады. Осыны дәлелдеңдер.



Шешуі. ABC үшбұрышында AD және CE медианалары тең, олар O нүктеде қиылыссын делік (7-сурет). AOE және COD үшбұрыштарын қарастырайық. O нүкте өзара тең AD және CE медианаларының әрқайсысын $2:1$ қатынаста бөледі. Сондықтан $AO=CO$, $EO=DO$ болады. Бұдан тыс вертикаль бұрыштар болғаны үшін: $\angle AOE=\angle COD$. Демек, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісіне орай: $\Delta AOE=\Delta COD$. Бұдан, $AE=CD$ екені келіп шығады. Бұл қиюшылар, медиананың анықтамасына орай, AB және CB қабырғалардың жартысына тең. Демек, $AB = CB$, яғни ABC үшбұрышы тең бүйірлі екен. Бізден осыны дәлелдеу талап етілген еді.

4. Тең бүйірлі үшбұрыштың төрт ғажайып нүктесі бір түзудің бойында орналасқанын дәлелдеңдер. Ол қайсы түзу болады?

5. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі ортоорталықпен бетпе-бет түседі. Берілген үшбұрыштың тең қабырғалы екенін дәлелдеңдер.

6. Үшбұрыштың төбесі биіктіктерінің қиылысқан нүктесі болуы мүмкін бе?

7. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесі медианалардың бірін айыр-

61–62. 5-БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ. ҚАТЕЛЕРМЕН ЖҰМЫС

1. AB – O орталықты шеңбердің диаметрі. Егер $OA = OC = AC$ болса, BCO бұрышты табыңдар.

2. 1) Шеңбер сыртында берілген нүктеден шеңбер нүктелеріне дейінгі ең үлкен және ең кіші қашықтықтар сәйкесінше 50 см-ге және 20 см-ге тең. Берілген шеңбердің радиусын табыңдар.

2) Шеңбер орталығынан В нүктеге дейінгі қашықтық 3 см-ге, ал радиус 10 см-ге тең. В нүктеден шеңберге дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықты табыңдар.

3. AB және AC түзулері O орталықты шеңберге B және C нүктелерінде жанасады. Егер $\angle OAB = 30°$ және $AB = 5$ см болса, BC-ны табыңдар.

4. Шеңбер 11 : 16 : 9 қатынасында үш доғаға бөлінген және бөліну нүктелері тұтастырылған. Пайда болған үшбұрыш бұрыштарының шамаларын табыңдар.

5-ТЕСТ Өзіңді сынап көр!

1. Шеңбер орталығынан B нүктеге дейінгі қашықтық 5 см-ге, радиус 12 см-ге тең. B нүктеден шеңберге дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықты табыңдар.
A) 7 см, 17 см; B) 7 см, 12 см; D) 5 см, 7 см; E) 7 см, 24 см.

2. Шеңбер сыртында берілген нүктеден шеңбер нүктелеріне дейінгі ең үлкен және ең кіші қашықтықтар сәйкесінше 30 см-ге және 10 см-ге тең. Берілген шеңбердің радиусын табыңдар.
A) 20 см; B) 10 см; D) 15 см; E) 5 см.

3. AB – O орталықты шеңбердің диаметрі. Егер $OA = OC = BC$ болса, CAO бұрышын табыңдар.
A) 60°; B) 30°; D) 90°; E) 120°.

4. Радиусы R-ге тең шеңбердегі нүктеден ұзындықтары R-ге тең екі хорда жүргізілді. Хордалар арасындағы бұрышты табыңдар.
A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

5. Шеңберді қиятын екі хорда арасындағы бұрыштардың бірі 80º-қа тең. Осы бұрышқа сыбайлас бұрыштардың қосындысын табыңдар.
A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

6. Шеңбер сыртындағы нүктеден шеңберге жанама жүргізілген. Егер жанамалар арасындағы бұрыш 72º болса, шеңбердің жанасу нүктелері арасындағы үлкен доғаны табыңдар.
A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

Ағылшын тілін үйренеміз!

Шеңбер – circle
Хорда – çord
Радиус – dius
Доға – arc

Диаметр – diameter
Орталық бұрыш – central angle
Шеңберге жанама – tangent to thн circle
Перпендикуляр – perpendicolar

Тарихи мағлұматтар

Абул Вафа Бузжаний
(940–998)

Абул Вафа Бузжани 940 жылы Хорасан облыстының Герат және Нишапур қалалары арасындағы Бузжан қаласында (қазіргі Түрікменстанның Кушка қаласы төңірегінде) туылған. Ол Бағдатта оқыған және шығармашылықпен айналысқан.

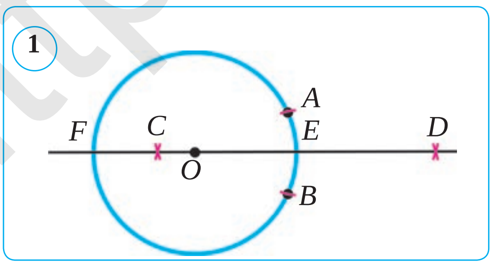
Абул Вафо Бузжанидің «Қолөнершілер геометриялық салулардан нелерді үйренулері қажет» деген кітабының бірінші және екінші тараулары сызғыш пен шеңберсызардың (циркуль) көмегімен салуларға арналған. Біз саған Абул Вафоның шеңбердің ортасын табу есебін келтіреміз.

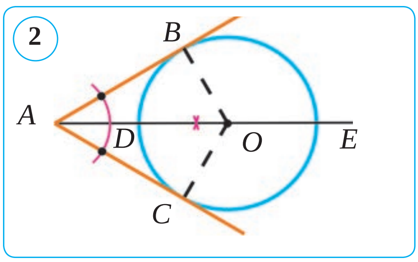
«Егер «Шеңбердің ортасы қалай табылады?» деп сұраса, оның айналасында A және B нүктелерді белгілеп, AB қашықтықты, A мен B нүктелерді орта етіп екі тең шеңбер саламыз, олар C және D нүктелерінде қиылысады (1-сурет). CD сызықты жүргіземіз және оны шеңбермен E және F нүктелерінде қиылысқанға дейін созамыз, содан соң EF сызықты O нүктеде тең екіге бөлеміз. Бұл жағдайда O нүкте шеңбердің ортасы болады».

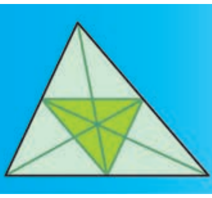
Абул Вафоның бұл тәсілі A және B нүктелерді орта етіп доға сызылғанда, олардың қиылысқан нүктелерін тұтастырушы CD түзу берілген шеңбердің ортасы арқылы өтіп, оның AB хордасына перпендикуляр болатындығына негізделген. Қазір бұл есеп төмендегідей шешіледі: айталық, бізге ортасы белгіленбеген шеңбер берілген және оның ортасын анықтау талап етілген (2-сурет).

A нүктеден бұл шеңберге AB және AC жанамаларын жүргіземіз, сондай-ақ BAC бұрыштың биссектрисасын саламыз. Биссектриса шеңберді D және E нүктелерінде қияды. DE-ні тең екіге бөлсек, бөліну нүктесі O шеңбердің ортасы болады. Неге? Немесе B нүктеде AB жанамаға перпендикуляр жүргізсек, ол биссектрисаны O нүктеде қияды. O нүкте шеңбер ортасы болады? Неге?

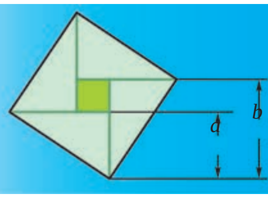
Сонымен қатар Абул Вафо осы еңбегінде жарты доғаны толық шеңберге толтыру, шеңберге оның тысқарысындағы нүктеден жанама жүргізу, шеңберге оның айналасында жатқан нүктеден жанама жүргізу сияқты салу әдістерін де ұсынған.







VI ТАРАУ. ҚАЙТАЛАУ



8-СЫНЫПТА ӨТІЛГЕН ТАҚЫРЫПТАРДЫ ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Төртбұрыштың үш сыртқы бұрышы сәйкесінше 142°, 22° және 136°-қа тең. Осы төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

2. Төртбұрыштың ең кіші қабырғасы 7 см-ге тең, өзге қабырғаларының әрқайсысы бұрынғысына сәйкес 4 см-ге үлкен. Осы төртбұрыштың периметрін табыңдар.

3. Тікбұрышты трапецияның сүйір бұрышы 45-қа тең. Кіші бүйір қабырғасы мен кіші табаны 24 см-ге тең. Осы трапецияның үлкен табанын табыңдар.

4. Тең бүйірлі үшбұрыштың қабырғалары: 1) 6 см, 5 см және 5 см; 2) 24 см, 15 см және 15 см; 3) 3,2 дм, 20 см және 20 см; 4) 22 см, 60 см және 60 см. Осы үшбұрыштың ауданы мен бүйір қабырғасына жүргізілген биіктікті табыңдар.

5. $ABCD$ төртбұрышында: $AB=CD$, $AD=BC$, A бұрышы B бұрышынан үш есе үлкен. Осы төртбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

6. $ABCD$ тең бүйірлі трапециясында $BC=20$ см, $AB=24$ см және $\angle D=60^\circ$ болса, оның AD табанын табыңдар.

7. $\angle ABC$ да AE және BD – биіктіктер $AC=20$ см, $BD=16$ см және $BC=32$ см. AE-ні табыңдар.

8. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданы 168 см²-қа тең. Егер катеттердің біреуі екіншісінің $\frac{7}{12}$ бөлігіне тең болса, үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

9. Үшбұрыштың ауданы 24 см². Үшбұрыштың 16 см-ге тең қабырғасына жүргізілген биіктікті табыңдар.

10. $ABCD$ ромбысы берілген AC және BD диагональдары сәйкесінше 30 см-ге және 12 см-ге тең. Ромбының ауданын табыңдар.

11. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыштың ауданын табыңдар:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. ABC үшбұрышында $BC = 34$ см. BC қиюшының ортасынан AC түзуіне жүргізілген EF перпендикуляр AC қабырғаны $AF = 25$ см-лік және $FC = 15$ см-лік қиюшыларға бөледі. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

13. Ромбының диагональдары 18 дм және 24 дм. Осы ромбының периметрі мен параллель қадырғалары ортасындағы қашықтықты табыңдар.

14. Тең бүйірлі трапецияның биіктігі бүйір қабырғасынан екі есе кіші. Трапецияның бұрыштарын табыңдар.

15. Тең қабырғалы үшбұрыштың ерікті нүктесінен қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысы тұрақты (бірдей) және сол үшбұрыштың биіктігіне тең. Осыны дәлелдеңдер.

16. Шеңбердің A, B және C нүктелері оны: 1) 14 : 6 : 4; 2) 13 : 12 : 5; 3) 17 : 10 : 9 қатынасындағы доғаларға бөледі. A, B және C нүктелерден жанамалар жүргізіліп, бір-бірімен қиылысқанша созылсын. Пайда болған үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

17. Тік төртбұрыштың бойы 30 %-ға арттырылса және ені 30 %-ға азайтылса, оның ауданы қалай өзгереді?

18. Егер үшбұрыштың табаны 20 % ұзартылып, биіктігі 20 % қысқартылса, оның ауданы қалай өзгереді?

19. Тік төртбұрыштың ауданы 540 см², екі қабырғасының қатынасы 3 : 5 қатынасындай. Осы тік төртбұрыштың периметрін табыңдар.

20. Параллелограмның ауданы 24 см²-қа тең. Егер биіктіктері 3 см-ге және 4 см-ге тең болса, оның периметрі қандай болатынын табыңдар.

21. Бірер $ABCD$ параллелограмын салыңдар. Векторларын жасаңдар:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

22. Егер: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 3)$ болса, AB векторының координаталары неге тең болады?

23. ABC үшбұрышында AA_1 – медиана, O – AA_1-дің ортасы. $\overrightarrow{BO}$ векторын $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ және $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторлар арқылы өрнектеңдер.

24. $ABCD$ параллелограмының диагональдары O нүктеде қиылысады, P нүкте – OB-ның ортасы. $\overrightarrow{AP}$ векторды $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ және $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ векторлар арқылы өрнектеңдер.

25. 240°-тық доғаның төбелерінен жүргізілген жанамалар қиылысқанша жалғастырылған. Олардың арасындағы бұрышты табыңдар.

26. Параллелограмның бұрыштарының бірі екіншісінен 4 есе үлкен. Осы параллелограмның үлкен бұрышын табыңдар.

27. Тік төртбұрыштың ауданы 288 см², екі қабырғасының қатынасы 1 : 2-ге тең. Осы тік төртбұрыштың периметрін табыңдар.

28. Параллелограмның қабырғаларының біріне жүргізілген биіктігі сол қабырғадан үш есе кіші. Параллелограмның ауданы 48 см². Осы қабырға мен биіктікті табыңдар.

29. Квадраттың ауданы 16 см². Егер: 1) оның барлық қабырғаларын екі есе қысқартсақ; 2) оның барлық қабырғаларын үш есе ұзартсақ, квадраттың ауданы қалай өзгереді?

30. Егер: 1) 1) $A(7; -5)$, $B(-9; -3)$; 2) $A(-8; 2)$, $B(-12; -4)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-16; -11)$ болса, AB қиюшының ортасы – C нүктенің координаталарын табыңдар.

ҚОРЫТЫНДЫ БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ.
ҚАТЕЛЕР БОЙЫНША ЖҰМЫС

1. Тік төртбұрыштың кіші қабырғасы 10 см-ге тең, ал диагональдары 60^o-тық бұрыш астында қиылысады. Осы тік төртбұрыштың диагональдарын табыңдар.

2. Үшбұрыштың қабырғалары 11 см, 7 см және 10 см-ге тең. Берілген үшбұрыштың орта сызықтарынан пайда болған үшбұрыштың периметрін табыңдар.

3. Үшбұрыштың қабырғалары 21 см, 72 см және 75 см-ге тең. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

4. Шеңберге сыртқы нүктеден жүргізілген екі жанама арасындағы бұрыш 75^o-қа тең. Осы жанаманың қабырғаларын өзіне қамтып алған доғаларды табыңдар.

5. $\vec{a}(2;-3)$ және $\vec{b}(-2;-3)$ векторлар берілген. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ вектордың координаталарын табыңдар.

6-ТЕСТ Өзіңді сынап көр!

1. Төртбұрыштың бұрыштары өзара 3 : 5 : 4 : 6 қатынасында. Төртбұрыштың кіші бұрыштарын табыңдар.
A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.

2. Дөңес төртбұрыштың диагональдарының төбесі оны неше үшбұрышқа бөледі? A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.

3. Тік төртбұрыштың ені 5 см-ге тең, ал бойы одан 7 см-ге артық. Тік төртбұрыштың периметрін табыңдар.
A) 32 см; B) 34 см; D) 24 см; E) 26 см.

4. Әрбір ішкі бұрышы 162^o болған дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?
A) 18 ; B) 20 ; D) 15 ; E) 12 .

5. Параллелограмның екі қабырғасының қатынасы 3 : 7-ге, ал оның периметрі 18 см-ге тең. Осы параллелограмның кіші қабырғасын табыңдар.
A) 2,7 см; b) 3,4 см; d) 5,4 см; E) 4,5 см.

6. Тік төртбұрыш пішініндегі алаңның ені 32 м. Егер алаңның ауданы 2 гектар болса, оның ұзындығы неше метр болады?
A) 610 м; B) 615 м; D) 625 м; E) 630 м.

7. Ромбының биіктігі 5 см-ге, диагональдарының көбейтіндісі 80 $см^2$-қа тең. Оның периметрін табыңдар.
A) 32 см; B) 16 см; D) 24 см; E) 28 см.

8. $\vec{a}(2;\ -3)$ және $\vec{b}(-2;\ -3)$ вектор берілген. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ вектордың координаталарын табыңдар.
A) (−6; −3); B) (−3; 6); D) (−2; –9); E) (2; −3).

9. $\vec{a}(3;\ 2)$ және $\vec{b}(0;\ -1)$ вектор берілген. $2\vec{a}-4\vec{b}$ векторының модулін тап. A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Қосымша. Сүйір бұрышты тригонометриялық функциялар мәндерінің кестесі

Градустар	sinα $1° \le \alpha \le 45°$	tgα $1° \le \alpha \le 45°$	ctgα $1° \le \alpha \le 45°$	cosα $1° \le \alpha \le 45°$	Градустар
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Градустар	cosα $45° \le \alpha \le 89°$	ctgα $45° \le \alpha \le 89°$	tgα $45° \le \alpha \le 89°$	sinα $45° \le \alpha \le 89°$	Градустар

ЖАУАПТАР

7-сыныпта өтілгендерді қайталау. 5. 9 дм. **7.** 3 см. **9.** Ие, тең. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Жоқ, келіп шықпайды. **18.** 58°.

I тарау. 1-тақырып. 2. 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. **4.** 60°. **5.** 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. **6.** $n=8$. **7.** 1) $n=20$; 2) $n=15$; 3) $n=6$. **9.** 1) $n=24$; 2) $n=8$; 3) $n=5$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **2-тақырып. 2.** 25,5 см, 50,5 см. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** P_{ABO}=20 см; P_{BOC}=24 см. **5.** $AB=DC=16$ см, $AD=BC=4$ см. **3-тақырып. 2.** 1) Иә, дұрыс. **3.** 32 см. **7.** 26 см, яғни 28 см. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 см, яғни 28 см. **4-тақырып. 2.** 1) 9 см; 2) 7 см. **3.** 12 см. **4.** $AB=DC=4$ см, $BC=AD=8$ см. **6.** 1) $4+7<12$ – үшбұрыштың теңсіздігі орындалмады; жоқ, болуы мүмкін емес. **7.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **5–6-тақырыптар. 2.** 10 см. **3.** $BP=12$ см. **5.** 7 см. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 см, 24 см, 30 см, 42 см. **10.** 64 см. **12.** 30 см. **13.** 32 см. **7–8-тақырыптар. 3.** 150°. **4.** 23 см. **6.** 27 см, 11 см. **7.** 20 см, 14 см. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **12.** 70 см. **9-тақырып. 3.** $AC=5$ см. **4.** $OB_1=3{,}2$ см, $OB_2=4{,}8$ см, $OB_3=6{,}4$ см. **6.** 2) 19 см. **8.** $x=4$. **9.** $OB_1=9$ см, $OB_2=13{,}5$ см, $OB_3=18$ см. **10–11-тақырыптар. 2.** 2,5 см, 3,5 см, 5,5 см. **4.** 22 см, 10 см. **6.** 2) 15 см. **9.** 24 см, 12 см. **10.** 3 см. **11.** 30 см, 10 см. **12.** 12 см.

II тарау. 15-тақырып. 2. а) cosα; б) tgα; в) sinα; е) ctgα. **4.** а) Иә, өйткені $0{,}98<1$; б) жоқ, өйткені $\sqrt{2}>1$; d) Иә, өйткені $\sqrt{5}-2<1$. **5.** $ML=24$, $MN=25$. **6.** $\sin M=\dfrac{5}{13}$, $\cos M=\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}M=\dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}M=\dfrac{12}{5}$. **16-тақырып. 2.** а) Дұрыс, өйткені $a=c\sin\alpha$; d) дұрыс емес, өйткені $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}$. **3.** Иә, өйткені тангенстің мәні кез келгін оң сан болады. **4.** 1) 16 см; 2) 50 см. **6.** 16 см. **7.** 5 см. **8.** 50 см. **17-тақырып. 2.** 1) 13; 2) 9; 3) 6,5. **3.** 1) 40 см; 2) 100 см. **4.** $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-тақырып. 2.** 1) Жоқ, өйткені $121+49\neq289$; 2) Иә, өйткені $3^2+1{,}6^2=3{,}4^2$, $11{,}56=11{,}56$. **5.** Екі шешімі бар. **6.** 1) Иә, өйткені $12^2+35^2=37^2$; 2) жоқ, өйткені $11^2+20^2\neq25^2$. **7.** 2 см. **19-тақырып. 1.** 1) 9,6 см, 9,6 см, 8 см. **2.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b=\dfrac{12}{7}\sqrt{6}$ см; 2) $h_c=11{,}2$ дм; 3) $h_b=6{,}72$ см. **4.** $h=6\sqrt{3}$ см. **5.** $h_a=\dfrac{15}{4}\sqrt{7}$ см; $h_c=\dfrac{5}{2}\sqrt{7}$ см. **7.** $h_a=\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$ см. **20–21-тақырыптар. 2.** 1) $\dfrac{5}{13}$; 2,4; $\dfrac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) tgα. **7.** 1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha=\dfrac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{15}{8}$. **12.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^3\alpha$. **14.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^3\alpha$. **22-тақырып. 2.** 1) $x\approx40°$; 2) $x\approx14°$; 3) $x\approx34°$; 4) $x\approx74°$. **3.** 1) $\sin B=0{,}6$; $\cos B=0{,}8$. **5.** $\cos A=0{,}5$; $\operatorname{tg}A=\sqrt{3}$. **7.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=0{,}8$. **8.** 1) sinα; 2) $\cos^3\alpha$. **23-тақырып. 1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-тақырып. 1.** а) 1) $\approx0{,}0523$; 2) $\approx0{,}3584$; 3) $\approx0{,}7660$; 4) $\approx0{,}6428$; е) 1) $\approx5{,}671$; 2) $\approx1{,}732$; 3) $\approx0{,}2679$; 4) $\approx11{,}430$. **2.** b) 1) $\approx42°$; 2) $\approx50°$; 3) $\approx87°$; d) 1) $\approx25°$; 2) $\approx85°$; 3) $\approx10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx0{,}9397$; 4) $\approx23{,}078$. **8.** $x\approx8°$. **25-тақырып. 1.** 14 см. **2.** 45°, 45°. **3.** $a\approx6{,}691$; $b\approx7{,}431$; $\beta\approx48°$. **5.** $\cos^2\alpha$. **7.** $a=4$ см; $b=4\sqrt{3}$ см, $\beta=60°$. **26-тақырып. 1.** $b=9$ см, $\alpha=\beta=45°$. **2.** $c=12$ см, $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **5.** 0. **7.** $c=26$ см. **27-тақырып. 3.** $a=7$ см, $\alpha=\beta=45°$. **4.** $a=6\sqrt{3}$ см, $b=6$ см, $\beta=30°$. **5.** $a=5$ см (5-сурет); $AC=2\sqrt{13}$ см, $BC=3\sqrt{13}$ см (6-сурет). **6.** 168 см.

III тарау. 31-тақырып. 3. 1) III тоқсан; 2) II тоқсан; 3) IV тоқсан; 4) I тоқсан. **4.** 1) (–10; –1); 2) (0; –5,5); 3) (–2; 1). **5.** $B(-1; 5)$. **8.** 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **32–33-тақырыптар. 2.** 1)

10; 2) 17; 3) 13. 3. 1) $x_1 = -2$; $x_2 = 6$. 4. $P=16$. 5. 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. 6. 1) (2; 5), $R=7$; 2) (–1; 5), $R=2$. 7. 1) $C(3; -1)$, $R=4$; 2) $C(0; -5)$, $R=1$. 8. 1) Тең бүйірлі. 9. 1) $(x-9)^2+(y-4)^2=49$; 2) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. 10. 1) $C(7; -2)$, $R=5$; 2) $C(4; 0)$, $R=1$. 11. 1) (5; –12) және (5; 12); 2) (–5; –12) және (5; –12). **34-тақырып.** 3. 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3) $3x-2y+2=0$. 4. $c=-3$. 5. $a=b=\frac{1}{3}$. 6. 1) (0; –1,5) және (–3; 0); 2) (0; 3) және (4; 0); 3) (0; –5) және (2,5; 0). 9. $x+1=0$, $x-3y-8=0$, $x-y=0$. **35-тақырып.** 2. 1) $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. **36–37-тақырыптар.** 5. Иә, орындалады. 6. $|\overrightarrow{AO}| = 16$ см. 7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. 9. $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{b}$. 10. $\overrightarrow{BF} = -2\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{EC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$. **38–39-тақырыптар.** 4. $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. 5. 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. 7. 1) (4; 5); 2) (–1; 4); 3) (0; 0). 8. 1) 25; 2) 5; 3) 3. 9. 1) (1; –2); 2) ($2m$; $2n$). 11. $m=7$. 12. $B(-2; -11)$. **40-тақырып.** 2. 1) (–3; 4); 2) (–5; 12). 3. 1) (–4; 10); 2) (0; 2); 4) (4; –10). 4. 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (–4; –3). 5. 1) (6; 3); 2) (–6; 3); 3) (–2; 15). 6. 1) $\vec{c}(-4; -4)$; 2) $\vec{c}(8; 6)$. 7. 1) $\vec{c}(-12; 6)$; 2) $\vec{c}(-11; 8)$. 8. 1) $\vec{c}(-2; -1)$; 2) $\vec{c}(2; -13)$. **41-тақырып.** 1. $CC_1=2$. 2. $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 3. (5; 12). 4. $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. 5. $B(-5; 11)$. 8. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

IV тарау. 45-тақырып. 2. 2) 0,0225 дм^2; 5) 6,25 м^2. 6. 1) 4 есе артады; 2) 9 есе азаяды; 3) 28 см^2-ге артады. 11. 2) 3,6 дм; 3) 68 мм; 5) 80 дм. 13. 359,12 мың км^2. **46–47-тақырыптар.** 2. 1) $P=65{,}8$ см, $S=87$ см^2; 3) $P=7{,}4$ дм, $S=3$ дм^2. 4. $S=5000$ м^2. 5. 1) $P=126$ см, $S=920$ см^2. 8. 12 см. 9. 1) $S=500$ см^2; 2) $a=12$ см; 3) $h_a=5$ см. 11. 1) 1,6 есе артады; 2) 6,25 есе азаяды. 13. 2) 280 см^2; 4) 4,8 дм^2. 14. $P=42$ см. 15. $S=280$ см^2. **48-тақырып.** 2. 1) 14 см^2; 2) 150 см^2. 3. 4 см. 4. 5 : 1. 8. 1) 756 см^2; 2) 84 см^2; 3) 192 см^2. 10. 60 см. 11. 7,5 дм^2. **49–50-тақырыптар.** 2. 1) 32 см. 3. 1) 512 см^2; 2) 1,62 дм^2. 4. 12 см. 5. 5 см. 7. 1) 1,35 дм^2; 2) 180 см^2; 3) 8 см^2. 8. 1) 87 см^2; 2) 14 см. 10. 1) $0{,}5a^2$ кв. бірл. 11. 360 см^2. 12. 1) 2,45 дм^2; 2) 238 см^2; 3) 31,5 см^2. 14. 1) 1,44 м^2. 15. 1) 140 см^2. **51-тақырып.** 1. 2125 кв. бірл. 2. $(a+b)\cdot c$. 3. 144 см^2. 5. 16 кв. бірл. 6. 1) 20,8 км; 2) 8 км.

V тарау. 55-тақырып. 3. AB және BD қиюшы. 4. 25 см. 5. 1) $R=5$ см; 2) $R<5$ см; 3) $R>5$ см. 8. CD. **56-тақырып.** 2. 1) Шеңберлер ішкі жағынан жанасады; 2) ортақ нүктегі жоқ, бірі екіншісінің ішінде жатады. 3. 1) 10 см; 2) 2 см. 6. 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. 7. 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. 8. 70°. 9. 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. 10. 1) 15,6 см; 2) 21 см; 3) 1,6 дм. **57-тақырып.** 3. $AC=10$ см. 4. 1) $\angle ACB=44°$; 3) $\angle AEP=100°$. 5. 36°, 60°, 84°. 6. 1) 100° яғни 80°; 2) 126° яғни 54°. 7. $\angle BAC=20°$. 8. 100°. **58-тақырып.** 3. 220°. 4. a) $x=45°$; b) $x=30°$; d) $x=90°$. 5. 30°. 6. 1) $\angle ABC=20°$; 2) $\angle ABC=60°$; 3) $\angle ABC=36°$; 4) $\angle ABC=54°$; 5) $\angle ABC=36°$. 7. 1) 100°, 40°, 40°. 8. 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. 9. 1) 128°; 3) 76°. **59-тақырып.** 3. 4 см. 6. 8 см. 9. 10 см. 11. 90°.

VI тарау. 1. 38°, 158°, 44°, 120°. 2. 52 см. 3. 48 см. 4. 1) 12 см^2; 4,8 см; 2) 108 см^2; 14,4 см. 6. 44 см. 7. 10 см. 9. 3 см. 10. 180 см^2. 13. 60 дм, 14,4 дм. 14. 30°, 150°, 150°, 30°. 17. 9%-ға азаяды. 19. 96 см. 20. 28 см. 22. 1) (1; –1); 2) (–2; 2). 23. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ 25. 60°. 26. 144°. 27. 72 см. 28. 12 см, 4 см. 29. 1) 4 см^2-қа азаяды; 2) 128 см^2-ге ұлғаяды.

МАЗМҰНЫ

Рахымқариев А.А.

R 24 **Геометрия 8:** Жалпы білім беретін мектептердің 8- сыныбына арналған оқулық/ / А.А. **Рахымқариев**, М.А. Тухтахужаева. – Қайта өңделген және толықтырылған 4-басылымы. – Т.: O‘zbekiston, 2019. –160 с.

ISBN 978-9943-25-814-3 **УЎК: 514(075)**
КВК 22.151я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

(Qozoq tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4- nashr

Тошкент — «MITTI YULDUZ» — 2019

Аударған	А. Ташметов
Редакторы	А. Рахманов
Техникалық редакторы	Т. Харитонова
Корректоры	Д. Аканова
Беттеуші	Х. Юлдашева

Баспа лицензиясы AI №158, 14.08.2009
Басуға 2019 жылы 15 августа рұқсат етілді. Қалыбы 70x100 1/16.
Кеглі 11. Қарібі «Times New Roman». Офсеттік әдіспен басылды. Шартты баспа табағы 13,0. Есепті баспа табағы 10,0. Таралымы 5 691.
Тапсырыс № 19-132.

Оқулықтың қайта өңделген түпнұсқа-макеті
«MITTI YULDUZ» ЖШС-де дайындалды. Ташкент, Науаи көшесі, 30-үй

Өзбекстан Республикасы Президенті Әкімшілігі құзырындағы Ақпарат және бұқаралық коммуникациялар агенттігінің “O‘zbekiston” баспа-полиграфия шығармашылық үйінде басылды. 100011, Ташкент, Науаи көшесі, 30-үй.

Телефон: (371) 244-87-55, 544-87-20
Факс: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz www.iptd-uzbekistan.uz

Пайдалануға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

Р/н	Оқушының аты, фамилиясы	Оқу жылы	Оқулық-тың пайдала-нуға берілген-дегі жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы	Оқулық-ты тапсырған-дағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Пайдалануға берілген оқулық оқу жылы аяқталғанда қайтарып тапсырылады. Жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалау өлшемдері негізінде толтырады:

Жаңа	Оқулықтың алғаш рет пайдалануға берілгендегі жағдайы
Жақсы	Мұқаба бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыралмаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, беттері шимайланбаған.
Орташа	Мұқаба жаншылған, аздап сызылған, шеттері мүжілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыраған жерлері бар. Пайдаланушы жағынан қанағаттанарлық жөнделген. Жұлынған, кейбір беттері шимайланған.
Нашар	Мұқаба былғанған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе мүлдем жоқ, нашар жөнделген. Беттері жыртылған, парақтары жетіспейді, әбден шимайланған. Оқулық қалпына келтіруге жарамайды.

Рахымқариев А.А.

R 29 **Геометрия 8:** Жалпы білім беретін мектептердің 8- сыныбына арналған оқулық/ / А.А. **Рахымқариев**, М.А. Тухтахужаева. – Қайта өңделген және толықтырылған 4-басылымы. – Т.: O'zbekiston, 2019. –160 с.

ISBN 978-9943-25-814-3 **УЎК: 514(075)**
КВК 22.151я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

(Qozoq tilida)

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to'ldirilgan 4- nashr

Тошкент — «MITTI YULDUZ» — 2019

Аударған	А. Ташметов
Редакторы	А. Рахманов
Техникалық редакторы	Т. Харитонова
Корректоры	Д. Ақанова
Беттеуші	Х. Юлдашева

Баспа лицензиясы AI №158, 14.08.2009
Басуға 2019 жылы 10 августа рұқсат етілді. Қалыбы 70х100 1/16.
Кеглі 11. Қарібі "Times New Roman". Офсеттік әдіспен басылды. Шартты баспа табағы 13,0. Есепті баспа табағы 10,0. Таралымы 599.
Тапсырыс № 19-133.

Оқулықтың қайта өңделген түпнұсқа-макеті
«MITTI YULDUZ» ЖШС-де дайындалды. Ташкент, Науаи көшесі, 30-үй

Өзбекстан Республикасы Президенті Әкімшілігі құзырындағы Ақпарат және бұқаралық коммуникациялар агенттігінің "O'zbekiston" баспа-полиграфия шығармашылық үйінде басылды. 100011, Ташкент, Науаи көшесі, 30-үй.

Телефон: (371) 244-87-55, 544-87-20
Факс: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz www.iptd-uzbekistan.uz