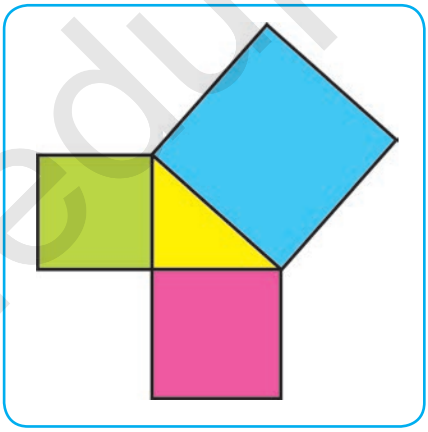
GEOMETRIYA 8

Ulıwma bilim beriw mekteplerinıń 8-klası ushın sabaqlıq

Qayta islengen hám tolıqtırılǵan 4-basılımı

Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tárepinen usınıs etilgen



TASHKENT
«YANGIYO‘L POLIGRAF SERVIS»
2019

UO‘K 514(075)
KBK 22.151 ya 721
R 29

Pikir bildiriwshiler:

N.A. Umarova — Tashkent wálayatı XBXQT hám QAAO ağa muğallimi;
G.A. Fozilova — Yunusabad rayonındağı 274-ulıwma bilim beriw mektebiniń matematika páni muğallimi.

Sabaqlıq Respublika bilimlendiriw orayı tárepinen 2018-jıl 25-noyabrde berilgen «Anıq pánler blok modeli boyınsha ulıwma orta bilim beriwdiń oqıw bağdarlaması (VIII klass)» tiykarında jazılğan. Sabaqlıqta belgilengen ulıwma orta bilim beriwde matematika pánin oqıtıwdıń maqseti hám wazıypaları, oqıwshılarğa oqıw háreketi nátiyjesinde qoyılatuğın talaplar kórsetilgen. Sabaqlıq oqıwshılarğa qáliplestirilgen tayanısh kompetenciyalar elementlerin óz ishine alğan.

Qayta islew procesinde ekspertler hám pikir bildiriwshilerdiń usınısları itibarğa alındı.

Hárbir bap aqırında jazba baqlaw jumıslarınan úlgiler hám testler kirgizilgen bolıp, oqıwshılardıń baqlaw jumısına puqta tayarlıq kóriwlerinde járdem beredi.

Tariyxıy mağlıwmatlar tiykarında alımlarımızdıń pánge qosqan úlken úlesleri hám tariyxıy-ilimiy jumısları menen tanısasız.

«Inglis tilin úyrenemiz» súreninde temalarda ushırasatuğın áhmiyetli geometriyalıq túsiniklerdiń inglis tilindegi awdarması berilgen.

Tákirarlawğa berilgen máselelerden jıl dawamında paydalanıwıńızğa boladı.

Temalarda kórsetilgen bilimlerdi úyreniwińizde Sizlerge tabıslar tileymiz.

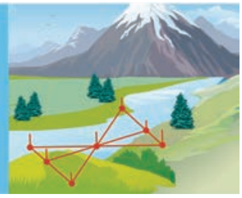
SABAQLÍQTAĞÍ SHÁRTLI BELGILER:

— qağıyda, tuwındı, anıqlamalar;
? — jedellestiriwshi soraw hám tapsırmalar;
— klasta orınlanatuğın shınığıwlar;
— rawajlandırıwshı shınığıwlar;
— másele sheshiw úlgisi;
— úyge tapsırma ushın shınığıwlar.

«Respublika maqsetli kitap qorı esabınan ijara ushın basıp shığarıldı».

ISBN 978-9943-25-794-8

7-KLASTA ÓTILGENLERDI TÁKIRARLAW



1. Úshmúyeshliktiń perimetri bissektrisası hám biyikligine tiyisli máseleler

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Úshmúyeshliktiń perimetri medianası biyikligi bissektrisası dep nege aytıladı?

2. Perimetri 18 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń bissektrisası onıń perimetri 12 cm hám 15 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliklerge ajıratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń bissektrisasın tabıń (1-súwret).

3. Úshmúyeshliktiń ultanına túsirilgen medianası onı perimetri 18 cm hám 24 cm ge teń eki úshmúyeshlikke ajıratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń kishi qaptal tárepi 6 cm ge teń. Onıń úlken qaptal tárepın tabıń (2-súwret).

4. ABC úshmúyeshlikte $AB=BC$ hám BD mediana 6 cm ge teń. ABD úshmúyeshliktiń perimetri 24 cm ge teń. Berilgen úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń (3-súwret).

Berilgen: $\triangle ABC$ da: $AB=BC$, $BD=6$ cm – mediana, $P_{ABD}=24$ cm.

Tabıw kerek: $P_{ABC}=?$

Sheshiliwi. 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, bunnan:

$$24=AB+AD+6,\quad AB+AD=24-6,\quad AB+AD=18 \text{ (cm)}.$$

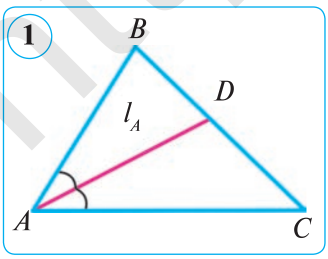
2) $AB=BC$ hám $AC=2AD$, onda

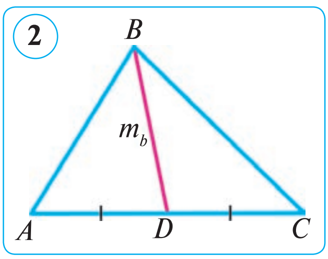
$$P_{ABC}=AB+BC+AC=2(AB+AD)=2\cdot 18=36 \text{ (cm)}.$$

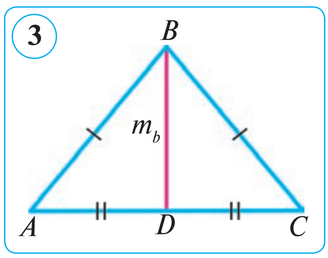
Juwabı: $P_{ABC}=36$ cm.

5. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 0,5 dm hám 8,7 dm ge teń. Úshinshi tárepiniń uzınlıǵı natural san ekenın bilgen halda usı tárepti tabıń.

6. Perimetri 30 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń bissektrisası onıń perimetrleri 16 hám 24 cm ge teń bolǵan úshmúyeshlıklerge ajıratadı. Úshmúyeshliktiń bissektrisasın tabıń.







7. Perimetri 36 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń biyikligi onıń perimetrleri 18 cm hám 24 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliklerge ajıratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń biyikligin tabıń.

8. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń perimetri 22,5 cm, qaptal tárepi bolsa 0,6 dm. Usı úshmúyeshliktiń ultanın tabıń.

2. Úshmúyeshlikler teńliginiń belgileri, úshmúyeshliktiń múyeshleriniń qosındısı hám sırtqı múyeshiniń tuwındısına tiyisli máseleler

9. ABC hám DEF úshmúyeshliklerde: $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$. Bul úshmúyeshlikler teń be?

10. Úshmúyeshlikdiń 117° lı sırtqı múyeshine qońsı bolmaǵan ishki múyeshleriniń qatnası 5:4 sıyaqlı. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshlerin tabıń.

11. Teń qaptallı ABC úshmúyeshliktiń AD hám BE bissektrisaları O noqatta kesilisedi. Bissektrisaları arasındaǵı AOE múyeshti tabıń.

12. Teń qaptallı úshmiyeshtiń ultanındaǵı múyeshi doǵal bola aladıma?

Sheshiliwi. Bizge belgili, teń qaptallı úshmúyeshliktiń ultanındaǵı múyeshleri teń. Biraq, eki doǵal múyeshtiń qosındısı 180° dan úlken boladı. Bul úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındaǵı teoremaǵa qarsı. *Juwabı:* yaq, bola almaydı.

13. Ushmúyeshliktiń 108° lı sırtqı múyeshine qońsı bolmaǵan ishki múyeshlerdiń qatnası 2 : 7 sıyaqlı. Úshmúyeshlikti múyeshlerin tabıń.

14. Bir úshmúyeshliktiń eki tárepi hám múyeshi sáykes túrde ekinshi úshmúyeshliktiń eki tárepi hám múyeshine teń. Bunnan usı úshmúyeshliktiń teńlıgi kelip shıǵa ma?

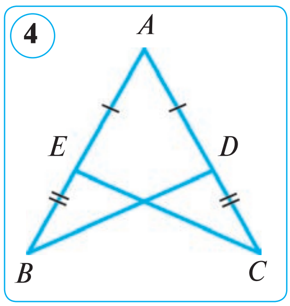
15. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliklerde AB hám A_1B_1, BC hám B_1C_1 tárepler teń hám de sáykes túrde AB hám A_1B_1 táreplerge ótkerilgen CD hám C_1D_1 medianalar da teń. Úshmúyeshliklerdiń teńligin dálilleń.

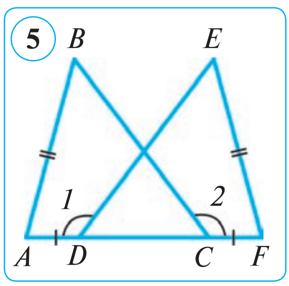
16. 4-súwrette $AB = AC$ hám $AE = AD$. $BD = CE$ ekenligin dálilleń.

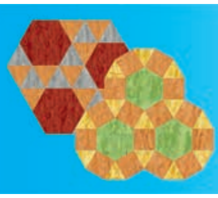
17. 5-súwrette $AD = CF$, $AB = FE$ hám $CB = DE$. $\angle 1 = \angle 2$ ekenin dálilleń.

18. ABC úshmúyeshliktiń B múyeshi 42° qa, A tóbesindegi sırtqı múyeshi bolsa 100° qa teń. ACB múyeshti tabıń.

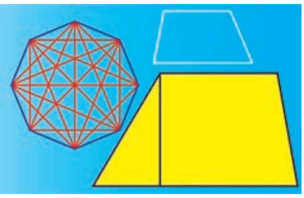
19. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliktiń C múyeshi tuwrı, A tóbesindegi sırtqı múyeshi bolsa 136° qa teń. B múyeshın tabıń.







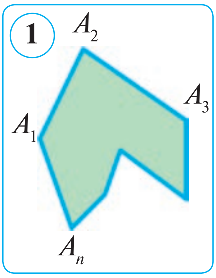
I BAP
TÓRTMÚYESHLIKLER



1- §. TIYKARǴÍ TÓRTMÚYESHLIKLER HÁM OLARDÍŃ QÁSIYETLERI

1. KÓPMÚYESHLIKTIŃ ISHKI HÁM SÍRTQÍ MÚYESHLERINIŃ QÁSIYETI

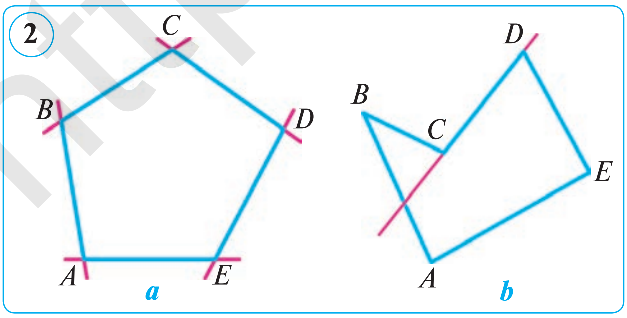
1. Kópmúyeshlikler. A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 kesindilerden dúzilgen figuranı kórip shıǵamız. Kesindiler sonday jaylasqan, hár qaysı eki *qońsı kesindi* (olar ulıwma tóbege iye) bir tuwrı sızıqta jatpaydı, qońsı emes kesindiler bolsa ulıwma noqatqa (tochkaǵa) iye emes (1-súwret). Bunday figura ***kópmúyeshlik*** delinedi. A_1, A_2, ..., A_n noqatlar (tóbeler) *kópmúyeshliktiń* ***ushları***, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 kesindiler bolsa kópmúyeshliktiń ***tárepleri*** dep ataladı.

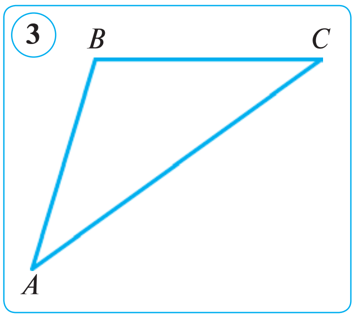

1

Kópmúyeshlik tárepleri sanı onıń tóbeleri sanına, yaǵnıy múyeshleri sanına teń. Kópmúyeshlikler tóbeleri (tárepleri) sanına qaray *úshmúyeshlikler, tórtmúyeshlikler, besmúyeshlikler* hám basqalarǵa bólinedi.

Eger tuyıq sınıq sızıq óz-ózi menen kesilispese, bunday sınıq sızıq ***ápiwayı tuyıq sınıq sızıq*** dep ataladı. Ol tegisliktiń usı sınıq sızıqqa tiyisli emes *eki bólimge — ishki* hám *sırtqı bólimge* ajıratadı, hám de ulıwma shegara wazıypasın atqaradı. 1-súwrette ishki bólim boyap kórsetilgen.

1- anıqlama. *Eger kópmúyeshlik onıń qálegen tárepin óz ishine alǵan tuwrı sızıq penen bir yarım tegislikte jatsa, ol* ***dóńes kópmúyeshlik*** *deyiledi. Bunda tuwrı sızıqtıń ózi de usı yarım tegislikke tiyisli boladı.*


2


3

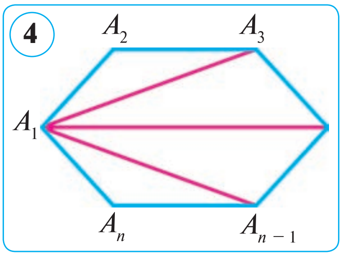
2-a hám 3-súwrette dóńes kópmúyeshlik, 2-b súwrette bolsa dóńes emes kópmúyeshlik kórsetilgen. Qálegen úshmúeshlik — dóńes kópmúyeshlik (3-súwret).

2. Kópmúyeshliktiń ishki hám sırtqı múyeshleriniń qásiyeti.

2-anıqlama. ***Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi ishki múyeshi*** *dep, onıń usı tóbesinde kesiliwshi tárepler payda etken múyeshke aytıladı.*

1-teorema.

Dóńes n múyesh ishki múyeshleriniń qosındısı $180°(n-2)$ ge teń, bunda n — tárepler sanı.

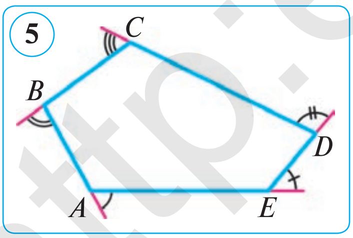


Dálil. $A_1A_2A_3...A_n$ — berilgen dóńes n múyesh hám $n>3$ bolsın (4-súwret). Bir tóbesinen, máselen A_1 den, kópmúyeshliktiń barlıq diagonalların ótkizemiz. Bul diagonallar onı $(n—2)$ úshmúyeshlikke ajıratadı. Haqıyqattan da, *eki shetki úshmúyeshlikler* ($\triangle A_1A_2A_3$ hám $\triangle A_1A_{n-1}A_n$) kópmúyeshliktiń eki tárepi hám bir diagonalı, qalǵan úshmúyeshlikler bolsa kópmúyeshliktiń bir tárepi hám eki diagonalınan dúzilgen. Sonıń ushın úshmúyeshlikler sanı $(n—2)$, yaki kópmúyeshliktiń tárepleri sanınan ekige kem boladı. Kópmúyeshliktiń múyeshleri qosındısı onı payda etiwshi úshmúyeshlik múyeshleri qosındısına, yaǵnıy $S_n=180°(n-2)$ ge teń boladı. Teorema dálillendi.

3-anıqlama. ***Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi sırtqı múyeshi dep,*** *onıń usı tóbesindegi ishki múyeshine qońsı múyeshke aytıladı.*

2-teorema.

Dóńes n múyeshtiń hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń.



Dálil. Kópmúyeshliktiń hárbir tóbesinen birewden sırtqı múyesh jasaymız. Kópmúyeshliktiń ishki múyeshi hám onıń menen qońsı bolǵan sırtqı múyeshiniń qosındısı 180° qa teń (5-súwret). Sol sebepli barlıq ishki hám hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı $180°\ n$ ge teń Biraq, kópmúyeshliktiń barlıq ishki múyeshleri qosındısı $180°(n-2)$ qa teń. Bunday halda hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshlerdiń qosındısı

$$180°n-180°(n-2)=180°n-180°n+360°=360°$$

qa teń boladı. Teorema dálillendi.

1-másele. Tárepleri teń bolǵan (turaqlı) n múyeshtiń hárbir ishki múyeshi (α_n) nege teń?

Sheshiliwi. Bizge málim, qálegen dóńes n múyeshtiń múyeshleriniń qosındısı $180°(n-2)$ qa teń. Turaqlı kópmúyeshliktiń múyeshleri teń bolǵanı ushın olardıń hárbiri tómendegige teń: $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

2-másele. Tárepleri teń bolǵan (turaqlı) n múyeshtiń hárbir sırtqı múyeshi (β_n) nege teń?

Sheshiliwi. Bizge málim, qálegen dóńes n múyeshtiń hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń.

Solay etip, tárepleri teń bolǵan n múyeshtiń hárbir sırtqı múyeshi tómendegige teń: $\beta_n = \frac{360°}{n}$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Kópmúyeshliktiń berilgen tóbesindegi ishki múyeshi dep qanday múyeshge aytıladı? Sırtqı múyeshi-she?
2) Dóńes n múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı nege teń?

2. Kópmúyeshlik múyeshleriniń qosındısı: 1) 1080° qa; 2) 1620° qa; 3) 3960° qa teń. Kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

3. 1) Tórtmúyeshlik; 2) onekimúyeshlik; 3) otızmúyeshlik; 4) eliwmúyeshlik ishki múyeshleri qosındısın tabıń.

Úlgi. 1) $S_{13} = 180°\ (13-2) = 180°\ 11 = 1980°$.

4. Eger tórtmúyeshliktiń úshewden alınǵan múyeshleriniń qosındısı sáykes túrde 240°, 260° hám 280° bolsa, onıń eń kishi múyeshin tabıń.

5. Hárbir ishki múyeshi: 1) 150° qa; 2) 170° qa; 3) 171° qa teń bolǵan dóńes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

6. Kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı onıń hárbir tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısınan úsh ese úlken. Usı kópmúyeshliktiń tárepleri sanı qansha? Bos jerlerine sáykes sanlardı qoyıń.

Sheshiliwi. Máseleniń shártine muwapıq, $180°(n-2) = ...360°$. Bunnan

$$180°(n-2) = ...2\ 180°,\ n-2=6,\ n=...$$

Juwabı: $n = ...$.

7. Sırtqı múyeshiniń hárbiri: 1) 18° ga; 2) 24° ga; 3) 60° teń bolǵan dóńes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

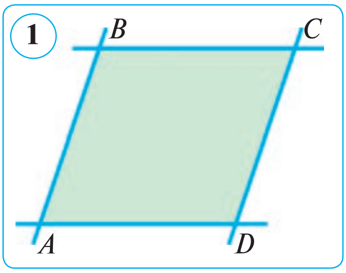
8. Eger tórtmúyeshliktiń úsh múyeshi doǵal bolsa, ol jaǵdayda tórtinshi súyir boladı. Sonı tabıń.

9. Sırtqı múyeshiniń hárbiri: 1) 15° ga; 2) 45° qa; 3) 72° qa teń bolǵan dóńes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

10. Dóńes tórtmúyeshliktiń múyeshleri 1, 2, 3 hám 4 sanlarına proporcional. Usı múyeshlerdi tabıń.

2. PARALLELOGRAMM HÁM ONÍŃ QÁSIYETLERI

1. Parallelogramm. Tegislikte eki parallel tuwrı sızıqtıń basqa eki parallel tuwrı sızıq penen kesisiwinen payda bolǵan tórtmúyeshlikti kórip shıǵamız (1-súwret). Bul tórtmúyeshlik *arnawlı* atqa iye bolıp, onı ***parallelogramm*** dep ataymız.



Anıqlama. *Qarama-qarsı tárepleri óz ara parallel bolǵan tórtmúyeshlik* ***parallelogramm*** *dep ataladı.*

Eger $ABCD$ parallelogramm bolsa, $AB \parallel DC$ hám $AD \parallel BC$ boladı (1-súwret).

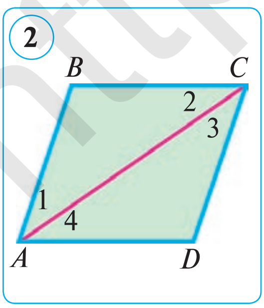
1-másele. 2-súwrette $\triangle ABC = \triangle CDA$. $ABCD$ tórtmúyeshlik parallelogramm ekenin dálilleń.

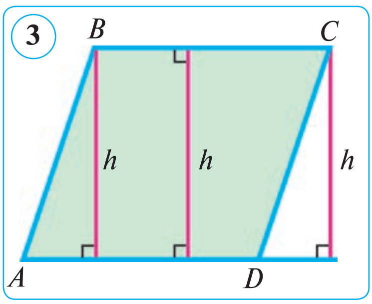
Sheshiliwi. ABC hám CDA úshmúyeshlikleriniń teńliginen tómendegi kelip shıǵadı: $\angle 1 = \angle 3$ hám $\angle 2 = \angle 4$. 1 hám 3 múyeshler – AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar hám AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Tap sonday, 2 hám 4 múyeshler BC hám AD parallel tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Parallel tuwrı sızıqlardıń belgisine qaray tómendegige iye bolamız: $AB \parallel DC$ hám $BC \parallel AD$. Demek, $ABCD$ tórtmúyeshlikte qarama-qarsı tárepler jup-jubı menen parallel, yaǵnıy anıqlamaǵa muwapıq, $ABCD$ – parallelogramm. Parallelogrammnıń bir tárepinde jatqan noqattan qarama-qarsı tárepti óz ishine alǵan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar parallelogrammnıń ***biyikligi*** delinedi. Parallelogrammnıń bir tárepine sheksiz kóp biyiklikler ótkeriw múmkinligi anıq (3-súwret), olar parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqlar bolǵanı ushın óz ara teń. Parallelogrammnıń bir tóbesinen onıń hár túrli tárepine bir-birinen ayırılatuǵın eki biyiklik ótkeriw múmkin. Máselen, 4-súwrette, BP hám BF – biyiklikler bolıp tabıladı.

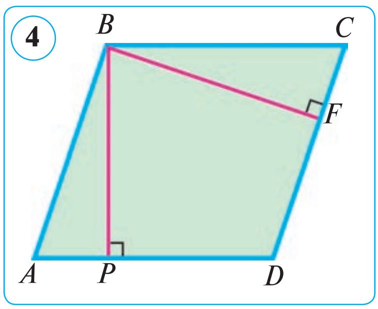
2. Parallelogrammnıń qásiyetleri.

1-teorema.

(1-qásiyet.) Parallelogrammnıń bir tárepine jaylasǵan múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń.







Dálil. Parallelogrammnıń bir tárepine jaylasqan múyeshler ishki bir tárepli múyeshler boladı. Sonıń ushın olardıń qosındısı 180° qa teń. Teorema dálillendi.

2-teorema.

(2-qásiyet.) Parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri hám qarama-qarsı múyeshleri óz ara teń.

Dálil. $ABCD$ – berilgen parallelogramm bolsın, yaǵnıy $AB \parallel CD$ hám $BC \parallel AD$. Parallelogrammnıń AC diagonalın ótkizemiz (2-súwretke q.). hám de ABC hámCDA úshmúyeshliklerin kórip shıǵamız. Olarda AC tárepi ulıwma, 1 hám 3 múyeshler – AB hámCD parallel tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń, 2 hám 4 múyeshler bolsa AD hám BC parallel tuwrı sızıqlar hám de ACkesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın teń. Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, ABC hám CDA úshmúyeshlikler teń. Atap aytqanda, bunnan, $AB=CD$, $AD=BC$ hám $\angle B=\angle D$ hám de $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$, yaǵnıy $\angle A=\angle C$ ekeni kelip shıǵadı.

2-másele. Parallelogrammnıń múyeshlerinen ekewiniń qosındısı 172° qa teń. Onıń múyeshlerin tabıń.

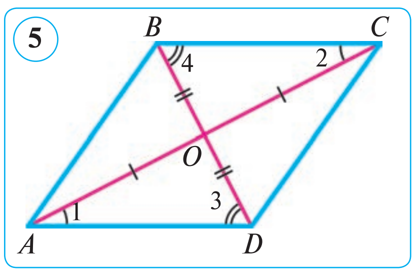
Sheshiliwi. $ABCD$ parallelogramm berilgen bolsın. Parallelogrammnıń qońsı múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń bolǵanı ushın berilgen múyeshler qońsı múyeshler bola almaydı, demek, olar qarama-qarsı múyeshler. $\angle A+\angle C=172^\circ$ bolsın. Parallelogrammnıń qarama-qarsı múyeshleri teń bolǵanı ushın bul jaǵdayda múyeshlerdiń hárbiri $\angle A=\angle C=172^\circ:2=86^\circ$ qa teń. Parallelogrammnıń barlıq múyeshleri qosındısı 360° qa teń, sonıń ushın qalǵan eki múyeshi $\angle B=\angle D= =(360^\circ-172^\circ):2=94^\circ$ dan boladı. *Juwabı:* 86°, 94°, 86°, 94°.

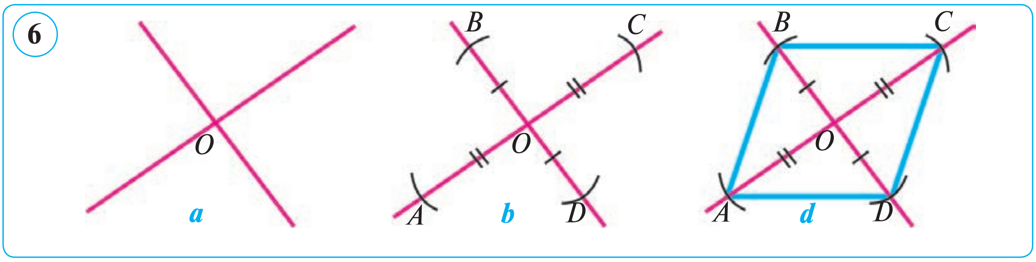
3-teorema.

(3-qásiyet.) Parallelogrammnıń diagonalları kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.

Dálil. $ABCD$ berilgen parallelogramm hám O – AC hám BD diagonallarınıń kesilisiw noqatı bolsın (5-súwret). $AO=OC$ hám $DO=OB$ ekenin dálilleymiz.

AOD hám COB úshmúyeshliklerin kórip shıǵamız. Bul úshmúyeshliklerde $AD=BC$ (parallelogrammnıń 2-qásiyetine muwapıq onıń qarama-qarsı tárepleri teń), $\angle 1=\angle 2$ hám $\angle 3=\angle 4$ (AD hám BC parallel tuwrı sızıqlardıń, sáykes túrde, AC hám BD kesiwshiler menen kesiliwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın). Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, $\triangle AOD=\triangle COB$. Bunnan $AO=CO$ hám $DO=OB$, yaǵnıy AC





hám BD diagonallarınıń hárbiri kesilisiw noqatı O da teń ekige bóliniwi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

3- másele. 3- qásiyetten paydalanıp parallelogramm isleń.

1- qádem. Eki kesiliwshi tuwrı sızıq ótkizemiz hám olardıń kesilisiw noqatın O háribi menen belgileymiz (6-*a* súwret).

2-qádem. Cirkul járdeminde tuwrı sızıqlardıń birinde teń OA hám OC kesispelerin, ekinshisinde bolsa teń OB hám OD kesispelerin qoyamız (6-*b* súwret).

3-qádem. A, B, C hám D noqatların izbe-iz tutastırıp, izlenip atırǵan $ABCD$ parallelogrammdı payda etemiz (6-*d* súwret).

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Qanday tórtmúyeshlikke parallelogramm delinedi? Parallelogrammnıń bir tárepine jaylasqan múyeshleri qosındısı nege teń?
2) Parallelogrammıń diagonalları haqqında ne dewge boladı?

2. Parallelogrammnıń perimetri 152 cm, tárepleriniń biri ekinshisinen 25 cm artıq. Parallelogrammnıń táreplerin tabıń.

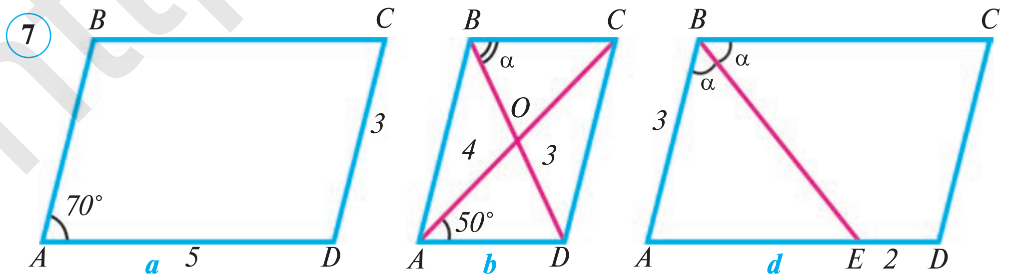
3. Parallelogramm múyeshlerinen ekewiniń qosındısın: 1) 70° ga; 2) 110° qa; 3) 170° ǵa teń bolsa onıń barlıq múyeshlerin tabıń.

4. $ABCD$ parallelogrammda: $AB=7$ cm, $BC=11$ cm, $AC=14$ cm, $BD=12$ cm; O — diagonallardıń kesilisiw noqatı ekeni málim. ABO hám BOC úshmúyeshliklerdiń perimetrin tabıń

5. Parallelogrammnıń qońsı tárepleriniń qosındısı 20 cm ge, ayırması 12 cm ge teń. Usı parallelogrammnıń tápeplerin tabıń.

6. Parallelogrammnıń eki tárepiniń qatnası 5:3 perimetri 6,4 dm ge teń. Parallelogrammnıń tápeplerin tabıń.

7. 7-súwrette parallelogrammnıń ayırım elementleriniń úlkenligi kórsetilgen. Jáne qanday úlkenliklerdi tabıw múmkin?



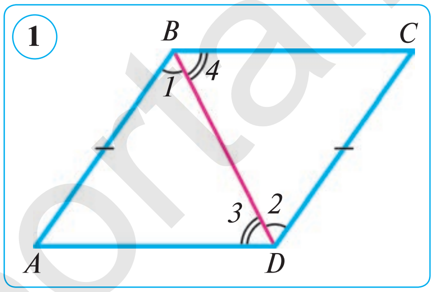
3. PARALLELOGRAMMNÍŃ BELGILERI

Dáslepki temada kórip shıqqanımızdan belgili boldı, parallelogrammnıń qásiyetlerin paydalanıw ushın kóp jaǵdaylarda berilgen tórtmúyeshliktiń haqıyqattan da parallelogramm ekenine isenim payda etiw kerek. Bunı anıqlamaǵa muwapıq. (2-temadaǵı 1-máselege q.) yaki berilgen tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin tastıyıqlawshı shártler — belgiler arqalı dálillew kerek boladı. Kóbinese ámelde qollanılatuǵın parallelogrammnıń belgilerin dálilleymiz. Endi parallelogrammnıń belgileri menen tanısamız.

1-teorema.

(1-belgi.) Eger tórtmúyeshliktiń eki tárepi teń hám parallel bolsa, bunday tórtmúyeshlik parallelogramm boladı.

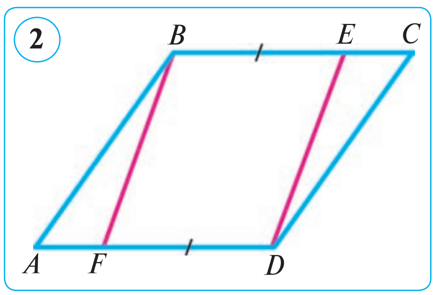
Dálil. $ABCD$ tórtmúyeshlikte $AB \parallel CD$ hám $AB = CD$ bolsın (1-súwret). Onıń BD diagonalın ótkizemiz. Nátiyjede eki teń ABD hám CDB úshmúyeshliklerine iye bolamız (eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi boyınsha), sebebi olarda $AB = CD$ (shárt boyınsha), BD tárepi — ulıwma, $\angle 1 = \angle 2$ (AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar hám de BD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın). Úshmúyeshliklerdiń teńliginen, $\angle 3 = \angle 4$ ekeni kelip shıǵadı. Bul múyeshler AD hám BC tuwrı sızıqlar hám de BD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler, demek, $AD \parallel BC$. Solay etip, $ABCD$ tórtmúyeshlikleriniń qarama-qarsı tárepleri jup-jubı menen parallel. Sonıń ushın, parallelogrammnıń anıqlamasına muwapıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik parallelogramm.



Teorema dálillendi.

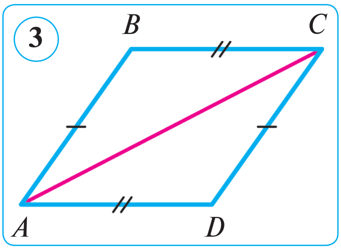
1-másele. $ABCD$ parallelogrammnıń BC hám AD táreplerine teń kesindiler sızılǵan: $BE = DF$ (2-súwret). $BEDF$ tórtmúyeshlik parallelogramm bola aladı ma?

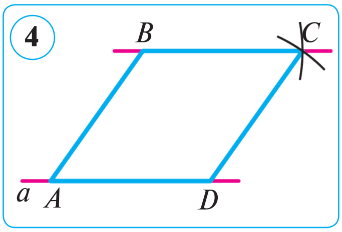
Sheshiliwi. $BEDF$ tórtmúyeshliktiń BE hám DF qarama-qarsı tárepleri teń hám parallel. Sonıń ushın, parallelogrammnıń 1-belgisi boyinsha, $BEDF$ tórtmúyeshlik – parallelogram. *Juwabı.* Awa, boladı.



2-teorema.

(2-qásiyet.) Eger tórtmúyeshlikdiń qarama-qarsı tárepleri óz ara bir-birine teń bolsa, bul tórtmúyeshlik parallelogramm.





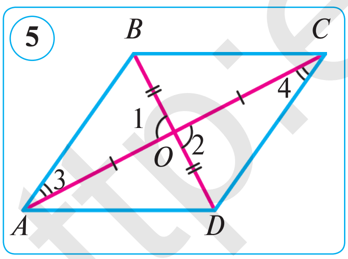
Dálil. $ABCD$ tórtmúyeshlikte $AB=CD$ hám $BC=DA$ bolsın. Onıń AC diagonalın ótkizemiz (3-súwret). Nátiyjede ABC hám CDA úshmúyeshlikler payda boladı. Úshmúyeshlikler teńliginiń 3-belgisine muwapıq, bul úshmúyeshlikler teń (AC tárep — ulıwma, teorema shártine muwapıq bolsa $AB=CD$ hám $BC=DA$). Úshmúyeshliklerdiń teńliginen CAB hám ACD múyeshlerdiń teńligi kelip shıǵadı. Bul múyeshlikler bolsa AB hám DC tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolıp tabıladı. Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisine muwapıq, $AB \parallel CD$. Solay etip, $ABCD$ tórtmúyeshlikte AB hám CD tárepler teń hám de parallel, demek, parallelogrammnıń 1-belgisne muwapıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik — parallelogramm. Teorema dálillendi.

2-másele. Berilgen noqattan ótiwshi hám berilgen tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqtı sızıń.

Sheshiliwi. a — tuwrı sızıq, B — onda jatpaytuǵın noqat bolsın. a tuwrı sızıqta A hám D noqatların belgileymiz (4-súwret). B, D noqatlardan radiusları sáykes túrde AD hám AB bolǵan sheńberler ótkizemiz. Olardıń kesilisiw noqatın C menen belgileymiz. BC tuwrı sızıqtı ótkizemiz, ol izlenip atırǵan tuwrı sızıq boladı. Haqıyqatında da, $ABCD$ tórtmuyeshliktin qarama-qarsı tárepleri teń. Parallelogrammnıń 2-belgisine muwapıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik – parallelogramm. Sonın ushın, $BC \parallel AD$.

3-teorema.

(3-belgi.) Eger tórtmúyeshliktiń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinse, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıp tabıladı.



Dálil. O — $ABCD$ tórtmúyeshliktiń diagonalları kesilisken noqat bolsın. Shártke muwapıq, $AO=OC$ hám $BO=DO$ (5-súwret), AOB hám COD úshmúyeshliklerdi kórip shıǵamız. Bul úshmúyeshliklerde: $\angle 1=\angle 2$ (vertikal múyeshler), $AO=CO$ hám $BO=DO$ (shártke muwapıq). Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń birinshi belgisine muwapıq, AOB hám COD úshmúyeshlikler teń. Bul úshmúyeshlikler teńliginen olardıń sáykes tárepleri hám múyeshliklerdiń teńligi kelip shıǵadı: $AB=CD$, $\angle 3=\angle 4$. Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisine muwapıq, $AB \parallel CD$, sebebi 3 hám 4 múyeshler AB hám CD tuwrı sızıqlar hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolıp tabıladı. $ABCD$ tórtmúyeshlikte $AB=CD$ hám $AB \parallel CD$ bolǵanı ushın parallelogrammnıń 1-belgisine muwapıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik parallelogramm boladı. Teorema dálillendi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Eger tórtmúyeshliktiń eki tárepi teń hám parallel bolsa, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıwın dálilley alasız ba?
2) Parallelogrammnıń 2—3-belgilerin kórsetiń.

2. (*Jedellestiriwshi másele.*) 1) Teń hám parallel eki kesindi berilgen. Olardıń aqırları óz ara kesilispeytuǵın kesindiler menen tutastırılǵan. Payda bolǵan tórtmúyeshlik parallelogramm boladı ma?
2) Eger tórtmúyeshliktiń eki qarama-qarsı múyeshi teń bolsa, bul parallelogramm bolama?

3. $ABCD$ tórtmúyeshlikte AB hám CD tárepler parallel, $AB=CD=11$ cm, $AD=5$ cm. Usı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

4. Eger: 1) $\angle 1=70°$, $\angle 3=110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1=\angle 2=60°$, $\angle 3=\angle 115°$ bolsa (6-súwret), bunday jaǵdayda $ABCD$ tórtmúyeshligi parallelogramm bola aladıma?
Sheshiliwi. 1) $ABCD$ tórtmúyeshlikte eki AB hám CD tárepleri parallel, sebebi $\angle 1+\angle 3=70°+110°=180°$. Bul múyeshler – AB hám DC tuwrı sızıqlar hám de AD kesiliwshi payda etken ishki bir tárepli múyeshler. $AB \parallel DC$ bolǵanı sebepli, $\angle 1=\angle 4$ boladı (sáykes múyeshler). $ABCD$ tórtmúyeshliginiń qalǵan eki AD hám BC tárepleri parallel emes, sebebi ishki almasıwshı 1 hám 2 múyeshler teń emes ($\angle 1=\angle 4 \neq \angle 2$). Demek, $ABCD$ tórtmúyeshligi parallelogramm bolmaydı.
Juwap: joq, $ABCD$ tórtmúyeshlik parllelogramm bolmaydı.
2) 1-bántke uqsas sheshiledi

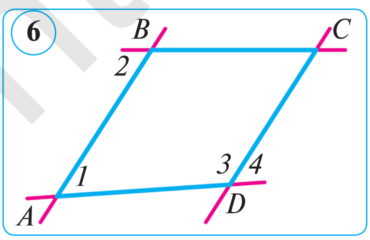
5. $ABCD$ parallelogrammnıń AB tárepi ortası E noqattan, CD tárepi ortası F noqattan ibarat. $EBFD$ tórtmúyeshliktiń parallelogram ekenin dálilleń (7-súwret).

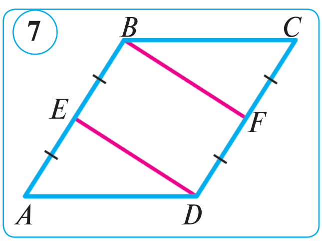
6. $ABCD$ tórtmúyeshlikte: $AD=BC$, $\angle 1=\angle 2$ (8-súwret). $ABCD$ tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

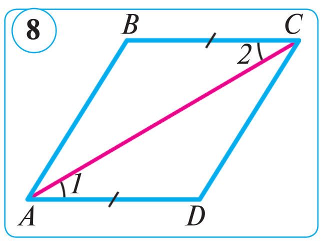
7. $ABCD$ tórtmúyeshlikte AB hám CD tárepler parallel, $AB=CD=9$ cm, $AD=4$ cm. Usı tórtmúyeshliktń perimetrin tabıń.

8. $ABCD$ tórtmúyeshlikte: $AB=CD$, $AD=BC$, A múyesh B múyeshten úsh márte úlken. Usı tórtmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

9. Parallelogramm múyeshlerinen biriniń bissektrisası ózi kesip ótetuǵın tárepti 4 cm hám 5 cm li kesindilerge bóledi. Parallelogrammnıń perimetrin tabıń.

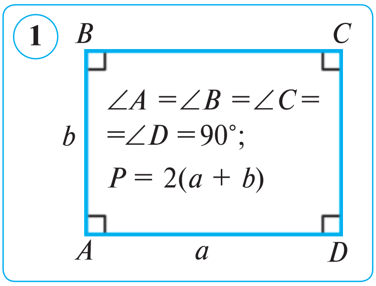






4. TUWRÍ TÓRTMÚYESHLIK HÁM ONÍŃ QÁSIYETLERI

Anıqlama. *Barlıq múyeshleri tuwrı bolǵan parallelogramm* ***tuwrı tórtmúyeshlik*** *dep ataladı* (1-súwret).

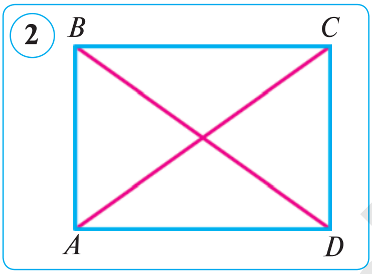


Tuwrı tórtmúyeshlik parallelogrammnıń jeke jaǵdayı bolǵanı ushın, ol parallelogrammnıń barlıq qásiyetlerine iye boladı: tuwrı tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri teń, diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, tuwrı tórtmúyeshliktiń diagonalı onı eki teń tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ajıratadı.

Tuwrı tórtmúyeshliktiń ózine tán qásiyetin kórip shıǵamız.

Teorema.

Tuwrı tórtmúyeshliktiń diagonalları óz ara teń.



Dálil. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik AC hám BD diagonallar berilgen bolsın $AC=BD$ bolıwın dálilleymiz (2-súwret).

Tuwrı múyeshli ACD hám DBA úshmúyeshlikler eki katetine (AD — ulıwma tárepi, $CD=BA$) teń. Bunnan bul úshmúyeshlikler gipotenuzalarınıń teńligi, yaǵnıy $AC=BD$ kelip shıǵadı.

Bul teoremadan tómendegi keri teorema kelip shıǵadı **(tuwrı tórtmúyeshliktiń belgisi)**.

Keri teorema.

Eger parallelogrammnıń diagonalları teń bolsa, ol tuwrı tórtmúyeshlik boladı.

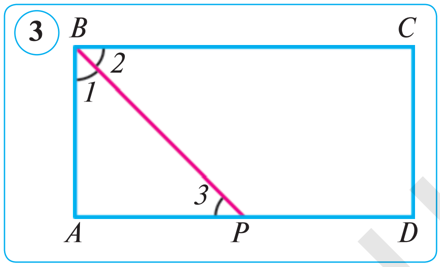
Dálil. $ABCD$ parallelogrammda AC hám BD diagonallar teń bolsın (2-súwret). ABD hám DCA úshmúyeshlikler úsh tárepi boyınsha teń ($AB=DC$, $BD=CA$, AD — ulıwma tárep). Bunnan $\angle A=\angle D$ kelip shıqtı. Parallelogrammnıń qarama-qarsı múyeshleri teń, sonıń ushın $\angle A=\angle C$ hám $\angle B=\angle D$. Solay etip, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Parallelogramm — dóńes tórtmúyeshlik, sonıń ushın: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$. Bunnan $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, yaǵnıy $ABCD$ parallelogrammnıń tuwrı tórtmúyeshlik ekeni kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 24 cm ga BD diagonalı bolsa 9 cm ge teń. ABD úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. $AB+AD=P_{ABCD}:2=24:2=12$ (cm) – qońsı tárepler qosındısı (2-súwretke q.) $P_{ABD}=AB+AD+BD=12+9=21$ (cm).

Juwabı: $P_{ABD}=21$ cm.

2-másele. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik B múyeshiniń bissektrisası AD tárepi menen P noqatda kesisedi hám onı $AP=17$ cm hám $PD=21$ cm li kesindilerge bóledi (3-súwret). Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.



Sheshiliwi. 1) $ABCD$ – tuwrı tórtmúyeshlik bolganı ushın $AD \parallel BC$ hám sonıń ushın $\angle 2=\angle 3$ (ishki almasıwshı múyeshler). Biraq, shárt boyınsha , $\angle 2=\angle 1$, demek, $\angle 1=\angle 3$ hám de $\triangle ABP$ – ultanı BP bolgan teń qaptallı úshmúyeshlik. Solay etip, $AB=AP=17$ cm.

2) $AD=AP+PD=17+21=38$ (cm);

$$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2\,(17+38)=2\ 55=110\ \text{(cm)}.$$

Juwabı: $P_{ABCD}=110$ cm.

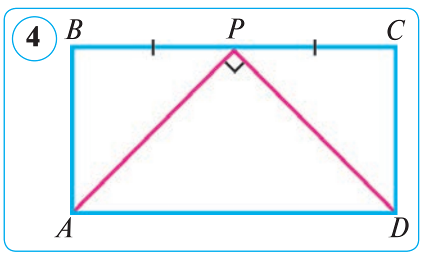
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Qanday parallelogramm tuwrı tórtmúyeshlik dep ataladı?
2) Túwrı tórtmúyeshliktiń qanday ózine tán qásiyeti bar?
3) Tuwrı tórtmúyeshliktiń belgilerin ańlatıń.

2. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikte: $AB=9$ cm, $BC=7$ cm.
1) C noqattan AD tárepke shekem bolgan aralıqtı tabıń.
2) AB hám CD tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

3. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 24 cm. Tuwrı tórtmúyeshliktiń qálegen ishki noqatınan onıń táreplerine shekemgi bolgan aralıq qosındısın tabıń.

4. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 24 cm ge teń. P noqat BC tárepiniń ortası, $\angle APD=90°$ (4-súwret). Tuwrı tórtmúyeshliktiń táreplerin tabıń.



5. Eger tórtmúyeshlikte diagonallar teń hám olar kesilisiw noqatında teń ekige bólinse, bul tórtmúyeshlik tuwrı tórtmúyeshlik bolıwın dáliylleń.

6. Parallelogrammnıń tárepleri 4 cm hám 7 cm. Bul parallelogrammnıń diagonalları: 1) 12 cm hám 5 cm; 2) 10 cm hám 3 cm bolıwı múmkin be?

7. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 42 cm ge, táreplerinen biri bolsa ekinshisinen eki márte úlken. Tuwrı tórtmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

5–6. ROMB HÁM KVADRATTÍŃ QÁSIYETLERI

1. Romb hám onıń qásiyetleri.

Anıqlama. *Tárepleri teń bolǵan parallelogramm* ***romb*** *delinedi* (1-súwret).

Romb parallelogrammnıń ulıwma qásiyetlerine iye bolǵan halda jáne basqa da tómendegi qásiyetke iye.

Teorema.

Rombınıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám rombınıń múyeshlerin teń ekige bólinedi.

Dálil. $ABCD$ — berilgen romb (2-súwret), O — onıń diagonalları kesilisken noqatı bolsın. $AC \perp BD$ hám hárbir diagonalı rombınıń múyeshlerin teń ekige bóletuǵınlıǵın (mısalı, $\angle BAC = \angle DAC$) dálilleymiz.

Rombınıń anıqlaması boyınsha, $AB = AD$, sonlıqtan BAD — BD ultanı teń qaptallı úshmúyeshlik. Romb parallelogramm bolǵanı ushın onıń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, yaǵnıy $BO = OD$. Demek, AO — teń qaptallı BAD úshmúyeshliginiń medianası. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń qásiyeti boyınsha, onıń ultanına ótkerilgen mediana hám biyiklik bissektrisa boladı. Sonlıqtan $AC \perp BD$ hám $\angle BAC = \angle DAC$. Usını dálillew talap etilgen edi.

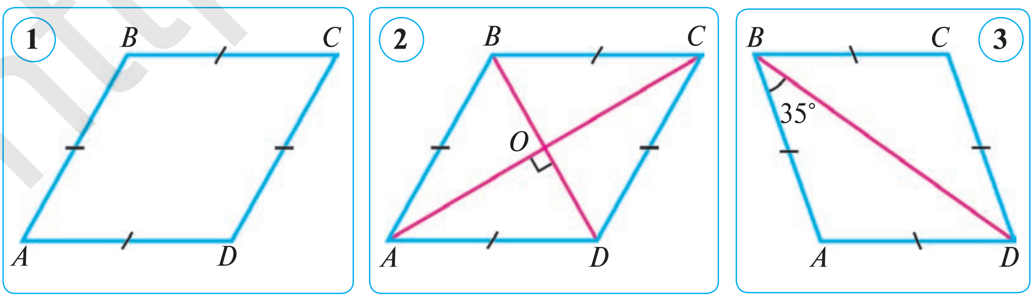
1-másele. $ABCD$ rombınıń BD diagonalı tárepi menen 35° lı múyesh payda etedi. Onıń múyeshlerin tabıń.

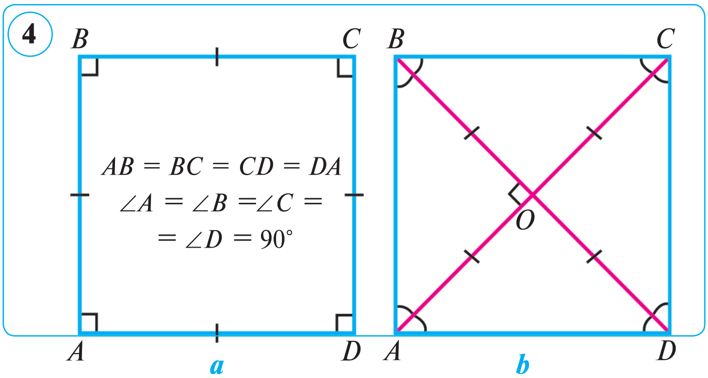
Sheshiliwi. $\angle ABD = 35°$, desek (3-súwret). Bunda $\angle CBD = 35°$ (rombınıń qásiyeti boyınsha). $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35° = 70°$, $\angle ADC = \angle ABC = 70°$ (parallelogrammnıń 2-qásiyeti boyınsha), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (parallelogrammnıń 1-qásiyeti boyınsha). Demek, $\angle DAB = 180° - 70° = 110°$, $\angle BCD = \angle DAB = 110°$ (parallelogrammnıń 2-qásiyeti boyınsha).

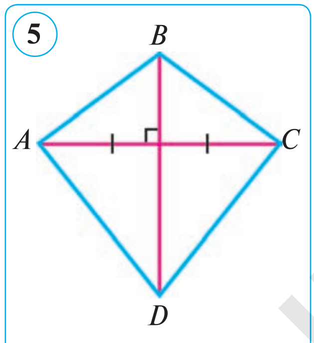
Juwabı: 70°, 110°, 70°, 110°.

2-másele. Túrli romblardıń perimetrleri teń bolıwı múmkin be?

Sheshiliwi. Perimetrleri teń bolǵan romblar bir-birinen múyeshleri menen ajıraladı. Eger rombınıń súyir múyeshi: 1) 40° qa teń bolsa, bunda qalǵan múyeshleri sáykes halda 140°, 40°, 140° boladı; 2) 15° qa teń bolsa, onda







$AC = BD$, $AC \perp BD$

qalǵan múyeshleri sáykes halda 165°, 15°, 165° boladı hám t.b. Sonday-aq, súyır múyesh ornına hár túrli doǵal múyeshlerdi alıw múmkin. *Juwabı:* Awa, múmkin.

2. Kvadrat hám onıń qásiyeteri.

Anıqlama. *Tárepleri teń bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik* ***kvadrat*** *delinedi.*

Kvadrat hám rombınıń anıqlamasınan kvadrat múyeshleri tuwrı bolǵan rombı ekenligi kelip shıǵadı (4-*a* súwret). Kvadrat hám parallelogramm, hám tuwrı tórtmúyeshlik, hám romb bolǵanı ushın olardıń barlıq qásiyetlerine iye. Kvadrattıń tiykarǵı qásiyetlerin keltiremiz.

1. Kvadrattıń barlıq múyeshleri tuwrı.

2. Kvadrattıń diagonalları óz ara teń.

3. Kvadrattıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi hám kvadrattıń múyeshlerin teń ekige bóledi (4-súwret).

Usı qásıyetlerdı óz betińizshe dálilleń.

3-másele. Eger rombınıń diagonalları teń bolsa, onda bunday rombınıń kvadrat ekenin dálilleń.

Dálil. Romb parallelogramm bolǵanı ushın tuwrı tórtmúyeshliktiń belgisinen diagonalları teń bolǵan rombınıń tuwrı tótrmúyeshlik ekeni kelip shıǵadı hám demek ol kvadrat boladı.

4-másele. Tórtmúyeshliktiń diagonalları perpendikulyar hám óz ara birbirine teń. Usı tórtmúyeshlik kvadrat bola alama?

Sheshiliwi. Másele shártin qanaatlandırıwshı tórtmúyeshliklerden biri 5-súwrette súwretlengen. Bunda diagonallardan biri teń ekige bólingen. Biraq bul kvadrattıń 2-qásiyetin hám 3-qásiyetinde keltirilgen shárttiń bir bólimin, yaǵnıy tek óz ara perpendikulyarlıq shártin qanaatlandıradı. Keltirilgen jaǵdayda tek diagonallardan biri teń ekige bólingen, sol sebepli bul tórtmúyeshlik kvadrat bola almaydı. Belgili bir jaǵdayda tórtmúyeshliktiń hár eki diagonalı kesilisiw noqatında teń ekige bóliniwi múmkin. Tek usı jaǵdayda ǵana tórtmúyeshlik kvadrat bola aladı.

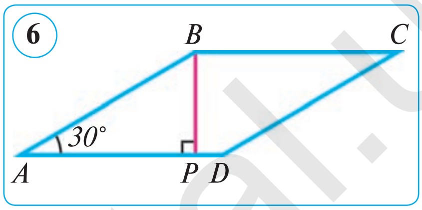
Juwabı: tórtmúyeshlik kvadrat bolıwı shárt emes.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Romb degenimiz ne? Rombınıń qásiyetin aytıń.
2) Kvadrat dep nege aytıladı. Kvadrattıń qásiyetlerin aytıń
3) Kvadratqa: 1) «parallelogramm»; 2) «romb»; 3) «tuwrı tórtmúyeshlik» túsinikleri járdeminde anıqlama beriń.

2. Kvadrattıń tárepi 20 cm ge teń. Diagonalları kesilisiw noqatınan tárepleriniń birine deyingi aralıqtı tabıń.

3. $ABCD$ rombınıń tárepi 24 cm ge, A múyeshi bolsa 30° qa teń. B tóbesinen oǵan qarama-qarsı AD tárepine shekemgi aralıqtı tabıń (6-súwret). Bos jerlerge sáykes sanlardı qoyıń.



Sheshiliwi. B noqattan AD tuwrı sızıqqa shekemgi aralıqtı B noqattan usı tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar, yaǵnıy BP kesindiniń uzınlıǵına teń. ABP úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. Onda $\angle APB = ...^\circ$, $\angle A = ...^\circ$, $AB = ...$. Ol jaǵdayda $BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ...$ (cm) ($...^\circ$ lı múyesh tuwrısında jatqan katettiń qásiyeti boyınsha). *Juwabı:* $BP = ...$ cm.

4. 1) (*Ámeliy tapsırma.*) 1) Eki teń úshmúyeshlikden; 2) tórt teń úshmúyeshlikten qalay etip hám kvadrat islew múmkin? Múmkin bolǵan barlıq sheshimlerin kórsetiń.

5. Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ishine kvadrat sonday sızıladı, onıń eki tóbesi gipotenuzada, qalǵan eki tóbesi bolsa katetlerde jatadı. Gipotenuza 21 cm ge teń ekeni belgili bolsa, kvadrat tárepin tabıń.

6. Rombınıń diagonalları menen tárepleri arasında payda bolǵan múyeshleriniń qatnası 2:7 boladı. Rombınıń múyeshlerin tabıń.

7. Kvadrat tárepleriniń ortaları izli-izinen birlestirgen. Nátiyjede qanday figura payda boladı?

8. Rombınıń barlıq biyikliginiń óz ara teń ekenligin dálilleń.

9. Tórtmúyeshliktiń tárepleri 2:4:5:7 kibi qatnasta, perimetri bolsa 108 cm ge teń. Usı tórtmúyeshtiń táreplerin tabıń.

10. Múyeshlerinen biri 60°, kishi diagonalınıń uzınlıǵı 16 cm bolǵan rombınıń perimetrin tabıń.

11. Rombınıń diagonalları menen tárepleri arasında payda bolǵan múyeshleriniń qatnası 5:4 boladı. Rombınıń múyeshlerin tabıń.

12. Tuwrı tórtmúyeshliktiń uzınlıǵı 32 cm, eni bolsa 28 cm ge teń. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattıń tárepin tabıń.

13. Tórtmúyeshliktiń eń kishi tárepi 5 cm ge teń, qalǵan tárepleriniń hárbiri aldıńgısınan sáykes túrde 2 cm ge úlken. Usı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

7–8. TRAPECIYA HÁM ONÍŃ QÁSIYETLERI

1. Trapeciyanıń anıqlaması. Hárqanday parallelogrammda eki jup parallel tárepler bolatuǵını bizge belgili. Endi biz tek bir jup parallel táreplerge iye bolǵan tórtmúyeshliklerdi kórip shıǵamız.

1-anıqlama. *Eki tárepi parallel, qalǵan eki tárepi parallel emes tórtmúyeshlik* ***trapeciya*** *dep ataladı.*

Trapeciyanıń parallel tárepleri onıń *ultanı*, parallel emes tárepleri *qaptal tárepleri* dep ataladı. 1-súwrettegi $ABCD$ trapeciyada AD hám BC tárepler ultanlar, AB hám CD tárepler bolsa *qaptal túrler* boladı.

2-anıqlama. *Táreplerinen biri ultanına perpendikulyar bolǵan trapeciya* ***tuwrı múyeshli trapeciya*** *delinedi* (2-súwret).

3-anıqlama. *Qaptal tárepleri teń bolǵan trapeciya* ***teń qaptallı trapeciya*** *delinedi.*

3-súwrette teń qaptallı $ABCD$ trapeciya súwretlengen: $AB = CD$.

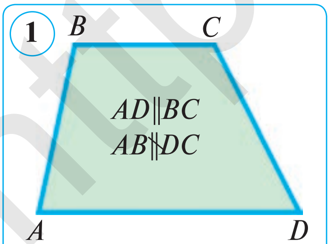
2. Trapeciyanıń belgisi. Endi $ABCD$ tórtmúyeshliktiń trapeciya bolıwı ushın qanday shártti qanaatlandırıwın kórip shıǵamız.

Teorema.

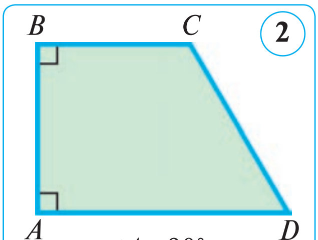
Eger tórtmúyeshliktiń bir tárepine jaylasqan eki múyeshiniń qosındısı 180° qa teń hám oǵan qońsı táreplerge jaylasqan eki múyeshtń qosındısı 180° dan ayırmashılıǵı bolsa, bunday tórtmúyeshlik *trapeciya* boladı.

Dálil. $ABCD$ tórtmúyeshlikte: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D \neq 180°$ bolsın. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń trapeciya ekenin dálilleymiz.

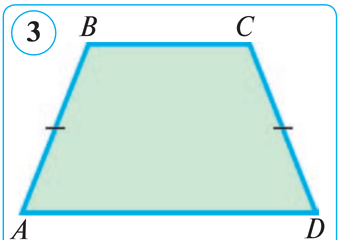
Birinshiden, bir jup qarama-qarsı tárepler parallel ekenin kórsetemiz. AB, $BC(l_1)$ hám AD (l_2) tuwrı sızıqlardı ótkizemiz (4-súwret). Shártke muwapıq, $\angle A + \angle B = 180°$, bul jaǵdayda AD hám BC kesindiler parallellik belgisine muwapıq parallel boladı. (*Eki a hám b tuwrı sızıqlardı úshinshi c tuwrı sızıq kesiliskende ishki bir tárepli múyeshlerdiń qosındısı 180° qa teń bolsa, bul jaǵdayda a hám b tuwrı sızıqlar parallel boladi.*)



AD hám BC – ultanlar, AB hám DC – qaptal tárepler



$\angle A = 90°$, tuwrı múyeshli trapeciya



$AB = DC$, teń qaptallı trapeciya

Ekinshiden, $ABCD$ tórtmúyeshliktiń qalǵan eki tárepi parallel emesligin kórsetemiz. Shártke muwapıq, $\angle A + \angle D \neq 180°$, bul jaǵdayda AB hám DC kesindiler parallel bola almaydı (*Evklidtiń parallel tuwrı sızıqlar haqqındaǵı 5-aksiomasina muwapıq, yaǵnıy tuwrı sızıqlar parallel bolıwınıń zárúr shárti orınlanbadı*). Demek, $ABCD$ tórtmúyeshlik trapeciya eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı

Nátiyje. Trapeciyanıń bir múyeshi 90° bolsa, onıń jáne bir 90° lı múyeshi bar degen sóz.

4-anıqlama. *Trapeciyanıń ultanlarınan birinde jatqan noqattan ekinshi tiykardı óz ishine alǵan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar* ***trapeciyanıń biyikligi*** *dep ataladı.*

Trapeciya tiykarlarına perpendikulyar bolǵan hárqanday kesindini onıń biyikligi sıpatında alıwǵa boladı. Hárqanday trapeciya qálegeninshe biyiklik ótkizse boladı (5-súwret).

3. Teń qaptallı trapeciyanıń qásiyeti.

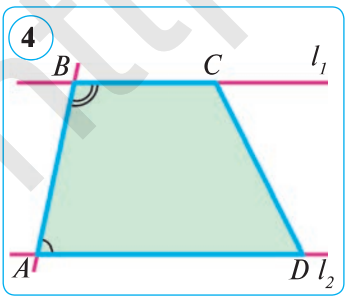
$ABCD$ teń qaptallı trapeciyanı qarayıq. Bunda $AD=a$ — úlken ultan, $BC=b$ — kishi ultan bolsın. Kishi ultannıń B tóbesinen BP biyiklik ótkizemiz (6-súwret). Biyikliktiń P ultanı AD ultanın AP hám PD kesindilerge ajıratsın.

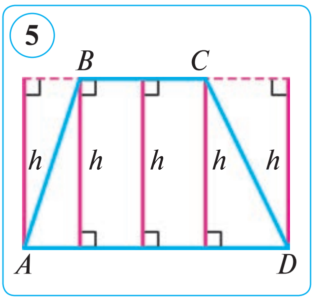
Teorema.

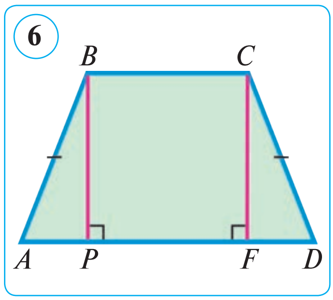
Teń qaptallı trapeciyanıń doǵal múyeshi tóbesinen ótkizilgen biyiklik úlken ultandı uzınlıqları ultanları ayırmasınıń yarımına hám ultanları qosındısınıń yarımına teń bóleklerge ajıratadı, yaǵnıy:

$$AP = \frac{a-b}{2},\ PD = \frac{a+b}{2}.$$

Dálil. C tóbesinen $CF \perp AD$ ótkizemiz. Tuwrı múyeshli ABP hám DCF úshmúyeshlikler teń: $AB=DC$ — shárt boyınsha, $BP=CF$ bolsa BC hám AD parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq bolǵanı ushın. Úshmúyeshler teńliginen $AP=FD$ kelip shıǵadı. Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisine muwapıq, $BP \parallel CF$, sebebi $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq teń bolǵanı ushın $BC=PF=b$. Demek,







$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}, \quad PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Solay etip, $AP = \frac{a-b}{2}$ hám $PD = \frac{a+b}{2}$ eken. Teorema dálillendi.

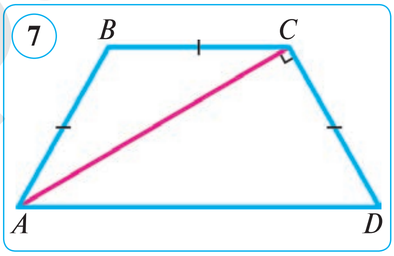
1-másele. Teń qaptallı trapeciyanıń ultanındağı múyeshleri teń ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$— teń qaptallı trapeciya, yağnıy $AB = DC$ hám $AD \parallel BC$. Teń qaptallı trapeciyanıń AD hám BC ultanlarına jaylasqan múyeshleri teńligin dálilleymiz ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$).

Trapeciyanıń doğal múyeshleri (B hám C) tóbelerinen AD ultanına perpendikulyar ótkizemiz: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (6-súwretke q.). Tuwrı múyeshli ABP hám DCF úshmúyeshlikler (gipotenuza hám kateti boyınsha) teń: $AB = DC$ — shárt boyınsha, $BP = CF$ ese BC hám AD parallel tuwrı sızıqlar arasındağı aralıq bolğanı ushın. Úshmúyeshlikler teńliğinen $\angle A = \angle D$ kelib shığadı.

A hám B, C hám D múyeshler, AB múyeshler AD hám BC parallel tuwrı sızıqlardıń, sáykes túrde, AB hám CD kesilisiwshiler menen kesilisiwinen payda bolğan ishki bir tárepili múyeshler, sonıń ushın $\angle A + \angle B = 180^\circ$ hám $\angle C + \angle D = 180^\circ$. Bunnan $\angle B = \angle C$ kelip shığadı. Solay etip, teń qaptallı trapeciyanıń ultanındağı múyeshleri teń eken: $\angle A = \angle D$ va $\angle B = \angle C$. Usını dálillew talap etilgen edi.

2-másele. Teń qaptallı trapeciyanıń kishi ultanı qaptal tárepine teń, diagonalı qaptal tárepine perpendikulyar. Trapeciyanıń múyeshlerin tabıń.

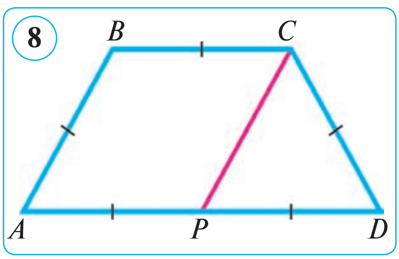


Sheshiliwi. Teń qaptallı $ABCD$ trapeciya berilgen, onda $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ bolsın (7-súwret). Másele shártine muwapıq, AC—teń qaptallı ABC úshmúyeshliktiń ultanı, demek, $\angle BCA = \angle CAB$. Biraq $\angle A = \angle D$, sebebi teń qaptallı trapeciyanıń tiykarındağı múyeshleri teń, CAD hám BCA múyeshler bolsa $AD \parallel BC$ hám de AC kesiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolğanı ushın teń, yağnıy $\angle CAD = \angle BCA$.

Demek, $\angle A = 2\angle CAD$. Shártine muwapıq, ACD — tuwrı múyeshli, sonıń ushın $\angle CAD + \angle D = 90^\circ$, biraq $\angle D = \angle A$, ol jağdayda $90^\circ = 3\angle CAD$, demek, $\angle CAD = 30^\circ$ hám ol jağdayda $\angle D = \angle A = 60^\circ$, $\angle C = \angle B = 120^\circ$.

Juwabı: $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

3-másele. eń qaptallı trapeciyanıń tárepleriniń qatnası 1:1:1:2. Usı trapeciyanıń múyeshlerin tabıń.



Sheshiliwi. $ABCD$ trapeciyada $AB = BC = CD = 1$ hám $AD = 2$ bolsın. AD tárepiniń ortasın P menen belgileymiz (8-súwret). $ABCP$ tórtmúyeshliktiń AP hám BC tárepleri teń hám parallel.

Demek, parallelogrammnıń belgisi boyınsha, bul tórtmúyeshlik parallelogramm boladı. Usıǵan qarap, $PC=AB=1$. PCD úshmúyeshliktiń barlıq tárepleri 1 ge teń, sonıń ushın $\angle PDC=60^\circ$. Solay etip, $ABCD$ trapeciyada $\angle A=\angle D=60^\circ$ hám $\angle B=\angle C=120^\circ$.

Juwabı: $\angle A=\angle D=60^\circ$, $\angle B=\angle C=120^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

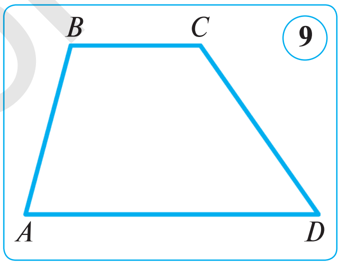
1. 1) Qanday tórtmúyeshlik trapeciya dep ataladı?
2) Qanday trapeciya: a) teń qaptallı trapeciya; b) tuwrı múyeshli trapeciya dep ataladı?

2. Trapeciyanıń tóbesinen ótpegen biyikligi onı eki tuwrı trapeciyaǵa ajıratadı. Figuranı sızıp kórsetiń.

3. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń qaptal tárepleriniń qatnası $1:2$. Trapeciyanıń eń úlken múyeshin tabıń.

4. Trapeciyanıń ultanları 12 cm hám 20 cm, qaptal tárepleri 4 cm hám 11 cm. Kishi ultanınıń tóbesinen kishi tárepine parallel tuwrı sızıq ótkizilgen. Usı parallel tuwri sızıq ajiratqan úshmúyeshliktiń perimetriń tabıń.

5. AD hám BC ultanı $ABCD$ trapeciyanıń A hám C múyeshlerin tabıń, bunda $\angle A=75^\circ$ hám $\angle D=55^\circ$ (9-súwret). Bos orınlarǵa sáykes juwaplardı jazıń.



Sheshiliwi. A hám B, C hám D muyesh AD hám BC parallel tuwrı sızıqlardı ... hám ... kesiwshiler menen kesilisiwinen payda bolǵan ..., sonıń ushın $\angle A+\angle B=...^\circ$ hám $\angle C+\angle D=...^\circ$. Shárt boyınsha, $\angle A=75^\circ$ hám $\angle D=55^\circ$, bunday jaǵdayda $\angle B = ...^\circ - \angle A = =...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$ hám $\angle C= ...^\circ - \angle D = ...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$.
Juwabı: $\angle B = ...^\circ$, $\angle C = ...^\circ$.

6. Teń qaptallı trapeciyanıń súyir múyeshleriniń biri 60° qa, qaptal tárepi 16 cm ge teń. Eger trapeciyanıń ultanlarınıń qosındısı 38 cm ge teń. Trapeciyanıń ultanların tabıń.

7. Teń qaptallı trapeciyanıń doǵal múyeshi tóbesinen ótkerilgen biyikliktiń úlken ultanı 3 cm hám 17 cm li kesindilerge bólinedi. Onıń ultanların tabıń.

8. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalları teń ekenin dálilleń.

9. Trapeciyada: 1) úsh tuwrı múyesh; 2) úsh súyir múyesh; 3) úsh múyesh qosındısı 180° qa teń bola alama? Juwabıńızdı dalilleń.

10. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń eń úlken hám eń kishi múyeshleri qatnası $5:4$ ge teń. Usı trapeciyanıń múyeshlerin tabıń.

11. $ABCD$ trapeciyanıń kishi ultanı 6 cm ge, ABE úshmúyeshliktiń ($BE\parallel CD$) perimetri 36 cm ge teń. Trapeciyanıń perimetrin tabıń.

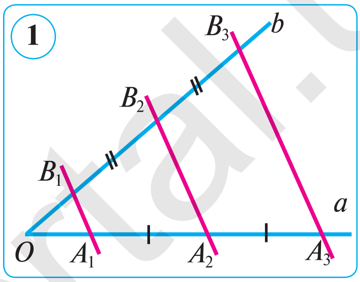
12. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalı doǵal múyeshin teń ekige bóledi. Trapeciyanıń tiykarları 10 cm hám 20 cm. onıń perimetrin tabıń.

2- §. FALES TEOREMASÍ HÁM ONÍŃ QOLLANÍLÍWÍ

9. FALES TEOREMASÍ

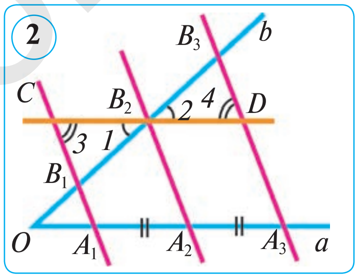
Teorema. **Eger múyesh táreplerin kesiwshi parallel tuwrı sızıqlar onıń bir tárepinen teń kesindiler ajıratsa, olar ekinshi tárepinen de teń kesindiler ajıratadı.**

Dálil. O múyeshtiń bir tárepinde (a nurda) óz ara teń A_1A_2 hám A_2A_3 kesindiler qoyılǵan hám olardıń aqırları (A_1, A_2, A_3) arqalı ekinshi tárepti (b nurdı) B_1, B_2, B_3, noqatlarda kesiwshi A_1B_1, A_2B_2, hám A_3B_3, tuwrı sızıqlar ótkizilgen bolsın (1-súwret).



Endi payda bolǵan B_1B_2, B_2B_3, kesindeleriniń óz ara teńligin, yaǵnıy eger $A_1A_2 = A_2A_3$ bolsa, onda $B_1B_2 = B_2B_3$ bolıwın dálilleymiz.

Bunıń ushın B_2 noqattan a nurǵa parallel CD tuwrı sızıq ótkizemiz (2-súwret). Bul tuwrı sızıq A_1B_1 hám A_2B_3 tuwrı sızıqlar menen sáykes túrde C hám D noqatlarda kesisken. $A_1CB_2A_2$ hám $A_2B_2DA_3$ tórtmúyeshlikler — parallelogramm (anıqlamaǵa muwapıq), sebebi olardıń qarama-qarsı tárepleri shártke hám jasawǵa baylanıslı parallel. Shártke muwapıq, $A_1A_2 = A_2A_3$ hám de parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri bolǵanı ushın $A_1A_2 = CB_2$ hám $A_2A_3 = B_2D$ dan $CB_2 = B_2D$ ǵa iye bolamız.



B_1B_2C hám B_3B_2D úshmúyeshliklerde $CB_2 = B_2D$ (dálilge muwapıq), sonday-aq $\angle 1 = \angle 2$ (vertikal múyeshler), $\angle 3 = \angle 4$ (A_1B_1 hám A_3B_3 parallel tuwrı sızıqlar hám de CD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın).

Úshmúeshlikler teńliginiń ekinshi belgisine muwapıq, bul úshmúyeshlikler óz ara teń: $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$. Bunnan $B_1B_2 = B_2B_3$ kelip shıǵadı.

Solay etip, eger $A_1A_2 = A_2A_3$ bolsa, $B_1B_2 = B_2B_3$ bolıwı dállilendi. Usını dálillew talap etilgen edi.

Eskertiw! *Fales teoreması shártinde múyesh ornına hárqanday eki tuwrı sızıqtı alıw múmkin boladı, bunda teoremanıń juwmaǵı ózgermeydi.*

Nátiyje. Berilgen eki tuwrı sızıqtı kesiwshi hám tuwrı sızıqlardıń birinen teń kesindilerdi bóliwshi parallel tuwrı sızıqlar ekinshi tuwrı sızıqtan da teń kesindilerdi bóledi.

1-másele. (*Kesindini teń bóleklerge bóliw*). Berilgen AB kesindini n teń bólekke bóliń.

Sheshiliwi. AB kesindi berilgen bolsın. Onı n teń bólekke bóliwdi kórsetemiz. A noqattan AB tuwrı sızıqta kesilispeytuǵın AC nurdı ótkizemiz hám onda A noqatta baslap n AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ teń kesindilerdi, yaǵnıy berilgen AB kesindini másele shártinen kelip shıǵıp neshe bólekke bóliw zárúr bolsa, sonsha teń kesindini qoyamız (3-súwret, $n=6$). Soń A_nB tuwrı sızıǵın ótkizemiz (A_n noqat – aqırǵı kesindiniń sońı) hám $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ noqatlar arqalı A_nB tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqlardı ótkizemiz. Bul tuwrı sızıqlar AB kesindini $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}$ noqatlarda kesilisedi hám onı Fales teoreması boyınsha n teń bólekke bóledi:

$$AB_1 = B_1B_2 = \ldots = B_{n-1}B.$$

Demek, hárqanday kesindini qálegeninshe teń bólekke bóliwge boladı.

2-másele. ABC úshmúyeshliktiń BC tárepi tórt teń kesindige bólinip, bóliniw noqatları arqalı uzınlıǵı 18 cm ge teń bolǵan AB tárepke parallel túrde tuwrı sızıqlar ótkizilgen. Usı tuwrı sızıqlardıń úshmúyeshlik ishinde qalǵan kesindileriniń uzınlıqların tabıń.

Berilgen: $\triangle ABC$ da:

$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C, AB = 18$ cm; $B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB$.

Tabıw kerek: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (4-súwret).

Sheshiliwi. 1) $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$ ótkizemiz.

2) Fales teoremasına muwapıq:

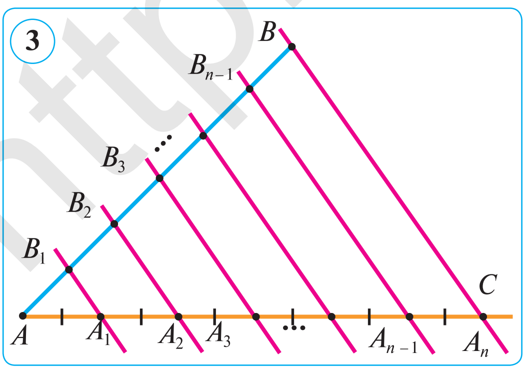
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB:4 = 18:4 = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

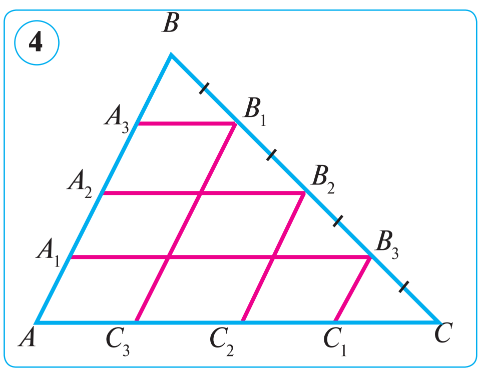
2) Anıqlamaǵa muwapıq, $AA_1B_3C_1$ tórtmúyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_1 \parallel C_1B_3$ (shártke muwapıq) hám $A_1B_3 \parallel AC_1$ (jasawǵa baylanıslı).

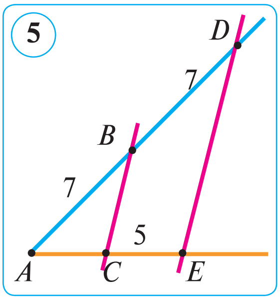
Demek, $AA_1 = C_1B_3 = 4{,}5$ (cm).

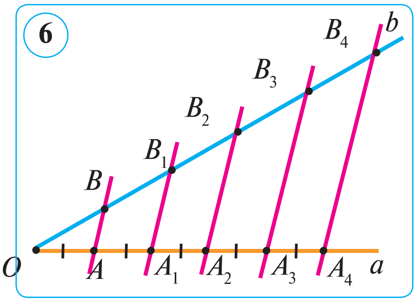
3) Anıqlamaǵa muwapıq $AA_2B_2C_2$ tórtmúyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_2 \parallel C_2B_2$ (shártke muwapıq) hám $A_2B_2 \parallel AC_2$ (jasawǵa muwapıq). Demek,

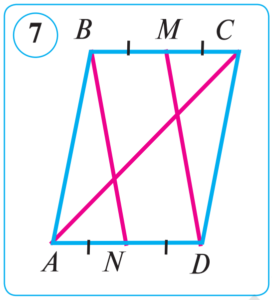
$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4{,}5 = 9 \text{ (cm)}.$$











4) Anıqlamaǵa muwapıq, $AA_3B_1C_3$ tórtmúyeshlik — parallelogramm, sebebi $AA_3 \| C_3B_1$ (shártke muwapıq) hám $A_3B_1 \| AC_3$ (islewge muwapıq). Demek,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (cm)}.$$

Juwabı: $C_1B_3 = 4{,}5$ cm, $C_2B_2 = 9$ cm, $C_3B_1 = 13{,}5$ cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Fales teoremasın aytıń.
2) Fales teoreması tek múyesh ushın orınlıma?
3) Berilgen kesindi qalay etip n teń bólekke bólinedi?

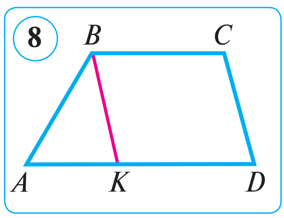
2. (*Ámeliy tapsırma.*) Cirkul hám sızǵısh járdeminde berilgen AB kesindini: 1) eki; 2) úsh; 3) altı; 4) jeti teń bólekke bóliń.

3. *Berilgen*: $\angle A$, $AB = BD = 7$ cm, $BC \| DE$, $CE = 5$ cm (5-súwret).
Tabıw kerek: AC.

4. *Berilgen*: $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 = 8$ cm (6-súwret).
Tabıw kerek: OB_1, OB_2, OB_3.

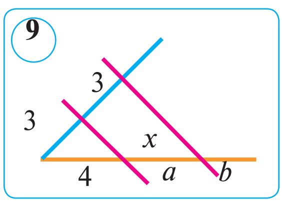
5. $ABCD$ parallelogrammda M noqat BC tárepiniń ortası, N noqat AD tárepleriniń ortası. BN hám MD tuwrı sızıqları parallelogrammnıń AC diagonalın teń úsh bólekke bóliniwin dálilleń (7-súwret).

6. $ABCD$ trapeciyada B tóbesi arqalı CD tárepke parallel BK tuwrı sızıq ótkizilgen (8-súwret).
1) $KBCD$ – parallelogramm ekenin dálilleń.
2) Eger $BC = 4$ cm, $P_{ABK} = 11$ cm bolsa, trapeciyanıń perimetrin tabıń.



7. Cirkul hám sızǵısh járdeminde berilgen AB kesindisin: 1) tórtke, 2) bes teń bólekke bóliń.

8. $a \| b$ ekeni belgili. 9-súwrette berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp, x tı tabıń.



9. *Berilgen:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18$ cm (6-súwretke q.).
Tabıw kerek: OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. ÚSHMÚYESHLIKTIŃ ORTA SÍZÍĞÍNÍŃ QÁSIYETI. TRAPECIYA ORTA SÍZÍĞÍNÍŃ QÁSIYETI

1. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyeti.

Anıqlama. *Úshmúyeshliktiń* ***orta sızıǵı*** *dep onıń eki tárepi ortaların tutastırıwshı kesindige aytıladı.*

ABC úshmúyeshliginde $AD=DB$ hám $CE=EB$ bolsın, bunday halda DE orta sızıq boladı (anıqlama boyınsha). DE orta sızıqqa qaraǵanda AC tárep *ultan* dep ataladı (1-súwret). Hárqanday úshmúyeshliktiń úsh orta sızıq boladı (2-súwret).

1-teorema.

Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı onıń úshinshi tárepine parallel bolıp, uzınlıǵı bolsa sol tárep uzınlıǵınıń yarımına teń.

Berilgen: $\triangle ABC$ da: $AD=DB$, $CE=EB$, DE – orta sızıq (3-súwret).

Dálillew kerek: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE=\frac{1}{2}AC$.

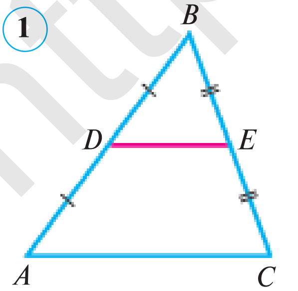
Dálil. 1) DE kesindi ABC úshmúyeshliktiń orta sızıǵı bolsın. D noqat arqalı AC tárepke parallel tuwrı sızıq ótkizemiz. Bul tuwrı sızıq Fales teroremasına muwapıq BC kesindini ortasınan kesip ótedi, yaǵnıy DE orta sızıqtı óz ishine aladı. Jasalıwına qaray, $DE \parallel AC$.

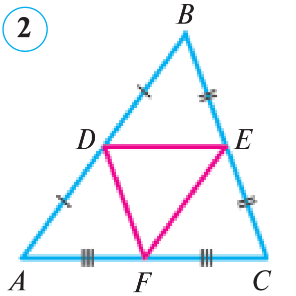
2) Endi EF orta sızıqtı ótkizemiz. 1-bántte dálillengenine qaray, ol AB tárepke parallel boladı: $EF \parallel AB$, bunnan $EF \parallel AD$. $ADEF$ tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri óz ara parallel bolǵanı ushın anıqlama boyınsha parallelogramm boladı. Parallelogrammnıń qásiyetine qaray $DE=AF$, Fales teoremasına muwapıq $AF=FC$ bolǵanı ushın, $DE=\frac{1}{2}AC$ bolsa.

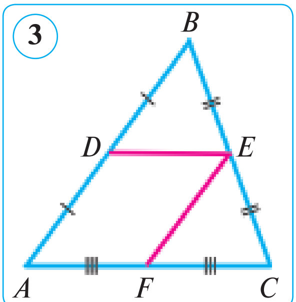
Teorema dálillendi.

1-másele. Úshmúyeshliktiń perimetri p ǵa teń. Tóbeleri berilgen úshmúyeshliktiń tárepleriniń ortasında bolǵan úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń tárepleri berilgen úshmúyeshliktiń orta sızıqları boladı (2-súwret). Demek, olar sáykes tárepleriniń

1


2


3


yarımına teń. Sol sebepli izlenip atırǵan perimetr berilgen úshmúyeshliktiń perimetriniń yarımına teń boladı:

$$P_{DEF} = DE + EF + FD = 0{,}5(AC + AB + BC) = 0{,}5\ p.$$

Juwabı: 0,5 *p.*

2. Trapeciya orta sızıǵınıń qásiyeti.

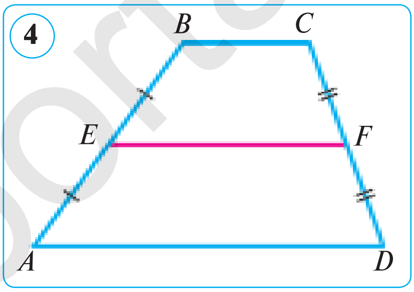
Anıqlama. *Trapeciyanıń qaptal tárepleriniń ortasın tutastırıwshı kesindi* ***trapeciyanıń orta sızıǵı*** *delinedi.*

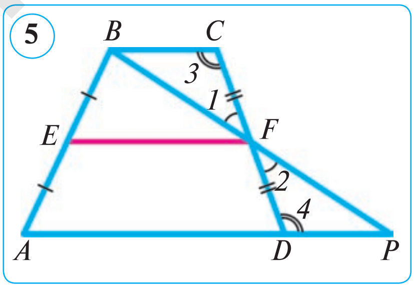
Bizge *ABCD* trapeciyası berilgen bolıp, onda *AD* hám *BC* — trapeciya ultanları; *AB* hám *DC* onıń qaptal tárepleri, *E* hám *F* noqatları qaptal táepleriniń ortaları bolsın (4-súwret). Bunda *EF* — trapeciyanıń orta sızıǵı boladı.

2-teorema.

Trapeciyanıń orta sızıǵı onıń ultanına parallel hám onıń uzınlıǵı trapeciya ultanları uzınlıqları qosındısınıń yarımına teń.

Dálil. *EF*—ultanları *AD* hám *BC* bolǵan *ABCD* trapeciyanıń orta sızıǵı bolsın ($AD \parallel BC$). *BF* tuwrı sızıq ótkizimiz hám onıń *AD* tuwrı sızıq penen kesilisken noqatın *P* dep belgileymiz (5-súwret). Úshmúyeshlikler teńliginiń ekinshi belgisi boyınsha, *BCF* hám *PDF* úshmúyeshlikler teń ($CF = DF$ shárt boyınsha, $\angle 1 = \angle 2$ – vertikal múyeshler hám $\angle 3 = \angle 4$ – *BC* hám *AD* parallel tuwrı sızıqlar hám de *CD* kisilsiwshi payda etken ishki almasıwshı múyeshler bolǵanı ushın). Bul úshmúyeshliklerdiń teńliginen tárepler teń degen juwmaq shıǵadı: $BF = PF$ hám $BC = DP$. Demek, trapeciyanıń *EF* orta sızıǵı *ABP* úshmúyeshliktiń orta sızıǵı eken. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetine muwapıq:





$$EF \parallel AP \text{ hám } EF = \frac{1}{2}AP$$

$AD \parallel BC$ bolǵanı sebepli, *EF* hár eki ultanǵa parallel boladı hám tómendegishe ańlatıwǵa boladı:

$$EF = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Demek, $EF \parallel AD \parallel BC$ hám $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Teorema dálillendi.

Nátiyje. Trapeciyanıń qaptal tárepiniń ortasınan ótiwshi hám ultanlarına parallel tuwrı sızıq ekinshi qaptal tárepin teń ekige bóledi. Óz betińizshe dálilleń.

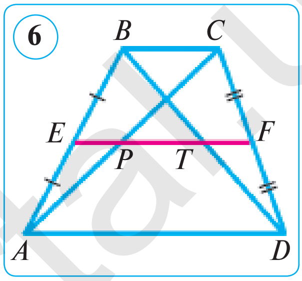
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı dep nege aytıladı?
2) Úshmúyeshlikten neshe orta sızıq jasaw múmkin?

2. Úshmúyeshliktiń tárepleri 5 cm, 7 cm hám 11 cm ge teń. Tóbeleri usı úshmúyeshlik tárepleriniń ortalarında jatqan úsmúyeshlik táreplerin tabıń.

3. Úshmúyeshliktiń orta sızıqları 6 cm, 7 cm hám 9 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

4. Trapeciyanıń diagonalları onıń orta sızıǵı *EF* ti *E* tóbesinen baslap 5 cm, 7 cm hám 4 cm li kesindilerge bóledi (6-súwret). Trapeciyanıń ultanların tabıń. Bos jerlerge sáykes juwaplardı jazıń.



5. *ABC* úshmúyeshlik tárepleriniń hárbiri úsh teń kesindige bólingen hám bóliniw noqatları kesindiler menen tutastırılǵan. *ABC* úshmúyeshliktiń perimetri p ge teń bolsa, 7-súwrette payda bolǵan figuranıń perimetrin tabıń.

6. Trapeciyanıń tiykarları: 1) 4,5 dm hám 8,2 dm; 2) 9 cm hám 21 cm ge teń. Onıń orta sızıǵınıń uzınlıǵı qansha?

7. *ABCD* trapeciyada (8-súwret) *EF* kesindi *CD* tárepke parallel, *E* noqat bolsa *AB* nıń ortası. $EF=0,5CD$ ekenligin dálilleń.

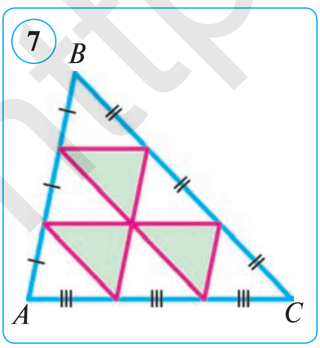
8. 9-súwrettegi belgisiz uzınlıqlardı esaplań.

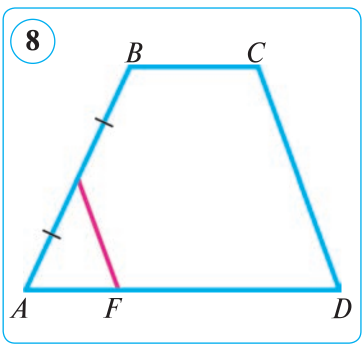
9. Trapeciyanıń diagonalları onıń orta sızıǵınıń hárbirin 6 cm li kesindilerge bóledı. Usı trapeciyanıń ultanların tabıń.

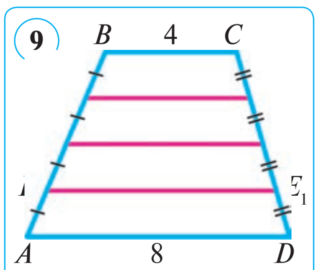
10. Teń qaptallı trapeciyada uzınlıǵı 6 cm ge teń diagonalınıń ultanı menen 60° lı múyesh payda etedi. Trapeciyanıń orta sızıǵın tabıń.

11. Trapeciyanıń úlken ultanı kishi ultanınan 3 ese úlken hám onıń orta sızıǵı 20 cm ge teń. Trapeciyanıń ultanların tabıń.

12. Trapeciyanıń perimetri 40 cm ge, parallel bolmaǵan tárepleriniń qosındısı bolsa 16 cm ge teń. Usı trapeciyanıń orta sızıǵın tabıń.







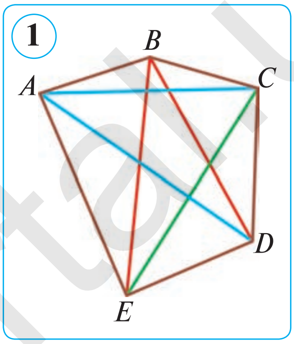
ABCD – trapeciya.
Tabıw kerek: *x*, *y*, *z*.

12. ÁMELIY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

Izertlew ushın máseleler.

1-másele. Tárepler sanı n bolǵan kópmúyeshlikti jasań hám onıń diagonalların ótkiziń, bunda: 1) $n=5$; 2) $n=7$; 3) $n=8$. Kópmúyeshliktiń hár qıylı diagonallarınıń sanın (d_n) esaplaw formulasın pikir júrgizip tabıń.

Sheshiliwi. 1) $n=5$. A tóbesinen **2** AC hám AD, B tóbesinen **2** BD hám BE diagonallar shıǵadı hám t.b. Bes tóbesiniń háribinen 2 den diagonal shıǵadı (1-súwret).



Bunnan dóńes besmúyeshliktiń hárbir tóbesinen shıqqan diagonallarınıń sanı tárepleri (tóbeleri) sanınan 3 ke kemligi, yaǵnıy $5-3=2$ ge teń ekeni kelip shıǵadı. Barlıq tóbelerinen shıqqan diagonalları sanını tabıw ushın tárepleriden 2 ge kóbeytemiz:

$$\mathbf{5\cdot(5-3)=5\cdot 2=10}.$$

Bul kóbeymede hárbir diagonal eki márteden esapqa alınǵan. Biraq AC hám CA, BD hám DB hám t.b. bir diagonaldıń eki túrli belgileniwi, yaǵnıy olar jańa diagonallar emes. Sol sebepli payda etilgen kóbeymeni **2** ge bólip, jámi hár qıylı diagonallar sanın tabamız:

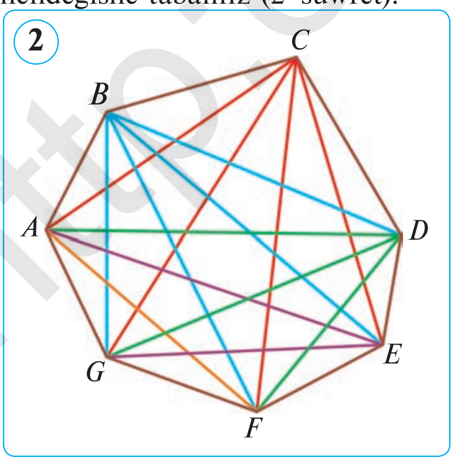
$$5\cdot 2:2=\mathbf{5}.$$

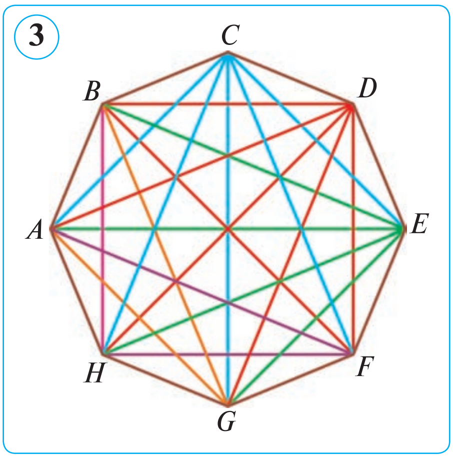
Solay etip, jámi hár túrli diagonallar sanın tómendegishe tabamız:

$$d_5=\frac{5\cdot(5-3)}{2}=\frac{5\cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}}=\mathbf{5}.$$

Juwabı: 5.

2) $n=7$. Dóńes jetimúyeshliktiń jámi hár túrli diagonalları sanı joqarıda kórsetip ótilgen másele sheshimine uqsap tabıladı. Islengen pikirlesiwlerde anıqlanǵan nızamshılıqqa tiykarlanıp, dóńes jetimúyeshliktiń diagonalları sanın tómendegishe tabamız (2-súwret):





$$d_7 = \frac{7\cdot(7-3)}{2} = \frac{7\cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{14}.$$

Juwabı: 14.

3) $n=8$. Dóńes segizmúyeshliktiń jámi hár qıylı diagonalları sanı joqarıda kórsetip ótilgen másele sheshimine uqsap tabıladı. Islengen pikir-lesiwlerde anıqlanǵan nızamshılıqqa tiykarlanıp, dóńes segizmúyeshliktiń diagonallarınıń sanın tabamız (3-súwret):

$$d_8 = \frac{8\cdot(8-3)}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}} = \mathbf{20}.$$

Juwabı: 20.

Demek, dóńes kópmúyeshliktiń hár qıylı diagonalları sanı tómendegi formula boyınsha tabıladı:

$$\boldsymbol{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}.$$

Eskertiw! *Dóńes n múyeshtiń bir tóbesinen shıqqan diagonalları onı (n—2) úshmúyeshlikke bóledi.*

2-másele. Kópmúyeshliktiń 25 diagonalı bolıwı múmkin be?

Sheshiw. n múyeshtiń jámi hár túrli diagonallarınıń sanı $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ ge teń. Demek, $\frac{n(n-3)}{2} = 25$. Ol jaǵdayda $n(n-3)=50$ yaki $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Bunnan kórinip tur, 50 di bir-birinen 3 ge parqı bolatuǵın 2 ki natural sannıń kóbeymesi kórinisinde ańlatıp bolmaydı. Sonıń ushın jámi hár qıylı diagonallarınıń sanı 25 bolatuǵın kópmúyeshlik joq.

Juwabı: joq, bolmaydı.

3-másele. Matematika bólmesindegi súwretlerde súwretlengen úshmúyeshlik hám tórtmúyeshliklerdiń sanı 15. Olardıń tárepleri sanı 53. Súwretlerde neshe úshmúyeshlik hám neshe tórtmúyeshlik súwretlengen?

Sheshiliwi. Tórtmúyeshliktiń tárepleriniń sanı natural sannıń qálegen mánisinde tórtke kóbeyedi, yaǵnıy jup san boladı. Úshmúyeshlikler sanı taq san bolǵanda ǵana, qosındı taq boladı.

Másele shártine muwapıq teńleme dúzemiz: $3x+4y=53$.

Tómende múmkin bolǵan jaǵdaylardı kórip shıǵamız. Teńlemedegi belgisizler ornına tiyisli mánislerin qoyıp, onı qanaatlandırıwshı sheshimdi tabamız.

1-jaǵday. $x=1$ hám $y=14$ bolsın. Ol jaǵdayda $3\cdot1+4\cdot14=53$, yaǵnıy $59\neq 53$.

2-jaǵday. $x=3$, $y=13$; $3\cdot3+4\cdot12=53$, yaǵnıy $57\neq53$.

3-jaǵday. $x=5$, $y=10$; $3\cdot5+4\cdot10=53$, yaǵnıy $55\neq53$.

4-jaǵday. $x=\mathbf{7}$, $y=\mathbf{8}$; $3\cdot7+4\cdot8=53$, yaǵnıy $53=53$.

4-jaǵday másele shártin qanaatlandırdı, sol sebepli basqa jaǵdaylar qaralmaydı.

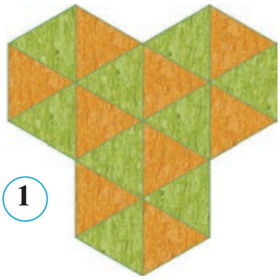
Juwabı: **7** úshmúyeshlik, **8** tórtmúyeshlik

Bekkemlew ushın qosımsha shınıǵıwlar.

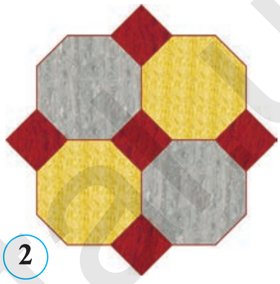
1. Dóńes kópmúyeshliktiń bir tóbesinen shńqqan diagonallarınıń sanı 13. Usı kópmúyeshliktiń tárepleriniń sanı qansha? Barlıq diagonallarınıń sanı-she?
2. Diagonallarınıń sanı: 1) tárepleri sanına teń; 2) tárepleriniń sanına az bolǵan; 2) tárepleriniń sanınan artıq bolǵan kópmúyeshlik bar ma?

ÁMELIY KOMPETENSIYANÍ RAWAJLANDÍRÍWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

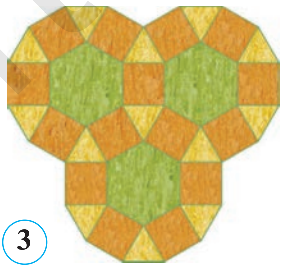
DURÍS KÓPMÚYESHLI PARKETLER


1

Siz, álbette, parket haqqında belgili bir túsinikke iyesiz. Kóbinese úyler, hár túrli imaratlar pollar tuwrı tórtmúyesh, kvadrat hám durıs múyeshli parketler menen bezetiledi.

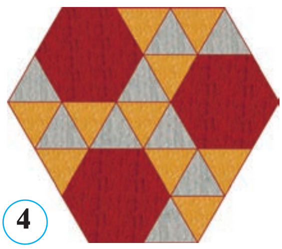

2

Matematikalıq kóz qarastan qaraǵanda, parket bul tegislikti geometriyalıq figuralar menen bir-birine tıǵız hám olardı kesispeytuǵın etip jaylastırıw. Dáslep tuwrı kópmúyeshlikler — kvadrat, tórtmúyeshlik hám altımúyeshlik parketlerdi kórip shıǵamız. Birdey kvadratlardan dúzilgen ketekli dápterińiz eń ápiwayı parketlerge mısal boladı. 1-súwrette durıs úshmúyeshliklerden; 2-súwrette kvadrat penen durıs altımúyeshlikten; 3-súwrette bolsa durıs altımúyeshlikler, kvadratlar hám teń tárepli úshmúyeshliklerden; 4-súwrette tuwrı altımúyeshlikler hám úshmúyeshliklerden dúzilgen sulıw parketler súwretlengen.

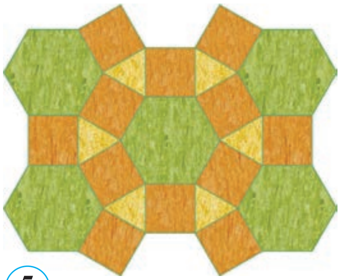

3

Parket dep, tegislikti kópmúyeshlikler menen sonday qaplawǵa aytıladı, bunda qálegen eki kópmúyeshlik ulıwma tárepke yaki ulıwma tóbege iye boladı, yamasa ulıwma tóbelerge iye bolmaydı.

Eger parket tuwrı kópmúyeshliklerden quralsa hám hárbir tóbe átirapında kópmúyeshlikler birdey usılda jaylasqan bolsa, parket *durıs* delinedi.


4

Teń tárepli úshmúyeshlikler, kvadratlar hám durıs altımúyeshlikler tegislikti qaplawshı parketlerge mısal boladı. Bulardan basqa durıs kópmúyeshlikler menen tegislikti qaplaw múmkin emesligin dálilleymiz. Bunıń ushın parkettiń bir tóbesinen shıǵıwshı kópmúyeshliklerdiń múyeshleri qosındısı 360° ǵa teń bolıwınan paydalanamız.



5

6

Bunıń ushın durıs besmúyeshlikti kórip shıǵamız. Bizge belgili, durıs besmúyeshliktiń ishki múyeshleri 108° ǵa teń. Parkettiń bir tóbesine úsh durıs besmúyeshlikti jaylastırıw múmkin emes, sebebi bul jaǵdayda múyeshler qosındısı $324° < 360°$ boladı. Eger tuwrı besmúyeshlikler sanı 4 ge teń yaki onnan úlken bolsa, ol jaǵdayda múyeshler qosındısı $432° > 360°$ boladı. Sonıń ushın durıs besmúyeshliklerden dúzilgen parketler joq. Tap usıǵan uqsas parkettiń bir tóbesine úsh yaki onnan kóp bolǵan tuwrı jetimúyeshli, durıs segiz múyeshli hám t.b. parket bólegin jaylastırıwǵa bolmaydı, sebebi olardıń hárbir múyeshi 120° dan úlken hám olardıń qosındısı 360° dan úlken boladı. Sol sebepli tuwrı jetimúyeshlik, durıs segizmúyeshlikten hám t.b. dúzilgen parketler joq.

5-súwrettegi durıs altımúyeshler, kvadratlar da teń tárepli úshmúyeshliklerden dúzilgen parketler 3-súwrettegi parketlerden jaylasıwı menen parıq etedi. 6-súwrette bolsa teń tárepli úshmúyeshlikler hám kvadratlardan dúzilgen parket súwretlengen. Keltirilgen hár eki parkette de ulıwma nızamshılıq saqlaǵanın kóriwge boladı, yaǵnıy tár tóbesi átirapında jaylasqan figuralardıń ishki múyeshleri qosındısı 360° ǵa teńligi óz-ózinen anıq. Máselen, 5-súwrette $60° + 90° + 90° + 120° = 360°$, yaǵnıy bir tóbesi átirapında bir teń tárepli úshmúyeshlik, 2 kvadrat hám bir tuwrı altımúyeshlik jaylasqan; 6-súwrette bolsa bir tóbesi átirapında 3 teń tárepli úshmúyeshlik (hárbir ishki múyeshi 60° dan) hám 2 kvadrat (harbir ishki múyeshi 90° dan) jaylasqan.

Tegislikti qaplawshı tuwrı parketlerdiń basqa túrlerin kestede keltiremiz. 5–6-súwretlerdegi parketlerdi jasap kóriń.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Úshmúyeshliklerden dúzilgen parket
60°	60°	120°	120°			Úshmúyeshlikler hám altımúyeshliklerden dúzilgen parket
60°	90°	90°	120°			Úshmúyeshlik, kvadratlar hám altımúyeshten dúzilgen parket
60°	150°	150°				Úshmúyeshlik hám onekimúyeshliklerden dúzilgen parket
90°	90°	90°	90°			Kvadratlardan dúzilgan parket
120°	120°	120°				Altımúyeshliklerden dúzilgen parket

13–14. 1-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 40 cm ge, tárepleriniń qatnası 3:5 ge teń. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepler in tabıń.
2. Parallelogrammnıń táreplerinen biri ekinshisinen 4 ese úlken, perimetri bolsa 30 cm ge teń. Parallelogrammnıń tárepler in tabıń.
3. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń súyir múyeshi 45° ǵa teń, kishi qaptal tárepi hám de kishi ultanı 16 cm ge teń. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
4. *ABCD* trapetsiyada *AD* – úlken ultanı. *B* tóbesi arqalı *CD* tárepke parallel hám *AD* tárepti *E* noqat kesilsetuǵın tuwrı sızıq ótkizilgen, $BC=7$ cm, $AE=$ 4 cm. 1) Trapetsiyanıń orta sızıǵın; 2) eger *ABE* úshmúyeshliktiń perimetri 17 cm ge teń bolsa, usı trapeciyanıń perimetrin tabıń.

1-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. Dóńes tórtmúyeshliktiń múyeshlerinen biri tuwri múyesh, qalǵanlari bolsa óz ara 3:4:8 qatnasta. Tórtmúyeshliktiń kishi múyeshin tabıń.
A) 72°; B) 54°; D) 144°; E) 90°.
2. Hárbir ishki múyeshi 156° bolǵan dóńes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?
A) 10 ta; B) 15 ta; D) 12 ta; E) 8 ta.
3. *ABCD* parallelogrammnıń perimetri 32 cm ge, *BD* diagonalı 9 cm ge teń. *ABD* úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.
A) 16 cm; B) 25 cm; D) 23 cm; E) 41 cm.
4. Eki múyeshinin qosındısı 100° qa teń bolǵan parallelogrammnıń úlken múyeshin tabıń.
A) 120°; B) 110°; D) 150°; E) 130°.
5. Rombınıń múyeshlerinen biri 150°qa teń, kishi diagonalı bolsa 4,5 cm. Rombınıń perimetrin tabıń.
A) 27 cm; B) 18 cm; D) 13 cm; E) 21,5 cm.
6. *ABCD* trapeciyanıń orta sızıǵı onı orta sızıqları 13 cm hám 17 cm ge teń bolǵan eki trapeciyaǵa ajıratadı. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
A) 19 cm; B) 21 cm; D) 18 cm; E) 30 cm.
7. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı onıń ultanınan 5,4 cm ge qısqa. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı menen ultanınıń qosındısın tabıń.
A) 13,5 cm; B) 16,2 cm; D) 10,8 cm; E) 21,6 cm.
8. Teń qaptallı trapeciyanıń perimetri 36 cm, orta sızıǵı 10 cm. Qaptal tárepiniń uzınlıǵın tabıń.
A) 10 cm; B) 8 cm; D) 12 cm; E) 13 cm.
9. Trapeciyanıń orta sızıǵı 9 cm, ultanlarınan biri ekinshisinen 6 cm qısqa. Trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.
A) 15 cm; B) 18 cm; D) 12 cm; E) 10 cm.

Inglis tilin úyrenemiz!

Kópmúyeshlik — polygon	**Perimetr** — perimeter
Tuwrı tórtmúyeshlik — rectangle	**Diagonal** — diagonal
Romb — rhombus	**Parallelogramm** — parallelogramm
Kvadrat — square	**Trapeciya** — trapezoid
Biyiklik — height	**Múyesh** — angle

Tariyxıy maǵlıwmatlar

Abu Rayxan Beruniy
(973—1048)

Áyyemgi Mısr hám Bobil matematikasında tórtmúyeshliklerdiń tómendegi túrleri ushırasadı: kvadratlar, tuwrı tórtmúyeshlikler, tuwrı múyeshli hám teń qaptallı trapeciyalar.

Orta aziyalı alımlardan **Abu Rayxan Beruniy** da tórmúyeshliklerdiń túrleri boyınsha kóplegen izertlewler alıp barǵan. Ol óziniń «Astronomiya kórkem ónerinen baslanǵısh maǵlıwmat beriwshi kitap» atamasındaǵı shıǵarmasında «Tórtmúyeshliklerdiń túri qanday» — dep soraw qoyadı hám oǵan tómendegishe juwap beredi:

*«Olardan **birinshisi** — **kvadrat**, onıń barlıq tárepleri teń, barlıq múyeshleri tuwrı, diagonalları, yaǵnıy qarama-qarsı múyeshlerin (tóbelerin) tutastırıwshı sızıqları óz ara teń.*

***Ekinshisi** — **tuwrı tórtmúyeshlik**, ol kvadratqa qaraǵanda uzınıraq, barlıq múyeshleri tuwrı, tárepleri hár qıylı, olardıń tek qarama-qarsı tárepleri hám diagonalları teń.*

***Úshinshisi** — **romb**, onıń tórt tárepi teń, biraq diagonalları hár qıylı, múyeshleri bolsa tuwrı múyesh emes.*

***Tórtinshisi** — **romboid**, onıń diagonalları hár qıylı, tek eki qarama-qarsı tárepleri teń.*

*Bul figuralardan parqlı tórmúyeshlikler **trapeciyalar** dep ataladı.*

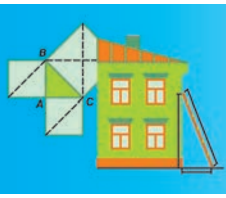
Kvadrat latınsha sóz, «tórt múyeshli» degen mánisti bildiredi. Beruniy arabsha «*murabba*» terminin qollanǵan, latınshaǵa usı termin awdarma etilgen. Tuwrı tórtmúyeshlik arab tilinde «*mustatil*» — «sozılǵısh» degen mánini ańlatadı.

Romb termininiń payda bolıwı hár qıylı túsindiriledi. Ol grekshe sóz bolıp, romb «*aylanıwshı zat*», «*dóńgelek*» mánisin bildiredi. Geometriyada bul termin dóńgelek kesindiniń rombǵa uqsawı sebebinen kirgen. Arabshada «*romb*» ushın «*muayyan*» termini alınǵan.

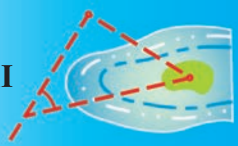
Trapeciya grekshe sóz bolıp, awdarması «*kishistol*» (awqat jeytuǵın stol) ǵa tuwrı keledi, sóz mánisi — tórt ayaqlı. Haqıyqattan, grekshe «trapedzion» — «kishi stol», «awqatlanıw stolı» degen mánisti ańlatadı.

Beruniy shıǵarmalarında «*trapeciya*» — «*muxarrif*» dep atalıp, bul termin grekshe «trapedzion» sóziniń arab tilindegi awdarması.

Parallelogramm grekshe sóz bolıp, tuwrı sızıqlı maydan degen mánisti bildiredi. «Parallelogramm» arab tilinde «*mutavozi al-azla*», yaǵnıy «ultanları parallel» degen mánisti bildiredi.



II BAP
TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKTIŃ TÁREPLERI HÁM MÚYESHLERI ARASÍNDAǴÍ QATNASLAR



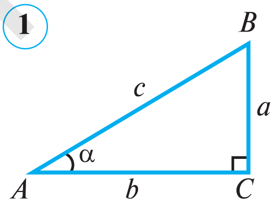
3-§. SÚYIR MÚYESHTIŃ TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKSIYALARÍ

15. SÚYIR MÚYESHTIŃ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSI

Trigonometriya matematikanıń bólimi bolıp, úshmúyeshliktiń tárepleri menen múyeshler arasındaǵı baylanıslar, trigonometriyalıq funkciyalardıń qásiyetleri hám olardıń arasındaǵı qatnasıqlardı úyrenedi. «**Trigonometriya**» sózi grekshe «**trigon**» — úshmúyeshlik hám «**metrezis**» — ólshew degen sózlerinen alınǵan bolıp, ózbek tilinde «**úshmúyeshliklerdi ólshew**» degen mánisti bildiredi.

Trigonometriyanıń tiykarǵı wazıypası *úshmúyeshliklerdi sheshiwden* ibarat. Úshmúyeshlik geometriyanıń eń áhmiyetli figuralarınan biri bolıp esaplanadı. Sonıń ushın úshmúyeshliklerdi úyreniwdi dawam ettiremiz. Baptıń tiykarǵı maqseti úshmúyeshliklerdiń qanday da bir elementin (tárepleri hám múyeshleri) basqa elementleri arqalı ańlatıwdan ibarat.

1



Katetleri $BC=a$ hám $AC=b$, gipotenuzası $AB=c$ hám súyir múyeshi $\angle A=\alpha$ bolǵan tuwrı múyeshli ($\angle C=90°$) ABC úshmúyeshlik berilgen bolsın (1-súwret).

Usı úshmúyeshliktiń jup-jubı menen tárepleri qatnasın alayıq:

$\frac{a}{c}$ — α múyesh tuwrısındaǵı katettiń gipotenuzaǵa qatnası;

$\frac{b}{c}$ — α múyeshke jaylasqan katettiń gipotenuzaǵa qatnası;

$\frac{a}{b}$ — α múyesh tuwrısındaǵı katettiń usı múyeshke jaylasqan katetke qatnası;

$\frac{b}{a}$ — α múyeshke jaylasqan katettiń usı múyesh tuwrısındaǵı katetke qatnası;

$\frac{c}{b}$ — gipotenuzanıń α múyeshke jaylasqan katetke qatnası;

$\frac{c}{a}$ — gipotenuzanıń α múyesh tuwrısındaǵı katetke qatnası.

Solay etip, jámi 6 qatnastı payda ettik.

Tap usıǵan uqsas, ekinshi súyir múyesh (B) ushın da usı tártipte qatnaslardı dúziwimizge boladı.

Bul qatnaslardan dáslepki tórtewi *arnawlı atamalar* menen ataladı.

1-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **sinusı** dep, usı múyesh tuwrısındaǵı katettiń gipotenuzaǵa qatnasına aytıladı.

α múyeshtiń sinus **sin**α sıyaqlı belgilenedi hám «*sinus alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **kosinusı** dep, usı múyeshke jaylasqan katettiń gipotenuzaǵa qatnasına aytıladı.

α múyeshtiń kosinus **cos**α sıyaqlı belgilenedi hám «kosinus alfa» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

3-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **tangensi** dep, usı múyesh tuwrısındaǵı katettiń múyeshke jaylasqan katetke qatnasına aytıladı.

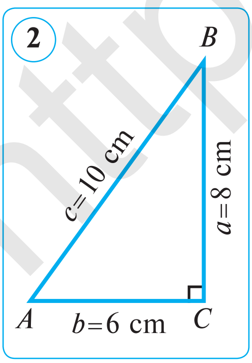
α múyeshtiń tangensi **tg**α sıyaqlı belgilenedi hám «*tangens alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

4-anıqlama. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshiniń **katangensi** dep, usı múyeshke jaylasqan katettiń tuwrısındaǵı katetke qatnasına aytıladı.

α múyeshtiń katangensi **ctg**α sıyaqlı belgilenedi hám «*kotangens alfa*» dep oqıladı. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$



Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katet gipotenuzadan kishi bolǵanı ushın ***súyir múyeshtiń sinusı hám kosinusı birden kishi*** boladı.

Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katetler óz ara teń, biri ekinshisinen úlken yaki kishi bolıwı múmkin. Sonıń ushın tangens hám kotangenstiń mánisleri ***1 den kishi, 1 ge teń*** hám de ***1 den úlken*** bolıwı múmkin.

Másele. ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90^\circ$, $AB=10$ cm, $BC=8$ cm, $AC=6$ cm (2-súwret). A múyeshtiń trigonometriyalıq funkciya ları mánislerin tabıń.

Sheshiliwi. Anıqlamaǵa muwapıq:

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{8}{10}=0,8;\qquad \text{tg}A=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{6}_{3}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{10}=0,6;\qquad \text{ctg}A=\frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{8}_{4}}=\frac{3}{4}=0,75;$$

Juwabı: $\sin A=0,8$; $\cos A=0,6$; $\text{tg}A=1\frac{1}{3}$; $\text{ctg}A=0,75$.

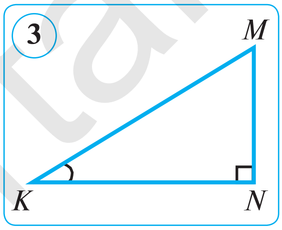
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tareplerinen qanday qatnaslar dúziw múmkin hám olar qalay oqıladı?

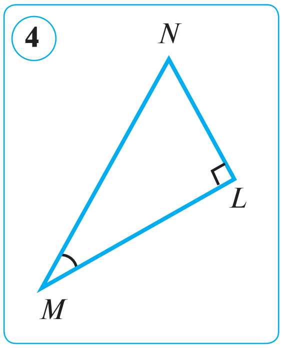
? 2) Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte súyir múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi dep nege aytıladı hám olar qanday belgilenedi?

2. Hárbir bólshek anıqlamaǵa muwapıq K múyeshtiń qaysı trigonometriyalıq funkciyanı ańlatadı (3-súwret):

a) $\frac{KN}{KM}$; b) $\frac{MN}{KN}$; d) $\frac{MN}{KM}$; e) $\frac{KN}{MN}$?



3. $\triangle ABC$ da $\angle C=90^\circ$, $AB=6$ cm, $BC=5$ cm, $AC=\sqrt{11}$ cm (1-súwretke q.). A hám B múyeshler sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangenesleri mánislerin tabıń.

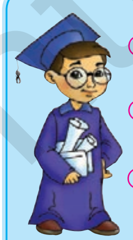


4. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte súyir múyeshtiń sinusı: a) 0,98; b) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5}-2$ ge teń bolıwı múmkin be?

5. Tuwrı múyeshli MNL úshmúyeshlikte $\sin N=\frac{24}{25}$ ge teń. Bul teńlikten úshmúyeshliktiń qaysı tareplerin tabıw múmkin (4-súwret)?

6. MNL úshmúyeshlikte $\angle L=90^\circ$, $MN=13$ cm, $ML=12$ cm, $NL=5$ cm (4-súwret). M múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi mánislerin tabıń.

7. ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90^\circ$, $AB=17$ cm, $BC=8$ cm, $AC=15$ cm. A hám B múyeshler sinusı, kosinusi, tangensi hám kotangensi mánislerin tabıń.



Bilip qoyǵan paydalı!

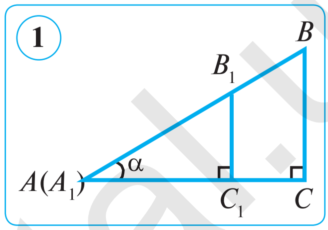
- *«**Sinus**» ataması latın tilinen alınǵan bolıp, «iyiliw» degen mánisti ańlatadı.*
- *«**Tangens**» ataması latın tilinen awdarǵanda «urınba» degen mánisti ańlatadı.*
- *«**Kosinus**» hám «**kotangens**» atamaları «complementi sinus» hám «complementi tangens» — «tolıqtırıwshı sinus» hám «tolıqtırıwshı tangens» atamalarınıń qısqartpalarınan ibarat.*

16. SÚYIR MÚYESHTIŃ SINUSI, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KATANGENSI (DAWAMÍ)

1. Súyir múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları.

Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte súyir múyeshtiń sinusı, kosinusı tangensi hám kotangensiniń mánisleri tek súyir múyesh úlkenligine baylanıslı hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tańlanıwına baylanıslı emesligin kórsetemiz.

Tuwrı múyeshli ABC hám $A_1B_1C_1$ Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte súyir múyeshtiń sinusı, kosinusı tangensi hám kotangensiniń mánisleri tek súyir múyesh úlkenligine baylanıslı hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tańlanıwına baylanıslı emesligin kórsetemiz. Tuwrı múyeshli ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliklerde $(\angle C = \angle C_1 = 90°)$ $\angle A = \angle A_1$ bolsın (1-súwret).



Proporciyanıń tiykarǵı qásiyeti boyınsha:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1};\ \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Bul teńliklerdiń shep hám oń bólimleri sáykes túrde A hám A_1 súyir múyeshlerdiń sinusları kosinusları, tangensleri hám kotangenslerine teń. Demek,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,\quad \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \mathrm{tg}A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1,\quad \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \mathrm{ctg}A_1.$$

Bulardan kórinip tur, A súyir múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi úshmúyeshliginiń tańlanıwına baylanıslı emes. Eger súyir múyeshtiń mánisi ózgerse, bul qatnaslar, álbette, ózgeredi.

Solay etip, **súyir múyeshtiń sinusı, kosinusi, tangensi hám kotangensi tek súyir múyeshtiń úlkenligine baylanıslı.**

Sinus, kosinus, tangens hám kotangens ***súyir múyeshtiń trogonometriyalıq funkciyaları*** delinedi.

Joqarıda keltirilgen teńliklerden tómendegi ámiyetli juwmaqqa keliw múmkin:

eger A hám A_1 súyir múyeshler ushın trogonometriyalıq funkciyalardan birewi teń bolsa, ol jaǵdayda A hám A_1 súyir múyeshler teń ($\angle A = \angle A_1$) boladı.

Basqasha aytqanda, ***trigonometriyalıq funkciyanıń hárbir mánisine bir súyir múyesh sáykes keledi***.

2. Tangens hám kotangenstiń sinus hám kosinuslar arqalı ańlatılıwı.

Sinus hám kosinus anıqlamalarınan tómendegi teńlikler kelip shıǵadı (15-temaǵa.q.):

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \text{ yaǵnıy } \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{b}{a}=\text{ctg}\alpha\text{, yağnıy } \text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Solay etip, súyir múyesh tangensi hám kotangensi sinus hám kosinus arqalı tómendegishe anıqlama beriledi:

*Súyir múyesh sinustıń kosinusqa qatnası usı múyeshtiń **tangensi** delinedi.*
*Súyir múyesh kosinustıń sinusqa qatnası usı múyeshtiń **kotangensi** delinedi.*

(1) hám (2) teńliklerdi ağzama-ağza kóbeytip, tómendegi teńlikti payda etemiz:

$$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1\Leftrightarrow\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1. \qquad (3)$$

Demek, α **súyir múyesh tangensi hám kotangensiniń kóbeymesi 1 ge teń.**

Bunnan, α súyir múyesh tangensi hám kotangensi óz ara keri funkciyalar ekeni kelip shığadı.

Solay etip, biz α súyir múyesh ushın úsh jańa **teńlikti** keltirip shığardıq.

3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri menen múyeshleri arasındağı qatnaslar.

Trigonometriyalıq funkciyalardıń anıqlamalarınan tómendegi qağıydalar kelip shığadı.

1-qağıyda. α **múyesh tuwrısındağı katet gipotenuza menen** α **múyesh sinusınıń kóbeymesine teń:**

$$a=c\sin\alpha.$$

2-qağıyda. α **múyesh tuwrısındağı katet ekinshi katet penen** α **múyesh tangensiniń kóbeymesine teń:**

$$a=b\,\text{tg}\alpha.$$

3-qağıyda. α **múyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen** α **múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń:**

$$b=c\cos\alpha.$$

4-qağıyda. α **múyeshke jaylasqan katet tuwrısındağı katettiń** α **múyesh tangensine qatnasına teń:**

$$b=\frac{a}{\text{tg}\alpha}.$$

5-qağıyda. Gipotenuza α **súyir múyesh tuwrısındağı katettiń** α **múyesh sinusına qatnasına teń:**

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}.$$

6-qağıyda. Gipotenuza α **súyir múyeshke jaylasqan katettiń** α **múyesh kosinusına qatnasına teń:**

$$c=\frac{b}{\cos\alpha}.$$

Másele. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ğa teń. Eger:

1) $AB=18$ cm hám $\sin A=\frac{1}{3}$ bolsa, BC katetti; 2) $AC=15$ cm hám $\cos A=\frac{5}{6}$ bolsa, AB gipotenuzanı; 3) $BC=26$ cm hám $\operatorname{tg}A=\frac{13}{15}$ bolsa, AC katetti esaplań.

Sheshiliwi. 1) 1-qaǵıydadan paydalanıp,, BC katetti tabamız:

$$BC=AB\sin A={}^{6}\cancel{18}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=6\ (\text{cm}).$$

Juwabı: 6 cm.

2) 6-qaǵıydadan paydalanıp, AB gipotenuzanı tabamız:

$$AB=\frac{AC}{\cos A}=15:\frac{5}{6}={}^{3}\cancel{15}\cdot\frac{6}{\cancel{5}_{1}}=3\cdot6=18\ (\text{cm}).$$

Juwabı: 18 cm.

3) 4-qaǵıydadan paydalanıp, AC katetti tabamız:

$$AC=\frac{BC}{\operatorname{tg}A}=26:\frac{13}{15}={}^{2}\cancel{26}\cdot\frac{15}{\cancel{13}_{1}}=2\cdot15=30\ (\text{cm}).$$

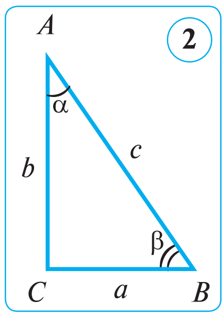
Juwabı: 30 cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Súyir múyeshtiń tironometriyalıq funkciyaları dep nege aytıladı?
2) Súyir múyesh sinusı, kosinusı tangensi hám kotangensiniń muǵdarları nege baylanıslı?

2. Tómendegi berilgen teńliklerden qaysı biri tuwrı ekenin anıqlań (2-súwret). Juwabıńızdı tiykarlań.

a) $c=\frac{a}{\sin\alpha}$; b) $b=c\sin\alpha$; d) $c=a\operatorname{tg}\alpha$; e) $a=\frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}$.



3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik súyir múyeshtiń tangensi $\sqrt{2}$; 0,001 hám 100 ge teń bolıwı múmkin be? Juwabın dálilleń.

4. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger:

1) $BC=10$ cm hám $\operatorname{tg}A=\frac{5}{8}$ bolsa, AC katetti;

2) $BC=8$ cm hám $\sin A=0{,}16$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplań.

5. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri menen múyeshleri arasındaǵı 6 qatnastı β múyesh ushın keltirip shıǵarıń (2-súwret).

6. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $BC=4$ cm hám $\sin A=0{,}25$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplań.

7. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $AC=2$ cm hám $\cos A=0{,}4$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplań.

8. ABC úshmúyeshlikte C múyesh 90° ǵa teń. Eger $BC=14$ cm hám $\cos B=\frac{7}{25}$ bolsa, AB gipotenuzanı esaplań.

4-§. PIFAGOR TEOREMASÍ HÁM ONÍŃ QOLLANÍLÍWÍ

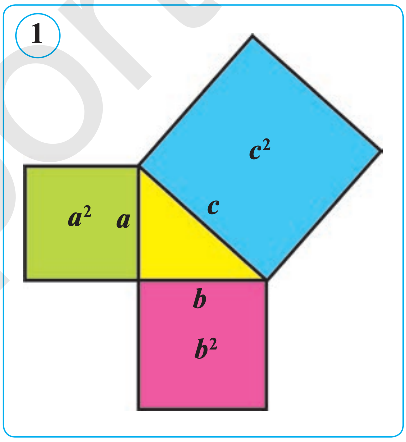
17. PIFAGOR TEOREMASÍ HÁM ONÍŃ HÁR QÍYLÍ DÁLILLERI

1. Pifagor teoreması — geometriyanıń áhmiyetli teoremalarınan biri.

Ullı grek matematigi **Pifagor**dıń ómiri haqqında maǵlıwmatlar júdá az. Pifagor mektebi figuralardı ajıratıw hám tuwrı sızıqlı figuralardı birdey figuralarǵa almastırıwdıń giometriyalıq usılınan teoremalardı dálillew hám máseleler sheshiwde paydalanǵanı grek matematikleriniń shıǵarmalarınan bizge belgili. Ásirese, geometriyanıń pán sıpatında payda bolıwına Pifagor hám onıń mektebi úlken úles qosqan. Tómende keltiriletuǵın teorema Pifagor atı menen júrgiziledi.

Teorema.

(Pifagor teoreması.) **Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik gipotenuzasınıń kvadratı onıń katetleri kvadratlarınıń qosındısına teń.**



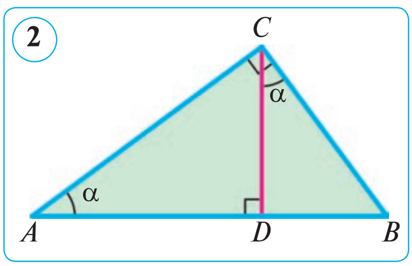
Bul teorema tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke tiyisli bolıp, úshmúyeshlik táreplerine teń kvadratlarınıń maydanları arasındaǵı qatnastı kórsetedi. Pifagor bul teoremanıń teoriyalıq dálilin keltirgen. Pifagor teoreması menen anıqlanǵan geometriyalıq qatnasıqlarınıń jeke jaǵdayları Pifagordan aldın da hár túrli xalıqlarǵa belgili bolǵan, biraq teoremanıń bul ulıwma kórinisi Pifagor mektebine tiyisli.

Katetleri a hám b, gipotenuzası c bolǵan tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlik berilgen bolsın, bunday halda Pifagor teoreması

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (1)$$

formula menen ańlatıladı, bunda a^2, b^2, c^2 — tárepleri a, b, c bolǵan kvadratlardıń maydanlarına teń. Sonıń ushın bul teńlik ***tárepi gipotenuzınıń uzınlıǵına teń kvadrattıń maydanı tárepleri katetlerge teń kvadratlardıń maydanları qosındısına teń*** ekenin kórsetedi (1-súwret).

2. Pifagor teoremasınıń súyir múyesh kosinusı arqalı dálilleniwi.



Dálil. ABC — berilgen tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bolıp, onıń C múyeshi tuwrı múyesh bolsın. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń C tóbesinen CD biyklikti ótkizemiz (2-súwret).

Tuwrı múyeshli ACD hám ABC úshmúyeshliklerden múyesh kosinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Bunnan $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Tuwrı múyeshli BCD hám ABC úshmúyeshliklerden múyesh kosinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Bunnan $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Payda bolǵan (2) hám (3) teńliklerdi aǵzama-aǵza qosıp hám $AD + DB = AB$ ekenin esapqa alıp,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot D + BD \cdot AB = AB\,(AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

teńlikti payda etemiz. Teorema dálillendi.

Tuwrı múyeshli ABC ($\angle C = 90°$) úshmúyeshliktiń tápeplerin sáykes túrde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ dep belgilep, Pifagor formulasın payda etemiz:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

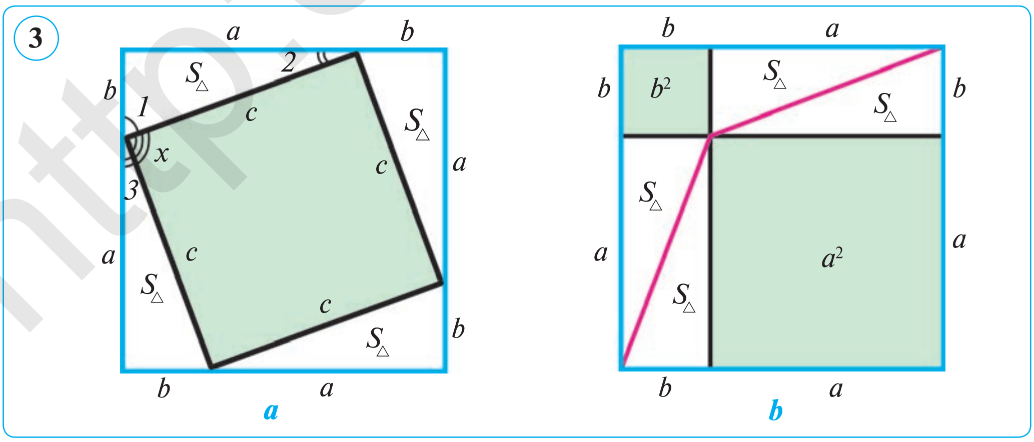
3. Pifagor teoremasınıń maydanlar arqalı dálilleniwi.

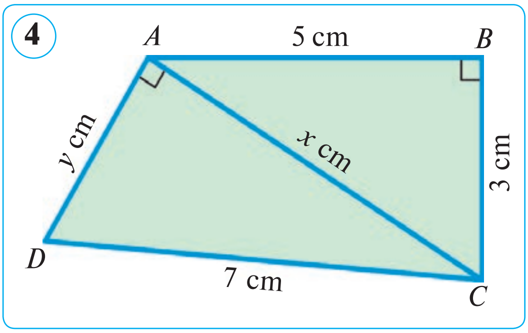
Katetleri a, b hám gipotenuzası c ǵa teń bolǵan tuwrı múyeshli úshmyeshlik berilgen. Bul úshmúyeshlik ushın Pifagor teoreması orınlı ekenin dálilleymiz, yaǵnıy

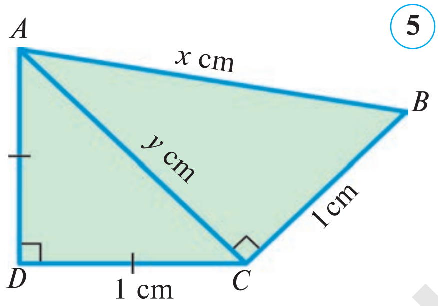
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

ekenin kórsetemiz.

Dálil. Tárepi $(a + b)$ ǵa teń bolǵan eki kvadrat sızamız. Olardı 3-súwrette kórsetilgen usıl menen tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler, kvadratlar hám tuwrı tórtmúyeshliklerge ajıratıp shıǵamız. 3-*a* súwrettegi tórtmúyeshlik tárepi c bolǵan kvadrat ekenin kórsetemiz. Haqıyqatan da, dáslep, bul tórtmúyeshlik romb, sebebi onıń tárepi katetleri a hám b bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası c ǵa teń. Endi sızılmadaǵı x múyesh tuwrı ekenin kórsetemiz. Haqıyqattan, $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 3 = \angle 2$ (sebebi úshmúyeshlikler teń) hám $\angle 1 = 90° - \angle 2$ ekenin itibarǵa alıp tabamız: $\angle x = 90°$. Sonıń ushın bul tórtmúyeshlik múyeshlerinen biri 90° ǵa teń bolǵan







romb, yaǵnıy kvadrat boladı. Qaralıp atırǵan eki úlken kvadratta birdey, yaǵnıy olardıń maydanları teń. Sonday-aq, birinshi kvadrat maydanı $4S_\triangle + c^2$ qa teń, ekinshi kvadrattıń maydanı $4S_\triangle + a^2 + b^2$ qa teń (3-b súwret). Sonıń ushın

$$4S_\triangle + c^2 = 4S_\triangle + a^2 + b^2.$$

Demek, $c^2 = a^2 + b^2$. Teorema dálillendi

Másele. 4-súwrettegi belgisiz kesindiler uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. 1) $\triangle ABC$ – tuwrı múyeshli, $\angle B = 90^\circ$ (4-súwret). Pifagor teoremasına muwapıq: $x^2 = 5^2 + 3^2$, bunnan $x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$ $(x > 0)$.

2) $\triangle ACD$ – tuwrı múyeshli, $\angle CAD = 90^\circ$ (4-súwret). Pifagor teoremasına muwapıq, $y^2 + (\sqrt{34})^2 = 7^2$, bunnan $y^2 + 34 = 49$, $y^2 = 15$, $y = \sqrt{15}$ $(y > 0)$.

Juwabı: $x = \sqrt{34}$ cm; $y = \sqrt{15}$ cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Pifagor teoremasınıń qanday ańlatpasın bilesiz?
2) «Gipotenuzanıń kvadratı», «katettiń kvadratı» degen atamalardı qalay túsinesiz?

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń a hám b katetleri berilgen. Eger: 1) $a=5$, $b=12$; 2) $a = 4\sqrt{2}$, $b=7$; 3) $a=0{,}7$, $b=2{,}4$; 4) $a=5$, $b=6$; 5) $a = \frac{5}{13}$, $b = \frac{12}{13}$ bolsa, c gipotenuzanı tabıń

3. Rombınıń diagonalları: 1) 12 cm hám 16 cm; 2) 14 cm hám 48 cm. Rombınıń perimetrin tabıń.

4. Belgisiz kesindiler uzınlıǵın tabıń (5-súwret).

5. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte a hám b – katetler, c – gipotenuza. Eger: 1) $a=1{,}2$, $c=1{,}3$; 2) $a=7$, $c=9$; 3) $a=1{,}5$, $c=1{,}7$; 4) $a=2$, $c=2{,}5$ bolsa, b katetin tabıń.

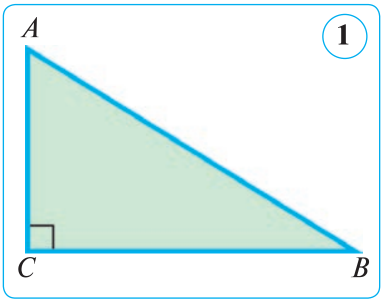
6. Tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri: 1) 2,4 dm hám 7 cm; 2) 50 cm hám 12 dm; 3) 8 dm hám 1,5 m. Onıń diagonalın tabıń.

18. PIFAGOR TEOREMASÍNA KERI TEOREMA

1. Pifagor teoremasınıń bazı nátiyjeleri.

Pifagor teoremasınıń nátiyjeleri ishinen birewiniń dálilin keltirip ótemiz.

Nátiyje. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte katetlerden qálegeni gipotenuzadan kishi.



Dálil. $\triangle ABC$ — tuwrımúyeshli, $\angle C=90°$ (1-súwret). Úshmúyeshliktiń qálegen kateti gipotenuzasınan kishi bolıwın dálilleymiz.

Haqıyqattan da, Pifagor teoreması boyınsha katetler ushın:

$$AC^2=AB^2-BC^2 \text{ hám } BC^2=AB^2-AC^2$$

qatnasıqlar orınlı. Bunnan

$$AC^2<AB^2 \text{ hám } BC^2<AB^2$$

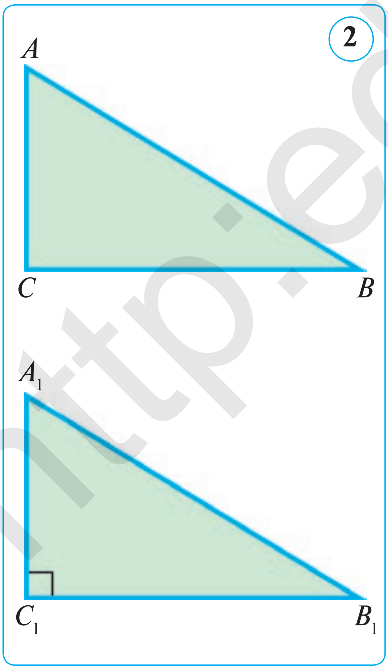
ekeni kelip shıǵadı.

Demek, $AC<AB$ hám $BC<AB$. Nátiyje dálillendi.

2. Pifagor teoremasına keri teorema.

Teorema.

Eger úshmúyeshlike tárepleriniń biriniń kvadratı onıń qalǵan eki tárepiniń kvadratlarınıń qosındısına teń bolsa, onday halda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli boladı.



Dálil. $\triangle ABC$ da $AB^2=AC^2+BC^2$ bolsın. $\angle C=90°$ ekenin dálilleymiz (2-súwret).

C_1 múyeshi tuwrı bolǵan tuwrı múyeshli $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti kórip shıǵamız, onda $A_1C_1=AC$ hám $B_1C_1=BC$. Pifagor teoreması boyınsha, $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$ hám demek,

$$A_1B_1^2=AC^2+BC^2.$$

Teorema shárti boyınsha,

$AB^2=AC^2+BC^2$, demek, $A_1B_1^2=AB^2$.

Bunnan $A_1B_1=AB$ ekenligin tabamz. Solay etip, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikler úsh tárepi teń. Sonıń ushın $\angle C=\angle C_1$, yaǵnıy ABC úshmúyeshliktiń C tóbesindegi múyeshi tuwrı múyesh ekeni kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. Eger úshmúyeshliktiń tárepleri: 1) $a=5$, $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ bolsa, ol tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bola ma?

*Sheshiliwi.*1) Eki kishi tárepiniń kvadratlarınıń qosındısın esaplaymız:

$$5^2+11^2=25+121=146.$$

Endi úlken tárepiniń kvadratın esaplaymız: $12^2=144$.

Alınǵan nátiyjelerdi salıstırsaq, $a^2+b^2\neq c^2$ qatnas kelip shıǵadı Demek, úshmúyeshlik tuwrı múyeshli emes eken.

Juwabı: $a=5$, $b=11$ hám $c=12$ bolǵanda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli bolmaydı.

2) Eki kishi tárepiniń kvadratlarınıń qosındısın esaplaymız:

$$7^2+6^2=49+36=85.$$

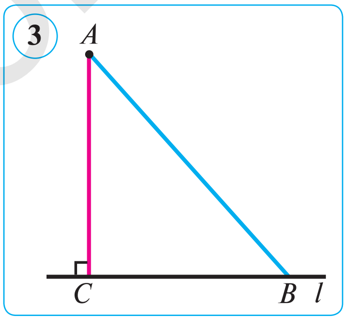
Endi úlken tárepiniń kvadratın esaplaymız: $(\sqrt{85})^2=85$.

Demek, $85=85$ — orınlı. Nátiyjede $b^2+c^2=a^2$ qa iye bolamız. Bunnan úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshli ekeni kelip shıǵadı.

Juwabı: $a=\sqrt{85}$, $b=7$ hám $c=6$ bolǵanda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli boladı.

3. Perpendikulyar hám qıyalıq.

l — tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın A noqat berilgen bolsın. Anıqlama boyınsha, A dan l tuwrı sızıqqa eń qısqa aralıq A dan l ge túsirilgen AC ***perpendikulyar**dıń* uzınlıǵına teń boladı (3-súwret).



Haqıyqatında da, hárbir $B\in l$ ushın ACB tuwrı múyeshli, bunda AC hám CB—katetler, AB bolsa gipotenuza boladı. CB kesindi AB qıyalıqtıń l tuwrı sızıqtaǵı ***proekciyası*** delinedi.

Pifagor teoreması AB—qıya, AC—perpendikulyar hám CB—proekciyası uzınlıqlardı tómendegi teńlik penen baylanıstıradı:

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Sonıń ushın, *hár dayım* $AB>AC$ yaki $AB>BC$, basqasha aytqanda, *bir noqattan ótkerilgen perpendikulyar hám qıyalıqtıń proekciyası qıyadan kishi boladı.*

Sonday-aq, *teń qıyalıqlar teń proekciyalarǵa iye; eki qıyadan qaysı biriniń proekciyası úlken bolsa, sol qıyalıq úlken boladı.*

2-másele. Diagonalları 10 sm hám 24 sm ge teń bolǵan rombınıń tárepin tabıń.

Sheshiliwi. Rombınıń diagonalları perpendikulyar hám kesilisiw noqatında teń ekige bóliniwinen paydalanamız. Bunda rombınıń tárepiniń katetleri 5 sm hám 12 sm ge teń bolǵan tuwrı múyeshli gipotenuzası boladı.

$$5^2+12^2=25+144=169, \text{ yağnıy } 169=13^2.$$

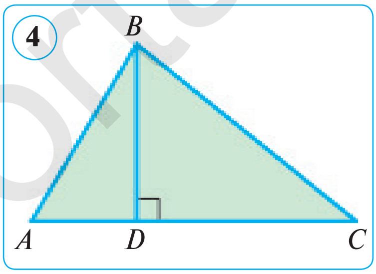
Demek, rombınıń tárepi 13 cm ge teń eken.
Juwabı: 13 cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Pifagor teoremasına keri teoremanı dálilleń.
2) Qıyalıqtıń tuwrı sızıqtağı proekciyası degende neni túsinesiz?
3) Katet gipotenuzadan kishi ekeni tuwrı ma?

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri tómendegi sanlarğa teń bolıwı múmkin be: 1) 11 cm, 7 cm, 17 cm; 2) 3 cm, 1,6 cm, 3,4 cm; 3) 3 cm, 4 cm, 6 cm; 4) 2 cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{11}$ cm? Juwabıńızdı tiykarlań.

3. $\triangle ABC$ da $AB=13$ cm, $BC=20$ cm, BD — úshmúyeshliktiń biyikligi hám ol 12 cm ge teń. AB, BC táreplerdiń AC tárepke túsirilgen proekciyaları uzınlıqları hám AC tárepi uzınlığın tabıń (4-súwret). Bos jerlerge sáykes juwaplardı jazıń.



Sheshiliwi. $\triangle ABD$ hám $\triangle BCD$ — tuwr múyeshli sebebi $\angle ADB=\angle BDC=90°$. AB hám BC tápeplerdiń AC táreptegi proekciyaları sáykes túrde AD hám CD kesindilerden ibarat.

$\triangle ABD$ dan Pifagor teoremasına baylanıslı:
$AD^2=AB^2-BD^2=13^2-...^2=...-...=...$ (cm).
Bunnan $AD=...$ cm.

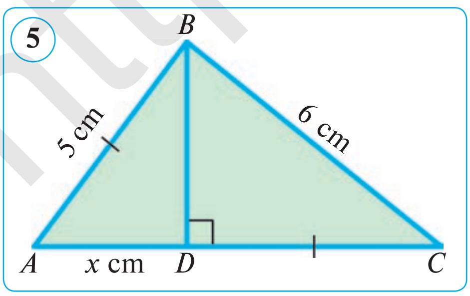
$\triangle BCD$ dan Pifagor teoremasına muwapıq:
$CD^2=BC^2-BD^2=...^2-12^2=...-...=...$ (cm). Bunnan $CD=...$ cm.
$AC=...+DC=...+...=...$ (cm).

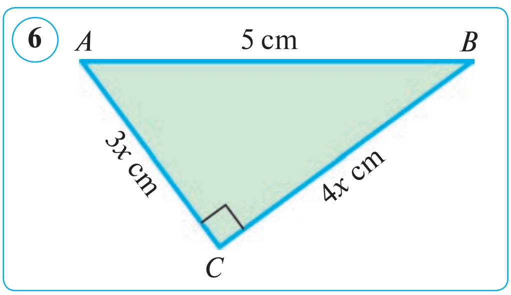
Juwabı: $AD=...$ cm, $CD=...$ cm, $AC=...$ cm.

4. Belgisiz uzınlıqlardı tabıń (5–6-súwretler).

5. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń eki tárepi 6 cm hám 8 cm ge teń. Úshinshi tárептiń uzınlığın tabıń. Másele neshe sheshimge iye?

6. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tárepleri tómendegi sanlarğa teń: 1) $a=12$, $b=35$, $c=37$; 2) $a=11$, $b=20$, $c=25$; 3) $a=18$, $b=24$, $c=30$; 4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?





19. PIFAGOR TEOREMASÍNÍŃ BAZÍ BIR QOLLANÍWLARÍ

Úsh tárepine qaray úshmúyeshliktiń biyikligin tabıw.

Tárepleri a, b hám c bolǵan ABC úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. Onıń C tóbesinen AB tárepine túsirilgen $CD=h_c$ biyiklikti tabamız (1-a súwret).

Biyiklik ultanı D noqatınıń AB kesindige salıstırǵanda qalay jaylasqanına qaray úsh jaǵdayda boladı. Usı jaǵdaylardı kórip shıǵamız.

1-jaǵday. D noqat AB kesindiniń ishki noqatı bolsın. Eger $AD=x$ dep belgilep alsaq, bunday jaǵdayda $DB=c-x$ boladı (1-a súwret). $\triangle ADC$ hám $\triangle BDC$ lar tuwrı múyeshli, Pifagor teoremasına baylanıslı:

$$h_c^2=b^2-x^2 \ (1) \text{ hám } h_c^2=a^2-(c-x)^2 \ (2).$$

Bunnan tómendegi teńlikti payda etemiz: $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$.

Bunnan

$$b^2-x^2=a^2-c^2+2cx-x^2, \text{ yaǵnıy } b^2=a^2-c^2+2cx.$$

Aqırǵı teńlemeden x tı tabamız:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{yamasa} \quad x^2=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

x^2 diń bul mánisin (1) teńlikke qoyıp, tómendegige iye bolamız:

$$h_c^2=b^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

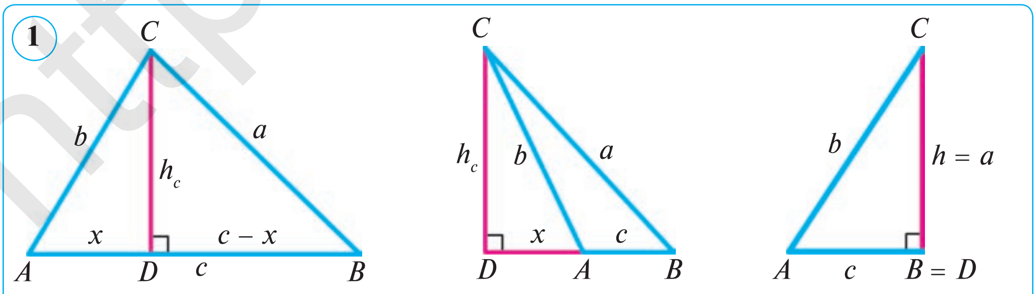
Bul bólshektiń alımın kóbeytiwshilerge ajıratıp, tómendegini payda etemiz:

$$h_c^2=\frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2}=\frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Payda bolǵan ańlatpanıń alımındaǵı eki kóbeytiwshini tómendegishe figura ózgertemiz:

$$2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c) \text{ hám}$$
$$2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a).$$

Bul jaǵdayda: $$h_c^2=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2},$$



a *b* *d*

bunnan

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Úshmúyeshliktiń yarım perimetrin p dep belgileymiz, ol jaǵdayda:

$$a + b + c = 2p,$$
$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Payda bolǵan ańlatpanı koren astındaǵı ańlatpanıń ornına qoyıp, tómendegi nátiyjeni payda etemiz:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Tap sonday-aq,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{hám} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2-jaǵday. D noqat AB kesindiniń dawamında jatadı, yaǵnıy $DB = c + x$. Bunda belgilengen nátiyje payda boladı (1-*b* súwret).

3-jaǵday. D noqat B noqat penen, yaǵnıy $h = a$ — biyiklik katet penen betpe-bet túsedi. Bul jaǵdayda úshmúyeshlik tuwrı múyeshli boladı (1-*d* súwret).

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tárepleri: 1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm bolǵan úshmúyeshliktiń biyikligin tabıń.

2. Biyikligi h ǵa teń bolǵan teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepin tabıń. Eger: 1) $h=6$ cm; 2) $h=1{,}5$ dm bolsa, tárepin tabıń.

3. Úshmúyeshliktiń tárepleri: 1) $a=5$ cm, $b=7$ cm, $c=6$ cm; 2) $a=13$ dm, $b=14$ dm, $c=15$ dm; 3) $a=24$ cm, $b=25$ cm, $c=7$ cm ge teń. Úshmúyeshliktiń úlken tárepin túsirilgen biyikligin tabıń.

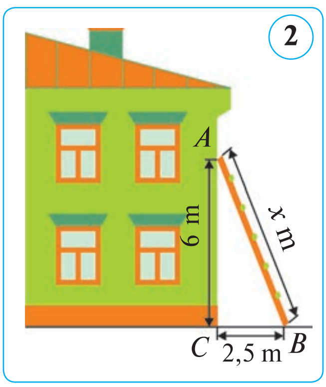
4. Eger teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepi 12 cm ge teń bolsa, onıń biyikligin tabıń.

5. Úshmúyeshliktiń tárepleri $a=8$ cm, $b=10$ cm hám $c=12$ cm. Onıń eń úlken hám eń kishi biyikligin tabıń.

6. Úshmúyeshliktiń tárepleri: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 ge teń bolsa, onıń eń kishi tárepine túsirilgen biyikligin tabıń.

7. Úshmúyeshliktiń tárepleri $a=16$ cm, $b=12$ cm hám $c=8$ cm. Úshmúyeshliktiń kishi biyikligin tabıń.

8. Záńgi uzınlıǵın tabıń (2-súwret).



20–21. TIYKARǴÍ TRIGONOMETRIYALÍQ BIRDEYLIK HÁM ONÍŃ NÁTIYJELERI

1. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikler.

Bir múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları arasındaǵı baylanıstı ańlatıwshı teńliklerdi keltirip shıǵaramız.

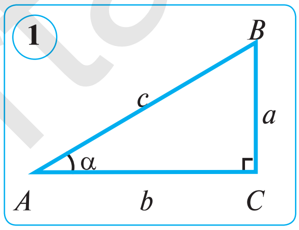
Teorema.

Hárqanday súyir α múyesh ushın

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

teńlik orınlı.

Dálil. A tóbesindegi múyeshi α ǵa teń bolǵan tuwrı múyeshli qálegen ABC úshmúyeshlikti alamız (1-súwret).



Pifagor teoreması boyınsha: $BC^2+AC^2=AB^2$.

Teńliktiń eki bólimin AB^2 qa bólip, tómendegi teńlikke iye bolamız: $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1$.

Biraq $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Solay etip,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

(1) teńlik **trigonometriyanıń tiykarǵı birdeyligi** delinedi

Bizge bir múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları arasındaǵı baylanıstı ańlatıwshı úsh teńlik belgili:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (2),\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (3),\quad \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=1\ (4).$$

(1) teńliktiń hár eki bólimin $\cos^2\alpha$ ǵa bólip, (5) teńlikti payda etemiz:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad \text{yamasa}\quad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

(1) teńliktiń hár eki bólimin $\sin^2\alpha$ ǵa bólip, (6) teńlikti payda etemiz:

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad \text{yamasa}\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

2. Tiykarǵı trigonometriyalıq teńlikten kelip shıǵatuǵın nátiyjeler.

Hárqanday α súyir múyesh ushın tómendegi teńlikler orınlı:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

1-másele. Eger $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ bolsa, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ nıń mánislerin esaplań.

Sheshiliwi. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Juwabı: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 2) $1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$.

Sheshiliwi. 1) Qosılıwshılardı ulıwma bóliwshige keltiremiz, soń alınıwshınıń uqsas ağzalardı ıqshamlap hám (6) birdeylikten paydalanıp tabamız:

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\mathrm{ctg}^2\alpha.$$

Juwabı: $1+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

2) Ayırmanı ulıwma bóliwshige keltiremiz, soń bóliniwshidegi uqsas ağzalardı ıqshamlap hám (5) teńlikten paydalanıp tabamız:

$$1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Juwabı: $1+\mathrm{tg}^2\alpha$.

3-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Sheshiliwi. Eki san qosındısınıń kvadratı formulası hám tiykarğı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, ańlatpanı ápiwayılastıramız:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = 1.$$

Juwabı: 1.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Qaysı teńlik trigonometriyanıń tiykarğı áhmiyeti delinedi?
2) Trigonometriyalıq birdeylikti ańlatıwshı teńliklerden qaysıların bilesiz?
3) Tiykarğı trigonometriyalıq birdeylikten qanday nátiyjeler kelip shığadı?

2. Eger: 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ bolsa, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ ni; 2) $\cos\alpha=0{,}8$ bolsa, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ ni; 3) $\cos\alpha=0{,}28$ bolsa, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ ni tabıń.

3. Eger $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ ni tabıń.

Úlgi. Eger $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ ni tabıń.

Sheshiliwi. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Demek, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Bunnan $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Endi sinα ni esaplaymız: $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$.

Juwabı: $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

4. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Úlgi. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Sheshiliwi. Ápiwayılastırıw ushın qosılıwshılardı toparlap, payda etemiz:

$$1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Juwabı: $2\sin^2\alpha$.

5. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\dfrac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\text{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

6. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri 7 cm hám 24 cm ge teń. Úshmúyeshliktiń eń kishi múyeshi trigonometriyalıq funkciyalarınıń mánislerin tabıń.

7. Eger: 1) $\text{tg}A=2$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ bolsa, A súyir múyesh trigonometriyalıq funkciyalarınıń mánislerin tabıń.

8. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Sheshiliwi.

$$\frac{1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}(1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha) = (1+\text{tg}^2\alpha)(1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha) = 1+\text{tg}^6\alpha.$$

Ápiwayılastırıwda (5) teńlikten hám $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ formuladan paydalanıladı.

Juwabı: $1+\text{tg}^6\alpha$.

9. Eger: 1) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ bolsa, cosα, tgα hám ctgα ni; 2) $\cos\alpha=0{,}6$ bolsa, sinα, tgα hám ctgα ni tabıń.

10. Eger múyeshtiń sinusı hám kosinusı sáykes túrde tómendegi sanlarǵa teń bolıwı yaki bolmaytuǵınının anıqlań: 1) $\dfrac{1}{2}$ hám $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{3}$ hám $\dfrac{3}{4}$.

11. Bir múyeshtiń tangens hám kotangensi sáykes túrde tómendegi sanlarǵa teń bolıwı yaki bolmaytuǵınının anıqlań:

1) 0,4 hám 2,5; 2) 1,1 hám 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ hám $\sqrt{5}-2$.

12. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha$.

13. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri 8 cm hám 15 cm ge teń. Úshmúyeshliktiń eń kishi múyeshi trigonometriyalıq funkciyaları mánislerin tabıń.

14. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. TOLÍQTÍRÍWSHÍ MÚYESHTIŃ TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALARÍ USHÍN FORMULALAR

Tolıqtırıwshı múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları ushın formulalar.

Tolıqtırıwshı múyeshler *dep, qosındısı 90° qa teń bolǵan eki múyeshke aytıladı.* Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri tolıqtırıwshı múyeshlerge mısal boladı, sebebi olardıń qosındısı 90° qa teń.

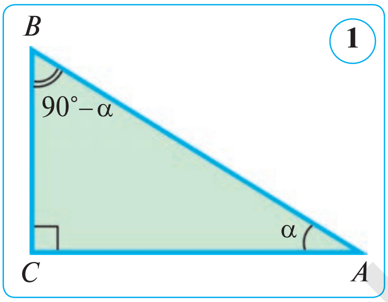
Biz kórip shıqqan trigonometriyalıq birdeylik bir múyeshtiń hár qıylı trigionometriyalıq funkciyaları arasındaǵı ózara qatnaslardı ornatıwǵa imkan beredi. Endi tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń eki súyir múyeshi arasındaǵı qatnaslardı kórip shıǵamız.

Teorema.

Hárqanday tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshi α ushın

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$

teńlikler orınlı.



Dálil. Gipotenuzası AB bolǵan tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikti qaraymız (1-súwret). Eger. $\angle A=\alpha$ bolsa, ol jaǵdayda $\angle B=90^\circ-\alpha$ ǵa teń boladı. Úshmúyeshliktiń súyir múyeshlerin sinus hám kosinusler arqalı ańlatamız: Anıqlama boyınsha

$$\sin B=\frac{AC}{AB} \text{ hám } \cos A=\frac{AC}{AB},$$

yaǵnıy $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$;

$$\sin A=\frac{BC}{AB} \text{ hám } \cos B=\frac{BC}{AB}, \text{ yaǵnıy } \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Teorema dálillendi.

Dálillengen teoremadan usı nátiyje kelip shıǵadı

Nátiyje. Hárqanday súyir α múyesh ushın

$$\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha;\quad \mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$$

teńlemeler orınlı.

Bul teńliklerdiń durıslıǵın joqarıda keltirilip shıǵarılǵan formulalardan paydalanıp dálillewdi ózińizge tapsıramız.

A hám B súyir múyeshler — bir-birin 90° toltırıwshı múyeshler. Sonı itibarǵa alıp, joqarıda keltirip shıǵarılǵan formulalar tómendegishe oqıladı:

– **berilgen múyeshtiń sinusı toltırıwshı múyeshtiń kosinisına teń;**
– **berilgen múyeshtiń kosinusı toltırıwshı múyeshtiń sinusına teń;**
– **múyeshtiń tangensi toltırıwshı múyshtiń kotangensine teń;**
– **múyeshtiń tangensi toltırıwshı múyshtiń kotangensine teń.**

1-másele. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri bolsın. Eger $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ bolsa, tg$A$ nı tabıń.

Sheshiliwi. $\sin B = \cos A$, demek, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Endi A múyeshtiń sinusı tiykarǵı trigonometriyalıq teńliktiń nátiyjesinen paydalanıp tabamız:

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Múyeshtiń tangensin sinus hám kosinis arqalı tabamız:

$$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Juwabı: 2.

2-másele. Eger $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}20^\circ$ bolsa, súyir x múyeshti tabıń.

Sheshiliwi $\mathrm{tg}20^\circ = \mathrm{ctg}(90^\circ - 20^\circ) = \mathrm{ctg}70^\circ$, demek, $\mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}70^\circ$. Bunnan $x = 70^\circ$. *Juwap:* $x = 70^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Toltırıwshı múyeshler dep nege aytıladı?
2) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń eki súyir múyeshi arasındaǵı qanday qatnaslardı bilesiz? Sáykes formulalardı jazıń.

2. Eger: 1) $\sin x = \cos 40^\circ$; 2) $\cos x = \sin 76^\circ$; 3) $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}56^\circ$; 4) $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}16^\circ$ bolsa, súyir x múyeshti tabıń

3. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri. Eger $\cos A = 0{,}6$ bolsa, $\sin B$ hám $\cos B$ lerdi tabıń.

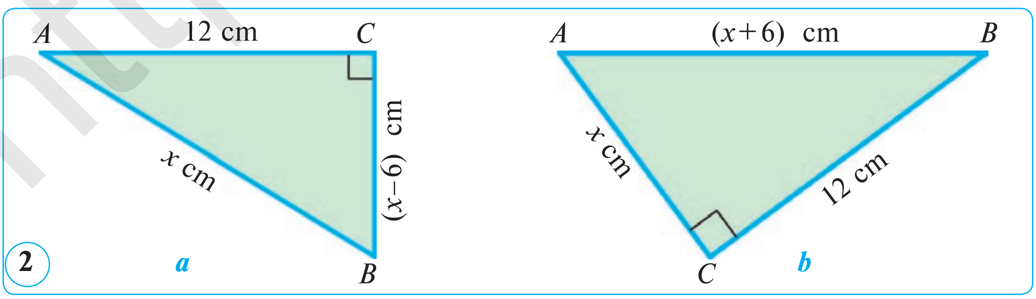
4. Bir múyeshtiń sinusı hám kosinusı sáykes túrde tómendegi sanlarǵa teń bolıwı yaki bolmaytuǵının anıqlań: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ hám $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 hám 0,4.

5. A hám B múyeshler — tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri. Eger $\sin B = 0{,}5$ bolsa, $\cos A$ hám tg$A$ lardı tabıń.

6. Belgisiz uzınlıqlardı tabıń (2-súwret) hám de súyir múyeshler sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin esaplań.

7. Eger $\sin(90^\circ - \alpha) = 0{,}8$ bolsa, $\cos\alpha$ hám $\sin\alpha$ lerdi tabıń.

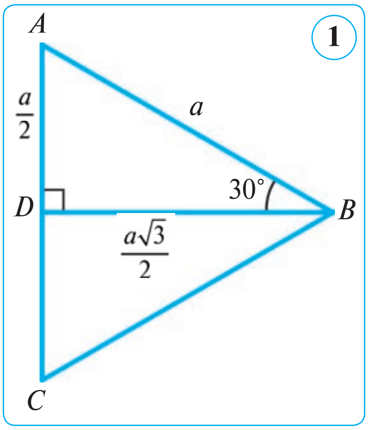
8. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$; 2) $\mathrm{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$.



23. 30°, 45°, 60° MÚYESHLERDIŃ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSIN ESAPLAW

1. 30° li múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin esaplaw.

Teń tárepli ABC úshmúyeshlikti alamız (1-súwret). Oǵan BD biyiklik ótkizsek, ol bissektrisa hám mediana wazıypasın atqaradı. Sol sebepli ABD úshmúyeshlik B tóbesindegi súyir múyeshi 30° teń bolǵan tuwrı múyeshli ($\angle D=90°$) úshmúyeshlik bolıp tabıladı. Teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepi a ǵa teń bolsın. Ol jaǵdayda $AD = \frac{a}{2}$. Pifagor teoremasına muwapıq:



$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Anıqlamalar boyınsha:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

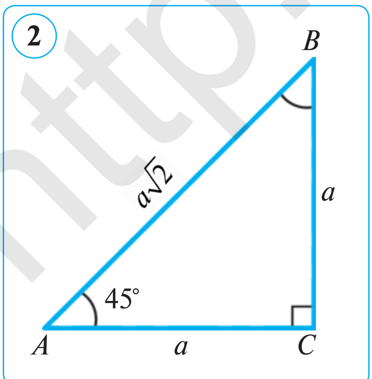
$$\text{tg}30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{ctg}30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

Toltırıwshı múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları ushın shıǵarılǵan formulalar járdeminde **60° lı** múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları mánislerin tabamız:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg}60° = \text{tg}(90° - 30°) = \text{ctg}30° = \sqrt{3};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \text{ctg}60° = \text{ctg}(90° - 30°) = \text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



2. 45° li múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin esaplaw.

45° múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaların esaplaw ushın teń qaptallı tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikti qaraymız (2-súwret). Bul úshmúyeshlikte $AC=BC=a$, $\angle A=\angle B=45°$ bolsın. Pifagor teoremasına muwapıq, gipotenuza $AB = a\sqrt{2}$ teń boladı. Súyir múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyalarınıń anıqlaması boyınsha:

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}45° = \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

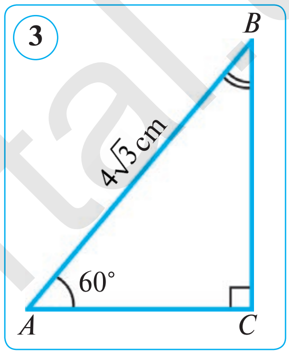
$$\mathrm{ctg}45° = \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

30°, 45° hám 60° lı múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensiniń mánisleriniń kestesin dúzemiz.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Súyir múyeshli trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleri, sanlardıń kvadratları hám olardan shıǵarılǵan arifmetikalıq kvadrat koren arnawlı kestelerden biliw hám kalkulyatordan paydalanıp esaplawlarǵa boladı.

Másele. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliktiń AB gipotenuzası $4\sqrt{3}$ cm hám $\angle A=60°$ (3-súwret). Usı úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.



Sheshiliwi. múyesh tuwrısındaǵı katet gipotenuza menen α múyesh sinusınıń kóbeymesine teń ekenligi bizge belgili. Sol boyınsha:

$$BC = AB\sin A = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

Bizge belgili, α múyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen α múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń. Sol boyınsha:

$$AC = AB\cos A = 4\sqrt{3}\cdot\cos 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Juwabı: $BC=6$ cm, $AC=2\sqrt{3}$ cm.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Esaplań: 1) $\sin 30°+\mathrm{tg}45°$; 2) $\cos 30°\,\mathrm{tg}60°$; 3) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.
2. Teń tárepli úshmúyeshlik sızıń hám onıń biyikligin ótkiziń. Kerekli ólshewlerdi orınlap, 30° hám 60° lı múyeshlerdiń trigonometriyalıq funkciyaların esaplań, nátiyjelerin kestelerdegiler menen salıstırıń.
3. $ABCD$ parallelogrammnıń BD diagonalı AB tárepke perpendikulyar hám 16 cm ge teń. Eger BDA múyesh 30° ǵa teń bolsa, parallelogrammnıń tároplerin tabıń.
4. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir kateti $6\sqrt{3}$ ge, bul katet tuwrısındaǵı múyesh 60° qa teń. Gipotenuza hám ekinshi katetti tabıń.
5. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$.
6. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir kateti 2 ge, bul katet tuwrısındaǵı múyesh 60° qa teń. Gipotenuza hám ekinshi katetti tabıń.
7. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.
8. Esaplań: 1) $\cos 45°\sin 45°$; 2) $\sin 60°\,\mathrm{tg}30°$; 3) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$.

6-§. TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDI SHESHIW

24. TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKSIYALARDÍŃ MÁNISLERI KESTESI

Sabaqlıq aqırında pútkil sanlı graduslar menen 1° dan 89° qa shekem barlıq múyeshler ushın sáykes kelgen trigonometriyalıq funkciyalar (on mıńnan birge shekem anıqlıqta) kórsetilgen keste keltirilgen. Bul keste tómendegishe dúzilgen: shep tárepten birinshi baǵanaǵa (joqarısında «graduslar» dep jazılǵanına) graduslardıń sanları 1°, 2°, 3°, ..., 45° qa shekem jaylastırılǵan; ekinshi baǵanaǵa (joqarısında «sinuslar» jazılǵanına) sinuslardıń birinshi baǵanada kórsetilgen múyeshlerge sáykes keliwshi mánisleri qoyılǵan; 3-baǵanaǵa tangensler, sońına kotangensler hám onnan keyin kosinuslar mánisleri jaylastırılǵan. Sońǵı 6-baǵanaǵa jańa graduslar sanları: yaǵnıy 90°, 89°, 88°, ... hám basqa, 45° qa shekem jaylastırılǵan. Bul (orındı únemlew ushın) tómendegige tiykarlanıp etilgen: toltırıwshı múyeshtiń trigonometriyalıq funkciyaları ushın formalarǵa muwapıq $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$hám basqa, demek, $\sin1°=\cos89°$, $\sin2°=\cos88°$ hám basqa. Sonıń ushın joqarıdaǵı «sinuslar» jazılǵan baǵananıń astına «kosinuslar»; joqarıdaǵı «tangensler» jazılǵan (shepten 3-) baǵananıń astına «kotangensler» jazılǵan hám usıǵan uqsas. Solay etip, 1° dan 45° qa shekem múyeshler ushın graduslarsanların shep táreptegi birinshi baǵanadan hám trigonometriyalıq funkciyalardıń atların joqarıdan oqıw kerek, 45° dan 89° qa shekem bolǵan múyeshler ushın bolsa graduslardıń sanların oń táreptegi sońǵı baǵanadan hám funkciyalardıń atların baǵanalardıń astınan oqıw kerek kerek. Máselen, kesteden tangenstiń mánisin tabamız: $\mathrm{tg}35°=0{,}7002$.

1. Berilgen múyeshke baylanıslı trigonometriyalıq funkciyaların tabıw.

1-másele. $\sin20°$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $1°\le20°\le45°$ bolǵanı ushın *sheptegi* «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 20 nı alamız hám oǵan sáykes qatardıń ekinshisi («$\sin\alpha$») baǵanasınan 0,3420 mánisti tabamız. Mine usı san $\sin20°$ dıń mánisi bolıp tabıladı. Demek, $\sin20°\approx0{,}3420$.

2-másele. $\sin75°$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $45°\le75°\le89°$ bolǵanı ushın *ondaǵı* «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 75 ti alamız hám oǵan sáykes qatardıń tórtinshi (*tómendegi* «$\sin\alpha$») baǵanasınan 0,9659 mánisti tabamız. Mine usı san $\sin75°$ dıń mánisi bolıp tabıladı.

Demek, $\sin75°\approx0{,}9659$.

3-másele. $\cos33°$ tı tabıń.

Sheshiliwi. $1°\le33°\le45°$ bolǵanı ushın sheptegi «graduslar» sózi jazılǵan baǵanadan 33 ti alamız hám oǵan sáykes («$\cos\alpha$») baǵanasınan 0,8387 mánisti tabamız. Mine usı san $\cos33°$ dıń mánisi bolıp tabıladı.

Demek, $\cos33°\approx0{,}8387$.

Tangens hám katangenslerdiń mánisleri sáykes túrde sinus hám kosinuslardıń mánisleri kesteden qalay tabılǵan bolsa, solay tabıladı.

2. Múyeshti trigonometriyalıq funkciyaǵa muwapıq tabıw.

4-másele. Eger $\sin x = 0{,}9848$ bolsa, x súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Sinusi 0,9848 teń bolǵan múyeshti tabıw ushın trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleri jaylasqan birinshi yaki tórtinshi baǵanadan bul mánisti izleymiz. Bul mánis tórtinshi ($\sin\alpha$) baǵanada bar, yaǵnıy izlenip atırǵan múyesh $45°$ dan úlken hám $89°$ dan kishi. Bul qatarǵa sáykes ondaǵı «graduslar» baǵanasınan 80 sanın tabamız. Demek, izlenip atırǵan múyesh shama menen $80°$ qa teń. *Juwabı:* $x \approx 80°$.

5-másele. Eger $\mathrm{tg}x = 0{,}7002$ bolsa, x súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Tangensi 0,7002 ge teń bolǵan múyeshti tabıq ushın trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleri jaylasqan ekinshi yaki úshinshi baǵanadan bul mánisti izleymiz. Usı mánis ekinshi ($\mathrm{tg}\alpha$) baǵanada bar, yaǵnıy izlenip atırǵan múyesh $45°$ dan kishi. Bul qatarǵa sáykes sheptegi «graduslar» baǵanasınan 35 sanın tabamız Demek, izlenip atırǵan múyesh $35°$ qa teń. *Juwabı:* $x \approx 35°$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Kesteden paydalanıp tabıń:

a) 1) $\sin 3°$; 2) $\sin 21°$; 3) $\sin 50°$; 4) $\sin 82°$; 5) $\sin 40°$;

b) 1) $\cos 9°$; 2) $\cos 12°$; 3) $\cos 41°$; 4) $\cos 67°$; 5) $\cos 4°$;

d) 1) $\mathrm{tg}5°$; 2) $\mathrm{tg}89°$; 3) $\mathrm{tg}15°$; 4) $\mathrm{tg}60°$; 5) $\mathrm{tg}50°$;

e) 1) $\mathrm{ctg}10°$; 2) $\mathrm{ctg}30°$; 3) $\mathrm{ctg}75°$; 4) $\mathrm{ctg}52°$; 5) $\mathrm{ctg}5°$.

2. Kesteden paydalanıp, x súyir múyeshti tabıń:

a) 1) $\sin x \approx 0{,}1392$; 2) $\sin x \approx 0{,}8590$; 3) $\sin x \approx 0{,}5150$;

b) 1) $\cos x \approx 0{,}7431$; 2) $\cos x \approx 0{,}6428$; 3) $\cos x \approx 0{,}0523$;

d) 1) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}4663$; 2) $\mathrm{tg}x \approx 11{,}430$; 3) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}1763$;

e) 1) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}9004$; 2) $\mathrm{ctg}x \approx 1{,}192$; 3) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}3640$.

3. (*Ámeliy jumıs.*) Transportir járdeminde súyir múyeshi $40°$ bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań. Onıń tареplerin ólsheń hám de usı múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin esaplań.

4. Ańlatpanıń mánisin tabıń: $\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75°$.

Sheshiliwi. $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$ hám $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 1$ formuladan paydalanıp ańlatpanıń mánisin esaplaymız (bas orınlarǵa sáykes juwaptı jazıń):

$$\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75° = \mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}(90° - 30°) \cdot \mathrm{tg}(90° - 15°) =$$
$$= (\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{ctg}...°)\ (\mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{ctg}...°) = ...\ ... = ...$$

5. Dálilleń: $\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \ ... \ \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89° = 1$.

6. Ańlatpanı ápiwaylastırıń: 1) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$; 2) $\sin^2\alpha - \cos^2(90° - \alpha)$.

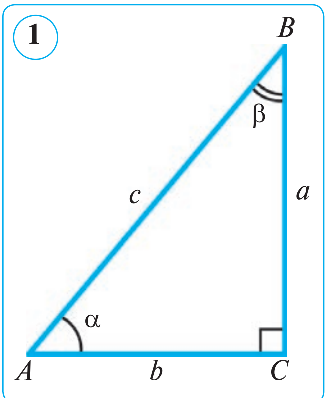
7. Kesteden paydalanıp tabıń: 1) $\sin 70°$; 2) $\cos 55°$; 3) $\mathrm{tg}10°$; 4) $\mathrm{ctg}18°$.

8. Kesteden paydalanıp, x súyir múyeshti tabıń: $\sin x \approx 0{,}1392$.

25. TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDI SHESHIW

Úshmúyeshliklerdi sheshiw úshmúyeshliktiń belgili múyeshleri hám tárepleri boyınsha onıń belgisiz tárepleri hám múyeshlerin tabıwdan ibarat. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikti tárepi hám súyir múyeshi yaki eki tárepi boyınsha sheshiwge boladı. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdi sheshiwde 1-súwrettegi belgilewlerden paydalanamız. Bunıń ushın máseleniń mazmunınan kelip shıqqan halda, trigonometriyalıq funkciyalardıń mánislerin on mıńnan birler tańbasına shekem (sabaqlıq aqırındağı qosımshağa q.) yaki zárúr bolsa, mıńnan birler tańbasına shekem, tárepler uzınlıqların júzden birge shekem, múyeshtiń gradus ólshewin birge shekem pútinlep alıwğa kelisip alamız.

1



Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń elementlerin onıń eki belgili elementine muwapıq esaplawdıń 4 jağdayın kórip sjığamız.

1-jağday. Úshmúyeshlikti gipotenuzası hám súyir múyeshi boyınsha sheshiw.

1-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $c=10$ cm hám súyir múyeshi $\alpha=50^\circ$ berilgen. a, b katetleri hám β súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Onday jağdayda $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

1-usıl. 2) α múyesh tuwrısındağı katet gipotenuza menen α múyesh sinusınıń kóbeymesine teń, yağnıy $a=c\sin\alpha$.

Demek, $a=10\sin 50^\circ=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (cm).

3) α múyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen α múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń, yağnıy $b=c\cos\alpha$.

Demek, $b=10\cos 50^\circ=10\cdot 0,6428\approx 6,43$ (cm).

2-usıl. 2) β múyeshke jaylasqan katet gipotenuza menen β múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń, yağnıy $a=c\cos\beta$. Demek, $a=10\cos 40^\circ=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (cm).

2-jağday. Úshmúyeshliktiń kateti hám súyir múyeshi boyınsha sheshiw.

2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń kateti $a=6$ cm súyir múyeshi $\beta=22^\circ$ berilgen. b katet, c gipotenuza hám α súyir múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jağdayda $\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-22^\circ=68^\circ$.

1-usıl. 2) Gipotenuza β súyir múyeshke jaylasqan katettiń β múyesh kosinusına qatnasına teń, yağnıy $c=\dfrac{a}{\cos\beta}$.

Demek, $c=\dfrac{a}{\cos\beta}=\dfrac{6}{\cos 22^\circ}=\dfrac{6}{0,9272}\approx 6,47$ (cm).

3) Anıqlamaǵa muwapıq: $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$. Bunnan $b=a\operatorname{tg}\beta$, yaǵnıy

$$b=6\operatorname{tg}22^{\circ}=6\ 0{,}4040\approx 2{,}42\ \text{(cm)}.$$

2-usıl. 2) Gipotenuza α súyir múyesh tuwrısındaǵı katettiń α múyesh sinusına qatnasına teń, yaǵnıy $c=\frac{a}{\sin\alpha}$.

Demek, $c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{6}{\sin 68^{\circ}}=\frac{6}{0{,}9272}\approx 6{,}47$ (cm).

3) Anıqlamaǵa muwapıq: $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$. Bunnan $b=a\operatorname{tg}\beta$, yaǵnıy

$$b=6\operatorname{tg}22^{\circ}=6\ 0{,}4040\approx 2{,}42\ \text{(cm)}.$$

Juwabı: $c\approx 6{,}47$ cm, $b\approx 2{,}42$ cm, $\alpha=68^{\circ}$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte uzınlıǵı 7 cm ge teń bolǵan katet 60° lı múyeshke jaylasqan. Usı úshmúyeshliktiń gipotenuzasın tabıń.

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 12 cm ge, katetlerinen biri bolsa $6\sqrt{2}$ cm ge teń. Úshmúyeshliktiń súyir múyeshlerin tabıń.

3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $c=10$ cm hám súyir múyeshi $\alpha=42^{\circ}$ berilgen. a, b katetlar hám β súyir múyeshin i 1-máselege q.) menen sheshiń.

4. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń kateti $b=4$ cm hám súyir múyeshi $\beta=18^{\circ}$ berilgen. b katet, c gipotenuza hám α súyir múyeshin tabıń. Máseleni eki usıl (teksttegi 2-máselege q.) menen sheshiń.

5. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}-\sin\alpha\cos(90^{\circ}-\alpha)$.

6. Teń qaptallı trapeciya tiykarındaǵı múyesh 60° ǵa, qaptal tárepi bolsa kishi ultanına teń bolıp, $2\sqrt{2}$ cm ge teń. Usı trapeciyanıń úlken ultanın tabıń. Bos orınlarǵa sáykes juwabın jazıń.

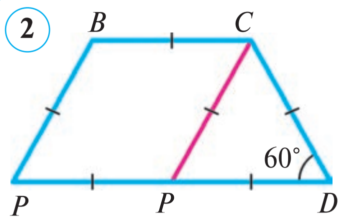
Sheshiliwi. $ABCD$ trapeciya — teń qaptallı, $\angle A=\angle D=60^{\circ}$, $AB=DC=$ $=BC=2\sqrt{2}$ cm.

$CP\parallel BA$ ótkizemiz (2-súwret). Ol jaǵdayda $\angle A=\angle CPD=60^{\circ}$ ($CP\parallel BA$ hám de AD kesiwshi kesilisiwinen payda bolǵan ... múyeshler). CPD úshmúyeshlikti múyeshleri ...° dan, demek, ol ... tárepli. Sonıń ushın, $CP=PD=...=2\sqrt{2}$ cm. Ol jaǵdayda $AD=2\cdot\ 2\sqrt{2}=...$ (cm).

Juwabı: $4\sqrt{2}$ cm.

7. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $c=8$ cm hám súyir múyeshi $\alpha=30^{\circ}$ berilgen. Onıń a, b katetleri hám β súyir múyeshin tabıń. Máseleni eki usıl (teksttegi 1-máselege q.) menen sheshiń.

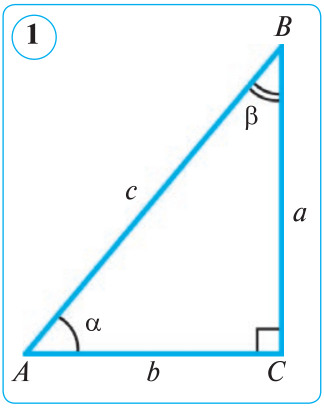
2



26. TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDI SHESHIW (DAWAMÍ)

3-jaǵday. Úshmúyeshliktiń gipotenuzası hám kateti boyınsha sheshiw.

1-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $c=13$ cm hám kateti $a=5$ cm berilgen. Onıń b kateti, α hám β súyir múyeshlerdi tabıń.



Sheshiliwi. 1) Pifagor teoremasına muwapıq:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12\ (\text{cm}).$$

1-usıl. 2) α súyir múyesh sinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{5}{13}\approx 0,3846.$$

Bunnan $\alpha\approx 23^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısıı 90° qa teń. Ol jaǵdayda $\beta=90^\circ-\alpha\approx 90^\circ-23^\circ=67^\circ$.

Juwabı: $b=12$ cm, $\alpha\approx 23^\circ$, $\beta\approx 67^\circ$.

2-usıl. 2) β súyir múyesh sinusınıń anıqlaması boyınsha:

$$\sin\beta=\frac{b}{c}=\frac{12}{13}\approx 0,9231.$$

Bunnan $\beta\approx 67^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jaǵdayda.

$$\alpha=90^\circ-\beta\approx 90^\circ-67^\circ=23^\circ.$$

Juwabı: $b=12$ cm, $\alpha\approx 23^\circ$, $\beta\approx 67^\circ$.

4-jaǵday. Úshmúyeshliktiń eki kateti boyınsha sheshiw.

2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri $a=8$ cm hám $b=15$ cm berilgen. c gipotenuzası, α hám β súyir múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1) Pifagor teoreması boyınsha:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17\ (\text{cm}).$$

1-usıl. 2) α súyir múyesh tangensiniń anıqlaması boyınsha:

$$\text{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{8}{15}\approx 0,5333.$$

Bunnan $\alpha\approx 28^\circ$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı 90° qa teń. Ol jaǵdayda.

$$\beta=90^\circ-\alpha\approx 90^\circ-28^\circ=62^\circ.$$

Juwabı: $c=17$ cm, $\alpha\approx 28^\circ$, $\beta\approx 62^\circ$.

2-usıl. 2) β súyir múyesh tangensiniń anıqlaması boyınsha:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Bunnan $\beta \approx 62°$.

3) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshleri qosındısı $90°$ qa teń. Ol jaǵdayda

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 62° = 28°.$$

Juwabı: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

3-usıl. 1) α súyir múyesh kotangensiniń anıqlaması boyınsha:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Bunnan $\alpha \approx 28°$.

2) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń múyeshleri qosındısı $90°$ qa teń. Ol jaǵdayda

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

3) Pifagor teoreması boyınsha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

Juwabı: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, gipotenuza $c = 9\sqrt{2}$ cm, katet $a=9$ cm. Usı úshmúyeshliktiń b kateti, α hám β súyir múyeshlerin tabıń. Eki usıl menen sheshiń.

2. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, katetleri $a = 6\sqrt{3}$ cm hám $b=6$ cm. Usı úshmúyeshliktiń c gipotenuzası, α hám β súyir múyeshlerin tabıń. Eki usıl menen sheshiń.

3. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte$\angle C=90°$, katetlari $a = \sqrt{11}$ cm hám $b=5$ cm. Usı úshmúyeshliktiń c gipotenuzası, α hám β súyir múyeshlerin tabıń. Eki usıl menen sheshiń.

4. CD kesindi – tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshliktiń gipotenuzasına túsirilgen biyikligin. Dálilleń:

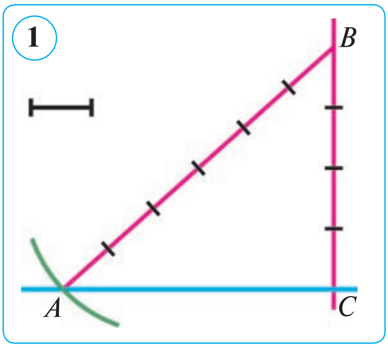
1) $\frac{CD}{\sin A} = AB\cos A$; 2) $AD\mathrm{tg}A = BD\mathrm{tg}B$.

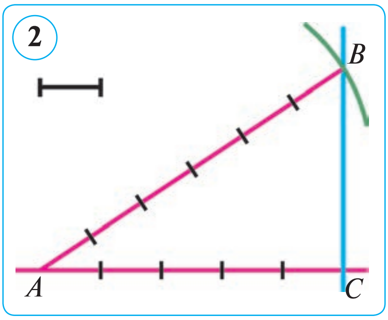
5. Esaplań: $2\sin 60° + 4\cos 60° - \mathrm{ctg}30° - 2\mathrm{tg}45°$.

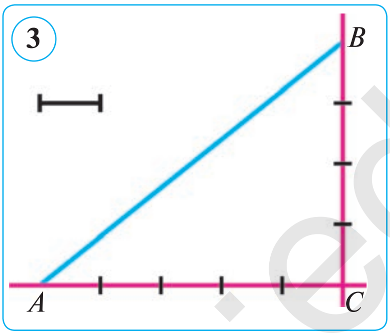
6. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, gipotenuza $c=25$ cm, katet $b=24$ cm. Usı úshmúyeshliktiń a kateti, α hám β súyir múyeshlerin tabıń. Eki usıl menen sheshiń.

7. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, katetleri $a=10$ cm hám $b=24$ cm. Usı úshmúyeshliktiń c gipotenuzasi, α hám β súyir múyeshlerin tabıń. Eki usıl menen sheshiń.

27. TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDI JASAW







1-másele. Sinusı $\frac{4}{5}$ ge teń bolǵan múyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı múyesh sızamız hám onıń tároplerinen birinde múyesh tóbesinen baslap qálegen masshtab birligine teń CB kesindini qoyamız (1-súwret). Orayı B noqatta hám radiusı 5 masshtab birligine teń radiusı kósherin múyeshtiń ekinshi tárepi menen kesiskenshe sızamız. Olardıń kesisiw noqatın A mene belgileymiz. A hám B noqatların birlestirip, tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikti payda etemiz. A—izlenip atırǵan múyesh, onıń sinusı $\frac{4}{5}$ ge teń boladı, yaǵnıy $\sin A = \frac{4}{5}$.

2-másele. Kosinusı $\frac{5}{6}$ ǵa teń bolǵan múyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı múyesh jasaymız hám onıń tároplerinen birinde múyesh ishinen baslap 5 qálegen masshtab birligine teń. AC kesindini qoyamız (2-súwret). Orayı A noqatta hám radiusı 6 masshtab birligine teń radiusli kósherdi múyeshtiń ekinshi tárepi menen kesiskenshe sızamız. Olardıń kesisiw noqatın B menen belgileymiz. A hám B noqatların birlestirip, tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikti payda etemiz. A—izlenip atırǵan múyesh, onıń kosinusı $\frac{5}{6}$ ǵa teń boladı, yaǵnıy $\cos A = \frac{5}{6}$.

3-másele. Tangensi $\frac{4}{5}$ ge teń bolǵan múyeshti jasaw.

Bunıń ushın C tuwrı múyesh jasaymız hám onıń tároplerinen birinde múyesh tóbesinen baslap 5 qálegen masshtab birligine teń CA kesindini, ekinshisinde bolsa 4 masshtab birligine teń CB kesindini qoyamız (3-súwret). A hám B noqatların birlestirip, tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshligin payda etemiz. A—izlenip atırǵan múyesh, onıń tangensi $\frac{4}{5}$ ge teń boladı, yaǵnıy $\mathrm{tg}A = \frac{4}{5}$

Berilgen kotangenske baylanıslı múyesh sızıw talap etilgende de tap sonday islewge tuwra keledi, tek bul jaǵdayda izlengen múyesh ushın AC ǵa jaylasqan katetti alıw kerek boladı.

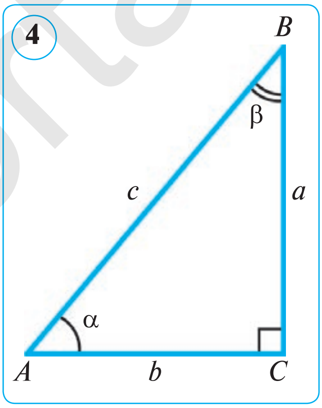
Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń kateti bárháma gepatenuzadan kishi. Sonıń ushın súyir múyeshtiń sinusı hám kosinusı bárháma 1 den kishi.

Katetlerdiń uzınlıqların salıstırıw sonı kórsetedi, olar óz ara teń, biri ekinshisinen úlken yaki kishi bolıwı múmkin. Sonıń ushın súyir múyesh tangensi hám kotangensleri qálegen oń san bolıwı múmkin. Demek, olardıń hárbiri katetlerge baylanıslı jaǵdayda 1 den kishi, 1 den úlken hám 1 ge teń boladı.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) $\mathrm{tg}A=\frac{3}{5}$; 2) $\sin A=\frac{2}{3}$ ge teń bolǵan, tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshligin sızıń.

2. 1) $\sin A=\frac{5}{8}$; 2) $\cos A=\frac{3}{4}$ teń bolǵan, tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshligin sızıń.



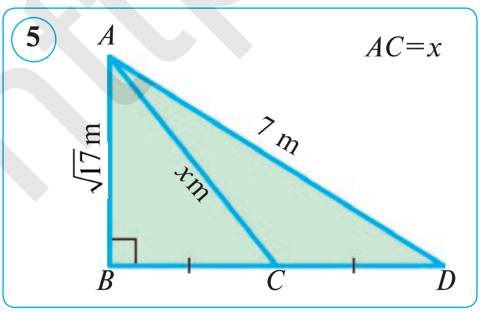
3. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, gipotenuza $c=7\sqrt{2}$ cm, katet $b=7$ cm. Úshmúyeshliktiń a kateti, α hám β súyir múyeshlerin (4-súwret) tabıń.

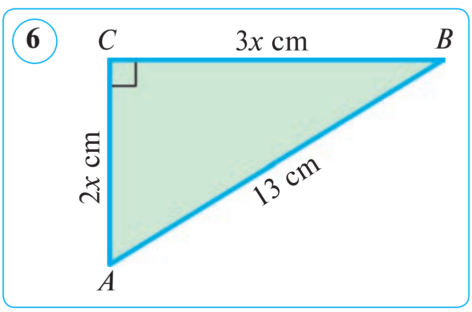
4. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, gipotenuza $c=12$ cm, $\alpha=60°$. Úshmúyeshliktiń a, b katetlari, β súyir múyeshlerin (4-súwret) tabıń. Máseleni eki usıl menen sheshiń.

5. Belgisiz uzınlıqtı tabıń (5–6-súwretler).

6. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, gipotenuza $c=74$ cm, $\sin\alpha=\frac{12}{37}$. Usı úshmúyeshliktiń perimetrin (4-súwret) tabıń.

7. 1) $\sin A=\frac{4}{7}$; 2) $\cos A=\frac{3}{5}$; 3) $\mathrm{tg}A=\frac{2}{5}$ ǵa teń bolǵan, tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshlikti sızıń.





28. ÁMELIY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

1. Pifagor teoremasınıń ámeliy qollanılıwına baylanıslı máseleler.

1-másele. Suw nilufar gúliniń kól qáddinen kórinetuǵın bólimi 10 cm. Eger gúldi baslanǵısh halatınan bir tárepine 1 m tartılsa, suw qáddine tiyedi. Kóldiń sol jerdegi tereńligin tabıń.

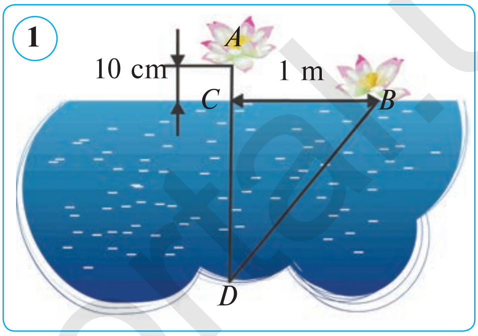
Sheshiliwi. Kóldiń izlengen CD tereńligin x penen belgileymiz (1-súwret). Ol jaǵdayda $BD = AD = AC + CD = 0{,}1 + CD = 0{,}1 + x$ (m) ge teń boladı. Onda tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikten Pifagor teoremasına baylanıslı tómendegilerge iye bolamız:

$BD^2 - CD^2 = BC^2$, $(0{,}1 + x)^2 - x^2 = 1$,

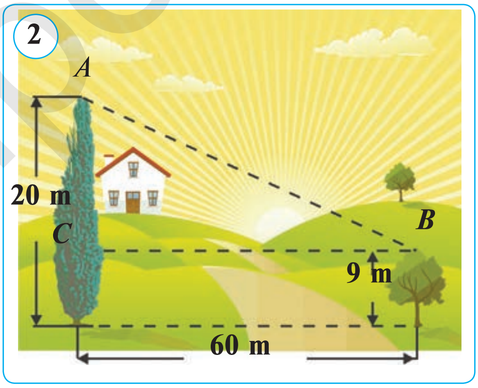
bunnan:

$$0{,}01 + 0{,}2x + x^2 - x^2 = 1;$$
$$0{,}2x = 0{,}99; \quad x = 0{,}99 : 0{,}2;$$
$$x = 9{,}9 : 2; \quad x = 4{,}95 \text{ (m)}.$$

Juwabı: kóldiń tereńligi 4,95 m.



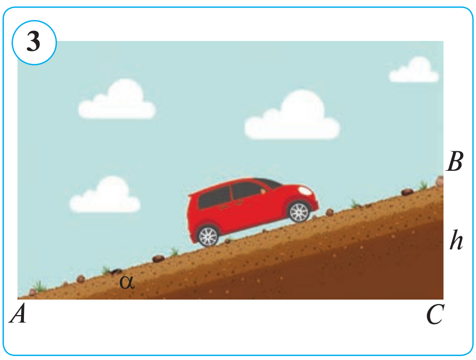
2-másele. Bir terektiń biyikligi 20 m, ekinshisiniki bolsa 9 m. Bul terekler arasındaǵı aralıq 60 m di quraydı. Usı eki terek ushları arasındaǵı aralıqtı tabıń (2-súwret). Óz betińizshe sheshiń.

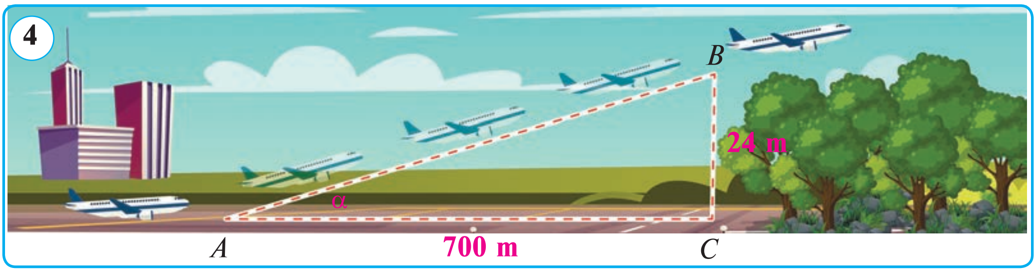


3-másele. Eki qaraǵay tereginiń biyiklikleri sáykes túrde 21 m hám 28 m, bul terekler arasındaǵı aralıq bolsa 24 m di quraydı. Eki terek ushları arasındaǵı aralıqtı tabıń (2-súwretke qarań). Óz betińizshe sheshiń.

2. Súyir múyesh sinusınıń ámeliy qollanılıwına baylanıslı másele.

Qıya tegis jol kóteriletuǵın jerdiń tikligin gorizontqa salıstırmalı kóteriliw múyeshi arqalı beriwge boladı (3-súwret). Kóbinese kóteriletuǵın jeriniń tikligin kóteriw múyeshinen góre basıp ótilgen jol uzınlıǵınıń kóteriliw biyikligi arqalı beriw qolay. Máselen, mashina 100 m aralıqtı basıp ótkende 2 m biyiklikke kóterilgen bolsın. Bul jaǵdayda kóteriliw óziniń tikligi biyikliktiń basıp ótilgen jolǵa qatnası menen beriledi. Kóteriliw biyikligi $\frac{2 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0{,}02$ ge teń. Bul qatnas basıp





ótilgen jolǵa baylanıslı emes. Qıya tegis joldan túsiwde de tap usıǵan uqsas pikir júrgiziw múmkin. Qıya tegis joldan túsiwde de tap usıǵan uqsas pikir júrgiziw múmkin.

4-másele. Jeńil mashina qıyalıǵı 15° bolǵan qıya jol boylap kóterilmekte (3-súwretke q.). Ol qıyalıqqa kóteriliw ornınan 300 m jol basıp ótkennen keyin gorizontqa salıstırmalı neshe metr biyiklikte boladı?

Kórsetpe. Súyir múyesh sinusınıń anıqlamasın qollanıp, kóteriliw biyikligin tabıń.

2. Súyir múyesh tangensiniń ámeliy qollanıwǵa baylanıslı máseleler.

5-másele. Samolyot ushıw jolınan hawaǵa kóteriletuǵın noqattan 700 m aralıqta toǵaylıq jaylasqan bolıp, tereklerdiń maksimal biyikligi 24 m ge teń. Samolyot bul tereklerge tiymewi ushın qanday múyesh astında kóteriliwi kerek?

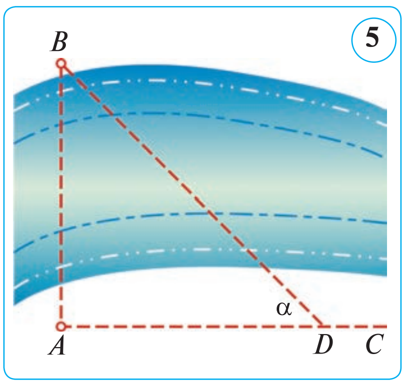
Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshlikte $AC=700$ m, $BC=24$ m (4-súwret). Súyir múyesh tangensiniń anıqlamasınan tabamız:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0{,}0343 \Rightarrow \alpha \approx 2°.$$

Juwabı: samolyot tereklerge tiymesten ushıwı ushın ushıw noqatınan 2° dan az bolmaǵan múyesh astında kóteriliwi kerek.

6-másele. A punktten dárya artındaǵı barıp bolmaytuǵın B punktke shekem bolǵan aralıqtı tabıń (5-súwret).

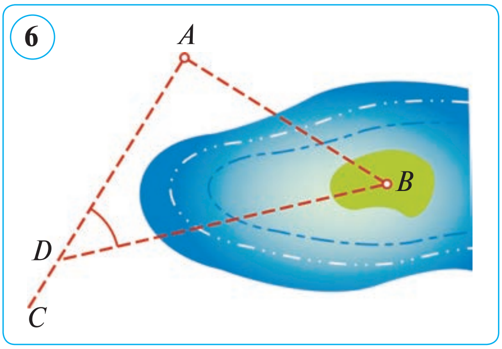
Sheshiliwi. Usturlob (astrolyabiya, gorizontal tegislikte jaylasqan múyeshlerdi ólshew ushın qollanılatuǵın ásbap, yaǵnıy múyesh ólshegish) yaki ekker járdeminde A noqatda tuwrı BAC múyeshti jasaymız. AC tuwrı sızıqta qálegen D noqattı alıp, usturlob járdeminde ADB múyeshti ólsheymiz. Demek, ol 44° ǵa teń bolsın. Sońǵı AD aralıqtı ólsheymiz, ol 120 m bolsın. AB aralıqtı súyir múyeshtiń tangensinen paydalanıp tabamız:

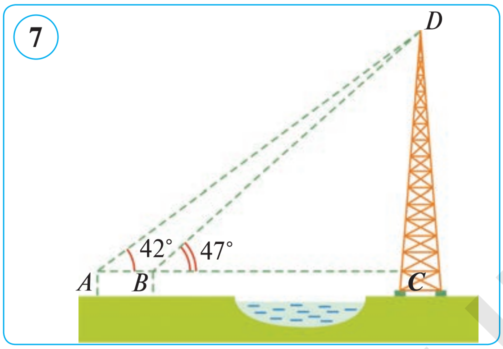


$$\frac{AB}{120} = \mathrm{tg}44° \Rightarrow AB = 120 \cdot \mathrm{tg}44° \approx$$

$$\approx 120 \cdot 0{,}9657 \approx 116 \text{ (m)}.$$

Juwabı: ≈ 116 m.





7- másele. A punktten barıp bolmaytuǵın atawdaǵı B punktke shekem bolǵan aralıqtı tabıń (6-súwret).

Kórsetpe. 5- máselege uqsas dodalanadı. $\angle ADB=48°$ hám $AD=200$ m dep, máseleni sheshiń.

8- másele. Ultanına barıp bolmaytuǵın obyekt, máselen, elektr jetkerip beriw biyikligin ólshew talap etilgen bolsın (7-súwret).

Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli ACD úshmúyeshlikti qaraymız. Bul úshmúyeshliktiń A múyeshin usturlob járdeminde ólshewimiz múmkin, deyik, ol 42° qa teń bolsın.

Tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikte DBC múyeshti ólsheymiz, ol 47° qa teń bolsın.

Súyir múyesh tangensi anıqlamasına tiykarlanıp ACD dan tabamız:

$$\frac{CD}{AC} = \text{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\text{tg}42°}. \qquad (1)$$

Súyir múyesh tangensi anıqlamasına tiykarlanıp BCD dan tabamız:

$$\frac{CD}{BC} = \text{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\text{tg}47°}. \qquad (2)$$

A, B hám C noqatlar bir tuwrı sızıqta jatadı. (1) den (2) ni ayıramız:

$$AC - BC = \frac{CD}{\text{tg}42°} - \frac{CD}{\text{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\text{tg}42°} - \frac{1}{\text{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781}.$$

$AC — BC$, yaǵnıy AB aralıqtı tikkeley ólshewimiz múmkin, deyik, ol 12 m ge teń bolsın. Ol jaǵdayda

$$CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} = \frac{AB}{0{,}1781} = \frac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4 \text{ (m)}.$$

Juwabı: $\approx 67{,}4$ m.

Átirapıńızdan kórilgen máselelerge uqsas máseleler jeterli dárejede tabıladı. Óz betińizshe máseleler dúziń hám sheshiń.

29–30. 2-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 20 cm ge, súyir múyeshleriniń biriniń sinusı 0,5 ge teń. Úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 13 cm ge, súyir múyeshlerinen biriniń kosinusı $\frac{5}{13}$ ge teń. Úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

3. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

4. Tárepleri: 1) $a=c=17$ cm, $b=16$ cm; 2) $a=30$ cm, $b=34$ cm, $c=16$ cm bolǵan úshmúyeshliktiń biyikligin tabıń.

2-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri 12 cm, gipotenuzası bolsa ekinshi katetten 6 cm uzın. Gipotenuzanıń uzınlıǵın tabıń.

A) 15 cm; B) 25 cm; D) 26 cm; E) 18 cm.

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri 12 cm, ekinshisi bolsa gipotenuzadan 8 cm qısqa. Usı úshmúyeshliktiń gipotenuzasın tabıń.

A) 15 cm; B) 16 cm; D) 13 cm; E) 25 cm.

3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 25 cm, katetleri óz ara 3:4 qatnasta. Usı úshmúyeshliktiń kishi katetin tabıń.

A) 10 cm; B) 15 cm; D) 9 cm; E) 20 cm.

4. Tárepleri 13 cm, 14 cm hám 15 cm bolǵan úshmúyeshliktiń eń kishi biyikligi neshe santimetr?

A) 11,5 cm; B) 11,1 cm; D) 11 cm; E) 11,2 cm.

5. Rombınıń diagonalları 14 cm hám 48 cm ge teń. Usı rombınıń perimetrin tabıń.

A) 60 cm; B) 100 cm; D) 80 cm; E) 120 cm.

6. Rombınıń perimetri 68 cm, diagonallarınan biri 30 cm ge teń. Onıń ekinshi diagonalların tabıń.

A) 12 cm; B) 8 cm; D) 16 cm; E) 20 cm.

7. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri $5\sqrt{3}$ cm ge, onıń tuwrısındaǵı múyesh bolsa 60° ǵa teń. Úshmúyeshliktiń gipotenuzasın tabıń.

A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

8. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri $5\sqrt{3}$ cm, oǵan jaylasqan múyesh bolsa 30° ǵa teń. Usı úshmúyeshliktiń ekinshi katetin tabıń.

A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

9. Tuwrı múyeshli *ABC* ($\angle C=90°$) úshmúyeshliktiń gipotenuzası 17 cm ge, katetleri bolsa 15 cm hám 8 cm ge teń. *A* múyeshtiń sinusın tabıń.

A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshliktiń gipotenuzası 37 cm ge, katetleri bolsa 12 cm hám 35 cm ge teń. B múyeshtiń kosinusın tabıń.

A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.

Inglis tilin úyrenemiz!

Pifagor teoreması – Pythagorean theorem
Keri teorema – inverse function theorem
Trigonometriya – trigonometry
Gipotenuza – hypotenuse

Sinus – sine
Kosinus – cosine
Tangens – tangent
Kotangens – cotangent

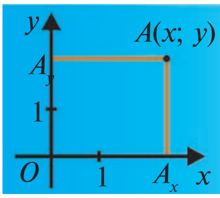
Tariyxıy maǵlıwmatlar

Pifagor
(biziń eramızǵa shekemgi 570–500-j.)

Áyyemgi grek filosofı hám matematigi **Pifagor** biziń eramızǵa shekemgi VI ásirdiń ekinshi yarımında (biziń eramızǵa shekemgi 570—500-jıllar) Egey teńiziniń Samos atawında tuwılǵan hám Tarentda qaytıs bolǵan dep shamalanadı. Pifagor Qubla Italiyanıń greklerdiń koloniyası bolǵan Kroton qalasına (shama menen biziń eramızǵa shekemgi 530-j) kóship kelip, usı jerde óziniń mektebine tiykar salǵan. Biz bul mektep alıp barǵan geometriyalıq tekseriw jumıslarınıń nátiyjeleri haqqında keyinirek ótken grek materikleriniń shıǵarmalarınan ǵana bilemiz. Pifagor alıp barǵan geometriyalıq jumıslarınıń ózi bizlerge shekem jetip kelmegen.

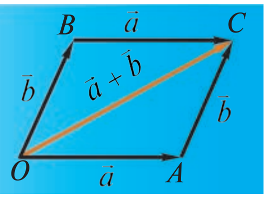
Pifagor birinshi bolıp sanlardı jup hám taq, tiykarǵı hám quramalı sanlarǵa ajıratqan. Onıń mektebinde «Pifagor sanları» delinetuǵın natural sanlar úshlikleri tolıq kórip shıǵarılǵan. Pifagor teoreması júdá kóp geometriyalıq esaplawlardıń tiykarın quraydı.

Házirgi kúnde Pifagor teoremasınıń júzden artıq dálilleri bar. Olardan ayırımları kvadratlardı bóleklerge ajıratıwǵa tiykarlanǵan, bunda katetlerge islengen kvadratlar bóleklerinen gipotenuzaǵa islengen kvadrat dúzilgen; basqaları — teń figuralarǵa toltırıwǵa tiykarlanǵan; úshinshileri bolsa tuwrı múyeshtiń tóbesinen gipotenuzaǵa túsirilgen biyiklik tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdi eki uqsas úshmúyeshlikke ajıratıwǵa tiykarlanǵan. Áyyemgi Bobilde teń qaptallı úshmúyeshliktiń qaptal tárepi hám ultanı uzınlıǵına baylanıslı onıń biyikligin tapqan. Ayırım bir dereklerge qaraǵanda, Pifagor mektebinde tuwrı sızıqlı figuralardı teńdey ajıratıwdıń geometriyalıq usıllarınan teoremalardı dálillew hám máseleler sheshiwde paydalanılǵan. Sebebi tuwrı sızıqlı figuralardı geometriyalıq almastırıw máselesi ámeliy jumıslardan kelip shıqqan.



III BAP

KOORDINATALAR USÍLÍ. VEKTORLAR



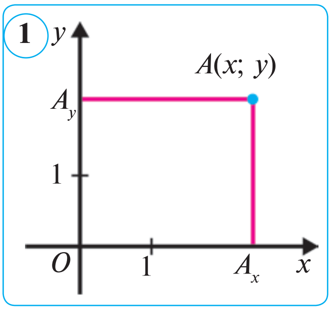
7-§. TEGISLIKTE KOORDINATALAR SISTEMASÍ

31. TEGISLIKTE NOQATTÍŃ KOORDINATALARÍ. KESINDI ORTASÍNÍŃ KOORDINATALARÍ

1. Tegislikte noqattıń koordinataları. Tegislikte óz ara perpendikulyar *x* hám *y* kósherlerin ótkeremiz. Olardıń kesisiw noqatın *O* háribi menen belgileyik. Bul noqattı hárbir kósher ushın *esap bası* dep, hárbir kósherde ózara teń birlik kesindini alamız. *Ox* kósherindegi bağıt «*shepten ońǵa*», *Oy* kósherindegi bağıt bolsa «*tómennen joqarıǵa*» boladı (1-súwret). Bul jaǵdayda tegislikte *xOy* tuwrı múyeshli koordinatalar sisteması anıqlanǵan, delinedi. Bul sistemanı pánge francuz ilimpazı **Rene Dekart** kirgizgeni ushın **Dekart koordinatalar sisteması** da delinedi *Ox* **abscissalar kósheri** (yaki *x* kósheri), *Oy* kósheri bolsa **ordinatalar kósheri** (yaki *y* kósheri) delinedi. Abscissalar kósheri gorizontal, ordinatalar kósheri vertikal jaylasqan.

Dekart koordinatalar sisteması jatqan tegislik **koordinatalar tegisligi** delinedi.

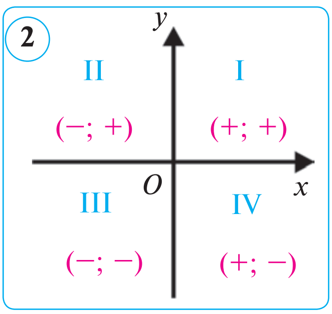
A — koordinata tegisliginde alınǵan qálegen noqat bolsın. *A* noqattan *Ox* hám *Oy* kósherleri parallel tuwrı sızıqlar ótkeremiz. Olar *Ox* hám *Oy* kósherleri menen, sáykes túrde, A_x hám A_y noqatlarda kesisedi, deyik (1-súwretke q.).



AA_x kesindi uzınlıǵı *x*, AA_y kesindi uzınlıǵı *y* bolsın. *x* san *A* noqattıń **abscissası** *y* san bolsa *A* noqattıń **ordinatası** delinedi.

x hám *y* sanlar jubı *A* noqattıń **koordinataları** ***A*(*x*; *y*)** sıyaqlı belgilenedi. Koordinatalardıń ańlatıwda birinshi abscissa, keyin ordinata jazıladı.

Solay etip: 1) koordinata tegisliginde hárbir *A* noqatqa sanlar jubı (*x*; *y*) sáykes keledi; 2) qálegen sanlar jubın (*x*; *y*) koordinata tegisligindegi qanday da bir *A* noqattıń koordinataları; 3) eger $x \neq y$ bolsa, ol jaǵdayda (*x*; *y*) hám (*y*; *x*) juplıqlar koordinata tegisliginde hár túrli noqatların ańlatadı.



Koordinata bası — *O* noqattıń koordinataları *O*(0; 0) dan ibarat. *Ox* kó-sherindegi qálegen *B* noqattıń koodinatası *B*(*x*; 0), *Oy* kósherindegi qálegen *C* noqattıń koordinatası *C*(0; *y*) kórinisinde boladı.

Ox hám *Oy* nurları tegislikti tórt tuwrı múyeshke bóledi, olar *koordinata sherekleri* yaki *koordinata múyeshleri* delinedi. Koordinata sherikleri rim cifrları menen belgilenedi hám de olar saat tillerine qarsı baǵıt boyınsha nomerlenedi. Noqat koordinatalarınıń shereklerdegi belgileri belgileniwi 2-súwrette kórsetip ótilgen.

Geometriyalıq figuralar hám olardıń qásiyetlerin koordinatalarda qollanıp úyreniwdi kórip shıǵamız.

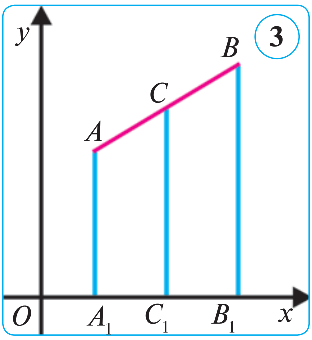
2. Kesindi ortasınıń koordinatalari.

Teorema.

Kesindi ortasınıń koordinataları tóemdegi formulalar boyınsha esaplanadı:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

bunda $A(x_1;\ y_1)$ hám $B(x_2;\ y_2)$ — kesindiniń tóbeleri, $C(x;\ y)$ — kesindiniń ortası.



Dálil. *C* noqattıń *x* hám *y* koordinataların tabamız. *AB* kesindi *Ox* kósherin kespegen bolsın, yaǵnıy $x_1 < x_2$ jaǵdaydı kórip shıǵamız (3-súwret). Ox kósherine AA_1, BB_1 hám CC_1 perpendikulyar tuwrı sızıqlardı ótkeremiz. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ hám de perpendikulyardıń ultanları $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$ hám $C_1(x;\ 0)$ koordinatalarǵa iye ekeni anıq. *C* noqat *AB* kesindiniń ortası bolǵanı ushın, Fales teoremasına muwapıq, C_1 noqat A_1B_1 kesindiniń ortası boladı hám demek, $A_1C_1 = C_1B_1$, yaǵnıy $x_2 - x = x - x_1$. Bunnan usı formulanı tabamız:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$, yaǵnıy *AB* kesindi *Oy* kósherine parallel bolsa, úsh noqat $-A_1$, B_1 hám C_1 birdey abscissaǵa iye boladı. Demek, formula bul jaǵdayda da orınlı bola beredi.

$x_1 > x_2$ bolǵan halda da joqarıdaǵı nátiyjege kelemiz (bunı óz betinshe tekseriwdi ózińizge qaldıramız).

C noqattıń ordinatası da usıǵan uqsas tabıladı. *A*, *B* hám *C* noqatlar arqalı *Oy* kósherine perpendikulyar tuwrı sızıqlar ótkeriledi. Usı formula payda boladı:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Másele. Tóbeleri $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ hám $D(2;\ -2)$ noqatlarda bolǵan *ABCD* tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. Parallelogrammnıń belgisi boyınsha tórtmúyeshliktiń diagonalları kesisiw noqatında teń ekige bólinse, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıwı belgili. Berilgen *ABCD* tórtmúyeshliktiń *AC* hám *BD* diagonalları ortasınıń koordinataların tabamız. *AC* kesindiniń ortası tómendegi koordinataǵa iye:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

BD kesindiniń ortası tómendegi koordinataǵa iye:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Solay etip, *AC* hám *BD* diagonallardiń kesisiw noqatı ulıwma $(1;1)$ koordinataǵa iye eken. Demek, parallelogramm belgisine baylanıslı, *ABCD* tórtmúyeshlik parallelogramm. Usını dálillew talap etilgen edi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Koordinata kósherleri hám olardıń kesilisken noqatı qalay ataladı?
2) Koordinatalar tegisligi dep nege aytıladı? Tegisliktegi noqattıń koordinataları degende neni túsinesiz?

2. $A(4;\ -5)$ noqattan koordinatalar kósherlerine perpendikulyar ótkizilgen. Usı perpendikulyarlar ultannıń koordinataların jazıń.

3. Eger: 1) $x = -4$, $y = -6$; 2) $x = -3$, $y=5$; 3) $x>0$, $y<0$; 4) $x>0$, $y>0$ bolsa, $A(x;\ y)$ noqattıń qaysı sherekte jatıwın anıqlań.

4. Eger: 1) $A(-12;\ -3)$, $B(-8;\ 1)$; 2) $A(4;\ -11)$, $B(-4;\ 0)$ bolsa, *AB* kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.

5. *C* noqat – *AB* kesindiniń ortası. Eger $A(2;-3)$, $C(0{,}5;\ 1)$ bolsa, *B* noqattıń koordinataların tabıń.

6. $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(0;\ -6)$ hám $D(-2;\ -4)$ noqatlar berilgen. *ABCD* tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

7. Eger: 1) $A(-6;\ 2)$, $B(4;\ 4)$; 2) $A(-8;\ -4)$, $B(-1;\ 3)$ bolsa, *AB* kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.

8. *C* noqat – *AB* kesindiniń ortası, *D* noqat bolsa *BC* kesindiniń ortası. Eger: 1) 1) $A(-3;\ 3)$, $B(5;\ -1)$; 2) $A(-2;\ -1)$, $C(2;3)$ bolsa, *D* noqattıń koordinataların tabıń.

Bilip qoyǵan paydalı!

Jer sırtındaǵı noqattıń geografiyalıq uzınlıǵı hám keńligi usı noqattıń **geografiyalıq koordinataları** delinedi. Jer sirtındaǵı hárbir noqatqa eki muǵdar — onıń geografiyalıq uzınlıǵı hám keńligi sáykes qoyıladı hám kerisinshe, eki muǵdar — geografiyalıq uzınlıq hám keńlik boyınsha jer sırtındaǵı anıq bir noqat tabıladı. Bunda parallel hám meridianalar tuwrı múyeshli koordinatalar sistemadaǵı abscissa hám ordinata kósherleri wazıypasın atqaradı.

Máselen, Tashkent qalası 069,20 shıǵıs uzınlıqta $\approx 69°$ hám 041,26 arqa keńlikte $\approx 41°$, Samarqand qalası bolsa 066,93 shıǵıs uzınlıqta $\approx 67°$ hám 039,65 arqa keńlikte $\approx 40°$ jaylasqan.

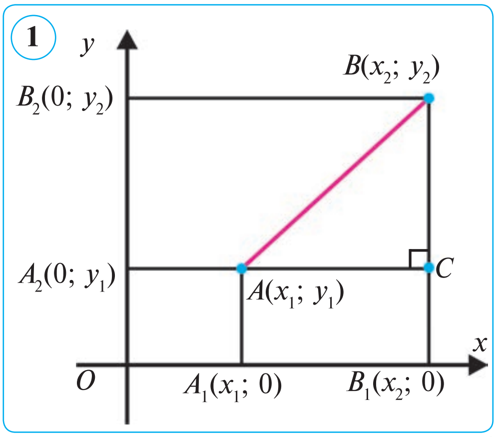
32 — 33. EKI NOQAT ARASÍNDAǴÍ ARALÍQ. SHEŃBER TEŃLEMESI

1. Eki noqat arasındaǵı aralıq.

Teorema.

$A(x_1; y_1)$ hám $B(x_2; y_2)$ noqatlar arasındaǵı aralıq tómendegi formulalar boyınsha esaplanadı:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Dálil. Dáslep $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ jaǵdaydı kórip shıǵamız. Berilgen A hám B noqatlar arqalı koordinatalar kósherlerine perpendikulyar ótkizemiz hám olardıń kesisiw noqatın C menen belgileymiz (1-súwret). A hám C noqatlar atasındaǵı aralıq $|x_2 - x_1|$ ǵa, B hám C noqatlar arasındaǵı aralıq bolsa $|y_2 - y_1|$ ǵa teń. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikke Pifagor teoremasın qollanıp tabamız:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ yamasa } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Noqatlar arasındaǵı aralıq formulası $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ hám jaǵday ushın kórip shıǵılǵan bolsa-da, ol basqa jaǵdaylar ushın da óz kúshin saqlaydı. Haqıyqattan da, $x_1 = x_2$ hám $y_1 \neq y_2$ bolsa, $AB = |y_2 - y_1|$ (1) formula hám usı nátiyjeni beredi. $x_1 \neq x_2$ hám $y_1 = y_2$ hám jaǵday da usıǵan uqsas qaraladı. $x_1 = x_2$ hám $y_1 = y_2$ jaǵdayda A hám B noqatlar ústi-ústine túsedi hám (1) formula $AB = 0$ noqattı beredi.

1-másele. Tóbeleri $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ hám $D(2; -2)$ noqatlarında bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. Parallelogrammnıń 2-belgisine baylanıslı, tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń bolsa, bul tórtmúyeshlik parallelogramm bolıwı belgili. Berilgen $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tárepleri uzınlıqların tabamız:

$$AB = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}; \quad BC = \sqrt{(4-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}; \quad AD = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Solay etip, $AB = CD$ hám $BC = AD$, yaǵnıy parallelogramm belgisine muwapıq $ABCD$ tórtmúyeshlik — parallelogramm.

2. Tegislikte figuranıń teńlemesi. Tegislikte *figuranıń* Dekart koordinatalar sistemasındaǵı *teńlemesi* dep, figuraǵa tiyisli hárqanday noqattıń koordinataları qanaatlandıratuǵın eki *x, y* belgisiz teńlemege aytıladı. Kerisinshe, bul teńlemeni qanaatlandırıwshı hárqanday eki san figuranıń qanday da bir noqatı koordinataları boladı.

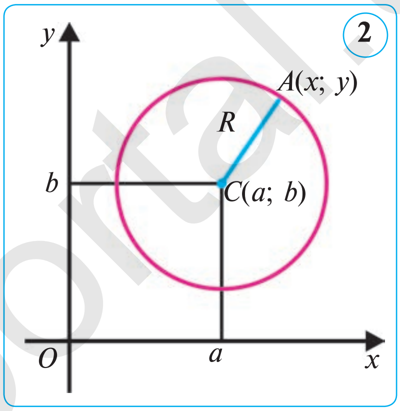
3. Sheńber teńlemesi.

Teorema.

Tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasında orayı $C(a;\, b)$ noqatta, radiusı bolsa R ge teń sheńber *teńlemesi* tómendegi kóriniske iye:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Dálil. Tuwrı múyeshli kóórdinatalar sistemasında orayı $C(a;\, b)$ noqatta bolǵan $R\,(R>0)$ radiusli sheńber berilgen bolsın (2-súwret). Sheńberde qálegen $A(x;\, y)$ no-qattı alamız. Sheńber anıqlama boyınsha, sheńber orayınan sheńberdiń qálegen noqa-tına shekem bolǵan aralıq R ǵa, yaǵnıy $CA = R$ ǵa hám demek, $CA^2=R^2$ ǵa teń. Bul teńlemni koordinatalar kórinisinde jazıp, tómendegini tabamız:



$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

A — sheńberdiń qálegen noqatı. Sonıń ushın (2) teńlemeni sheńberdegi qálegen noqattıń kóórdinataları qanaatlandıradı.

Kerisinshe, koordinataları (2) teńlemeni qanaatlandırıwshı hárqanday A noqat sheńberge tiyisli, sebebi onnan C noqatqa shekem aralıq R ge teń. Bunnan (2) teńleme haqıyqattan da orayı C noqatta da radiusı R den ibarat sheńberdiń teńlemesi ekenligi kelip shıǵadı. Solay etip, figuranıń teńlemesi anıqlamadaǵı hár eki talap orınlanadı. Teorema dálillendi.

Nátiyje. Orayı koordinatalar basında, radiusi R bolǵan sheńber teńlemesi usı kóriniske iye:

$$x^2+y^2=R^2.$$

2-másele. $x^2-4x\ +\ y^2+2y\ -11=0$ teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeni $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ kóriniske keltiremiz. x^2-4x ni $(x-2)^2-4$ kóriniste, y^2+2y ti bolsa $(y+1)^2-1$ kóriniste jazıp alamız.Bul ańlatpalardı berilgen teńlemege qoyıp, payda etemiz:

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0 \quad \text{yamasa} \quad (x-2)^2+(y+1)^2=4^2.$$

Bul teńleme orayı $C(2;\ -1)$ noqatta hám radiusı 4 bolǵan sheńber teńlemesin beredi.

Juwabı: $(2;1)$, $R=4$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Noqatlar arasındaǵı aralıq olardıń koordinataları arqalı qalay ańlatıladı? 2) Figuranıń Dekart koordinatalar sistemasındaǵı teńlemesi degen ne? Koordinatalar tegisliginde sheńber teńlemesi qanday kóriniste beriledi?

2. Eger: 1) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$; 2) $A(8;\ -1)$, $B(-7;\ 7)$; 3) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$ bolsa, AB kesindi uzınlıǵın tabıń.

3. Eger: 1) $A(2;1)$ hám $B(x;\ -2)$ noqatlar arasındaǵı aralıq 5 ke; 2) A(x; 0) hám $B(2;\ -1)$ noqatlar arasındaǵı aralıq 1 ge teń bolsa, x tı tabıń.

4. Eger $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$ hám $C(5;\ 2)$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

5. Eger: 1) $C(7;\ 11)$, R = 5; 2) $C(-2;\ 3)$, $R = 1$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.

6. Tómendegi teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań: 1) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$; 2) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$.

7. 1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$ teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusın anıqlań.

8. Eger úshmúyeshliktiń tóbeleri: 1) $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ hám $C(2;\ 0)$; 2) (1; 0), B(2; $\sqrt{3}$) hám $C(8;\ 0)$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń túrin anıqlań.

9. Eger: 1) $C(9;\ 4)$, $R=7$; 2) $C(-3;\ -4)$, $R=2$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.

10. Tómendegi teńleme menen berilgen sheńber orayınıń koordinataları hám radiusin anıqlań:

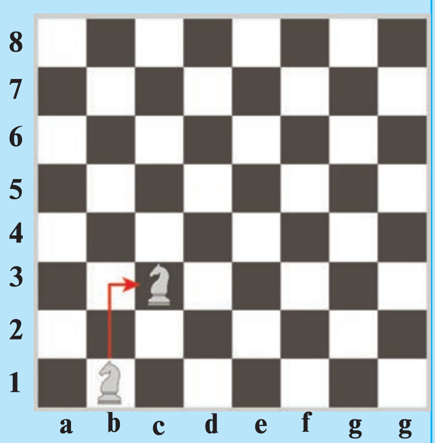
1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. $x^2+y^2=100$ teńleme menen berilgen sheńberde: 1) abscissası 8 ge teń; 2) ordinatası –6 ǵa teń noqatların tabıń.

Bilip qoyǵan paydalı!

Shaxmat (parıssha *shohmat* — shah jeńildi) sport túri bolıp, oyınnıń maqseti qarsılas shahtı mat etiwden ibarat. Eki túrli reńdegi (aq hám qara) 64 ketekli taxtada eki túrli reńdegi 16 dan dana (birewden shah hár forzin; 2 ewden ruwx, pil hám at; 8 den piyada) menen oynaladı.

Shaxmat partiyasınıń jazıwında Siz shaxmatshılardıń oyın dawamında taslar menen etken barlıq júrislerin oqıy alıwıńız múmkin. Máselen, at b 1-c3 degen jazıw attıń b1 ketekten c3 ketekke etken háreketin bildiredi. Bulardıń barlıǵı shxmat taxtasındaǵı koordinatalar sisteması bolıp tabıladı.



b1-c3

34. TUWRÍ SÍZÍQ TEŃLEMESI. GEOMETRIYALÍQ MÁSELELER SHESHIWDIŃ KOORDINATALAR USÍLÍ

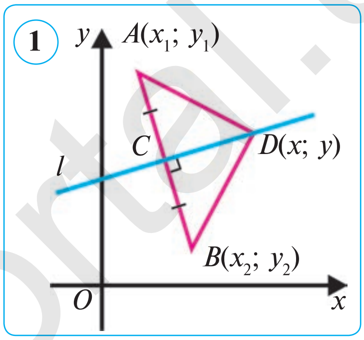
1. Tuwrı sızıq teńlemesi.

Teorema.

Tuwrı sızıqtıń tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasındaǵı teńlemesi tómendegi kóriniske iye:

$$\boldsymbol{ax+by+c=0,} \qquad \textbf{(1)}$$

bunda *a*, *b*, *c* — qálegen sanlar, *a* hám *b* sanlardan biri nolge teń emes.



Dálil. l tuwrı sızıq tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasındaǵı qálegen tuwrı sızıq bolsın. l ge perpendikulyar qandayda bir tuwrı sızıqtı ótkizemiz hám oǵan l tuwrı sızıq penen kesisken noqatı C dan baslap teń CA hám CB kesindilerdi qoyamız (1-súwret). x_1, y_1 — A noqattıń koordinataları, x_2, y_2 — B noqattıń koordinataları bolsın. Orta perpendikulyar l tuwrı sızıqqa jatqan qálegen $D(x;\ y)$ noqat A hám B noqatlardan teń uzaqlasqan boladı, yaǵnıy $DA = DB$, bunnan $DA^2 = DB^2$. Bul teńlikti koor-dinatalarda jazıp, tómendegini payda etemiz:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\,. \qquad (2)$$

Qawsırma ishindegi ańlatpalardı kvadratqa asırıp hám teńlemedegi uqsas aǵzalardı jıynaǵan soń, (2 teńleme tómendegi kóriniske keledi:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2) = 0. \qquad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 — qálegen sanlar, sol sebepli $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$ hám $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 = c$ dep belgilep, olardı (3) teńlemege qoyıp:

$$ax + by + c = 0$$

teńlemeni payda etemiz, bunda a, b hám c — qanday da bir sanlar.

D — 1 tuwrı sızıqtaǵı qálegen noqat, sonıń ushın (1)teńlemeni berilgen tuwrı sızıqtaǵı qálegen noqattıń koordinatası qanaatlandıradı.

Qandayda bir D_0 noqattıń x_0 hám y_0 koordinataları (1) teńlemeni qanaatlandırsın. Ol jaǵdayda $D_0A = D_0B$, yaǵnıy D_0 noqat A hám B noqatlardan teńdey uzaqlasqan boladı, demek, AB kesindiniń orta perpendikulyar l tuwrı sızıqqa tiyisli boladı. A hám B — hár túrli eki noqat bolǵanı ushın $(x_2 — x_1)$ yaki $(y_2 — y_1)$ ayırmalardan biri, yaǵnıy a hám b sanlardan biri nolge teń emesligin aytıp ótemiz.

1-másele. $A(1;\ –1)$ hám $B(–3;\ 2)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teńlemesin dúziń.

Sheshiliwi. AB tuwrı sızıqtıń teńlemesi $ax+by+c=0$ kóriniste ańlatıwın bilemiz. A hám B noqatlar AB tuwrı sızıqta jatadı, demek, olardıń koordinataların tuwrı sızıq teńlemesine qoyıp, usı teńlemelerdi payda etemiz:

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0, \quad a \cdot (-3) + b \cdot 2 + c = 0 \text{ yamasa}$$

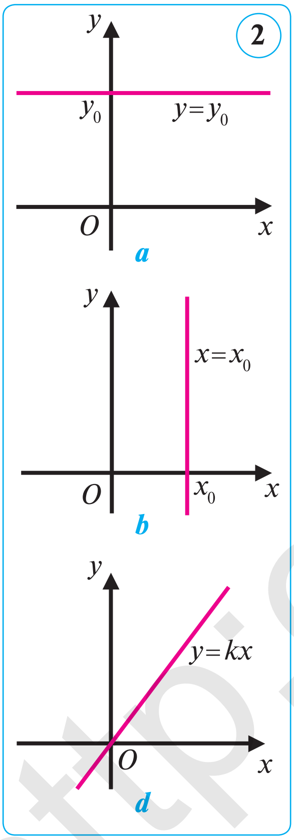
$$a - b + c = 0, \; -3a + 2b + c = 0.$$

Bul teńlemelerden a hám b koefficientlerin c arqalı ańlatamız: $a=3c$, $b=4c$. a hám b nıń bul mánislerin tuwrı sızıq teńlemesine qoyıp tabamız: $3cx+4cy+c=0$, bunda $c \neq 0$.

Bul teńleme AB tuwrı sızıqtıń teńlemesi boladı. Joqarıdaǵı teńlemeni c ǵa qısqartıp, tómendegi kóriniske keltiremiz: $3x+4y+1=0$.

Bul teńleme izlenip atırǵan tuwrı sızıq teńlemesi bolıp tabıladı.

2. Tuwrı sızıqtıń koordinatalar sistemasına salıstırmalı jaylasıwı.



Endi $ax+by+c=0$ tuwrı sızıq teńlemesiniń úsh jeke jaǵdayın kórip sıǵamız. Hárbir jaǵday ushın tuwrı sızıqtıń koordinatalar kósherlerine salıstırmalı qalay jaylasqanın anıqlaymız.

1-jaǵday. $a=0$, $b \neq 0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $by+c=0$ yaki $y=y_0$ kóriniste jazıw múmkin, bunda $y_0=-\frac{c}{b}$ — qandayda bir san $y=y_0$ tuwrı sızıqtıń barlıq noqatları birdey ordinataǵa iye, demek, ol abscissalar kósherine parallel (2-*a* súwret). Eger $c=0$ bolsa, onıń menen ústi-ústine túsedi. $y=0$ — abscissalar kósheriniń teńlemesi.

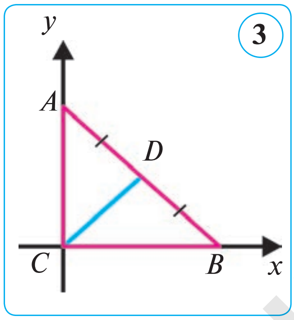
2-jaǵday. $a \neq 0$, $b=0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $ax+c=0$ yaki $x=x_0$ kóriniste jazıw múmkin, bunda $x_0=-\frac{c}{a}$ — qandayda bir san. $x=x_0$ tuwrı sızıqtıń barlıq noqatları birdey abscissaǵa iye, demek, ol ordinatalar kósherine parallel (2-*b* súwret). Eger $c=0$ bolsa, onıń menen ústi-ústine túsedi. $x=0$ — abscissalar kósheriniń teńlemesi.

3-jaǵday. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c=0$. Bul jaǵdayda tuwrı sızıq teńlemesin $ax+by=0$ yaki $y=kx$ kóriniste jazıwǵa boladı, bunda $k=-\frac{a}{b}$ — qandayda bir san.

$y=kx$ tuwrı sızıq koordinatalar basınan ótedi (2-*d* súwret).

3. Geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń koordinatalar usılı. Kóplegen geometriyalıq máselelerdi kesindi ortasınıń koordinataları hám eki noqat arasındaǵı aralıqtı esaplaw formalarınan paydalanıp sheshiw múmkin. Usı maqsette tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasın kirgiziw hám máseleniń shártin koordinatalarda jazıp alıw kerek. Sonnan soń másele algebralıq esaplawlar járdeminde sheshiledi.

2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte gipotenuzanıń ortası barlıq tóbelerinen teń uzaqlasqan. Sonı dálilleń.



Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli ABC ($\angle C=90°$) úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. AB kesindiniń ortasın D háribi menen belgileymiz. 3-súwrette kórsetilgendey, tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasın kirgizemiz. Eger $BC=a$, $AC = b$ bolsa, ol jaǵdayda úshmúyeshliktiń tóbeleri $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ hám $A(0;\ b)$ koordinatalarǵa iye boladı. Kesindi ortasınıń koordinataları formulasına muwapıq D noqat koordinataların tabamız: $D(0{,}5a;\ 0{,}5b)$.

Noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıw formulasınan paydalanıp, DC hám DA kesindileriniń uzınlıqların tabamız:

$$DC=\sqrt{(0{,}5a)^2+(0{,}5b)^2}=\sqrt{0{,}25\left(a^2+b^2\right)}=0{,}5\sqrt{a^2+b^2};$$

$$DA=\sqrt{(0{,}5a)^2+(0{,}5b-b)^2}=\sqrt{0{,}25a^2+0{,}25b^2}=\sqrt{0{,}25\left(a^2+b^2\right)}=0{,}5\sqrt{a^2+b^2}.$$

Solay etip, $DA = DB = DC$ eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Tuwrı sızıqtıń tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasında $ax+by+c=0$ kórinisindegi teńlemege iye bolıwın dálilleń.
2) Tuwrı sızıqtıń $ax+by+c=0$ teńlemesinde $a=0$ ($b=0$; $c=0$) bolsa, tuwrı sızıq qalay jaylasadı?

2. $A(3;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ hám $E(-9;\ -2)$ noqatlardıń qaysıları $x-3y+3=0$ teńleme menen berilgen tuwrı sızıqqa tiyisli, qaysıları tiyisli emes?

3. 1) $A(1;\ 7)$ hám $B(-3;\ -1)$; 2) $A(2;\ 5)$ hám $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ hám $B(-4;\ -5)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teńlemesin dúziń.

4. $x+y+c=0$ tuwrı sızıq $(1;\ 2)$ noqattan ótse, onıń teńlemesindegi c koefficient nege teń?

5. Eger $ax+by-1=0$ tuwrı sızıqtıń $(1;\ 2)$ hám $(2;\ 1)$ noqatlardan ótiwi belgili bolsa, onıń teńlemesindegi a hám b koefficientler nege teń?

6. 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y = 12$; 3) $4x-2y-10=0$ teńleme menen berilgen tuwrı sızıqtıń koordinatalar kósherleri menen kesisiw noqatların tabıń.

7. Eger: 1) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$ bolsa, $C(4;\ 2)$ noqat AB kesindiniń ortası bolıw-bolmaslıǵın tekseriń.

8. $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(-4;\ -5)$ noqatlardıń qaysıları $8x-4y-8=0$ teńleme menen berilgen tuwrı sızıqqa tiyisli, qaysıları tiyisli emes?

9. Eger $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$ hám $C(2;\ 2)$ bolsa, ABC úshmúyeshlik tároplerin óz ishine alǵan tuwrı sızıqlar teńlemesin dúziń.

35. VEKTOR TÚSINIGI. VEKTORDÍŃ UZÍNLÍĞÍ HÁM BAĞÍTÍ

1. Vektor shamalar. Vektor. Sizge málim bolǵan shamalar eki kóriniste bolıwı múmkin. Sonday shamalar bar, olar ózleriniń san mánisleri menen (berilgen ólshem birliginde) tolıq ańlatıladı. Mısalı, uzınlıq, maydan, awırlıq usılar qatarınan.

1-anıqlama. *Tek san mánisi menen anıqlanatuǵın shamalar **skalyar shamalar** delinedi.*

Jáne sonday shamalar bar, olardı tolıq biliw ushın bul shamalardı ańlatıwshı san mánislerinen tısqarı, olardıń baǵıtların da biliw zárúr boladı. Mısalı, tezlik, kúsh hám basım usılar qatarınan.

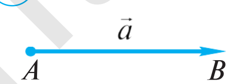
Vektor — geometriyanıń tiykarǵı túsiniklerinen biri bolıp, ol san (uzınlıq) hám baǵıtı menen tolıq anıqlanadı. Kórgizbeli bolıwı ushın onı baǵıtlanǵan kesindi kórinisinde kóz aldımızǵa keltiriwmiz múmkin. Negizinde vektorlar haqqında aytılǵanda, hámmesi óz-ara parallel bir túrdegi uzınlıq hám bir túrdegi baǵıtqa iye bolǵan baǵıtlanǵan kesindilerdiń pútin bir klasın názerde tutıw durıs boladı.

2-anıqlama. *San mánisi hám baǵıtı menen anıqlanatuǵın (sıpatlanatuǵın) shamalar **vektor shamalar** yamasa **vektorlar** dep ataladı.*

Fizika, mexanika hám matematikanıń san menen ǵana emes, al baǵıtı menen xarakterlenetuǵın muǵdarlardı tekseriwshi túrli máselelerdi vektor túsinigine alıp keledi. Máselen, kúsh, tezlik — bular vektorlar.

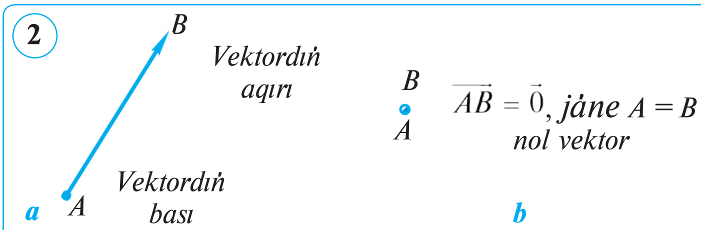
Vektorlıq shamalardi biz júdá kóp jaǵdaylarda ushıratamız. Mısalı: transportta ketip baratırǵanıńızda háreket tezligi, burılıw yamasa toqtawı menen baylanıslı vektorlıq shamalardı kóriwińiz múmkin. Tábiyattı úyreniwshi pánlerde olar tezleniw, inerciya kúshi, oraydan qospa kúsh hám soǵan uqsas atamalar menen ataladı. Biz vektorlıq shamalardı tábiyiy mánisin esapqa almaǵan halda onıń matematikalıq tábiyatın úyrenemiz. Álbette, vektorlıq shamalardıń matematikalıq qásiyetleri óziniń tábiyiy mánisine iye boladı.

1



Vektor A noqattan qoyılǵan.

2



Vektorlıq shamalardıń san kólemin kesindi arqalı ańlatamız. Bizge málim, hárqanday kesindiniń eki tóbesi bar. Olardan birewin vektordıń ***bası*** dep, ekinshi tóbesin vektorlıq shama baǵıtına sáykes baǵıtlaymız hám strelka (baǵıt) penen belgileymiz. Bunı vektordıń ***tóbesi*** deymiz.

3-anıqlama. ***Vektor*** *(vektorlıq shamalar) dep, baǵıtqa iye bolǵan kesindige aytıladı.*

Vektorlıq shamanıń baǵıtı kórsetilgen kesindi sıpatında súwretlenedi. Vektordı ańlatıwshı kesindi tóbesi A hám B noqatta bolsa, A noqattan B noqatqa baǵıtlanǵan vektor $\overrightarrow{AB}$ túrinde belgilenedi. Sonday-aq, vektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ (latın álipbesiniń kishi háripleri) túrinde de belgileniwi múmkin (1-súwret).

Oqılıwı: $\overrightarrow{AB}$ vektor yamasa $\vec{a}$ vektor.

1) Vektordıń baǵıtı onıń bası hám aqırın kórsetiw menen anıqlanadı. Bunda vektor bası birinshi orınǵa qoyıladı (2-a súwret).

AB nurın anıqlap bergen baǵıtın $\overrightarrow{AB}$ *vektordıń baǵıtı* delinedi. Bası hám aqırı betpe-bet túsken vektor *nol vektor* dep ataladı. $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ teńlik A hám B noqatlardıń betpe-bet túskenin bildiredi (2-*b*, súwret).

2) Vektordı ańlatıwshı kesindiniń uzınlıǵı vektordıń *moduli* yamasa *absolyut* mánisi dep ataladı

Vektordıń moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yamasa $|\vec{a}|$ túrinde belgilenedi (3-súwret).

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorınıń moduli AB kesindiniń uzınlıǵı bolıp esaplanadı: $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$. Sonıń ushın geometriyada vektordıń moduli yamasa absolyut mánisi onıń *uzınlıǵı* dep ataladı.

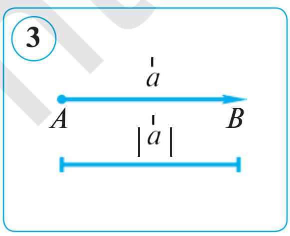
Nol vektordıń uzınlıǵı (moduli) nolge teń dep esaplanadı: $|\vec{0}|=0$.

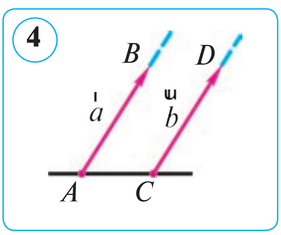
2. Vektorlardıń teńligi.

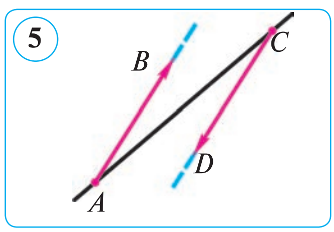
4-anıqlama. *Bir tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızılarda jatıwshi vektorlar* ***kollinear vektorlar*** *dep ataladı.*

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń kollinearlıǵı $\vec{a}\parallel\vec{b}$ túrinde jazıladı..

Eger parallel tuwrı sızıqlarda jatıwshı eki vektor olardıń bası arqalı ótken tuwrı sızıqtan bir tárepte jatsa, *baǵıtlas vektorlar* (4-súwret); 2) tuwrı sızıqqa qarata hár tárepte jatsa, *qarama-qarsı baǵıtlanǵan vektorlar* delinedi (5-súwret).







$\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{CD}$ vektorlar: 1) *baģıtlas* bolsa, olar $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ sıyaqlı 2) *qarama-qarsı baģıtlanģan* bolsa, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ túrinde belgilenedi.

Nol vektor qálegen vektorģa kollinear dep esaplanadı

5-anıqlama. *Eger $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń uzınlıqları teń hám baģıtları birdey bolsa, bul vektorlar **teń vektorlar** dep ataladı.*

Solay etip, eger $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ hám $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bolsa, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar teń boladı. Vektorlardıń teńligi $\vec{a}=\vec{b}$ túrinde jazıladı.

Vektorlardıń teńligi onıń bası tegisliktiń qálegen noqatında bolıwın kórsetedi (6-súwret), yaģnıy vektordıń modulin ózgertpey, baģıtın saqlaģan halda onıń basın tegisliktiń qálegen noqatına kóshiriw múmkin eken. Bul *vektordıń parallel kóshiriw qásiyeti* dep ataladı.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Vektor degen ne? Vektorlar qalay belgilenedi?
2) Qanday eki vektor teń vektorlar delinedi? Qanday vektorlar birdey (qarama-qarsı) baģıtlanģan vektorlar delinedi? Vektordıń moduli deren ne?

2. *ABCD* parallelogrammda (7-súwret): 1) $\overrightarrow{DC}$ vektor menen baģıtlas; 2) $\overrightarrow{AO}$ vektor menen baģıtlas; 3) $\overrightarrow{AD}$ vektorģa qarama-qarsı baģıtlanģan; 4) $\overrightarrow{BD}$ vektorģa qarama-qarsı baģıtlanģan; 5) $\overrightarrow{AB}$ vektorģa teń; 6) $\overrightarrow{OC}$ vektorģa teń; 7) $\overrightarrow{OB}$ vektorģa teń vektorlardı jazıń.

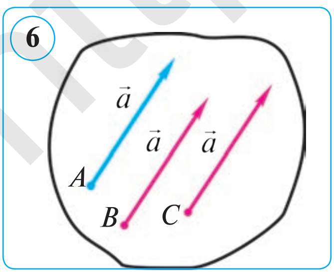
3. *ABCD* parallelogrammnıń diagonalları *O* noqatta kesilisedi. Onıń tóbeleri hám diagonallarınıń kesilisiiw noqatı menen belgilengen vektorlardı jazıń. Olardıń ishinen qaysıları: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ hám $\overrightarrow{BO}$ vektorlarģa kollinear?

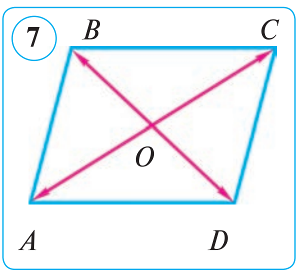
4. Eger: 1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ hám $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{DC}$ vektorlar kolleniar emes bolsa, *ABCD* tórtmúyeshliktiń túrin anıqlań.

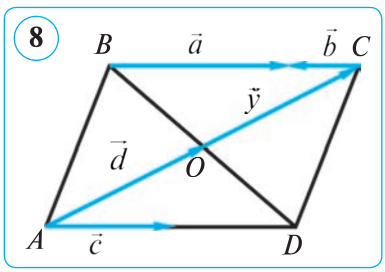
5. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ekenligi málim. Usı tastıyıqlawlar durıs pa:
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB| = |CD|$?

6. *ABCD* — parallelogramm. 8-súwrette berilgen: vektorlar ishinen: 1) kollinear; 2) baģıtlas; 3) qarama-qarsı baģıtlanģan; 4) teń uzınlıqlarģa iye bolģan vektorlar juplıģın kórsetiń.

7. $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{BA}$ vektorlardıń baģıtı haqqında ne dew múmkin?







36 — 37. VEKTORLARDÍ QOSÍW HÁM ALÍW

1. Vektorlardı qosıw. Bizge $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar berilgen bolsın (1-*a* súwret). Qálegen A noqattı belgileymiz hám bul noqatdan $\vec{a}$ vektorǵa teń $\overrightarrow{AB}$ vektordı qoyamız. Bunnan soń B noqatdan $\vec{b}$ vektorǵa teńg $\overrightarrow{BC}$ vektorın qoyamız. Endi $\vec{a}$ vektordıń bası *A* noqattan $\vec{b}$ vektor tóbesi *C* ǵa baǵıtlanǵan vektor ótkizemiz (1-*b* súwret). $\overrightarrow{AC}$ vektor $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ *vektorlardıń qosındısı* delinedi. Vektorlardı qosıwdıń bul qaǵıydasın «*úshmúyesh* (*úsh noqat*) *qaǵıydası*» delinedi.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlarınıń qosındısı $\vec{a}+\vec{b}$ túrinde belgilenedi

Ushmúyeshlik qaǵıydasın tómendegishe dálillesekde boladı:

eger A, B hám C — qálegen noqatlar bolsa, onda tómendegi teńlik orınlı:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Úshmúyeshlik qaǵıydası qálegen A, B hám C noqatlar ushın, sonıń menen bir qatarda olardan ekewi yamasa úshewi betpe-bet tússe de orınlı boladı (1-*d* súwret).

2. Vektorlardı qosıw nızamları. Bizge málim, parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń hám parallel. Eger baǵıtları birdey bolsa, parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri teń vektorlardı ańlatadı.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ — kollinear emes vektorlar bolsın. Qálegen *A* noqattan $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ hám $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorlardi qoyamız hám tárepleri usı vektordan dúzilgen *ABCD* parallelogramm sızamız (2-súwret). Úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{hám} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

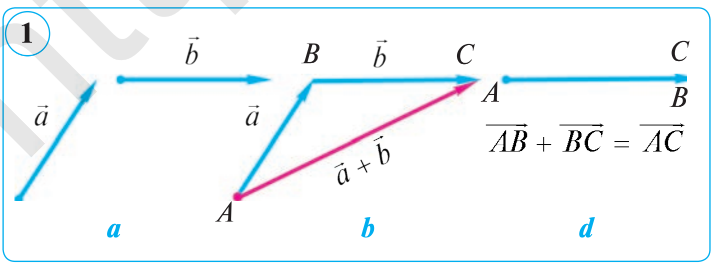
Bunnan $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ kelip shıǵadı.

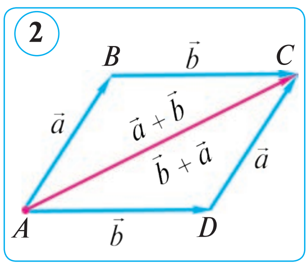
Demek, vektorlar qosındısı olardıń qanday tártipte izbe-iz jaylasıwına baylanıslı emes, yaǵnıy *qálegen* $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ *vektorlar ushın tómendegi teńlik orınlı*:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Buǵan vektorlardı qosıwdıń *orın almastırıw nızamı* dep ataladı.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardan dúzilgen *ABCD* parallelogrammda qosındı $\overrightarrow{AC}$ vektor qosılıwshı vektorlardıń ulıwma basınan shıǵıwshı diagonaldan ibarat.





Ádette, vektorlardı bunday qosıw, vektorlardı qosıwdıń «*paralelogramm qağıydası (usılı)*» dep ataladı. (2-súwret).

Endi úsh $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektor qosındısın kóreyik (3-súwret). Qálegen A noqattan $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ vektordi, B noqattan $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektordı, C noqattan bolsa $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektordı qoyamız. Úshmúyeshlik qağıydasın qollanıp, tómendegige iye bolamız:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Bunda, *qálegen* $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ *vektorlar ushın*

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

teńlik orınlı ekenligi kelip shığadı. Bul vektorlardı qosıwdıń *gruppalaw nızamı (qásiyeti).*

Vektorlardıń hárbiri nolden parqlı bolğanda olardıń qosındısı nol vektor bolıwı múmkin.

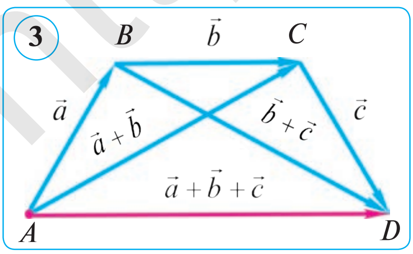
Mısalı, ABC úshmúyeshlikti alıp qarayıq (4-súwret). Bunda $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ hám $\overrightarrow{CA}$ vektorlar qosındısı nol vektor boladı, yağnıy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, sebebi birinshi vektordıń bası menen úshinshi vektordıń tóbesi betpe-bet túsedi. Demek, qosındı vektor nol vektor — noqat boldı.

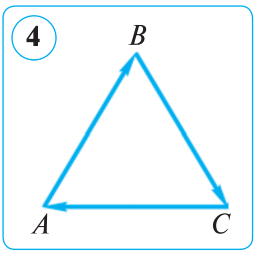
1-anıqlama. *Eki vektordıń qosındısı nol vektor bolsa, olar* ***qarama-qarsı vektorlar*** *dep ataladı.*

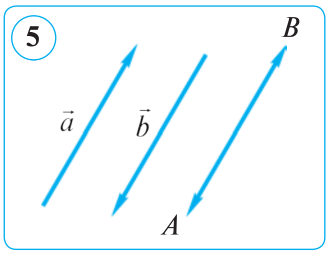
Demek, eger $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ bolsa, onda $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ vektor $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorğa (keri) *qarama-qarsı vektor* dep ataladı hám $\vec{b}=-\vec{a}$, $\vec{a}=-\vec{b}$ sıyaqlı jazıladı (5-súwret). Eger qarama-qarsı vektorlardı (úshmúyeshlik qağıydası boyınsha) qossaq, onda nol vektor kelip shığadı. Bunda $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar parallel bolıp, túrli tárepke bağıtlanğan boladı. Demek, *hárbir* $\vec{a}$ *vektor ushın oğan qarama-qarsı* $-\vec{a}$ *vektor bar* (*yağnıy* $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$) boladı. Joqarıdağı pikirlerden tómendegi juwmaqqa kelemiz.

Eger nol bolmagan eki vektordıń uzınlıqları teń hám olar qarama-qarsı bağıtlanğan bolsa, olar ***qarama-qarsı vektorlar*** *dep ataladı.*

Nol vektor óz-ózine qarama-qarsı vektor esaplanadı.

3


4


5


3. Vektorlardı alıw. Vektorlardı ayırıw sanlardı ayırıw sıyaqlı qosıwǵa keri ámel.

2-anıqlama. $\vec{a}$ *hám* $\vec{b}$ ***vektorlardıń ayırması*** *dep, sonday* $\vec{c}$ *vektorǵa aytıladı,* $\vec{b}$ *vektor menen qosındısı* $\vec{a}$ *vektordı beredi:* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń ayırması tap usı sanlardıń ayırması sıyaqlı belgilenedi: $\vec{a}-\vec{b}$. Eki vektordıń ayırması birinshi vektorǵa ekinshi vektorǵa qarama-qarsı vektrodı qosıw sıpatında anıqlanadı hám ol $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ vektorǵa teń (6-*b* súwret).

Bizge $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ berilgen bolsın (6-*a* súwret). $\vec{a}$ vektor menen $\vec{b}$ vektorǵa qarama-qarsı bolǵan $-\vec{b}$ vektordıń qosındısın kóreyik.

Qálegen $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ *vektorlar ushın* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ *teńlik orınlı.*

Haqıyqattan da, $\left(\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right)+\vec{b}=\vec{a}+\left(\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Eger $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar bir *O* noqattan qoyılǵan bolsa, ol jaǵdayda $\vec{a}-\vec{b}$ ayırmanı tabıw ushın tómendegi qaǵıydadan paydalanıw qolaylı (6-*d* súwret):

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Joqarıda kórsetilgenindey, *ayırılıwshı* vektordıń *aqırı ayırma* vektordıń *bası*, *kemeyiwshi* vektordıń *aqırı* bolsa *ayırma* vektordıń *aqırı* wazıypasın atqaradı eken. Qaǵıydanı este saqlap qalıw qolay bolıwın támiyinlew maqsetinde, ol sxemalıq tárizde kórsetildi.

Vektordı qosıwda parallelogramm usılınan paydalansaq (7-súwret), ayırma vektor parallelogrammnıń ekinshi diagonalınan ibarat boladı.

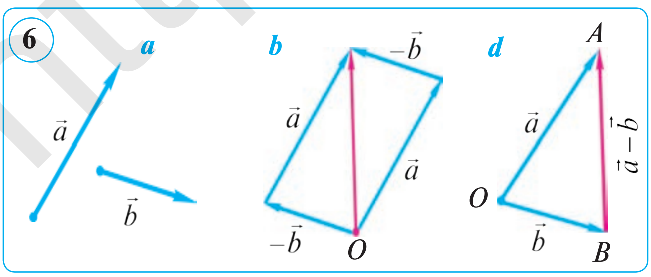
Másele. *ABC* úshmúyeshlik berilgen. Tómendegi. 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ vektorlardı $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ hám $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ vektorları arqalı ańlatıń.

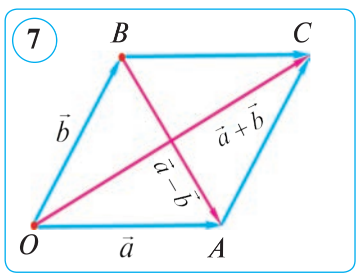
Sheshiliwi. 1) $\overrightarrow{BA}$ hám $\overrightarrow{AB}$ – qarama-qarsı vektorlar, sonıń ushın

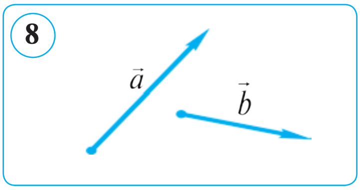
$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB} \quad \text{yamasa} \quad \overrightarrow{BA}=-\vec{a}.$$

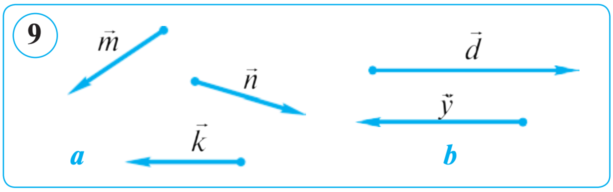
2) Úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Biraq $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, sonıń úshın

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$









Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Ushmúyeshlik hám parallelogramm qaǵıydası boyınsha vektorlar qosındısı qalay tabıladı? Eki vektor ayırması dep nege aytıladı?
   2) Berilgen vektorǵa qarama-qarsı vektor dep nege aytıladı?

2. 8-súwrette $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar súwretlengen. $\vec{a}+\vec{b}$ vektordı eki usıl menen sızıń.

3. 9-súwrette $\vec{m}$, $\vec{n}$ hám $\vec{k}$ hám de $\vec{d}$ hám $\vec{e}$ vektorlar súwretlengen. Vektorlardı sızıń: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

4. 10-súwrette $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ hám de $\vec{d}$ hám $\vec{e}$ vektorlar súwretlengen. Vektorlardı sızıń: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

5. *ABCD* parallelogramm berilgan. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ teńlik orınlanadı ma? Tekserip kóriń.

6. *ABCD* rombıda: AD = 20 cm, BD = 24 cm, O — diagonallarınıń kesilisiw noqatı. $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}\right|$ nı tabıń.

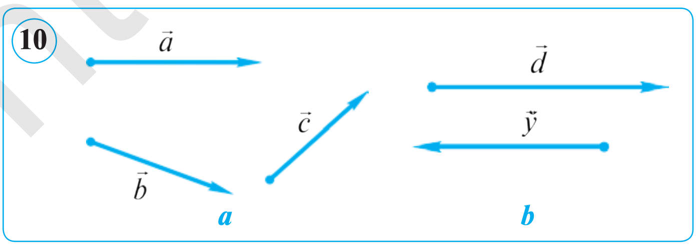
7. *ABCD* — qálegen tórtmúyeshlik. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ ekenligin dálilleń.

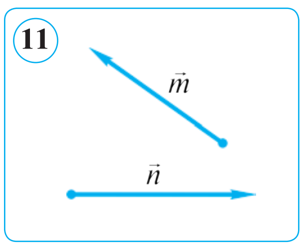
8. *ABCD* — parallelogramm. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ vektor teńlikti dálilleń (vektorlardı qosıwdıń «*parallelogramm qaǵıydası*»).

9. ABCD parallelogrammda: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ vektorlardı $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

10. E hám F – ABC úshmúyeshliktiń *AB* hám *AC* tárepleriniń ortaları. $\overrightarrow{BF}$ $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ hám $\overrightarrow{BC}$ vektorlardı $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ hám $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

11. 11-súwrette $\vec{m}$ hám $\vec{n}$ vektorlar súwretlengen. $\vec{m}+\vec{n}$ vektordı eki usıl menen jasań.





38 — 39. VEKTORDÍ SANǴA KÓBEYTIW. VEKTORDÍŃ KOORDINATALARÍ

1. Vektorlardı sanǵa kóbeytiw. Qanday da bir $\vec{a}$ vektordı alamız hám $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ qosındısın tabamız (1-súwret). Bunday qosındını $3\cdot\vec{a}$ dep belgileymiz hám bul ańlatpanı $\vec{a}$ vektordıń 3 sanına kóbeymesi dep atawımız tábiyiy.

Anıqlama. *Nol bolmaǵan $\vec{a}$ vektordıń k sanǵa kóbeymesi dep sonday $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ vektorǵa aytıladı, bunda onıń uzınlıǵı $|k|\cdot|\vec{a}|$ sanǵa teń bolıp, baǵıtı $k>0$ bolǵanda $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektor baǵıtı menen birdey, $k<0$ bolǵanda bolsa baǵıtları qarama-qarsı boladı.*

Nol vektordıń qálegen sanǵa kóbeymesi nol vektor dep esaplanadı.

$\vec{a}$ vektordıń k sanǵa kóbeymesi $k\vec{a}$ túrinde belgilenedi (san kóbeytiwshi shep tárepke jazıladı). Anıqlama boyınsha:

$$|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|.$$

Vektordıń sanǵa kóbeymesi anıqlamadan anıq tómendegiler kelip shıǵadı: 1) *qálegen vektordıń nolge kóbeymesi nol vektor boladı*; 2) *qálegen san hám qálegen $\vec{a}$ vektor ushın $\vec{a}$ hám $k\vec{a}$ vektorlar kollinear.*

Endi vektordı sanǵa kóbeytiwdiń tiykarǵı qásiyetlerin sanap ótemiz.

Qalegen $\vec{a}$, $\vec{b}$ ektorlar hám qálegen k, l sanlar ushın teńlikler orınlı:

1°. $(k\cdot l)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})$ — *gruppalaw nızamı.*

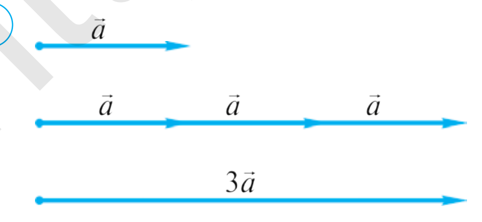
2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *birinshi bólistiriw nızamı.*

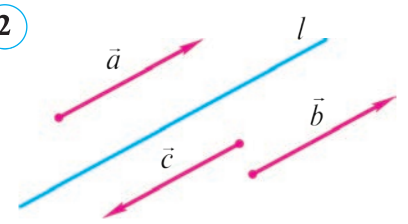
3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *ekinshi bólistiriw nızamı.*

4°. $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Parallel tuwrı sızıqlarǵa yamasa bir tuwrı sızıqta jatıwshı eki vektordı ***kollinear vektorlar*** *dep atalıwın jáne bir esletip ótemiz.*

l tuwrı sızıq hám oǵan parallel bolǵan $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektorlar berilgen bolsın (2-súwret). Anıqlama boyınsha, $\vec{a}$, $\vec{b}$ hám $\vec{c}$ vektorlar kollinear vektorlar boladı. Bul jerde $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar birdey baǵıtlanǵan, $\vec{c}$ vektor bolsa $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlarǵa qarata qarama-qarsı baǵıtlanǵan.

1


2


Bizge málim, vektordı sanǵa kóbeytkende kóbeyme vektordıń baǵıtı berilgen vektorǵa parallel boladı. Bunnan tómendegi juwmaqtı payda etemiz:

vektordıń sanǵa kóbeymesi sol vektorǵa kollinear vektor boladı.

Teorema.

Vektor óziniń moduline teń sanǵa bólinse, sol vektorǵa kollinear birlik vektor payda boladı.

Dálil. $\vec{a}$ vektordıń moduli $|\vec{a}|$ bolsın. $\vec{a}$ vektordıń $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ sanǵa kóbeymesin qarayıq:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Demek, kóbeyme vektor moduli bir birlikke teń.

Moduli birge teń vektordı *birlik vektor* dep ataymız. Eger $\vec{a}$ vektor boyınsha baǵıtlanǵan birlik vektordı $\vec{e}$ dep belgilesek, teorema boyınsha: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ yamasa bul teńlikti $|\vec{a}|$ sanǵa kóbeyttirsek: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Nátiyjede, biz vektorlardı úyreniwde úlken áhmiyetke iye bolǵan teńlikti payda ettik, yaǵnıy *hárqanday vektor sol vektor moduli menen ózine kollinear birlik vektordıń kóbeymesine teń eken.*

1-másele. k nıń qanday mánisinde tómendegi ańlatpalar orınlı boladı:

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$;   2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$;   3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, bul jerde $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Sheshiliwi. 1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ yaki $k > 1$;

3) $\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ yaki $k = 1$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ da $|\vec{a}| > 0$. Bizge belgili teńsizlik yaki teńlemeniń hár eki bólimi oń sanǵa bólsek, qatnas ózgermeydi.

Juwabı: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ yaki $k > 1$; 3) $k = -1$ yaki $k = 1$ da ańlatpalar orınlı boladı.

2. Vektorlardıń koordinataları. Tegislikte xOy Dekart koordinatalar sisteması berilgen, yaǵnıy koordinatalar bası O noqat, koordinata kósherleriniń baǵıtı hám masshtab birligi — birlik kesindi berilgen bolsın. Bunda tegisliktegi qálegen A noqat óziniń abscissası x hám ordinatası y ge iye boladı: $A(x; y)$. Moduli bir birlikke iye bolǵan hám de baǵıtı Ox kósheri boyınsha baǵıtlanǵan vektordı $\vec{i}$ menen, tap sonday, Oy kósheri boyınsha baǵıtlanǵan birlik vektordı $\vec{j}$ menen belgileymiz (3-*a* súwret).

Tegislikte koordinataları $(x;\ y)$ bolǵan A noqatı berilgen bolsın. OA_xA úshmúyeshligin qarayıq. Bul úshmúyeshlikte $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{A_xA}$. Biraq $OA_x=x$, $A_xA=OA_y=y$ bolǵanı ushın $\overrightarrow{OA_x}=x\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA}=y\cdot\vec{j}$ boladı. Bunnan

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j} \qquad (1)$$

teńlikti payda etemiz. Bul (1) teńlik vektordıń *koordinata ańlatpası* dep ataladı.

Demek, bası koordinatalar basında, tóbesi *A(x; y)* noqatında bolǵan vektordı koordinata kósherleri boyınsha berilgen $\vec{i}$ hám $\vec{j}$ vektorlar arqalı kóriniste jazıw múmkin.

Bunda $(\vec{i};\ \vec{j})$ vektorlar juplıǵı *bazis vektorlar*, x hám y sanlar bolsa $\vec{a}$ vektordıń *koordinataları* dep ataladı.

Eger vektordıń (1) koordinata ańlatpası belgili bolsa, vektor koordinataları menen berilgen delinedi hám qısqasha $\vec{a}(x;\ y)$ kórinisinde jazıladı:

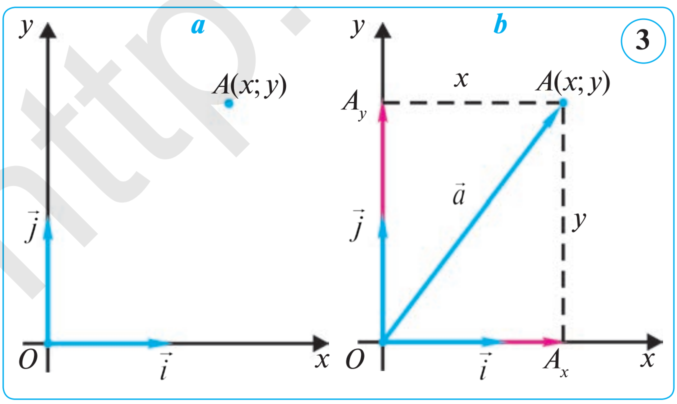
$$\vec{a}(x;y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}. \qquad (2)$$

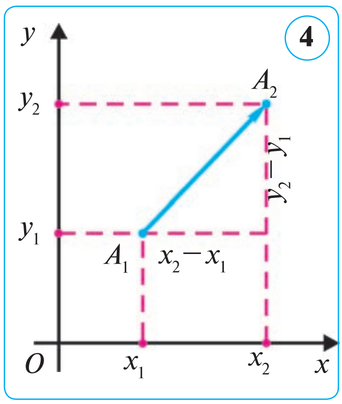
Anıqlama. *Eger* $A_1(x_1;\ y_1)$ *hám* $A_2(x_2;\ y_2)$ bolsa, x_2-x_1 *hám* y_2-y_1 sanlar $\overrightarrow{A_1A_2}$ *vektordıń koordinataları boladı* (4-súwret).

Vektordıń koordinataları hárip penen belgileniwinen keyin qawsırma ishinde jazıladı: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$. Ayırım jaǵdaylarda koordinataları berilgen vektorlardı belgilewde $\overline{(x_2-x_1; y_2-y_1)}$ jazıwın da paydalanıladı. Nol vektordıń koordinataları nolge teń ekeni anıq: $\vec{0}(0;0)$.Noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıw formulası boyınsha:

$\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektordıń uzınlıǵı $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ formula boyınsha esaplanadı.

Qaǵıyda. *Vektordıń koordinataların tabıw ushın onıń aqırınıń (tóbesiniń) koordinatalarınan basınıń sáykes koordinataların ayırıw kerek.*





Mısalı, $\overrightarrow{OA}$ vektordıń koordinataları vektor aqırı (tóbesi) A nıń koordinataları menen tolıq anıqlanadı, yaǵnıy vektor aqırınıń koordinatalarına teń boladı.

Eger $A(x;\ y)$ bolsa, $\overrightarrow{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$ boladı.

Koordinataları teń bolǵan vektorlardıń *qásiyeti* hám *belgisin* dálilsiz keltiremiz.

Teorema.

Teń vektorlar sáykes túrde teń koordinatalarǵa iye. Hám kerisinshe, eger vektorlardıń sáykes koordinataları teń bolsa, vektorlar teń boladı.

1-nátiyje. Eger vektor aqırınıń koordinataları vektordıń koordinataları menen teń bolsa, bul jaǵdayda berilgen vektordıń bası koordinatalar basında boladı (3-*b* súwret).

2-nátiyje. Eger $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor menen onıń aqırı bolǵan $B(x_2;\ y_2)$ noqatı koordinataları berilgen bolsa bul jaǵdayda vektor bası $A(x_1;\ y_1)$ noqatınıń koordinataların tabıw ushın B noqatınıń koordinatalarınan $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektordıń koordinataların ayırıw jeterli:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \tag{1}$$

3-nátiyje. Eger $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor menen onıń bası bolǵan $A(x_1;\ y_1)$ noqatı koordinataları berilgen bolsa, bul jaǵdayda vektor aqırı $B(x_2;\ y_2)$ noqatınıń koordinataların tabıw ushın A noqatınıń koordinatalarına $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektordıń sáykes koordinataların qosıw jeterli:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \tag{2}$$

2-másele. Eger $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$ hám $C(4;\ 1)$ bolsa, $ABCD$ parallelogrammnıń tórtinshi tóbesi koordinatasın tabıń.

Sheshiliwi. Eger $ABCD$ tórmúyeshlik parallelogramm bolsa, ol jaǵdayda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ boladı. $(x; y)$ — izlenip atırǵan D tóbesiniń koordinatası bolsın. $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{DC}$ vektorınıń koordinataların tabamız:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0-(-2); 4-1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4-x; 1-y)}.$$

Solay etip, $4-x=2$ hám $1-y=3$, bunnan $x=2$ hám $y=-2$.

Juwabı: $D(2;\ -2)$.

3-másele. A(−1; 5) noqatı $\vec{a}(2;\ -3)$ vektordıń bası bolsa, bul vektor aqırı B nıń koordinataların tabıń.

Sheshiw. Berilgen maǵlıwmatlardı sońǵı (2) qatnaslarǵa qoyıp, izlenip atırǵan koordinatlardı tabamız:

$$x_2 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

Juwabı: B $(1;\ 2)$.

4-másele. $A(-3;\ 0)$ hám $B(5;\ -4)$ noqatlar berilgen. $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{BA}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

Shehiliwi. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3); -4-0) = \overrightarrow{AB}(8; -4) = \overline{(8;-4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8;-4)} = \overline{(-8;-(-4))} = \overline{(-8;\ 4)}$. *Juwabı:* (8; –4); (–8; 4).

Eskertiw! *Qálegen vektordıń koordinataları belgili bolsa, ol jaǵdayda oǵan qarama-qarsı bektordıń koordinataları jáne qaytadan esaplanbastan, berilgen vektordıń koordinataları belgisin qarama-qarsıǵa ózgerttiriw jetkilikli.*

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Berilgen vektordıń sanǵa kóbeymesi dep nege aytıladı?
2) Vektordı sanǵa kóbeytiwdiń qásiyetlerin aytıń.
3) Koordinatalar kósherindegi birlik vektorlar qalay belgilenedi?

2. Uzınlıǵı 2 cm ge teń bolǵan $\vec{a}$ vektordı sızıń. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$ vektordı sızıń.

3. k nıń qanday mánislerinde $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ hám $k\vec{a}$ vektorlar:
1) baǵıtlas; 2) qarama-qarsı baǵıtlanǵan; 3) teń boladı?

4. $ABCD$ parallelogrammda O — diagonallardıń kesisiw noqatı, K noqat — CD táreptiń ortası. $\overrightarrow{OA}$ hám $\overrightarrow{AK}$ vektorlardı $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ hám $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

5. C noqat AB táreptiń ortası. 1) $\overrightarrow{AC}$ vektordı $\overrightarrow{CB}$ vektor arqalı; 2) $\overrightarrow{AB}$ vektordı $\overrightarrow{CB}$ vektor arqalı; 3) $\overrightarrow{AC}$ vektordı $\overrightarrow{BA}$ vektor arqalı ańlatıń.

6. Ańlatpalardı ápiwayılastırıń:

1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. 1) $A(-1;\ 4)$ hám $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ hám $B(1; -1)$; 3) $A(3;\ 2)$ hám $B(3; 2)$ noqatlar berilgen. $\overrightarrow{AB}$ vektordıń koordinataların tabıń.

8. Eger: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0; -1)$ hám $B(3; -5)$; 3) $A(2; -4)$ hám $B(2; -1)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ vektordıń uzınlıǵın tabıń.

9. Eger: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ bolsa, $\overrightarrow{BA}$ vektordıń koordinataları nege teń boladı?

10. $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ hám $D(5;\ 2)$ noqatlar berilgen. $\overrightarrow{AC}$ hám $\overrightarrow{DB}$ vektorlar teń be?

11. $\vec{a}\,(m; 24)$ vektordıń uzınlıǵı 25 ge teń. m di tabıń.

12. A(5; –3) noqat $\vec{a}(-7;\ -8)$ vektorınıń bası bolsa, bul vektor aqırı (B) nıń koordinataların tabıń.

13. Eger: 1) $A(-3;\ 1)$ hám $B(5;\ -5)$; 2) $A(12;\ 0)$ hám $B(0;\ -5)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ vektordıń uzınlıǵın tabıń.

40. KOORDINATALARÍ MENEN BERILGEN VEKTORLAR ÚSTINDE ÁMELLER

Koordinataları menen berilgen vektorlardı qosıw, alıw hám sanǵa kóbeytiw usılları menen tanısamız.

1. Koordinataları menen berilgen vektorlardı qosıw.

Anıqlama. $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ hám $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ *vektorlardıń qosındısı* dep, koordinataları $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$ bolǵan $\vec{c}(c_1;c_2)$ vektorǵa aytıladı.

Solay etip,

$\vec{a}(a_1;\ a_2)+\vec{b}(b_1;\ b_2)=\vec{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$ yaki $\overline{(a_1;\ a_2)}+\overline{(b_1;\ b_2)}=\overline{(a_1+b_1;\ a_2+b_2)}$.

Hárqanday $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ hám $\vec{c}(c_1;c_2)$ vektorlar ushın tómendegi teńlikler orınlı:

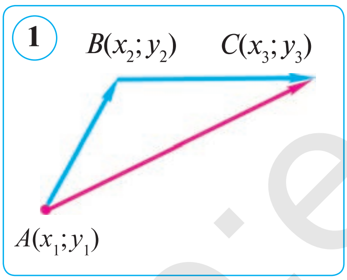
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Dálillew ushın teńliktiń oń hám shep bólimlerinde turǵan vektorlar koordinatalardıń sáykes koordinataların salıstırıw jetkilikli.

Teorema.

A, B, C noqatlar qanday bolmasın, tómendegi vektor teńlik orınlı:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



Dálil. $A(x_1;x_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ — berilgen noqatlar (1-súwret). Qosılıwshı vektorlardı koordinatalar arqalı ańlatıp, tabamız:

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1),\quad \overrightarrow{BC}(x_3-x_2;\ y_3-y_2).$$

Anıqlama boyınsha, qosındı vektordıń koordinataların anıqlaw ushın $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{BC}$ vektorlardıń sáykes koordinataların qosamız:

$$x_2-x_1+x_3-x_2=x_3-x_1,\quad y_2-y_1+y_3-y_2=y_3-y_1.$$

Bul bolsa $\overrightarrow{AC}$ vektordıń koordinataları: $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

Teń vektorlar haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Teorema dálillendi.

2-súwretten paydalanıp, joqarıdaǵı teńliktiń durıslıǵın dálillewdi ózleri-ńizge qaldıramız.

Solay etip, *vektorlardı qosıw ushın olardıń sáykes koordinataların qosıw jeterli.*

2. Koordinataları menen berilgen vektorlardı ayırıw.

Anıqlama $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ hám $\vec{b}(b_1;b_2)$ *vektordıń ayırması* dep, sonday $\vec{c}$ $(c_1;c_2)$ vektorǵa aytıladı, onıń $\vec{b}$ vektor vektor menen $\vec{a}$ vektordı beredi: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Bunnan $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ vektordıń koordinataların tabamız:

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=a_2-b_2.$$

Koordinataları menen berilgen vektorlardı ayırıw ushın olardıń sáykes koordinataların ayırıw kerek, yaǵnıy:

$$\vec{a}(a_1;\ a_2)-\vec{b}(b_1;\ b_2)=\vec{c}(a_1-b_1;\ a_2-b_2) \text{ yaki}$$

$$\overline{(a_1;a_2)}-\overline{(b_1;b_2)}=\overline{(a_1-b_1;\ a_2-b_2)}.$$

3.Koordinataları menen berilgen vektordı sanǵa kóbeytiw.

Anıqlama. $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ vektordıń k sanǵa kóbeymesi dep, $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$ vektorǵa aytıladı, yaǵnıy:

$$k\vec{a}=\overline{(ka_1;\ ka_2)}.$$

Anıqlamaǵa muwapıq, $\overline{(a_1;\ a_2)}\cdot k=k\overline{(a_1;\ a_2)}$.

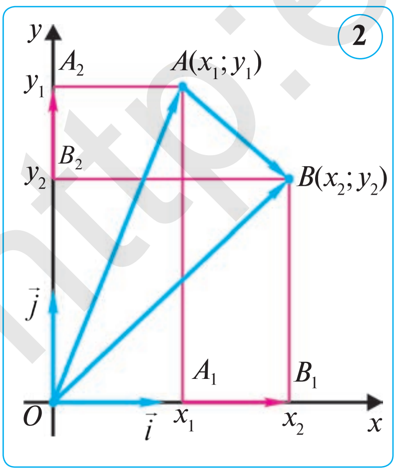
Demek, *vektordı sanǵa (yaki k sanı $\vec{a}$ vektorǵa kóbeytiw ushın) onıń koordinataların usı sanǵa kóbeytiw kerek.*

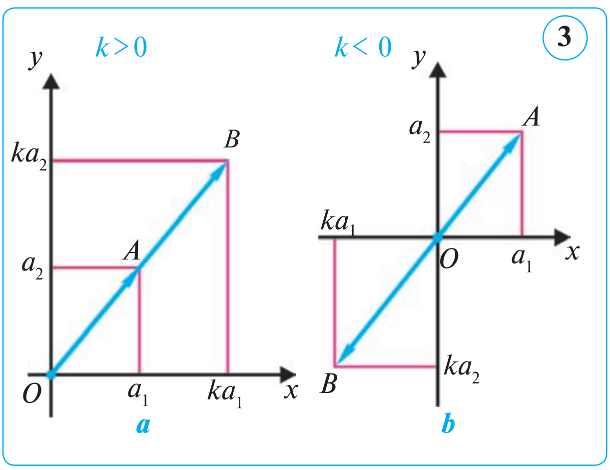
Vektordı sanǵa kóbeytiwdiń dáslep keltirilgen anıqlamasın 3-súwretten paydalanıp tekserip kóriń. Onıń qásiyetleri koordinatalarda da orınlı boladı Sol sebepli olardı keltirip ótpedik.

1-máselе. $\vec{a}(3;\ 5)$ hám $\vec{b}(2;\ 7)$ vektorlar qosındısın tabıń.

Sheshiliwi. $\vec{a}(3;\ 5)+\vec{b}(2;\ 7)=\overline{(3;\ 5)}+\overline{(2;\ 7)}=\overline{(3+2;\ 5+7)}=\overline{(5;\ 12)}$.

Demek, $\vec{a}+\vec{b}$ vektordıń koordinataları (5; 12) ge teń.





2-másele. $\vec{a}(-3;\ 5)$ hám $\vec{b}(3;\ -3)$ vektorlar ayırmasın tabıń.

Sheshiliwi: $\vec{a}(-3;\ 5)-\vec{b}(3;\ -3)=\overline{(-3;\ 5)}-\overline{(3;-3)}=\overline{(-3-3;\ 5-(-3))}=\overline{(-6;\ 8)}$

Juwabı: $\overline{(-6;\ 8)}$.

3-másele. $\vec{a}(3;\ 5)$ vektorǵa qarama-qarsı $\vec{b}$ vektordı tabıń.

Sheshiw. $\vec{a}$ vektorǵa qarama-qarsı $\vec{b}$ vektor tómendegige teń:

$$\vec{b}=-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}=-1\cdot\overline{(3;\ 5)}=\overline{(-3;\ -5)}.$$

Juwabı: $\vec{b}(-3;\ -5)$ yaki $\overline{(-3;-5)}$.

4-másele. Eger $\vec{a}(-3;\ 4)$ bolsa, $\vec{b}=4\vec{a}$ vektordıń koordinataların tabıń.

Sheshiliwi. $\vec{b}=4\vec{a}=4\cdot\overline{(-3;\ 4)}=\overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)}=\overline{(-12;\ 16)}$.

Juwabı: $\vec{b}(-12;\ 16)$ yaki $(-12;\ 16)$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Koordinataları berilgen eki vektor qalay qosıladı?
2) Koordinataları berilgen eki vektor qalay ayırıladı?
3) Koordinataları berilgen vektor sanǵa qalay kóbeytiledi?

2. Eger $\vec{a}(-4;\ 8)$ hám $\vec{b}(1;\ -4)$ bolsa, usı vektorlar: 1) qosındısınıń; 2) ayırmasınıń koordinataların tabıń.

3. $\vec{a}(-2;\ 6)$ hám $\vec{b}(-2;\ 4)$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

4. $\vec{a}(2;\ 3)$ hám $\vec{b}(-1;\ 0)$ vektorlar berilgen. Vektorlarınıń koordinataların tabıń: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$.

5. $\vec{a}(2;\ -3)$ hám $\vec{b}(-2;\ -3)$ vektorlar berilgen. Vektorlarınıń koordinataların tabıń: 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$.

6. $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ hám $\vec{b}=-2\vec{j}$ vektorlar berilgen. Vektorlardıń koordinataların tabıń:

1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$.

7. $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ hám $\vec{b}=3\vec{i}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

8. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ hám $\vec{b}=2\vec{j}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

9. $\vec{a}=-3\vec{i}$ hám $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$ vektorlar berilgen. 1) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

41. VEKTORDÍŃ FIZIKALÍQ HÁM GEOMETRIYALÍQ TALQÍLANÍWÍ. GEOMETRIYALÍQ MÁSELELER SHESHIWDÍŃ VEKTORLÍQ USÍLÍ

1. Vektordıń fizikalıq hám geometriyalıq talqılanıwı.

1. Denege tásir etiwshi kúsh baǵıtı tásir etiwi baǵıtı menen birdey, absolyut mánisi bolsa kúsh muǵdarına proporcional vektor menen túsindiriw qolaylı. Ámel sonı kórsetedi, kúshlerdi bunday túsindiriw usılı denege bir noqattan tásir etiwshi eki yamasa birneshe kúshtiń teń tásir etiwshisi usı kúshlerge sáykes vektorlardıń qosındısı menen súwretlenedi. 1-súwrette denege A noqatda $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları menen súwretlengen eki kúsh tásir etedi. Bul kúshlerdiń teń tásir etiwshisi

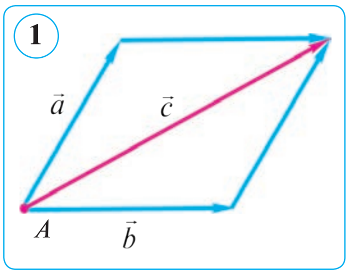
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

vektorı menen belgilenedi.

Kúshti berilgen eki baǵıtı tásir etiwshi kúshlerdiń qosındısı formasında túsindiriw *kúshti baǵıtlar boyınsha ajıratıw* delinedi.

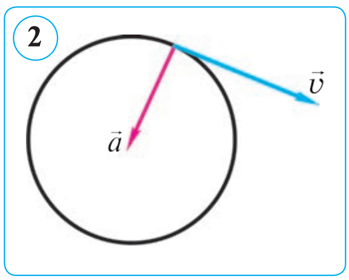
2. Fizikada deneniń *ilgerileme háreketi* dep sonday háreketke aytıladı, bunda deneniń barlıq noqatları birdey waqıt aralıǵında, bir qıylı baǵdarda birdey aralıqqa jıljıydi. Solay etip, fizikadaǵı *jıljıw vektorı* sabaqlıǵımızda qabıl etilgen vektor eken. Parqı sonda, geometriya sabaqlıǵında tek ǵana tekisliktegi vektorlar haqqında gáp júrgiziledi, fizikada bolsa basınan baslap keńisliktegi vektorlar olardıń qásiyetleri haqqında da pikir júrgizedi.

3. Fizikada «vektor» sózi birqansha keń mánide qollanıladı. Mısalı, tezlik vektor dep júrgiziledi. Biraq, geomertiyalıq vektordıń uzınlıǵı metrlerde, tezliktiń absolyut mánisi bolsa sekundına metrlerde (m/s) da ólsheniwiniń ózinde-aq tezliktiń geometriyada qabıl etilgen mánidegi vektor emesligi kórinip turıptı. Biz geometriyada tezlikti vektor emes, al *vektorlıq shamalar* deymiz.



Ulıwma, vektorlıq shamalar, ózleriniń modulinen tısqarı, baǵdarı menen anıqlanadı. Málim masshtab tańlap alınǵanda vektor shamaları geometriyalıq vektorlar menen súwretlenedi.

Bunda vektorlıq shamalardı qosıwǵa olardı súwretlewshi geometriyalıq vektorlardı qosıw, vektor shamalarıń sanlarǵa kóbeytiwde bolsa olardı súwretlewshi geometriyalıq vektorlardı sol sanlarǵa kóbeytiw sáykes keledi.



Bir mısal kóreyik. 2-súwrette $\vec{v}$ vektor sheńber háreketiniń tezligin, $\vec{a}$ vektor bolsa tezleniwdi ańlatıw múmkin. Biraq, bul vektorlardı fizikalıq kóz qarastan qosıw mániske iye emes.

Sonday bolsa da, fizikada tezlik yamasa tezleniwler vektorlar dep aytıladı.

Gáp ne tuwralı ekenligi anıq kóz aldıńızǵa keltirilse, bunday sóz erkinligi ulıwma hesh zıyan keltirmeydi. Biz óz waqtında usıǵan uqsas úshmúyeshlik tárepiniń uzınlıǵın, qısqalıq ushın, ápiwayılastırıp onıń tárepi dep aytıwǵa kelisip alǵan edik h. t. b.

2. Geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń vektor usılı.

Geometriyalıq máselelerdi sheshiwde hám teoremalardı dálillewde vektorlardan keń paydalanıladı.

1- másele. C noqat AB kesindisiniń ortası, O noqat bolsa tegisliktiń qálegen noqatı. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ekenligin dálilleń (3- *a* súwret).

Sheshimi. 1-usıl. Úshmúyeshlik qaǵıydası boyınsha:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{hám} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Bul eki teńlikti qosıp, tómendegige iye bolamız:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

C noqat AB kesindiniń ortası bolǵanlıqtan, bunday jaǵdayda $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, sebebi qarama-qarsı vektorlardıń qosındısı nolge teń.

Solay etip, tomendegige iye bolamız:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{yaki} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2- *usıl.* OAB úshmúyeshlikti parallelogrammǵa toltıramız (3- b súwret).

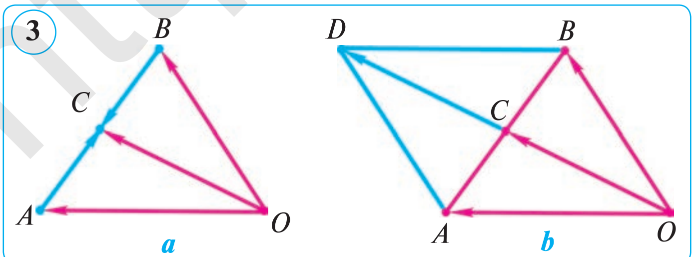
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (parallelogramm qaǵıydası boyınsha). Parallelogrammnıń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi, sonıń ushın $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ hám $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

Demek, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Bunnan:

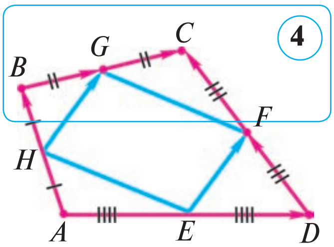
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2- másele. Qálegen $ABCD$ tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolıwın dálilleń.

Sheshiliwi. E, F, G, H — sáykes túrde AB, BC, CD hám DA tareplerdiń ortaları bolsın (4- súwret). Parallelogrammnın 3-belgisine baylanıslı, máselen,



a *b*



EF hám HG kesindileriniń uzınlıǵı teńligi hám parallelligin dálillew jetkilikli. Vektor tilinde, bul $\overrightarrow{EF}$ hám $\overrightarrow{HG}$ vektorlardıń teńligin dálillewden ibarat.

Haqıyqattan,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}), \quad \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

Bunnan basqa, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ekeni anıq. Sonıń ushın, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Bunnan, EF hám HG kesindilerdiń uzınlıq boyınsha teńligi de parallel ekeni kelip shıǵadı. Demek, qálegen $ABCD$ tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri boladı. Usını dállilew talap etilgen edi.

Keltirilgen dálillerden kórinip turıptı, másele hám teoremalardı vektor usılı menen sheshiw algebralıq máseleledi sheshiwge uqsaydı. Bul máseleni sheshiwdiń bir tárepi hám ol úsh basqıshtan ibarat.

Birinshi basqısh. Másele (teorema) shártin vektor kórinisinde jazıw hám qolaylı vektorlardı kirgiziw (uqsaslıq — belgisizlerdi kirgiziw hám algebralıq teńlemeni dúziw).

Ekinshi basqısh. Vektor algebrasınıń járdemi arqalı másele shártin solay etip almastırıladı, máseleni vektor kórinisinde sheshiw imkaniyatı bolsın (uqsaslıq — algebralıq teńlemeni sheshiw).

Úshinshi basqısh. Alınǵan vektor qatnasıq dáslepki atamalarda talqılanadı (uqsaslıq — teńlemeni algebralıq sheshkennen soń juwabın jazıw).

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. Tóbeleri $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$ hám $C(0;\ 2)$ bolǵan úshmúyeshlik CC_1 medianasınıń uzınlıǵın tabıń.

2. K noqat $ABCD$ parallelogramm AD tárepiniń ortası. $\overrightarrow{KC}$ vektordı $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{AD}$ vektorları arqalı ańlatıń.

3. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ hám $C(6;\ 14)$ noqatları berilgen. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektorınıń koordinataların tabıń.

4. $ABCD$ kvadrat eki qarama-qarsı tóbesiniń koordinataları berilgen: $A(0;\ 4)$ hám $C(6;\ 0)$. Qalǵan eki tóbesiniń koordinataların tabıń.

5. A(-2; 3) noqat $\vec{a}(-3; 8)$ vektorınıń bası bolsa, bul vektor aqırı ($B(x; y)$) nıń koordinataların tabıń.

6. Trapeciyanıń orta sızıǵı ultanına parallel hám onıń uzınlıǵınıń yarımına teń ekenligin vektor járdeminde dálilleń.

7. $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(-1;\ -3)$, $\vec{d}(-4;\ 4)$, $\vec{p}(3;\ 9)$, $\vec{q}(-1;\ 2)$ vektorlar berilgen. Usılar ishinen: 1) baǵıtlas vektorlardı; 2) bir jup qarama-qarsı baǵıtlanǵan vektorlardı tabıń.

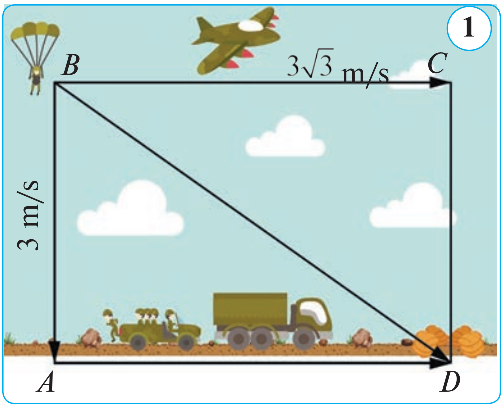
8. $ABCD$ rombda N noqat CD táreptiń ortası $\overrightarrow{AN}$ vektorı $\overrightarrow{AB}$ hám $\overrightarrow{AD}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

9. $ABCD$ — parallelogramm hám usı parallelogrammnan sırtında jatıwshı qálegen O noqat berilgen. $\overrightarrow{OD}$ vektordı $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ hám $\overrightarrow{OC}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

42. ÁMELIY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

ÁMELIY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDÍRÍWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

1. Vektordıń ámeliy qollanılıwına baylanıslı máseleler.



1-masala. Parashyutshı jerge 3 m/s tezlik penen túspekte, samal bolsa onı $3\sqrt{3}$ m/s tezlik penen jılıstırıp ketedi. Bul jaǵdayda parashyutshı jerge qanday múyesh astında túsedi (1-súwret)?

Sheshiliwi. Parashyutshı B noqatta bolsın. Awırlıq kúshi $\overrightarrow{BA}$ hám samal kúshi $\overrightarrow{BC}$ nıń teń tásir etiwshi $\overrightarrow{BD}$ boladı hám $ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, AB — vertikal. Demek, $\angle ADB$ múyesh mánisin tabıw.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ hám $BC = AD$ ($ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, $\angle A = 90°$). Pifagor teoreması boyınsha: $BD^2 = AD^2 + AB^2$, demek:

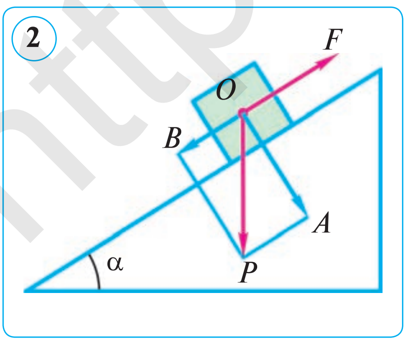
$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

Solay etip, ABD úshmúyeshlikte 3 cm li AB katet 6 cm li BD gipotenuzaǵa qaraǵanda eki ese kishi eken. Demek, $AB = 0{,}5BD$ bolǵanı ushın tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° li múyesh tuwrısındaǵı katettiń qásiyeti boyınsha, $\angle ADB = 30°$ yaki $\sin\angle ADB = \dfrac{AB}{BD} = 0{,}5$, bunnan $\angle ADB = 30°$ kelip shıǵadı.

Juwap: $\angle ADB = 30°$.

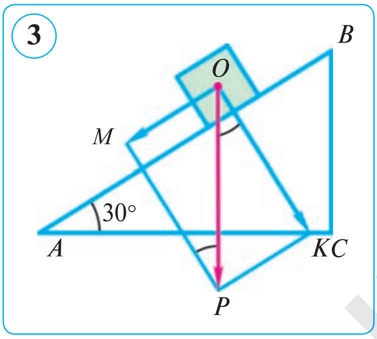
2-másele. Parashyutshı jerge 4 m/s tezlik penen túspekte, samal bolsa onı $4\sqrt{3}$ m/s tezlik penen jılıstırıp ketpekte. Bunday jaǵdayda parashyutshı jerge qanday múyesh astında túsedi (1-súwret q.)? Máseleni óz betińizshe sheshiń.

3-másele. Awırlıǵı P bolǵan júk qıya tegislikte sırǵanap tómenge túsip ketpewi ushın onı qanday F kúsh penen uslap turıw kerek (2-súwret)?



Sheshiliwi. Júktiń awırlıq orayı O ǵa $\vec{P}$ kúsh qoyılǵan bolsın. $\vec{P}$ vektordı óz ara perpendikulyar eki baǵdar boyınsha 2-súwrette kórsetilgendey qoyamız. Qıya tegislikke perpendikulyar bolǵan $\overrightarrow{OA}$ kúsh júktiń jılısıwına jol qoymaydı. Júkti uslap turıwshı $\vec{F}$ kúsh oǵan qarama-qarsı baǵdarlanǵan $\overrightarrow{OB}$ kúshke muǵdar jaǵınan teń bolıwı kerek. Bunnan tómendegi juwmaqqa kelemiz:

$$F = P\sin\alpha - P\cos\alpha.$$



4-másele. $P = 50$ N júk qıya tegislikte jatır. Eger tegisliktiń gorizontqa salıstırmalı qıyalıq múyeshi 30° ǵa teń bolsa, sırǵanaw kúshi hám basım kúshin tabıń.

Berilgen: $P = 50$ N, $\angle A = 30°$.

Tabıw kerek: $F_{\text{qıya}}$, $F_{\text{basım.}}$

Sheshiliwi. 1) $\vec{P}$ kúshti eki sırǵanaw kúshi baǵdarına parallel hám de basım kúshi qıya tegislikke perpendikulyar kúshler boyınsha jayamız.

2) Parallelogrammdı sızamız; $\overrightarrow{OP}$ vektor onıń diagonalı; OM‖AB, OK⊥AB, PK ‖AB, PM⊥AB, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{\text{qıya}}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{F}_{\text{basım}}$ ótkizemiz (3-súwret).

3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ (OP⊥AC, PM⊥AB).

4) Tuwrı múyeshli *OPM* úshmúyeshlikten:

$$OM = 0{,}5OP = 0{,}5 \cdot 50 = 25; \quad F_{\text{qıya.}} = 25 \text{ N}.$$

5) Tuwrı múyeshli *OPK* úshmúyeshlikten Pifagor teoreması boyınsha:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

yaǵnıy $F_{\text{basım.}} \approx 43$ N.

Juwap: $F_{\text{qıya}} = 25$ N, $F_{\text{basım}} \approx 43$ N.

5-másele. Tájiriybe sonı kórsetedi, eger *A* denege eki *a* hám *b* kúsh tásir etken bolsa, ol jaǵdayda olardıń tásiri bir *c* kúsh tásirine teń bolıp *c* kúsh *a* hám *b* kesindilerden jasalǵan parallelogrammnıń diagonalı menen súwretlenedi. Teń tásir etiwshi kúsh *«parallelogramm qaǵıydası»* boyınsha tabıladı.

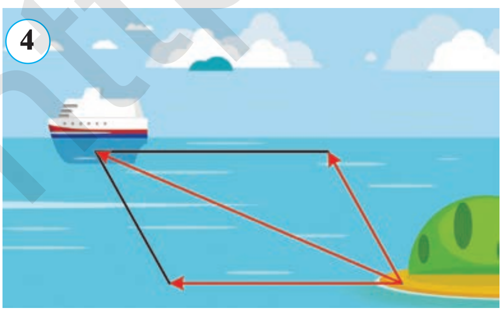
Máselen, júzip baratırǵan kemede (4-súwret) bolǵan yaki dáryanı qayıqta kesip ótip atırǵan (5-súwret) adamǵa kese kesim hám aǵım boylap baǵıtlanǵan eki kúsh tásir kórsetedi. Usı kúshlerdi súwrette belgileń.

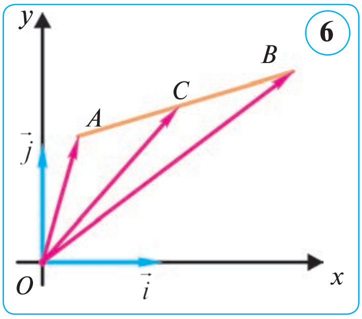
Usı máselege uqsaǵan másele dúziń hám sáykes súwretlerde kórsetiń.

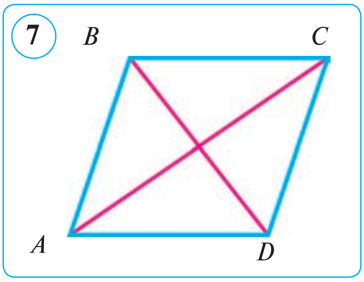
2. Sistema awırlıq orayınıń koordinataların tabıw.

6-másele. Kesindini berilgen qatnasta bolıw (koordinata kórinisinde).

Eger $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ bolsa, *C* noqat *AB* kesindini λ qatnasta boladı (6-súwret). Eger kesindi aqırlarınıń koordinataları $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ belgili bolsa, *C* noqattıń *x*, *y* koordinataların tabıń.







Sheshiliwi. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ hám $\overrightarrow{OB}$ vektorlardı sızamız. $\overrightarrow{OA}(x_1;y_1)$, $\overrightarrow{OC}(x;\ y)$, $\overrightarrow{OB}(x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{AC}$ $(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x;\ y_2-y)$ hám vektordı λ sanǵa kóbeytkende onıń koordinataları λ sanǵa kóbeytiliwin esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left(x-x_1;\ y-y_1\right) =$$

$$= \lambda\overrightarrow{CB}\left(x_2-x;\ y_2-y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_1 = \lambda(x_2-x); \\ y-y_1 = \lambda(y_2-y). \end{cases}$$

Demek, $x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

7-másele. $M_1(x_1;\ y_1)$ hám $M_2(x_2;\ y_2)$ noqatlarǵa sáykes túrde m_1 hám m_2 ge teń júkler qoyılǵan. Bul máseleler sistemasınıń awırlıq orayı (C noqat) koordinataların tabıń.

Sheshiliwi. Awırlıq orayı C — M_1M_2 kesindide hám de M_1 hám M_2 noqatlarǵa qoyılǵan m_1 hám m_2 massalardan keri proporcional aralıqta jatadı, yaǵnıy eki zatlıq materiallıq noqatlar sistemasınıń awırlıq orayı bolǵan C noqat M_1M_2 kesindini $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$ qatnasta boladı. λ nıń mánisin 5-máseledegi formulalarǵa qoyıp, figura almastırıwlardan soń C noqattıń koordinataların tabamız:

$$x_C = \frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2};\quad y_C = \frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

3. Vektorlıq qatnastı dálillewge baylanıslı másele.

8-másele. $ABCD$ — parallelogramm hám onıń diagonalları kesisken O no-qat berilgen. Dálilleń: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Berilgen: $ABCD$ — parallelogramm, O — AC hám BD diagonallarınıń kesisiw noqatı, $AO=OC$, $BO=OD$ (7-súwret).

Dálillew kerek: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Dálil. Bul vektor teńlikti dálillewdiń birneshe usılın keltiremiz.

Ayırmanıń nol vektorǵa teńligin kórsetemiz:

1) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

Figura almastırıwda qosındıdan qosındını alıw qaǵıydası, toparlaw nızamı, úshmúyeshlik qaǵıydası, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri hám baǵıtlas vektorlar), nol vektor anıqlamalarınan paydalanıladı.

2) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$.

Figura almastırıwda qosındıdan qosındını alıw hám úshmúyeshlik qaǵıydaları, toparlaw nızamı, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ ekeni hám nol vektor anıqlamalarınan paydalanıladı.

43 — 44. 3-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. $A(-2; 3)$ hám $B(4; 0)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teńlemesin dúziń.

2. Eger $C(4;\ 9)$ hám $R = 5$ bolsa, orayı C noqatta, radiusı R bolǵan sheńber teńlemesin dúziń.

3. $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(1; 2)$ hám $\vec{c}(1; 3)$ vektorlar berilgen. $\vec{a}-\vec{b}$ hám $\vec{b}+\vec{c}$ vektorlardıń koordinataların tabıń.

4. $\vec{c}(-1; 0)$ hám $\vec{d}(1; 2)$ vektorlar berilgen. $2\vec{c}+3\vec{d}$ vektordıń koordinataların tabıń.

3-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq qaysı shereklerde jaylasqan?

A) III, IV, I; B) I, II, III; D) II, III, IV; E) II, IV.

2. $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$ noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq qaysı shereklerde jatadı?

A) I, II, III; B) II, III; D) II, IV; E) III, IV, I.

3. Tóbeleri $A(-4;\ 0)$, $B(-4;\ 4)$ noqatlarda bolǵan AB kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.

A) $(-2; 0)$; B) $(0; 2)$; D) $(2; -4)$; E) $(-4; 2)$.

4. Tóbeleri $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$ noqatlarda bolǵan úshmúyeshliktiń AC tárepi ortasınıń koordinataların tabıń.

A) $(-1; 1)$; B) $(1; 0)$; D) $(0; 0)$; E) $(0; 1)$.

5. $\vec{a}(-3;\ 1)$ hám $\vec{b}(5;\ -6)$ vektorlar berilgen. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ vektorınıń koordinataların tabıń.

A) $(14; -9)$; B) $(4; -3)$; D) $(14; -3)$; E) $(9; 3)$.

6. A$(-3;\ 0)$ hám B$(-5;\ 4)$ noqatlarda berilgen. $\overrightarrow{BA}$ vektorınıń koordinataların tabıń.

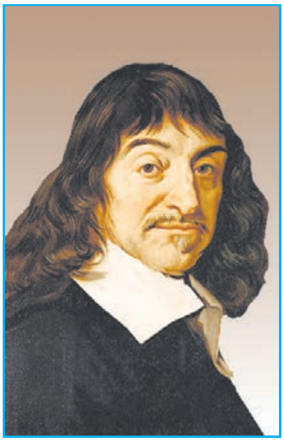
A) $(-8; -4)$; B) $(-8; 4)$; D) $(2; -4)$; E) $(8; -4)$.

Inglis tilin úyrenemiz!

Sheńber teńlemesi — circle equation
Tuwrı sızıq teńlemesi — straight-line equation
Kollinear vektorlar — collinear vectors
Vektor uzınlıǵı — vector length
Teń vektorlar — equal vectors
Skalyar — scalar
Qarama-qarsı vektorlar — opposite vectors
Birlik vektor — unit vector
Baǵıtlar — equivalent

Tariyxıy maǵlıwmatlar

1. Tuwrı múyeshli koordinatalar sistemasın francuz alımı Rene Dekart pánge kirgizgen. Tuwrı múyeshli koordinatalar sisteması geyde Dekart koordinatalar sisteması da delinedi.



Rene Dekart
(1596 — 1650)

Rene Dekart (1596 — 1650) — fransuz filosofı, matematigi, fizigi, fiziologı. La-Flesh iezuit kolledjında bilim alǵan, grek hám latın tilleri, matematika hám filosofyanı úyrengen. Dekart filosofiyası onıń matematikası, kosmogoniyası, fizikası menen baylanıslı. Matematikada analitikalıq geometriya tiykarlarınan biri (tuwrı múyeshli koordinatalar sisteması onıń atı menen ataladı). Dekart XVII — XVIII ásirler folosofiyası hám pániniń rawajlanıwına salmaqlı úles qosqan.

XVII ásirde Dekarttıń jumısları sebepli pútkil matematika, ásirese, geometriyanı revolyuciyalıq qayta qurǵan koordinatalar metodı júzege keldi. Algebralıq teńlemelerdi geometriyalıq grafika arqalı talqılaw hám kerisinshe, geometriyalıq máselelerdiń sheshimin analitikalıq formulalar, teńlemeler sistemaları járdeminde izlew imkaniyatı payda boldı.

Biziń kúnlerimizge shekem saqlanıp kelgen qolay belgilerdiń kirgiziliwinde, yaǵnıy belgisizlerdi belgilew ushın x, y, z; koefficientlerdi belgilew ushın a, b, c latın háriplerin kirgiziwde, dárejelerdi x^2, y^2, z^2 kórinisinde belgilewde de Dekarttıń xızmetleri úlken.

2. Vektor túsinigi XIX ásirdiń ortalarında bir waqıtta birneshe matematiktiń jumıslarında ushırasadi. Tegislikte vektorlar menen jumıs orınlawdı birinshi márte 1835-jılı italiyalı alım **Bellivitis** (1803 — 1880) baslap berdi. Bunnan basqa **K. Gauss** (1777 — 1855) tıń 1831-jılı «Bikvadratik salıstırmalı teoriyası» atlı shıǵarmasında hám **Y. Argan** (1768 — 1822) hám **K. Vessel** (1745 — 1818) kompleks sanlardı geometriyalıq túsindiriwge baylanıslı jumıslarında vektor túsinigi aytıp ótilgen. Nátiyjede, **V. Gamilton** (1805 — 1865) hám **R. Grassman** (1854 — 1901) nıń vektor ústinde ámeller orınlawǵa baylanıslı jumısları júzege keldi. Gamilton 1845-jılı birinshi bolıp vektor hám skalyar shamalardıń parqın túsindirdi. Gamiltonnıń sol jumısında «skalyar», «vektor» atamaları payda boldı. Gamilton «vektor» terminin latınsha *vehere* — «tasıw», «súyrew» sózinen payda etken, *vektor* — «tasıwshı», «jetkeriwshi» degen. 1806-jılı Argan júrgizilgen kesindilerdi hárip ústine sızıq qoyıw menen belgilegen. Vektorlardıń bası hám aqırın kórsetiw ushın **A. Myobius** (1790 — 1868) *onı* AB kórinisinde belgilegen. Grassman vektorlardı «kesindiler»dep ataǵan, ol koordinata kósheri boyınsha baǵdarlanǵan e_1, e_2 birlik vektorlardı hám vektorlardı $x_1e_1+x_2e_2$ kórinisinde súwretlewdi usınǵan. Gamilton hám **J.Gibss** (1839 — 1903) vektorlardı grekshe háripler menen belgilegen. Vektorlardı qara háripler menen belgilewdi 1891-jılı **A. Xevisayd** (1850 — 1925) usınıs etken. Vektordıń uzınlıǵın $|AB|$ kórinisinde belgilewdi bolsa 1905-jılı **R. Gans** (1880 — 1954) kirgizgen.

IV BAP
MAYDAN

9-§. KÓPMÚYESHLIKTIŃ MAYDANÍ

45. MAYDAN HAQQÍNDA TÚSINIK

1. Maydan haqqında túsinik.

Figuralardıń maydanların anıqlaw máselesi júdá áyyem zamanlarǵa barıp taqaladı. Bul máseleniń júzege keliwin adamlardıń ámeliy jumısı talap etken. Hárbirimiz kúndelikli turmısımızda maydan haqqında birqansha túsinikke iyemiz. Máselen, Siz tuwrı tórtmúyeshlik (aytayıq, ózińiz turatuǵın úy) hám kvadrattıń maydanın tabıwdı bilesiz. Biz endi figuralardıń maydanı haqqındaǵı túshiniklerdi anıqlaw hám onı ólshew usılların anıqlaw menen shuǵıllanamız.

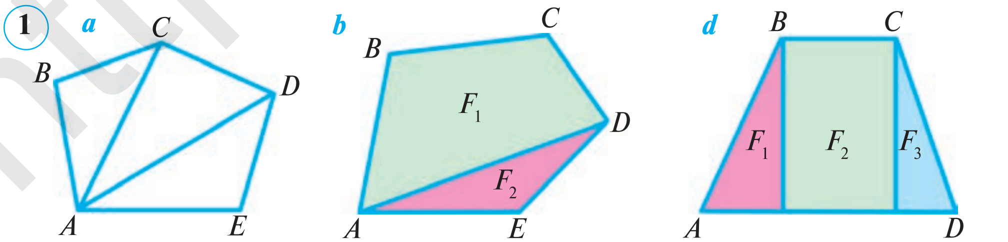
Eger geometriyalıq figuranı shekli sandaǵı úshmúyeshliklerge bóliw múmkin bolsa, bul figura *ápiwayı figura* dep ataladı.

Biz úshmúyeshlik dep, tegisliktiń úshmúyeshlik penen shegaralanǵan shekli bólegine aytamız. Dońes kópmúyeshlik óziniń bir tóbesinen shıqqan diagonalları menen úshmúyeshliklerge bólinedi (1-*a* súwret).

Maydan óń muǵdar (shama) bolıp, onıń san mánisi tómendegi tiykarǵı qásiyetlerge (aksiomalarǵa) iye.

> **1-qásiyet.** *Teń figuralar teń maydanlarǵa iye.*
> **2-qásiyet.** *Eger kópmúyeshlik bir-birin qaplamaytuǵın kópmúyeshliklerden quralǵan bolsa, bunday halda onıń maydanı bul kópmúyeshliklerdiń maydanınıń qosındısına teń boladı.*

F kópmúyeshlik bir-birin qaplamaytuǵın kópmúyeshliklerden quralǵan degeni: 1) *F* bul kópmúyeshlikler qosındısınan ibaratlıǵı hám 2) kópmúyeshliklerden hesh qaysı ekewi ulıwma ishki noqatlarǵa iye emesligin ańlatadı.



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $\quad S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Mısalı, 1-*b*, hám *d* súwretlerde bir-birin qaplamaytuǵın kópmúyeshliklerden dúzilgen kópmúyeshlikler súwretlengen

1- hám 2-qásiyetler maydanlarınıń *tiykarǵı qásiyetleri* delinedi.

2. Maydandı ólshew. Maydandı ólshew kesindilerdi ólshew sıyaqlı ólshew birligi ushın qabıl etilgen figura maydanı menen berilgen figuranı salıstırıwǵa tiykarlanǵan. Nátiyjede berilgen figura *maydanınıń sanlı mánisin* alamız.

Maydan — tegis figuraları xarakterlewshi tiykarǵı matematikalıq muǵdardan biri. Ápiwayı jaǵdayda maydan tegis figuranı toltırıwshı birlik kvadratlar — tárepi uzınlıq birligine teń bolǵan kvadratlar sanı menen ólshenedi.

3-qásiyet. *Tárepi bir uzınlıq ólshem birligine teń bolǵan kvadrattıń maydanı birge teń.*

Solay etip tómendegi teorema orınlı boladı.

Teorema.

Tárepiniń uzınlıǵı a ǵa teń bolǵan kvadrattıń maydanı a^2 qa teń.

Ádette, maydandı latınsha bas hárip S penen belgilenedi. Demek, kvadrat ushın

$$S=a^2$$

formula orınlı bolıp, uzınlıq ólshem birligi kvadrat penen birge aytıladı.

3. Teńdey figuralar.

Anıqlama. *Eger eki kópmúyeshlikten birin-biri birneshe bólekke bólip, bul bóleklerdi basqasha jaylastırǵanda ekinshi kópmúyeshlik payda bolsa, bul kópmúyeshlikler* ***teń dúzilgenler*** *delinedi.*

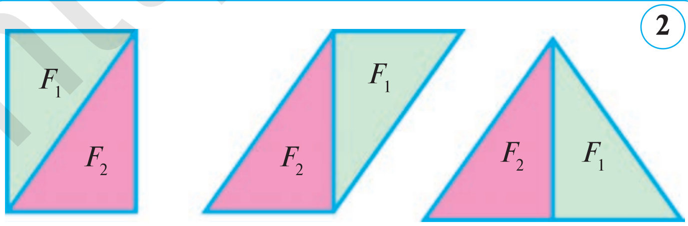
Eger eki kopmúyeshliktiń maydanları teń bolsa, olar **teń kópmúyeshlikler** dep ataladı. 2-súwrettegi kópmúyeshlikler teń.

Teń kópmúyeshlikler teńles (1-qásiyet), biraq kerisinshe dálil, ulıwma aytqanda, tuwrı bolmaydı: eger eki figura teń bolsa, bunnan olardıń teńligi kelip shıqpaydı.

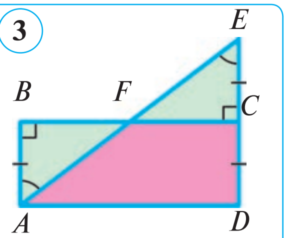
Másele. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik DC tárepiniń dawamında C tóbesine salıstırmalı D noqatqa simmetriyalıq E noqat belgilengen (3-súwret). ADE úshmúyeshlik maydanınıń $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik maydanına teń ekenin dálilleń

Dálil. AE hám BC tárepler F noqatta kesilissin. ABF hám ECF úshmúyeshlikler teń (kateti hám súyir múyeshi boyınsha: $AB=EC$,

2



3



$\angle BAF = \angle E$). Nátiyjede ADE úshmúyeshlik $AFCD$ trapeciya menen ECF úshmúyeshlikten, $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik bolsa sol $AFCD$ trapeciya menen ECF ge teń bolǵan ABF úshmúyeshlikten dúzilgen, demek, ADE úshmúyeshlik penen $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik teń dúzilgen (yaǵnıy teńdey). Usını dálillew talap etilgen edi.

Maydan shama bolǵanı ushın shamalardıń barlıq qásiyetlerine iye boladı. Olardı bir túrdegi shamalıqlardaǵı sıyaqlı qosıw hám ońsanǵa kóbeytiw múmkin. Eki maydandı qosıwda hám sanǵa kóbeytiwde maydan payda boladı.

Ámeliyatta maydan bolǵan hárqanday figuranıń maydanın ólshew yaki esaplaw múmkin. Kóbinese hár túrli maydanlardı anıqlawda formulalardan paydalanıladı. Ayırım figuralardıń maydanların esaplaw formulaların shıǵarıw menen kelesi temalarda shuǵıllanamız.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Apiwayı figura dep nege aytıladı?
2) Figuranıń maydanı degende neni túsinesiz?
3) Maydannıń tiykarǵı qásiyetlerin túsindirip beriń.
4) Qanday eki kópmúyeshlikti teń dúzilgen delinedi?
5) Teńdey figuralar degen ne? Teńdey figuralar teń be?

2. Kvadrattıń tárepi: 1) 1,3 cm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 cm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m. Kvadrattıń maydanın tabıń.

3. Kvadrattıń maydanı: 1) 16 dm^2; 2) 144 cm^2; 3) 121 cm^2; 4) 49 mm^2; 5) 196 cm^2; 6) 0,64 dm^2; 7) 6,25 m^2. Kvadrattıń tárepin tabıń.

4. Perimetri tárepleri 54 sm hám 42 sm ge teń bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattıń maydanın tabıń

5. 4-súwrettegi Q_1 hám Q_2 úshmúyeshlikler teńdey. Usını dálilleń.

6. Kvadtattıń maydanı 36 sm^2. Eger onıń hámme tárepin:
1) eki ese uzayttırılsa; 2) úsh ese qısqarttırılsa;
3) 2 cm ge uzayttırılsa, onıń maydanı qalay ózgeredi?

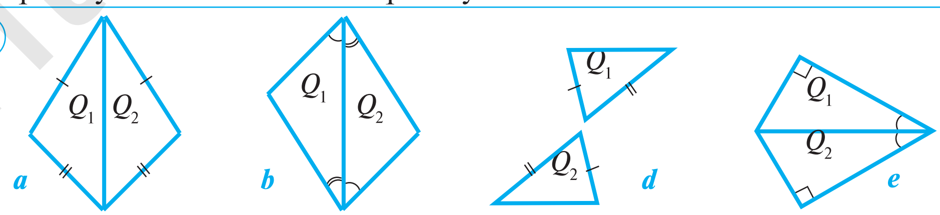
Úlgi. Maydanı 81 cm^2 ge teń bolǵan kvadrattıń barlıq tárepleri 1 cm ge qısqartılsa, onıń maydanı qalay ózgeredi?

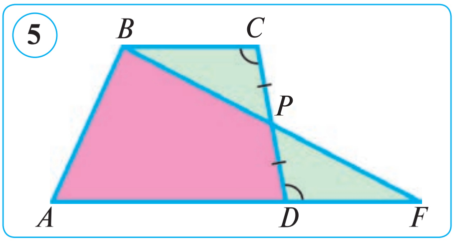
Sheshiliwi. Berilgen kvadrattıń tárepi $a=9$ cm. Jańa kvadrattıń tárepi $a_1=a-1=9-1=8$ (cm). Ol jaǵdayda $S_{ya}=8^2=64$ (cm^2). Berilgen kvadrat tárepleri 1 cm ge kemeytilse, onıń maydanı

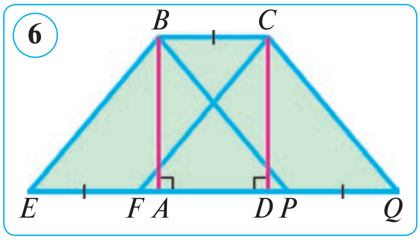
$$S-S_{ya.}=81-64=17\ (\text{cm}^2)$$

qa azayadı *Juwabı:* 17 cm^2 qa azayadı.

4







7. Teń dúzilgen eki tuwrı tórtmúyeshlikten: 1) bul tuwrı tórtmúyeshliktiń teńligi; 2) olardıń teńligi kelip shıǵama?

8. Eger kvadrattıń hámme tárepin: 1) n ese uzayttırsaq; 2) k ese qısqartsaq, onıń maydanı qalay ózgeredi?

9. (*Ámeliy jumıs.*) Bir kvadrat sızıń. Tárepi usı kcadrattıń tárepinen 2 ese úlken bolǵan ekinshi kvadrattı sızıń. Ekinshi kvadrattıń maydanı birinshi kvadrattıń maydanınan neshe ese úlken?

10. AD — $ABCD$ trapeciyanıń úlken ultanı bolsın. CD tárepiniń ortası P noqat hám B tóbesi arqalı AD nurın F noqatta kesiwshi tuwrı sızıq ótkerilgen (5-súwret). $S_{ABCD}=S_{ABF}$ ekenin dálilleń.

Dálil. 1) $\triangle BCP=\triangle FDP$ — tárepi hám oǵan jaylasqan eki múyeshi boyınsha ($CP=...$– ..., $\angle BCP=\angle ...$– ... hám ... parallel tuwrı sızıqlardı ... kesiwshi keskende payda bolǵan ... múyeshler, $\angle BPC=\angle ...$– ... bolǵanı ushın) teń, yaǵnıy $S_{BCP}=....$

2) $S_{ABCD}=S_{ABPD}+...$, $S_{ADP}=S_{ABPD}+...$, sonıń ushın $S_{ABCD}=...$

Noqatlar ornına sáykes juwaplardı jazıń.

11. Maydanı: 1) 2,25 cm^2; 2) 0,81 dm^2; 3) 289 mm^2; 4) 5,76 m^2; 5) 400 dm^2 ǵa teń bolǵan kvadrattıń perimetrin tabıń.

12. 6-súwrette súwretlengen kópmúyeshliker ishinen teńdeylerin tabıń.

13. Ózbekstannıń maydanı 448,9 mıń km^2. Bul maydannıń 80 % in tegislik quraydı. Maydannıń tegislik bólimi neshe mıń kvadrat kilometrden ibarat?

Bilp qoyǵan paydalı!

- S — latınsha «***superfacies***» sózinen alınǵan bolıp, bul sóz «***shet***» mánisin bildiredi.
- Materikler, mámleketlerdiń aymaqları kvadrat kilometrlerde, úlken egin maydanlarınıń maydanları gektarlarda, onsha úlken emes jer maydanları ar (sotix) larda ólshenedi.

46–47. TUWRÍ TÓRTMÚYESHLIK HÁM PARALLELOGRAMMNÍŃ MAYDANÍ

1. Tuwrı tórmúyeshliktiń maydanı.

Siz tuwrı tórtmúyeshlik maydanı qońsı tárepleri uzınlıqlarınıń kóbeymesine teńligin bilesiz hám buǵan tiyisli máselelerdi sheshkensiz.

Házir bul orınlanǵan ámeldiń teoriyalıq jaqtan durıs ekenligin kórsetemiz.

Teorema.

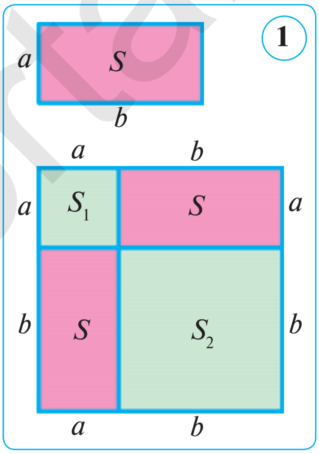
Tárepleri *a* hám *b* bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı

$$S=a\cdot b$$

formula boyınsha esaplanadı.

Dálil. Tárepleri a hám b bolǵan tuwrı tórtmúyeshlikti alamız, bunda a hám b — qálegen oń sanlar. $S=a\cdot b$ ekenin dálilleymiz.

Teoremanı dálillew ushın tárepi $(a+b)$ bolǵan kvadrat sızamız. Bul kvadrattı 1-súwrette kórsetilgen formadaǵıday bóleklerge ajıratamız. Bunda kvadrattıń maydan tárepi a hám b ǵa teń eki kvadrat hám tárepleri a hám b bolǵan eki tuwrı tórtmúyeshlikten dúzilgenligin kóriw múmkin. Solay etip, tárepi $(a+b)$ bolǵan kvadrat maydanı S_1+2S+S_2 ge teń. Ekinshi tárepten maydannıń qásiyeti boyınsha, bul maydan $(a+b)^2$ qa teń, yaǵnıy



$$S_1+2S+S_2=(a+b)^2, \text{ yamasa}$$

$$S_1+2S+S_2=a^2+2ab+b^2.$$

Bul teńlikten $S_1=a^2$, $S_2=b^2$ ekenligin esapqa alsaq,

$$S=a\cdot b$$

ekeni kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

1-másele. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 150 cm² qa teń, tárepleriniń qatnası 3:2 sıyaqlı Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshliktiń kishi tárepı $b=2x$ cm bolsın. Onday jaǵdayda úlken tárepiniń uzınlıǵı $a=3x$ cm ekenliginen paydalanıp, teńleme dúzemiz hám onı sheshemiz:

$$S=3x\cdot 2x, \text{ yaǵnıy } S=6x^2.$$

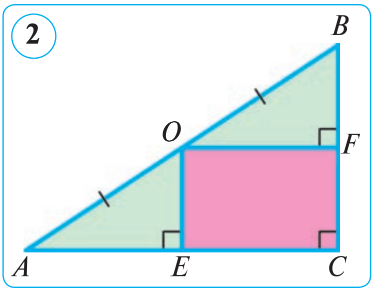
Bunnan $x^2=S:6$, $x^2=150:6$, $x^2=25$, $x=5$ (cm).

Demek, tuwrı tórtmúyeshliktiń kishi tárepi: $b=2\cdot 5=10$ (cm) ge, úlken tárepi $a=3\cdot 5=15$ (cm) ge teń.

Endi onıń perimetirin esaplaymız:

$$P=2\cdot(a+b)=2\cdot(15+10)=2\cdot25=50\,(\text{cm}).$$

Juwap: $P=50$ cm.



2-másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri 12 cm hám 24 cm ge teń. Gipotenuzanıń ortasınan úshmúyeshliktiń katetlerine perpendikulyar ótkizilgen. Payda bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanın tabıń.

Berilgen: tuwrı múyeshli $\triangle ABC$ da: $AO=OB$, $OE\perp AC$, $OF\perp CB$, $AC=24$ cm, $BC=12$ cm (2-súwret).

Tabıw kerek: S_{CEOF}.

Sheshiliwi. Bizge málim, bir tuwrı sızıqqa ótkizilgen eki perpendikulyar óz ara parallel boladı. Fales teoreması boyınsha:

$$AE=EC=0{,}5AC=0{,}5\cdot24=12\ (\text{cm}),$$

$$CF=FB=0{,}5BC=0{,}5\cdot12=6\ (\text{cm}).$$

Demek, $S_{CEOF}=CE\cdot CF=12\cdot6=72$ (cm^2). *Juwap:* 72 cm^2.

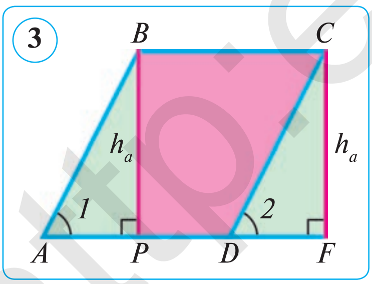
2. Parallelogrammnıń maydanı.

Parallelogrammnıń qálegen tárepin onıń *ultanı* dep alıw múmkin, bunday halda qarama-qarsı táreptiń qálegen noqatınan ultandı óz ishine alǵan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar parallelogrammnıń *biyikligi* delinedi. Biyiklik tárepke yaki táreptiń dawamına túsiwi múmkin. 3-súwrette BP hám CF — $ABCD$ parallelogrammnıń biyiklikleri.

Teorema.

Parallelogrammnıń maydanı ultanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń:

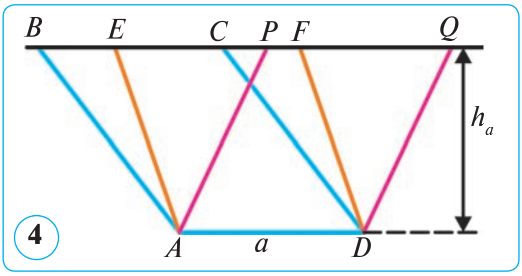
$$S=a\cdot h_a.$$

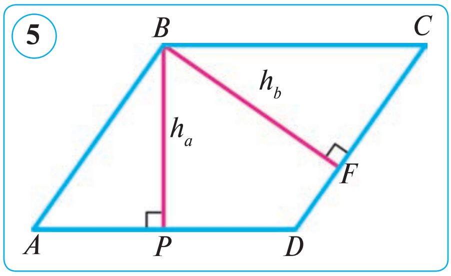


$ABCD$ parallelogrammnıń ultanı ushın $AD=a$ tárepi alınǵan, biyikligi bolsa h_a ǵa teń bolsın (3-súwret).

$S=a\cdot h_a$ ekenligin dálillew talap etiledi.

Dálil. Ultanı parallelogrammnıń BC tárepine teń, biyikligi bolsa h_a ibarat bolǵan $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik sızamız. ABP hám DCF úshmúyeshlikler teń (gipotenuzası hám súyir múyeshi boyınsha: $AB=DC$ — gipotenuzalar, $\angle1=\angle2$ — sáykes múyeshler). $ABCD$ parallelogramm $PBCD$ trapeciya menen ABP úshmúyeshlikten, $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik bolsa sol $PBCD$ trapeciya menen ABP ǵa teń bolǵan DCF úshmúyeshlikten dúzilgen. Demek, $ABCD$ paralleogramm menen sızılǵan $PBCF$ tuwrı tórtmúyeshlik teń dúzilgen (yaǵnıy, teńdey). Bunnan, $ABCD$ parallelogrammnıń maydanı





PBCF tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanına, yaǵnıy ah_a teń, degen nátiyje shıǵadı.

Solay etip, ultanı *a* hám óǵan túsirilgen biyikligi h_a bolǵan parallelogrammnıń *S* maydanı tómendegi formula boyınsha esaplanadı:

$$S=a\cdot h_a.$$

Usı formulanı dálillew talap etilgen edi.

1-nátiyje. Eger eki parallelogramm bir ultanǵa iye hám biyiklikleri teń bolsa, olar teń dúzilgen boladı.

Berilgen: *ABCD*, *AEFD* hám *APQD* parallelogrammlar bir $AD=a$ ultanǵa iye hám biyiklikleri teń (h_a) (4-súwret).

Dálillew kerek: *ABCD*, *AEFD* hám *APQD* parallelogrammlar teń dúzilgen.

Dálil. Máselen, *ABCD* hám *AEFD* parallelogrammlardıń teń dúzilgenin dálilleymiz. *BAE* hám *CDF* úshmúyeshlikler teń (úshmúyeshlikler teńliginiń birinshi belgisi boyınsha), sebebi $BA=CD$ hám $AE=DF$ hám de $\angle BAE=\angle CDF$ (sáykes tárepleri parallel múyeshler bolǵanı ushın). Demek, *ABCD* parallelogramm *AECD* trapeciya menen *BAE* úshmúyeshlikten, *AEFD* parallelogramm bolsa *AECD* trapeciya menen *BAE* úshmúyeshlikke teń bolǵan *CDF* úshmúyeshlikten dúzilgen. Demek, *ABCD* hám *AEFD* parallelogrammlar teń dúzilgen.

Usıǵan uqsas, qalǵan parallelogrammlardıń eń dúzilgeni dálillendi.

3-másele. Parallelogrammnıń tárepleri 25 cm hám 20 cm, birinshi tárepine túsirilgen biyiklik 8 cm. Usı parallelogrammnıń ekinshi tárepine túsirilgen biyikligin tabıń.

Berilgen: *ABCD* parallelogrammda:

$$AD=a=25 \text{ cm},\quad DC=b=20 \text{ cm},\quad h_a=8 \text{ cm (5-súwret)}.$$

Tabıw kerek: h_b.

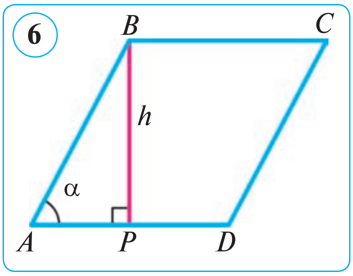
Sheshiliwi. 1) $S=ah_a=25\cdot 8=200$ (cm²).

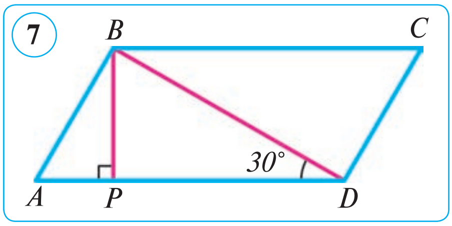
2) $S=bh_b$, yaǵnıy $200=20\cdot h_b$. Bunnan $h_b=200:20=10$ (cm).

Juwabı: 10 cm.

2-nátiyje. Parallelogrammnıń maydanı onıń eki tárepi menen olar arasındaǵı múyesh sinusı kóbeymesine teń. Usını dálilleń.

Sheshiliwi. *ABCD* parallelogrammda $AD=a$, $AB=b$ hám $\angle BAD=\alpha$ bolsın. Ol jaǵdayda parallelogrammnıń maydanı $\boldsymbol{S=ab\sin\alpha}$ formula boyınsha esaplanadı. Usını dálilleymiz.





ABCD parallellorammnıń *BP* biyikligin ótkizemiz hám onı $BP = h_a = h$ penen belgileymiz (6-súwret). Ol jaǵdayda *h* biyiklik tuwrı múyeshli *ABP* úshmúyeshliktiń α súyir múyeshi tuwrısında jatqan katet boladı. *h* tı *b* tárepke hám α múyeshtiń sinusı kóbeymesi menen ańlatamız:

$$h = b\sin\alpha.$$

Parallelogrammnıń maydanın esaplaw $S = ah$ formulasına *h* tıń bul ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S = ab\sin\alpha.$$

4-másele. *Berilgen: ABCD* – parallelogramm, $AD = 20$ cm, $BD = 16$ cm, $\angle BDA = 30°$.

Tabıw kerek: S_{ABCD}.

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Berilgen parallelogrammnıń *BP* biyikligin ótkizemiz hám *BDP* úshmúyeshlikti kórip shıǵamız (7-súwret). Ol tuwrı múyeshli, sebebi $BP \perp AD$. *BP* biyiklikti tabamız. 30° li múyesh qarsısındaǵı katet gipotenuzanıń yarımına teń, sonıń ushın

$$BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \text{ (cm)}.$$

2) Solay etip, *ABCD* parallelogrammnıń maydanı tómendegige teń boladı:

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \ (\text{cm}^2)$$

2-usıl. Tuwrı múyeshli *BDP* úshmúyeshlikten *BP* nı *BD* tárepke (gipotenuza) hám $\angle BDP = 30°$ múyeshtiń sinusı menen ańlatamız hám parallelogrammnıń maydanın formulasına qoyıp, izlenip atırǵan maydandı tabamız:

$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD\sin\angle BDP = 20 \cdot 16\sin 30° = 20 \cdot 16 \cdot 0{,}5 = 160 \ (\text{cm}^2).$$

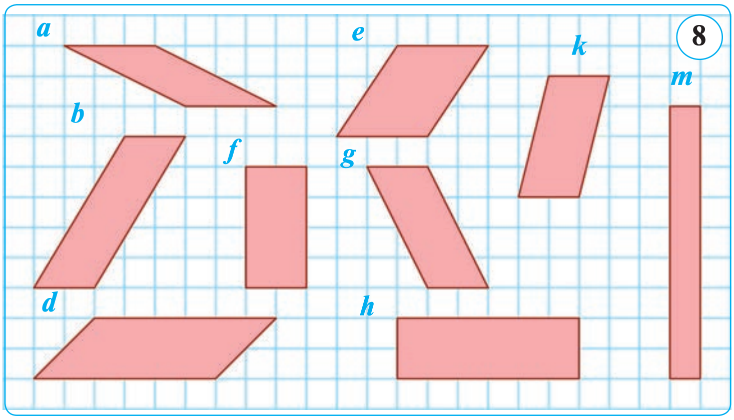
Juwap: $S = 160$ cm².

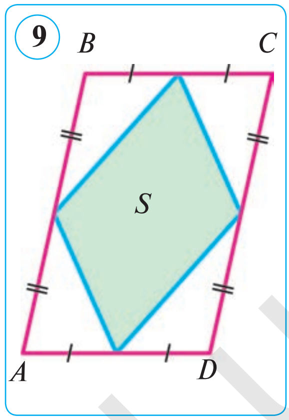
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı nege teń?
2) Parallelogrammnıń ultanı hám biyikligi degende neni túsinesiz?
3) Parallelogrammnıń maydanı onıń eki qońsı tárepi hám olar arasındaǵı múyesh boyınsha qalay tabıladı?

2. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eki tárepi : 1) 30 cm hám 2,9 cm; 2) 34 dm hám 0,6 dm; 3) 2,5 dm hám 12 cm. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri hám maydanın tabıń.

3. Tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tárepi 15 dm, ekinshi tárepi bolsa onnan 5 ese artıq. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri hám maydanın tabıń.





4. Maydanı 240 m² bolǵan basketbol maydanı sport maydanınıń 15% in quraydı. Sport maydanı pútkil mektep maydanınıń 32% in quraydı. Mektep maydanın tabıń.

5. Tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tárepi 23 cm, ekinshi tárepi bolsa onnan 17 cm uzın. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri hám uzınlıǵın tabıń.

6. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 20 cm² hám 1) uzınlıǵı 5 cm ge; 2) uzınlıǵı eniniń 125% ine; 3) táreplerinen biri x qa teń bolsa, perimetri nege teń boladı?

7. Eger $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikte: 1) $AB=9$ cm, $BC=4$ cm; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48$ cm bolsa, onıń maydanın tabıń.

8. Parallelogrammnıń tárepi 16 cm ge, oǵan túsirilgen biyiklik bolsa 9 cm ge teń. Usı parallelogrammǵa teńdey kvadrattıń tárepin tabıń

9. a − parallelogrammnıń ultanı, h−biyikligi, S−maydanı. Eger:
1) $a=10$ cm, $h_a=0{,}5$ m bolsa, S nı; 2) $h_a=4$ cm, $S=48$ cm² bolsa, a nı; 3) $a=24$ cm, $S=120$ cm² bolsa, h_a nı tabıń.

10. 8-súwrettegi teńdey parallelogrammlardı tabıń.

11. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń: 1) tiykarı 5 ese kemeyttirilip, biyikligi 8 ese uzayttırılsa; 2) ultanı da, biyikligi de 2,5 ese kemeyttirilse, onıń maydanı qalay ózgeredi?

12. 9-súwrettegi S figuranıń maydanı parallelogramm maydanınıń qanday bólimin payda etedi?

13. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eki tárepi: 1) 24 cm hám 20 cm; 2) 3,5 dm va 8 cm; 3) 8 m hám 4,5 m; 4) 3,2 dm hám 1,5 dm. Onıń maydanın tabıń.

14. Parallelogrammnıń maydanı 36 cm², biyiklikleri 3 cm hám 4 cm. Usı parallelogrammnıń perimetrin tabıń.

15. Parallelogrammnıń tárepleri 20 cm hám 28 cm, olardıń arasındaǵı múyeshi 30° qa teń. Usı parallelogrammnıń maydanın eki usıl menen tabıń.

48. ÚSHMÚYESHLIKTIŃ MAYDANÍ

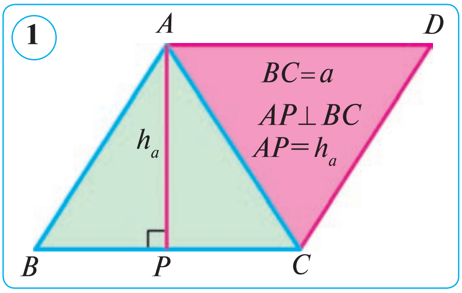
Úshmúyeshliktiń maydanın esaplaw formulasın tabıw ushın parallelogramm kórinisine keltiriw usılınan paydalanamız.

Teorema.

Úshmúyeshliktiń maydanı onıń ultanı menen biyikliginiń kóbeymesiniń yarımına teń:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

bunda a — úshmúyeshliktiń ultanı, h_a — ultanǵa túsirilgen biyiklik.



Dálil. ABC — berilgen úshmúyeshlik bolsın (1-súwret). $\triangle ABC$ nı úshmúyeshlikti súwrette kórsetilgenindey $ABCD$ (ultanı BC) parallelogramm etip sızamız $\triangle BAC$ hám $\triangle DCA$ úshmúyeshlikler teń, sebebi parallelogrammnıń diagonalı onı eki teń úshmúyeshlikke ajıratadı. Sonıń ushın bul úshmúyeshliklerdiń maydanları teń. Demek, $ABCD$ parallelogrammnıń maydanı $\triangle ABC$ úshmúyeshliktiń maydanınıń ekileniwine teń, yaǵnıy: $2S = a \cdot h_a$.

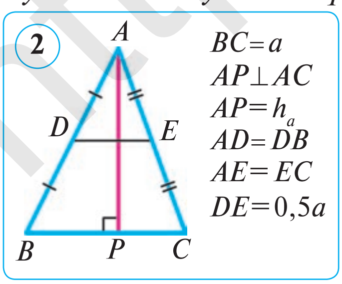
Bunnan, $S = \frac{ah_a}{2}$. Teorema dálillendi..

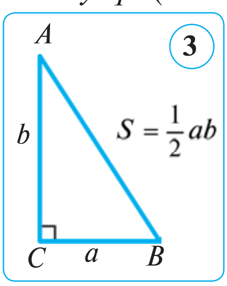
Úshmúyeshliktiń maydanın esaplaw formulasın basqasha da oqıw múmkin: ***úshmúyeshliktiń maydanı onıń orta sızıǵı menen biyikliginiń kóbeymesine teń*** (2-súwret):

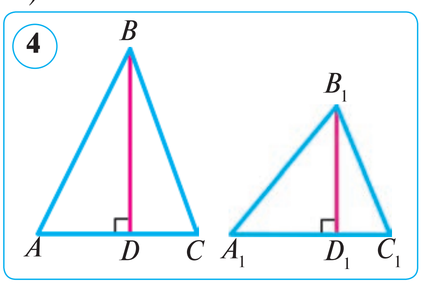
$$S = \frac{a}{2} \cdot h_a.$$

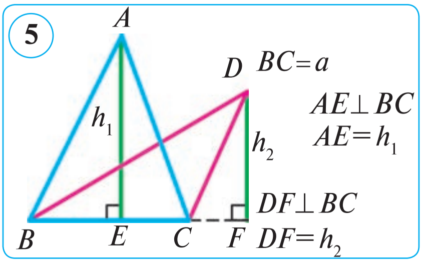
1-nátiyje. *Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı katetleriniń kóbeymesiniń yarımına teń,* sebebi bir katetti ultan, ekinshisin biyiklik etip alıw múmkin (3-súwret).

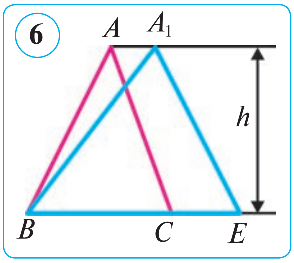
2-nátiyje. *Eki úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası ultanları menen biyiklikleri kóbeymesiniń qatnası sıyaqlı* (4-súwret).

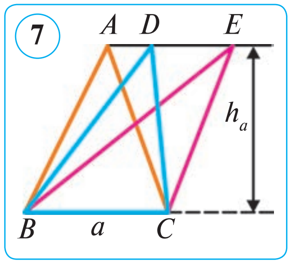












Dálil. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{0{,}5\,AC\cdot BD}{0{,}5\,A_1C_1\cdot B_1D_1}=\dfrac{AC\cdot BD}{A_1C_1\cdot B_1D_1}.$

3-nátiyje. *Ultanları teń bolǵan eki úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası biyikliginiń qatnası sıyaqlı* (5-súwret).

Dálil. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}}=\dfrac{0{,}5a\cdot h_1}{0{,}5a\cdot h_2}=\dfrac{h_1}{h_2}.$

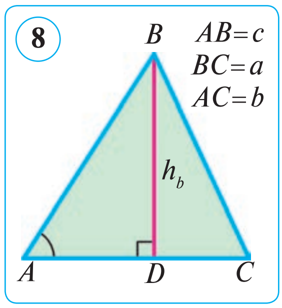
4-nátiyje. *Biyiklikleri teń bolǵan eki úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası ultanlarınıń qatnası sıyaqlı* (6-súwret).

Dálil. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}}=\dfrac{0{,}5\cdot BC\cdot h}{0{,}5\cdot BE\cdot h}=\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{a}{a_1}$, bunda $BC=a$, $BE=a_1$.

5-nátiyje. *Ultanları hám biyiklikleri teń bolǵan úshmúyeshlikler teńdey* (7-súwret).

Dálil. $S_{BAC}=S_{BDC}=S_{BEC}=0{,}5ah_a$.

6-nátiyje. *Úshmúyeshliktiń maydanı onıń eki tárepi hám olar arasındaǵı múyesh sinusı kóbeymesiniń yarımına teń* (8-súwret).



Dálil. ABC úshmúyeshliktiń tárepleri $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ bolsın. Ol jaǵdayda $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ekeniń dálilleymiz. Bunıń ushın ABC úshmúyeshliktiń $BD=h_b$ biyikligin ótkizemiz (8-súwret). h_b nı c tárepke hám A múyeshtiń sinusı menen ańlatamız: $h_b=c\sin A$. Úshmúyeshliktiń maydanın esaplaw formulası $S=\dfrac{1}{2}bh_b$ ǵa h_b nıń usı ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Úshmúyeshliktiń maydanın a, b tárepleri hám C múyesh sinusı a, c tárepleri hám B múyesh sinusı arqalı esaplaw formulaları usıǵan uqsas keltirip shıǵarıladı.

Solay etip, úshmúyeshliktiń maydanı eki tárepi hám olar arasındaǵı múyesh sinusına muwapıq usı formulalar boyınsha esaplanadı:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Úshmúyeshlik maydanınıń tárepleri arqalı esaplaw formulası I ásirde jasaǵan áyyemgi grek ilimpazı **Geron** tárepinen tabılǵan bolıp, ol *Geron formulası* dep ataladı Geron formulası úshmúyeshliktiń úsh tárepi uzınlıǵı belgili bolǵanda onıń maydanın esaplaw ushın qollanıladı.

Geron formulasınıń dálilin keltirip shıǵaramız.

Bizge belgili, úshmúyeshliktiń maydanı onıń tiykarı menen biyikligi kóbeymesiniń yarımına teń:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

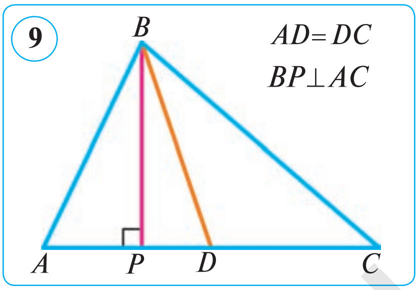
Biyiklik ornına onıń úshmúyeshlik tárepleri arqalı ańlatpası

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \beta=90°,\ h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ hám}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ların qoyıp, onı ápiyawılastırıp usı Geron formulasın payda etemiz:

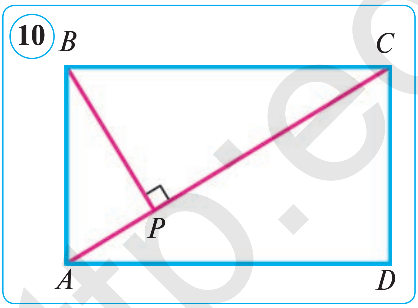
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ bunda } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



1- másele. Úshmúyeshliktiń medianası onı teńdey eki úshmúyeshlikke bóliwin dálilleń.

Dálil. BD — ABC úshmúyeshliktiń medianası bolsın (9-súwret). ABD hám CDB úshmúyeshlikler teń AD hám DC táreplerge hám ulıwma BP biyiklikke iye, yaǵnıy úshmúyeshlikler 5-nátiyje boyınsha teń:

$$S_{ABD}=S_{CBD}.$$



2-másele. Berilgen: $ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, $AC=20$ cm, $BP=12$ cm, $BP \perp AC$ (10- súwret).

Tabıw kerek: S_{ABCD}.

Sheshiliwi. 1) $S_{ABC}=0{,}5AC\ BP=$
$=0{,}5\ 20\ 12=120$ (cm²).

2) $S_{ABCD}=2\ S_{ABC}=2\ 120=240$ (cm²).

Juwap: $S_{ABCD}=240$ cm².

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Úshmúyeshliktiń maydanı nege teń?
2) Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı qalay esaplanadı?
3) Tárepleri boyınsha úshmúyeshliktiń maydanı qalay easaplanadı?

2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri: 1) 4 cm hám 7 cm; 2) 1,2 dm hám 25 cm. Usı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

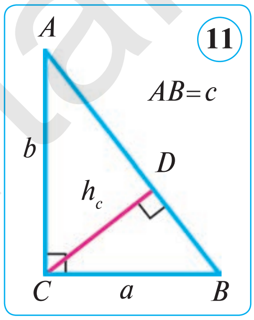
3. Bır úshmúyeshliktiń ultanı 20 cm, biyikligi 8 cm. Ekinshi úshmúyeshliktiń ultanı 40 cm. Úshmúyeshlikler birdey bolıw ushın ekinshi úshmúyeshliktiń biyikligi qanday bolıwı kerek?

4. ABC úshmúyeshlikte $AB=5AC$. Úshmúyeshliktiń B hám C tóbelerinen ótkizilgen biyikliklerdiń qatnası qanshaǵa teń?

5. Belgisiz muǵdarlardı tabıń. a – úshmúyeshliktiń ultanı, h – ultanına ótkizilgen biyiklik , S – úshmúyeshliktiń maydanı.

	1	2	3	4	5	6
a	69 cm	0,8 dm	?	0,25 m	?	0,9 m
h_a	0,5 m	?	20 dm	100 cm	4,8 cm	?
S	?	4 cm²	2000 cm²	?	9,6 mm²	36 dm²

6. Katetlerdiń (a hám b) kóbeymesi gipotenuza (c) menen tuwrı múyesh tóbesinen gipotenuzaǵa túsirilgen biyikliktiń (h_c) kóbeymesine teń (11-súwret).



Sheshiliwi. Eger katetlerden birin ultan ushın qabıl etsek, ol jaǵdayda ekinshisi biyiklik boladı. Sonıń ushın, tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı katetler kóbeymesiniń yarımına teń boladı:

$S=\frac{1}{2}ab$, bunnan $ab=2S$; $S=\frac{1}{2}ch_c$, bunnan $ch_c=2S$.

Demek, $ab=ch_c$ eken. Usını dálillew talap etilgen edi.

Úshmúyeshliktiń katetleri: 1) 12 cm hám 16 cm; 2) 5 cm hám12 cm ge teń. c (Pifagor teoreması) hám h_c ($ab=ch_c$)ların tabıń.

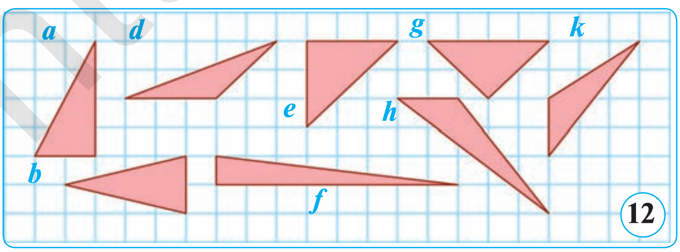
7. 12-súwrettegi teńdey úshmúyeshliklerdi kórsetiń. Juwabıńızdı dálilleń.

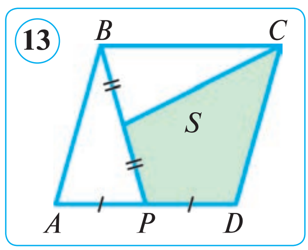
8. Tárepleri: 1) 39 cm, 42 cm, 45 cm; 2) 35 cm, 29 cm, 8 cm; 3) 20 cm, 20 cm, 32 cm ge teń bolǵan úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

9. 13-súwrettegi S figuranıń maydanı parallelogramm maydanınıń qanday bólimin payda etedi?

10. Úshmúyeshliktiń maydanı 150 cm² qa teń. Úshmúyeshliktiń biyiklikleri 15 cm, 12 cm hám 20 cm ge teń bolsa, onıń perimetrin tabıń.

11. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 5 dm hám 6 dm, olardıń arasındaǵı múyesh 30°. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń. Máseleni eki usıl menen sheshiń.





49–50. ROMB HÁM TRAPECIYANÍŃ MAYDANÍ

1. Rombınıń maydanı. **Romb** — tárepleri teń bolǵan parallelogramm. Tárepi a hám biyikligi h_a bolǵan rombınıń maydanı

$$\boldsymbol{S=ah_a}$$

formula boyınsha esaplanadı.

Bizge málim, rombınıń barlıq biyiklikleri óz ara teń.

Bunnan tısqarı, rombınıń maydanın diagonalları arqalı da esaplaw múmkin.

Teorema.

Rombınıń maydanı diagonallarınıń kóbeymesiniń yarımına teń:

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2},$$

bunda d_1 hám d_2 — rombınıń diagonalları.

Dálil. Rombınıń AC diagonalı onı eki óz ara teń qaptallı úshmúyeshlikke ajıratadı (1-súwret). Ekinshi diagonal birinshisine perpendikulyar bolıp, payda bolǵan úshmúyeshlikler biyikliikleriniń qosındısına teń boladı. Sonıń ushın rombınıń maydanı:

$$S=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot DO=\frac{1}{2}AC\cdot(BO+DO)=$$

$$=\frac{1}{2}\underline{AC}\cdot\underline{\underline{BD}}=\frac{1}{2}\underline{d_1}\cdot\underline{\underline{d_2}}.$$

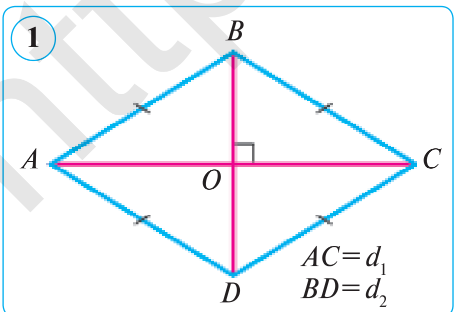
Demek, $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$. Teorema dálillendi.

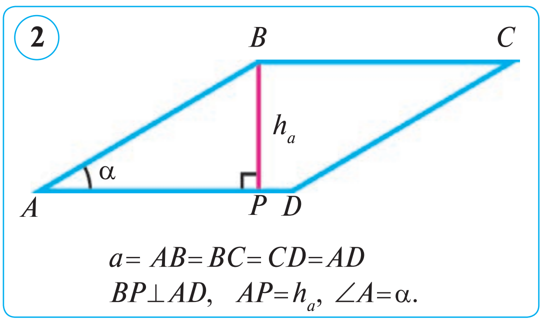
1-másele. $ABCD$ rombınıń tárepi a ǵa, súyir múyeshi α ǵa teń. Usı rombınıń maydanın tabıń $\alpha=30^\circ$ da onıń maydanın eki usıl menen tabıń.

Sheshiliwi. 1) $ABCD$ rombda $AB=BC=CD=AD=a$, $\angle A=\alpha$ bolsın. $BP\perp AD$ nı ótkizemiz (2-súwret). Bunday jaǵdayda h_a biyiklik tuwrı múyeshli ABP úshmúyeshliktiń α súyir múyeshi tuwrısında jatqan katet boladı. h_a nı α múyeshtiń sinusı menen ańlatamız: $h_a=a\sin\alpha$. Rombınıń maydanın esaplaw formulası $S=ah_a$ ǵa h_a nıń bul ańlatpasın qoyıp, usı formulanı payda etemiz:

$$S=a^2\sin\alpha.$$

2) Rombınıń maydanın $S=a^2\sin\alpha$ formuladan paydalanıp tabamız:





$$S = a^2 \sin 30° = a^2\, 0{,}5 = 0{,}5a^2 \text{ (kv. birl.)}.$$

Juwap: $S = 0{,}5a^2$ kv. birl.

2-másele. Rombınıń diagonallarınan biri ekinshisinen 1,5 ese úlken maydanı bolsa 27 cm^2 qa teń. Usı rombınıń diagonalların tabıń.

Berilgen: $ABCD$ — romb; $S_{ABCD} = 27$ cm^2; $AC = 1{,}5BD$ (1-súwretke q.)

Tabıw kerek: AC, BD.

Sheshiliwi. $BD = x$ cm bolsın, onda $AC = 1{,}5x$ cm boladı.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, buǵan belgilewlerdi qoyamız: $27 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5x \cdot x$. Onda $x^2 = 36$ boladı, bunnan $x = 6$ (cm). Solay etip,

$$BD = 6 \text{ cm}, \quad AC = 1{,}5 \cdot 6 = 9 \text{ (cm)}.$$

Juwap: 9 cm, 6 cm.

2. Trapeciyanıń maydanı. Hárqanday kópmúyeshlikti diagonallar ótkeriw jolı menen úshmúyeshliklerge ajıratıw múmkin. Qálegen kópmúyeshliktiń maydanın esaplaw ushın ol dáslep úshmúyeshliklerge ajıratıladı, soń úshmúyeshlikler maydanı esaplanadı. Kópmúyeshlik maydanı bolsa onı payda etken bir-birin qaplamaytuǵın úshmúyeshlikler maydanları qosındısına teń boladı. Trapeciya maydanların esaplawda usı usıldan paydalanamız.

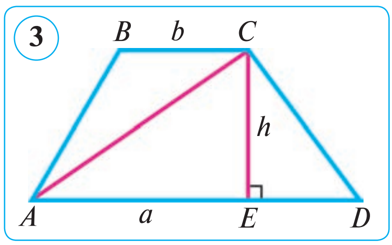
Teorema.

Trapeciyanıń maydanı onıń ultanları qosındısınıń yarımı menen biyikliginiń kóbeymesine teń:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

bunda *a* hám *b* — trapeciyanıń ultanları, *h* — trapeciyanıń biyikligi.

Dálil. Ultanları $AD = a$, $BC = b$ hám biyikligi $CE = h$ ($CE \perp AD$) bolǵan $ABCD$ trapeciyanı qarap óteyik (3-súwret).



Trapeciyada AC diagonalların ótkeremiz. Bunda $ABCD$ trapeciya ABC hám ACD úshmúyeshliklerge ajıraladı. Trapeciya maydanı bolsa bul úshmúyeshlikler maydanlarınıń qosındısına teń boladı.

Parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq turaqlı bolǵanı ushın ABC hám ACD úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri óz ara teń.

Bunnan, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h$ hám $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Trapeciyanıń maydanı $S = S_{ABC} + S_{ACD}$, yaǵnıy:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \quad \text{yamasa} \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Teorema dálillendi.

Nátiyje. *Trapeciyanıń maydanı orta sızığı menen biyikliginiń kóbeymesine teń.*

Usı nátiyje, trapeciyanıń orta sızığı ultanları qosındısınıń yarımına teńliginen kelip shıǵadı.

3-másele. Trapeciyanıń ultanları 15 cm hám 30 cm ge, maydanı bolsa 225 cm^2 qa teń. Usı trapeciyanıń biyikligin tabıń.

Sheshiliwi. Trapeciyanıń orta sızıǵı:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{15+30}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ (cm)}.$$

Demek, trapeciyanıń biyikligi:

$$h = S_{\text{tr.}} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22{,}5 = 10 \text{ (cm)}.$$

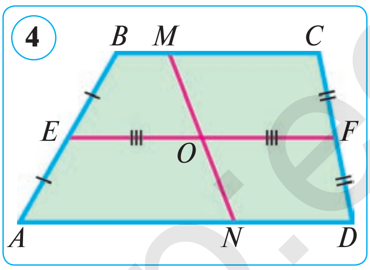
Juwap: $h = 10$ cm.

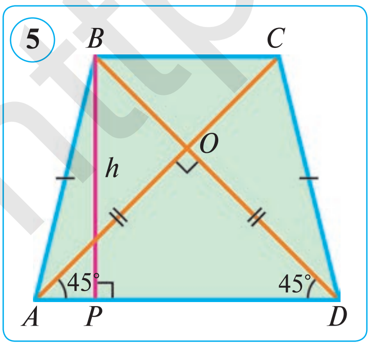
4-másele. Trapeciyanıń orta sızıǵının ortasınan ótip, ultanların kesiwshi tuwrı sızıq bul trapeciyanı teńdey eki bólekke bóliwin dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ — berilgen trapeciya ($AD \| BC$), EF — onıń orta sızıǵı, MN bolsa orta sızıqtıń ortası O arqalı ótiwshi hám ultanların M hám N noqatlarda kesiwshi tuwrı sızıq bolsın (4-súwret). $ABMN$ hám $MNDC$ trapeciyalar sáykes túrde teń EO hám OF orta sızıq berilgen trapeciyanıń biyikligine teń biyiklikke iye. Demek, bul trapeciyalardıń maydanları teń, yaǵnıy olar teń:

$$S_{ABMN} = S_{MNDC}.$$

Usını dálillew talap etilgen edi.





5-másele. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar bolsa, bunday halda trapeciyanıń biyikligi onıń orta sızıǵına, maydanı bolsa biyikliginiń kvadratına teń boladı. Sonı dálilleń.

Berilgen: $ABCD$ trapeciya — teń qaptallı ($AB = DC$), $AC \perp BD$, $AD = a$, $BC = b$ bolsın (5-súwret).

Dálillew kerek:

$$1)\ h = \frac{a+b}{2}; \qquad 2)\ S_{\text{tr.}} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Sheshiliwi. 1) $\triangle AOD$ — teń qaptallı, tuwrı múyeshli, sonıń ushın $\angle ADO = 45°$.

2) B tóbesinen $BP \perp AD$ nı ótkizemiz. Payda bolǵan BPD úshmúyeshlikte teń qaptallı hám tuwrı múyeshli, sebebi $\angle ADO = 45°$ hám demek, $\angle PBD = 45°$. Bunnan: $DP = BP$. Bizge

belgili teń qaptallı trapeciyanıń kishi ultanı tóbesinen ótkerilgen biyikliginiń qásiyeti boyınsha:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ yamasa $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$

Solay etip, teń qaptallı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar bolǵanda onıń biyikligi orta sızıǵına, maydanı bolsa biyikliginiń kvadratına teńligi tolıq dálillendi.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Rombınıń maydanı tárepi hám biyikligi boyınsha qalay tabıladi?
2) Rombınıń maydanı diagonalları arqalı qalay tabıladi? Onı ańlatıń.
3) Trapeciyanıń maydanı nege teń?

2. Rombınıń maydanı 40 cm², biyikligi 5 cm ge teń. Usı rombınıń perimetrin tabıń.

3. Eger rombınıń: 1) biyikligi 16 cm, súyir múyeshi 30° qa; 2) tárepi 1,8 dm, súyir múyeshi 30° qa teń bolsa, onıń maydanın tabıń.

4. Rombınıń maydanı 60 cm², diagonallarınan biri 10 cm ge teń. Usı rombınıń ekinshi diagonalın tabıń.

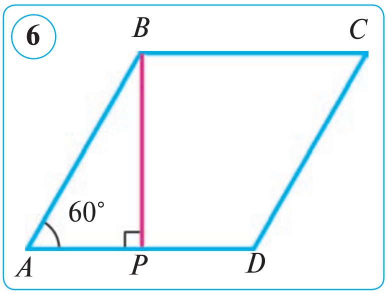
5. Rombınıń maydanı 30 cm², perimetri 24 cm ge teń. Usı rombınıń biyikligin tabıń.

6. *Berilgen:* $ABCD$ — romb. $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ cm (6-súwret).

Tabıw kerek: S.

Sheshiliwi. Tuwrı múyeshli BPA úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. Súyir múyeshiniń sinusı anıq teoreması boyınsha:

$\sin A = \frac{BP}{AB}$. Buǵan berilgenlerdi qoyıp, AB nı tabamız:



$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}.$$

Tárepi hám súyir múyeshi boyınsha rombınıń maydanın tabıw formulası

$$AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}, \ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

mánislerin qoyıp, tómendegini tabamız:

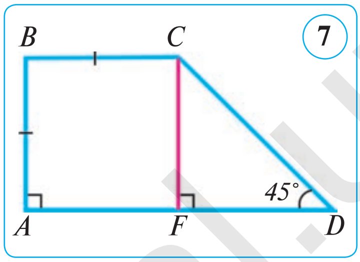
$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Juwabı: $96\sqrt{3}$ cm^2.

7. Diagonalları: 1) 1,5 dm hám 1,8 dm; 2) 24 cm hám 15 cm; 3) 3,2 cm hám 0,5 dm bolǵan rombınıń maydanın tabıń.

8. 1) Trapeciyanıń ultanları 11 cm hám 18 cm ge, biyikligi bolsa 6 cm ge teń. Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.

2) Trapeciyanıń ultanı 26 cm, biyikligi 10 cm, maydanı bolsa 200 cm^2. Usı trapeciyanıń ekinshi ultanın tabıń.



9. *ABCD* tuwrı múyeshli trapeciyada $AB=BC=18$ cm, $\angle D=45^\circ$ (7-súwret). Trapeciyanıń maydanın tabıń. Bos jerlerge sáykes juwapların jazıń.

Sheshiliwi. $CF\perp AD$ ni ótkeremiz. 1) *ABCF* — kvadrat, sebebi *ABCF* tórtmúyeshliktiń qońsı tárepleri *AB* hám ..., sonıń ushın $AF=CF=$... (cm).

2) $\triangle CFD$ — tuwrı múyeshli, jasalıwına qaraǵanda $\angle F=90^\circ$ hám shárt boyınsha $\angle D=45^\circ$, sonıń ushın $\angle DCF=...^\circ$ hám demek, $\triangle CFD$ — ... hám $DF=...=...$ (cm).

3) $AD=AF+...=...+...=...$ (cm) hám $S_{ABCD}=...\ ...=...\ ...=...$ (cm^2).

Juwabı: ... cm^2.

10. Romb múyeshleriniń qatnası 1 : 5 ge, tárepi bolsa *a* ǵa teń. Usı rombınıń maydanın tabıń.

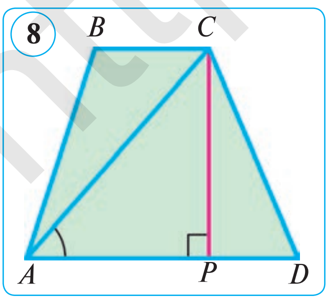
11. *ABCD* trapeciyada: $AD=20\sqrt{2}$ cm, $BC=10\sqrt{2}$ cm, $AC=24$ cm, $\angle CAD=45^\circ$ (8-súwret). Trapeciyanıń maydanın tabıń.

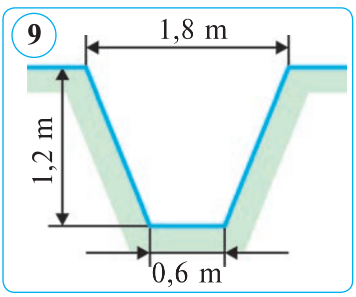
12. Diagonalları: 1) 3,5 dm hám 1,4 dm; 2) 28 cm hám17 cm; 3) 4,2 cm hám1,5 dm bolǵan rombınıń maydanın tabıń.

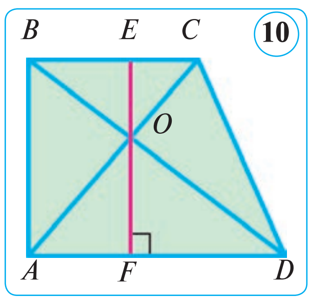
13. Teń qaptallı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar hám biyikligi 5 cm ge teń. Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.

14. Teń qaptallı trapeciya formasındaǵı tereńlik kese kesiminiń maydanın tabıń (9-súwret).

15. Trapeciyanıń ulatanları 16 cm hám 12 cm. Diagonallarınıń kesilisiw noqatınan ultanlarına shekem bolǵan aralıqlar 6 cm hám 4 cm ge teń (10-súwret). Usı trapeciyanıń maydanın tabıń.

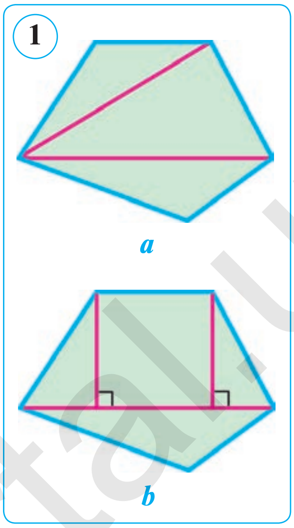






51. KÓPMÚYESHLIKTIŃ MAYDANÍ

Kópmúyeshliktiń maydanın esaplaw ushın onı óz ara kesilispeytuǵın, yaǵnıy ulıwma ishki noqatları bolmaǵan úshmúyeshliklerge ajıratıw hám olardıń maydanlarınıń qosındısın tabıw múmkin. Dóńes kópmúyeshlikti úshmúyeshliklerge ajıratıw ushın, máselen, onıń bir tóbesinen diagonallar ótkeriw jetkilikli (1-*a* súwret). Geyde basqasha ajıratıwlardan paydalanǵan qolaylı (1-*b* súwret).



1-másele. $ABCDE$ kópmúyeshlikte $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ ekeni málim (2-súwret)

$S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. Berilgen figuranıń trapeciya hám úshmúyeshlikten ibarat ekenin kóriw qıyın emes. Sol sebepli maydannıń qásiyeti boyınsha:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0{,}5BD\ CO + 0{,}5(AE + BD)\ OP =$$
$$= 0{,}5(BD\ CO + AE\ OP + BD\ OP) = 0{,}5(BD\,(CO + OP) +$$
$$+ AE\ OP) = 0{,}5(BD\ CP + AE\ OP).$$

Demek, $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD\ CP + AE\ OP)$.

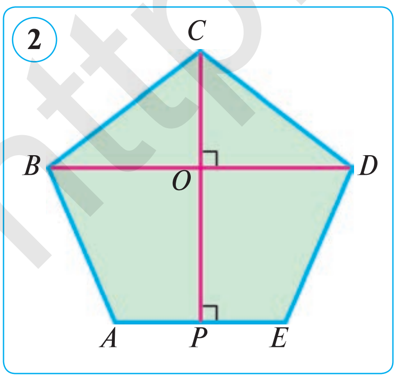
2-másele. AC hám BD — $ABCD$ tórtmúyeshliktiń diagonalları, O — diagonallarınıń kesilisiw noqatı (3-súwret). Eger $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ hám $S_{AOD} = S_4$ bolsa, $S_1\,S_3 = S_2\,S_4$ ekenin dálilleń.

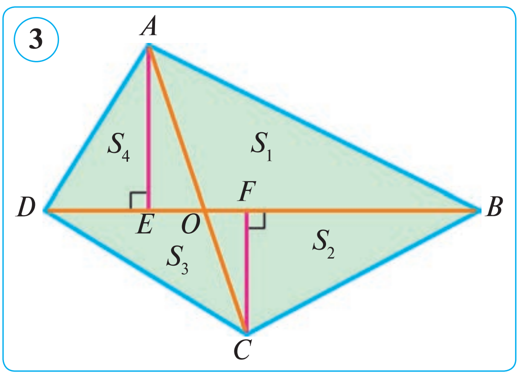
Dálil. 1) $AE \perp BD$ hám $CF \perp BD$ lardı ótkizemiz.

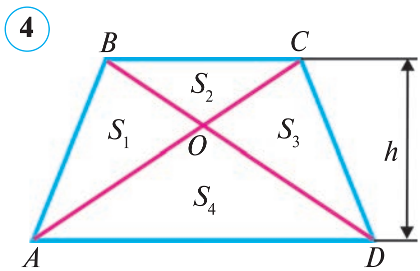
2) $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{0{,}5OB \cdot AE}{0{,}5OD \cdot AE} = \dfrac{OB}{OD}$ (1) hám $\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{0{,}5OB \cdot CF}{0{,}5OD \cdot CF} = \dfrac{OB}{OD}$ (2).

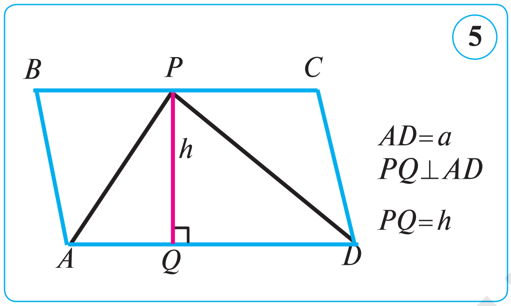
3) (1) hám(2) dan tabamız:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$









3-másele. BC hám AD — $ABCD$ trapeciyanıń ultanları, O — AC hám BD diagonallarınıń kesilisiw noqatı (4-súwret). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ hám $S_{AOD}=S_4$ bolsa, tómendegini dálilleń:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$.

Dálil. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Bizge $S_1 S_3 = S_2 S_4$ ekeni málim. $S_1 = S_3$ ti názerge alsaq, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ kelip shıǵadı. Máseleniń birinshi bólimi dálillendi.

3) Trapeciyanıń maydanı tórt úshmúyeshlik maydanlarınıń qosındısına teń ekenin joqarıdaǵı nátiyjelerdi esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$S_{\text{tr.}} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$

$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2.$$

Demek, $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$. Máseleniń ekinshi bólimi dálillendi.

4-másele. Parallelogramm menen ulıwma ultanǵa hám ulıwma biyiklikke iye bolǵan úshmúyeshliktiń maydanı parallelogram maydanınıń yarımına teń.

Dálil. AD ultan hám h biyiklik – $ABCD$ parallelogram hám APD úshmúyeshlikler ushın ulıwma (5-súwret). $S_{APD}=0{,}5S_{ABCD}$ ekenin dálilleymiz.

$S_{ABCD}=ah$ (1) hám $S_{APD}=0{,}5ah$ (2) ekeni málim. (2) teńliktegi ah ornına S_{ABCD} nı qoyıp tabamız:

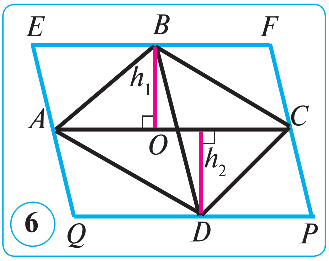
$$S_{APD}=0{,}5ah=0{,}5S_{ABCD}.$$

Eskertiw! Joqarıda keltirilgen máseleni tómendegishe de oqıw múmkin: *úshmúyeshlik penen ulıwma ultanǵa hám ulıwma biyiklikke iye bolǵan parallelogrammnıń maydanı úshmúyeshliktiń maydanınan eki ese úlken.*

5-másele. Dónes tórtmúyeshliktıń tóbeleri arqalı onıń diagonallarına parallel tuwrı sızıqlar ótkizilse, bunday jaǵdayda payda bolǵan parallelogrammnıń maydanı berilgen tórtmúyeshlik maydanınan eki ese úlken bolıwın dálilleń.

Dálil. $ABCD$ – $ABCD$ – berilgen dóńes tórtmúyeshlik, O– AC hám BD diagonallarınıń kesilisiw noqatı, h_1 hám h_2 – tórtmúyeshliktiń B hám D tóbelerinen AC diagonalǵa túsirilgen biyiklikler; $EFPQ$ — tórtmúyeshliktiń tóbeleri arqalı onıń diagonallarına parallel ótkizilgen tuwrı sızıqlar kesilisiwinen payda bolǵan parallelogramm (6-súwret).

$S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ ekenin dálilleymiz.



6

Parallelogrammnıń EF hám QP tárepleri AC diagonalǵa parallel hám teń. Sonıń ushın AC diagonal payda bolǵan $EFPQ$ parallelogrammdı eki — $AEFC$ hám $ACPQ$ parallelogramlarǵa ajıratadı.

Joqarıda keltirilgen eskertiwdegi juwmaqtı qollanıp, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ teńlikti dálilleymiz: $S_{EFPQ}=S_{AEFC}+S_{ACPQ}=2S_{ABC}+2S_{ADC}=2(S_{ABC}+S_{ADC})=2S_{ABCD}$.

Demek, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

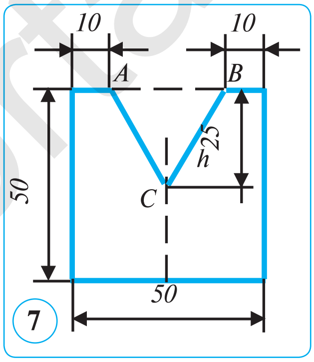
1. 7-súwrettegi figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Súwrette kórsetilgen figuranıń maydanın A hám B noqatların tutastırıp, onı kvadratqa toltırıw arqalı tabıw qolay. Berilgen figuranıń maydanı payda bolǵan kvadrat maydanı menen ABC úshmúyeshlik maydanınıń ayırmasına teń:

$S=S_{kv.}-S_{ABC}=...^2-0,5\,(50-2\ 10)\ ...=$
$=...-375=...$ (kv. birl.).

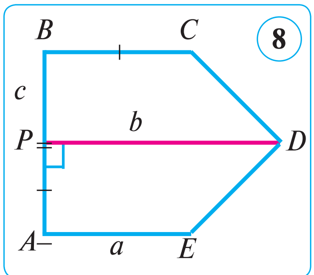
Noqatlar ornına sáykes sanlardı qoyıń.

Juwap: ... kv. birl.



7

2. 8-súwrettegi figura maydanın esaplaw ushın formula keltirip shıǵarıń. Bunda $AE\parallel BC\parallel PD$, $AE=BC$, $AP=PB$, $PD\perp AB$.



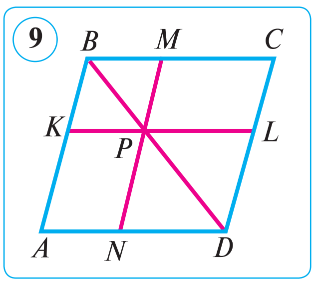
8

3. *Berilgen:* $ABCD$ — tuwrı tórtmúyeshlik, $AB=12$ cm, $AD=16$ cm; E, F, P hám Q noqatlarr — sáykes tárepleriniń ortaları.

Tabıw kerek: S_{EFCPQA}.

4. *Berilgen:* $ABCD$ — parallelogramm, $P\in BD$, $KL\parallel BC$, $MN\parallel AB$ (9-súwret).

Dálillew kerek: $S_{AKPN}=S_{PMCL}$.



9

5. AC hám BD — $ABCD$ tórtmúyeshliktiń diagonalları, O — olardıń kesilisiw noqatı. $S_{AOD}=12$, $S_{BOC}=8$, $S_{AOB}=6$. S_{COD} nı tabıń.

6. Tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi jerdiń maydanı 400 ha. Eger: 1) maydannıń boyı 10 km bolsa; 2) maydan kvadrat kórinisinde bolsa, onıń perimetri qansha?

52. ÁMELIY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

I. Izertlew ushın máseleler.

1-másele. Tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 4 ge eseli bolǵan máseleni kórip shıǵamız.

Perimetri 72 cm ge teń hám tárepleri natural san bolǵan barlıq tuwrı tórtmúyeshlikler ishinen eń úlken maydanǵa iye bolǵanın tabıń. Ol qanday figura boladı? Juwmaq shıǵarıń.

Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshlikte: $P=2\cdot(a+b)=72$ cm — perimetr, $p=a+b=36$ cm — yarım perimetr, yaǵnıy qońsı tárepler qosındısı. a háma b nıń mánisleri belgili bolǵanda ǵana $S=a\cdot b$ esaplay alamız. Máselede qoyılǵan sorawǵa juwap beriw ushın tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsı táreplerin tabıwǵa háreket etemiz.

Bunıń ushın 36 nı eki natural sannıń qosındısı kórinisinde ańlatamız:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=...=33+3=34+2=35+1.$$

Bunnan kórinedi, qońsı tárepleri qosındısı 36 cm ge teń bolǵan 35 hár túrli tuwrı tórtmúyeshlik bar. Maǵlıwmatlardı kestege kirgizip, olardı talqılaymız hám juwmaq shıǵaramız:

a cm	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b cm	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a+b)$ cm	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S=a\cdot b$ cm^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

Kesteden kórinedi, eń kishi maydanǵa $a=1$ cm hám $b=35$ cm yaki $a=35$ cm hám $b=1$ cm bolǵanda, eń úlken maydanǵa bolsa $a=b=18$ cm – tárepi 18 cm ge teń kvadrat bolǵanda ǵana, erisiledi. Qalǵan tuwrı tórtmúyeshliklerdiń perimetri 72 cm bolsa da, biraq maydanları

$$18\cdot 18=324 \text{ (cm}^2)$$

dan kishi boladı.

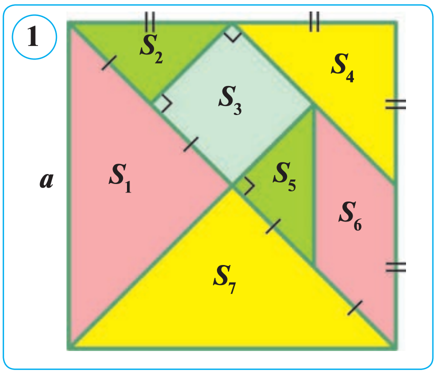
Kesteni talqılaw nátiyjesinde tómendegi juwmaqqa kelemiz.

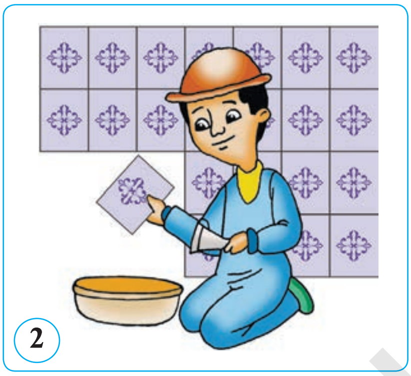
1-juwmaq. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 4 ke kóbeytilse, eń úlken maydan tómendegi formula boyınsha tabıladı:

$$S_{\max}=\left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ kv. birl.}$$

2-juwmaq. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri natural san hám perimetri 2 ge eselense, ol jaǵdayda perimetrleri teń bolǵan barlıq tuwrı tórtmúyeshlikler ishinen táreplerinen biri 1 ge hám ekinshi tárepi bolsa 1 di yarım perimetrge toltırıwshı san bolǵanda ǵana eń kishi maydanǵa iye boladı.

3-juwmaq. Tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsı tárepleri uzınlıqları bir-birine jaqınlasqan sayın maydan artıp baradı.





2-másele. Qıtaysha «tangram» oynında kvadrat 1-súwrette kórsetilgendey úshmúyeshlikleri hám tórtmúyeshliklerge ajıratılǵan. Bulardan hár túrli figuralar sızıwǵa boladı. Eger kvadrattıń tárepi 8 cm ge teń bolsa, bólingen figuralardıń maydanların tabıń.

Sheshiliwi. $a=8$ cm — kvadrattıń tárepi. $S=a^2=8^2=64$ (cm^2) — berilgen kvadrattıń maydanı. Endi figuradaǵı bólsheklerdiń maydanların tabamız.

1) S_1 hám S_7 – kvadrat maydanınıń tórtten birine teń. Demek,

$$S_1=S_7=S:4=64:4=16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2) Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı gipotenuza kvadratınıń tórtten birine teń. Demek,

$$S_2=S_5=0,25\cdot(a:2)^2=0,25\cdot 4^2=0,25\cdot 16=4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3) S_3 kvadrattıń maydanı eki S_2 úshmúyeshlik maydanları qosındısına teń. Demek, $S_3=2S_2=2\cdot 4=8$ (cm^2).

4) S_4 úshmúyeshliktiń katetleri berilgen kvadrat tárepiniń yarımına teń, yaǵnıy $a:2=8:2=4$ (cm). Teń qaptallı úshmúyeshliktiń maydanı kateti kvadratınıń yarımına teń, yaǵnıy $S_4=0,5\cdot 4^2=0,5\cdot 16=8$ (cm^2).

5) Ultanları hám biyiklikleri teń bolǵan kvadrat penen parallelogramm teńles, sonıń ushın $S_6=S_3=2\cdot 4=8$ (cm^2) bólegi.

Juwap: $S_1=S_7=16$ cm^2; $S_2=S_5=4$ cm^2; $S_3=S_4=S_6=8$ cm^2.

3-másele. Usta uzınlıǵı 2,25 m hám eni 1,8 m bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı diywal bólimin kafel menen qaplamaqshı. Bunıń ushın oǵan tárepi 15 cm li kvadrat formasındaǵı kafelden neshewi kerek boladı (2-súwret)?

Sheshiliwi. 1) Qaplamaqshı bolǵan diywaldıń maydanın tabamız hám onı kvadrat santimetrde ańlatamız:

$$2,25\ 1,8=4,05 \text{ (m}^2\text{)}=4,05\ 10000 \text{ cm}^2=40500 \text{ cm}^2.$$

2) Bir dana kafeldiń maydanın tabamız: $a^2=15^2=225$ (cm^2).

3) Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı diywaldı qaplaw ushın neshe kafel kerek bolıwın tabamız:

$$40500:225=180.$$

Juwap: 180 kafel.

Tómendegi máseleni sheshiwdi ózińizge qaldıramız.

4-másele. Tárepi 4 m ge teń bolǵan kvadrat formasındaǵı joldı qaplaw ushın tárepi 20 cm li kafelden neshewi kerek boladı?

ÁMELIY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDÍRÍWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

KETEKSHELI QAǴAZDA MAYDANLARDÍ ESAPLAW

Keteksheli qaǵazda berilgen dóńes hám dóńes emes kópmúyeshliklerdiń maydanın esaplaw ushın «**Pik formulası**» dep atalıwshı formulanı keltiremiz. Hárbir ketekshe tárepi uzınlıǵı 1 cm bolsın. Ketekli qaǵazdaǵı tuwrı sızıqlar kesiliw noqatların — birlik kvadrat tóbelerin **túyin noqatlar** dep ataymız. Bunday jaǵdayda kópmúyeshliktiń maydanı tómendegi formula boyınsha esaplanadı:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1.$$

Bul formulada M — kópmúyeshlik shegarasında jatqan túyin noqatlar sanı, N — kópmúyeshlik ishinde jatqan túyin noqatlar sanı.

Bul formulanı kópmúyeshliktiń tóbeleri túyin noqatlarda bolǵan hárqanday kópmúyeshlik ushın qollansa boladı.

1- másele. 1- súwrettegi figura maydanın esaplań.

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Barlıq tolıq kvadratlar sanı 59 bolıp, olardıń maydanı 59 cm^2; kvadrattıń yarımına teń bolǵan úshmúyeshlikler sanı 16 bolıp, olardıń maydanı $16:2=8$ (cm^2); bir ultanı 2 cm, biyikligi 3 cm maydanı 3 cm^2 ge teń.

Solay etip, berilgen kópmúyeshliktiń maydanı:

$$S=59+8+3=71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2-usıl. Usı juwaptıń Pik formulası járdeminde qalay tabılıwın kirip shıǵamız. Túyin noqatların belgilep alamız.

1) Figura ishinde jatqan túyin noqatların (qara reńde belgilengen) sanaymız olar 50, yaǵnıy $N=50$.

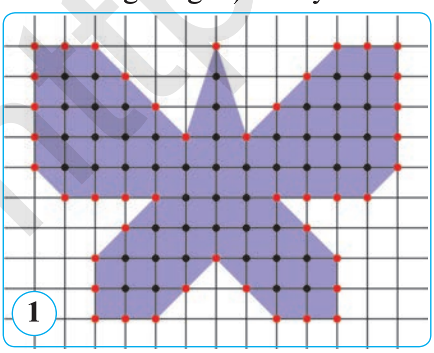
2) Figura tárepleri nde jatqan túyin noqatların (qızıl reńde belgilengen) sanaymız: olar 44, yaǵnıy $M=44$. Pik formulasın qollanamız:

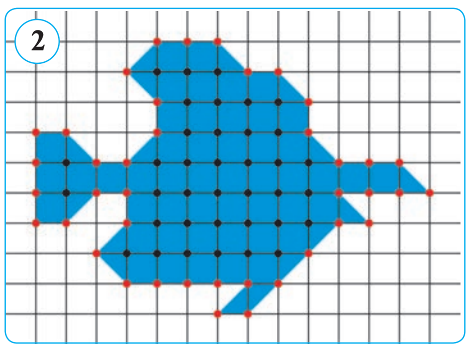
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Demek, eki usılda da hár qıylı nátiyje kelip shıǵadı. *Juwap:* 71 cm^2.

2-másele. 2- súwrettegi kópmúyeshlik maydanın esaplań.

Sheshiliwi. 1) Kópmúyeshlik tárepleri nde jatqan túyin noqatların (qızıl reńde belgilengen) sanaymız: olar 40, yaǵnıy $M=40$.



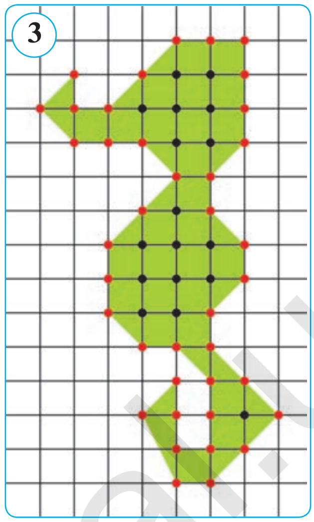


2) Kópmúyeshlik ishinde jatqan túyin noqatların (qara reńde belgilengen) sanaymız: olar 37, yaǵnıy $N=37$.

Pik formulası boyınsha:

$$S=\frac{40}{2}+37-1=20+36=56\ (\text{cm}^2).$$

Juwap: 56 cm^2.



3-másele. 3-súwrettegi kópmúyeshlik maydanın esaplań.

Sheshiliwi. 1-usıl. 1) Kópmúyeshlik tároplerinde jatqan túyin noqatların (qızıl reńde belgilengen) sanaymız: olar 39, yaǵnıy $M=39$.

2) Kópmúyeshlik ishindegi túyin noqatları (qara reńde belgilengen) sanaymız: olar 17, yaǵnıy $N=17$.

Pik formulası boyınsha:

$$S=\frac{39}{2}+17-1=19{,}5+16=35{,}5\ (\text{cm}^2).$$

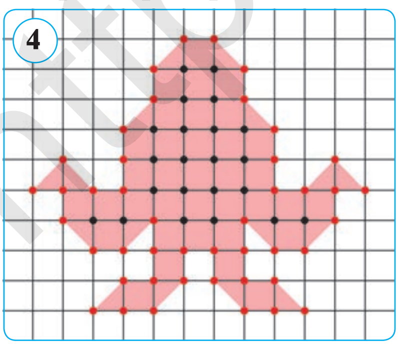
2-*usıl.* Alınǵan juwaptıń durıs ekenine jáne bir ret isenim payda etpekshi bolsańız, dáslep berilgen kópmúyeshlikti hár túrli usıllar menen úyrenilgen dóńes kópmúyeshliklerge ajıratıń. Keyin payda bolǵan figuralar maydanların tiyisli formulalar járdeminde esaplań. Alınǵan nátiyjelerdi qosıp, 1-usılda shıqqan nátiyje menen salıstırıń. Eger esaplawlardı durıs orınlasańız, álbette, hár eki nátiyje birdey boladı. Berilgen kópmúyeshlik sızılmada hár túrli figuralarǵa ajıratıp kórsetilmese de boladı. Esaplaw usılın tańlaw ózińizge baylanıslı. Esaplawlardı awızeki orınlasa da boladı.

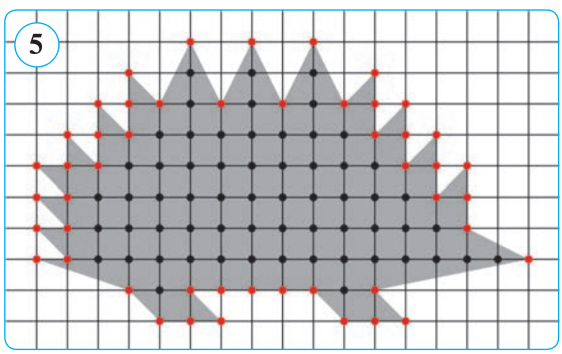
Barlıq tolıq kvadratlar sanı 26, olardıń maydanı 26 cm^2; kvadrattıń yarımına teń bolǵan úshmúyeshlikler sanı 17, olardıń maydanı $17:2=8{,}5$ (cm^2); bir ultanı 2 cm, biyikligi 1 cm ge teń úshmúyeshlik bar, onıń maydanı 1 cm^2 qa teń. Solay etip, berilgen kópmúyeshliktiń maydanı: $26+8{,}5+1=35{,}5$ (cm^2).

Demek, hár eki nátiyje birdey.

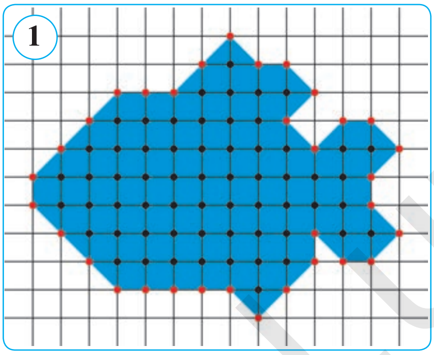
Juwap: 35,5 cm^2.

4-másele. 4-hám 5-súwrettegi kópmúyeshlikler maydanın Pik formulasın qollanıp esaplań.





53–54. 4-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW



1. Tárepleri 27 cm hám 21 cm ge teń tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrine teń bolǵan kvadrattıń maydanın tabıń.

2. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 540 cm^2, eki tárepiniń qatnası 3 : 5 sıyaqlı. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

3. Parallelogrammnıń maydanı 24 cm^2. Eger onıń biyiklikleri 3 cm hám 4 cm ge teń bolsa, obıń perimetrin tabıń.

4. 1-súwrette súwretlengen figuranıń maydanın bóleklerge bólip hám de Pik formulasın qollanıp tabıń.

4-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. Eger tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri 4 ese arttırılsa, onıń maydanı neshe ese artadı?

A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

2. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 400 ge, tárepleriniń qatnası 4:1 ge teń. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

A) 10 km; B) 5 km; D) 2 km; E) 8 km.

3. Tuwrı tórtmúyeshliktiń uzınlıǵı 25 % ke arttırıldı. Onıń maydanı ózgermesligi ushın enin neshe procentke kemeyttiriw kerek?

A) 20 %; B) 16 %; D) 25 %; E) 18 %.

4. Kvadrattıń tárepin neshe márte kemeyttirgende maydanı 4 márte kishireyedi?

A) 1,5 ese; B) 2 ese; D) 3 ese; E) 3,5 ese.

5. Maydanı 144 sm^2, biyiklikleri 8 sm hám 12 sm bolǵan parallelogrammnıń perimetrin tabıń.

A) 40 cm; B) 30 cm; D) 80 cm; E) 60 cm.

6. $ABCD$ parallelogrammnıń AC diagonalına BO perpendikulyar túsirilgen. $AO=8$, $OC=6$ hám $BO=4$ bolsa, parallelogrammnıń maydanın tabıń.

A) 50 cm^2; B) 28 cm^2; D) 52 cm^2; E) 56 cm^2.

7. Rombınıń maydanı 40 sm^2 qa, perimetri 20 sm ge teń. Usı rombınıń biyikligin tabıń.

A) 2 cm; B) 8 cm; D) 4 cm; E) 16 cm.

8. Ultanları 5 sm hám 9 sm ge teń bolǵan trapeciyanıń maydanı 35 sm^2 qa teń. Usı trapeciyanıń biyikligin tabıń.

A) 9 cm; B) 8 cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

9. Ultanları 8 hám 12 ge teń bolǵan teń qaptallı trapeciyanıń diagonalları óz ara perpendikulyar. Trapeciyanıń maydanın tabıń.

A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.

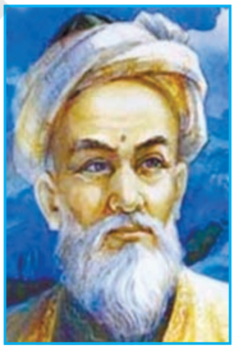
10. Trapecyanıń maydanı 30 cm ge biyikligi 6 cm ge teń bolsa, onıń orta sızıǵı qanshaǵa teń boladı?

A) 2,5 cm; B) 5 cm; D) 7,5 cm; E) 4,5 cm.

Inglis tilin úyrenemiz!

Kvadrat koreni — square root
Úshmúyeshlik — triangle
Orta sızıq — midline
Geron formulası — formula of Heron
Maydan — area

Tariyxıy maǵlıwmatlar



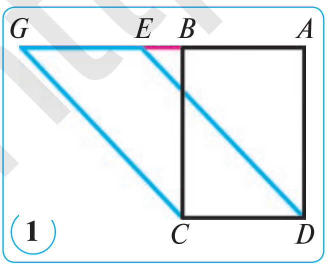
Abu Ali ibn Sino
(980—1037)

Ibn-Sino «Donishnoma» shıǵarmasınıń besinshi babı «Tórtmúyeshlikler, olarda jaylasqan úshmúyeshlikler hám olardıń qatnaslarına tiyisli tiykarǵı geometriyalıq máseleler» temasına baǵıshlanǵan. Shıǵarmada parallel sızıqlar haqqında tómendegishe pikirler aytıp ótilgen.

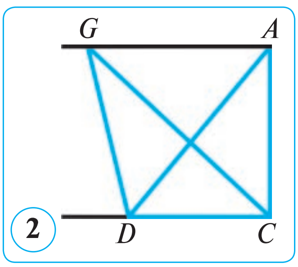
1-teorema. Óz ara parallel eki sızıq arasına jaylasqan, ulıwma ultanǵa iye hám qarama-qarsı tárepleri parallel figuralar birdey boladı (yaǵnıy olardıń maydanları teń). Mısalı, ultanları *CD* bolǵan *ABCD* hám *EGCD* tegis figuralar óz ara teń boladı (1-súwret).

2-teorema. Óz ara parallel sızıqlar arasına jaylasqan hám ulıwma ultanǵa iye bolǵan úshmúyeshlikler teń boladı. Mısalı, *CD* ultanǵa iye bolǵan *ACD* hám *GCD* úshmúyeshlikler teńdey boladı (2-súwret)

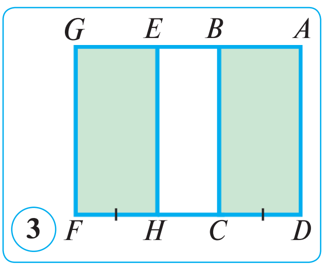
3-teorema. Óz ara parallel sızıqlar arasına jaylasqan hám ultanları teń bolǵan tórtmúyeshlikler teń boladı. Mısalı, *ABCD* hám de *GEHF* tórtmúyeshlikler birdey (3-súwret).



1



2



3

V BAP
SHEŃBER

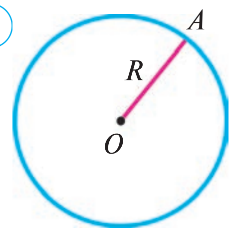
10-§. SHEŃBERDEGI MÚYESHLER

55. TUWRÍ SÍZÍQ HÁM SHEŃBERDIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ. SHEŃBERGE URÍNBA HÁM ONÍŃ QÁSIYETLERI

1. Sheńber hqqında baslanǵısh maǵlıwmatlar.

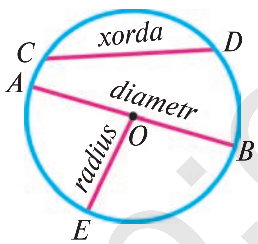
Anıqlama. *Tegisliktiń berilgen noqattan birdey aralıqta uzaqlasqan noqatlardan ibarat figura **sheńber** dep ataladı.*

1



O orayı, R radiuslı sheńber, yaǵnıy (O, R)

a



CD – xorda, OE – radius, AB – diametr

b

Berilgen O noqat ***sheńberdiń orayı*** delinedi. Sheńberdiń qálegen noqatlarınan onıń orayına shekemgi aralıq ***sheńberdiń radiusı*** dep ataladı. Sonday-aq, sheńber noqatın onıń orayı menen tutastırıwshı hárqanday kesindi de *radius* boladı. Solay etip, orayı O noqat hám radiusı R bolǵan sheńber — berilgen. O noqattan R ge teń aralıqta jaylasqan tegisliktiń barlıq noqatlarınan dúzilgen geometriyalıq figura.

Ádette, O oraylı hám R radiuslı sheńber tómendegishe belgilenedi: (O, R) (1-*a* súwret).

Sheńberdiń qálegen eki noqatın tutastırıwshı sızıq ***xorda*** dep ataladı. Sheńberdiń orayınan ótiwshi xorda onıń ***diametri*** delinedi.

1-*b* súwrette sheńberdiń radiusı hám eki xordası súwretlengen bolıp, xordadan biri sheńberdiń diametri.: OE — radius, CD — xorda AB — diametr.

Ádette, diametr d háribi menen belgilenedi. Bizge belgili, diametr radiusdan eki márte úlken, yaǵnıy $d=2R$ ge teń.

2. Tuwrı sızıq hám sheńberdiń óz ara jaylasıwı.

Bul temada tegislikte tuwrı sızıq penen sheńberdiń óz ara jaylasıwın kórip shıǵamız. Eger tuwrı, sızıq sheńber orayınan ótse bul jaǵdayda ol sheńberdi eki noqatta, yaǵnıy bul tuwrı sızıqta jatıwshı diametr tóbelerinde kesip ótiwshi kórinip turadı.

Berilgen l tuwrı sızıq penen (O, R) sheńber neshe ulıwma noqatqa iye, degen sorawǵa juwap beriw ushın sheńberdiń orayı O dan l tuwrı sızıqqa deyin bolǵan d aralıq usı sheńberdiń R radiusi menen salıstırıw kerek.

Sheńberdiń orayınan tuwrı sızıqqa túsirigen perpendikulyar *sheńber orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq* dep ataladı.

Úsh jaǵday bolıwı múmkin: 1) $d>R$; 2) $d=R$; 3) $d<R$. Endi bul jaǵdaydı kórip shıǵamız.

1-jaǵday. *Eger sheńberdiń orayınan tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıq sheńberdiń radiusınan úlken bolsa,tuwrı sızıq penen sheńber ulıwma noqatqa iye bolmaydı, yaǵnıy kesilispeydi.*

Haqıyqatında da, eger $d>R$ bolsa (2-*a,* súwret), *l* tuwrı sızıqtıń *O* orayına eń jaqın noqatı (bul tuwrı sızıqtıń qálegen noqatı da) (O, R) sheńberge tiyisli bolmaydı, sebebi oraydan sheńber radiusınan úlken aralıqta boladı.

2-jaǵday. *Eger sheńberdiń orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq sheńberdiń radiusına teń bolsa, bunday jaǵdayda tuwrı sızıq penen sheńber bir hám tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye boladı.*

Haqıyqatında da, eger $d=R$ bolsa (2-*b* súwret), *l* tuwrı sızıqtıń *O* orayına eń jaqın noqatı bul tuwrı sızıqtıń qálegen noqatı da sheńberdiń radiusına teń aralıqta boladı hám demek, ol noqat sheńberge tiyisli boladı. *l* tuwrı sızıqtıń qalǵan barlıq noqatları *O* oraydan sheńberdiń radiusınan úlken aralıqta boladı demek, sheńberge tiyisli bolmaydı.

3-jaǵday. *Sheńberdiń orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıq sheńberdiń radiusınan kishi bolsa ($d<R$), ol jaǵdayda tuwrı sızıq penen sheńber eki ulıwma noqatqa iye boladı.*

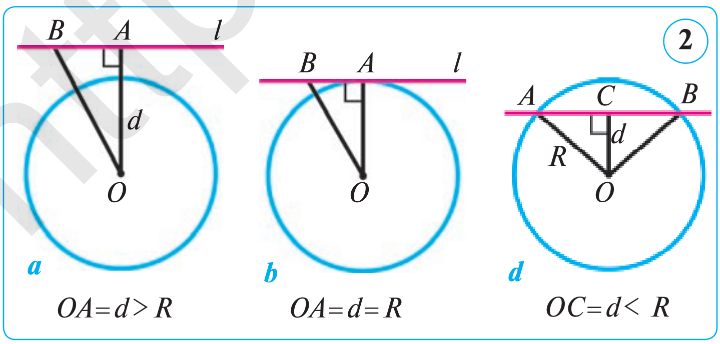
Tuwrı sızıqtıń sheńber ishindegi bólimi xorda boladı (2-*d* súwret). Bul jaǵdayda tuwrı sızıq sheńberge salıstırmalı *kesiwshi* dep ataladı.

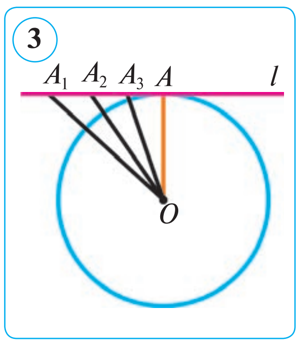
Xorda uzınlıǵı AB sheńberdiń radiusı hám orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq d arqalı ańlatıw múmkin:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}\,.$$

Bul teńlikti ózińiz dálilleń.

Juwmaq. *Tuwrı sızıq penen sheńber ulıwma noqatlarǵa iye bolmawı bir yamasa eki ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin.*





2. Sheńberge urınba.

> **Anıqlama.** *Sheńber benen tek ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıq usı sheńberge* ***urınba*** *dep ataladı. Olardıń ulıwma noqatı bolsa* ***urınba noqatı*** *dep ataladı.*

2-*b* súwrette l tuwrı sızıq O oraylı sheńberge urınba, A — urınıw noqatı. Sheńber l tuwrı sızıqqa urınadı dep aytıw múmkin.

Urınbanıń qásiyetleri haqqındaǵı teoremanı dálılleymiz.

1- teorema.

Sheńberge urınba usı sheńberdiń urınıw noqatına ótkerilgen radiusqa perpendikulyar.

Dálil. l tuwrı sızıq sheńberge A noqatta ótkizilgen urınba bolsın (3-súwret). $R=OA$ nıń l ge perpendikulyar bolıwın dálilleymiz. Shárt boyınsha l tuwrı sızıqtıń, A noqatınan basqa barlıq noqatlar sheńberden sırtta jatadı. Sonıń ushın bul tuwrı sızıqtıń A dan basqa hárqanday A_1 noqatı ushın $OA_1>OA$. Demek, OA aralıq O noqattan l tuwrı sızıqtıń noqatlarına shekemgi bolǵan aralıqtıń eń qısqası. Noqattan tuwrı sızıqqa eń qısqa aralıq bolsa usı tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar boladı. Bunnan, $OA\perp l$ ekenligi kelip shıǵadı.

Teorema dálillendi.

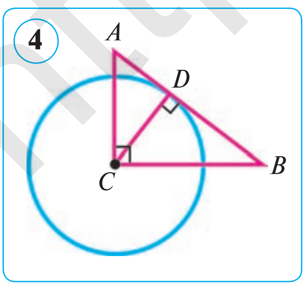
Endi urınbanıń qásiyetine keri teoremanı dálilleymiz.

2- teorema.

Radiusqa perpendiykulyar hám usı sheńberde jatqan tóbesinen ótiwshi tuwrı sızıq usı sheńberge urınba.

Dálil. Eger sheńber orayınan tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıq sheńber radiusına teń ($d=R$) bolsa (2-*b* súwretke q.), l tuwrı sızıqtıń O orayǵa eń jaqın noqatı sheńberdiń radiusına teń boladı, demek, ol noqat sheńberge de tiyisli boladı. l tuwrı sızıqtıń qalǵan barlıq noqatları O oraydan sheńberdiń radiusınan úlken aralıqta boladı, demek sheńberge tiyisli bolmaydı. Anıqlama boyınsha, l tuwrı sızıq usı sheńberge urınba boladı. Teorema dálillendi.

Máséle. Tuwrı múyeshli ACB ($\angle C=90°$) úshmúyeshliktiń katetlari $AC=3$ cm hám $BC=4$ cm. Orayı C noqatta bolǵan radiusı 2,4 cm ge teń sheńber ótkizilgen. Bul sheńber menen AB ttuwrı sızıq óz ara qanday jaǵdayda boladı?



4

Sheshiliwi. $\triangle ACB$ ($\angle C=90°$) da: $AC=3$ cm, $BC=4$ cm. Pifagor teoreması boyınsha:

$$AB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \text{ (cm)}.$$

$CD\perp AB$ nı ótkizemiz (4-súwret). Úshmúyeshliktiń maydanın eki túrli esaplaw múmkin, yaǵnıy

$CA \cdot CB = AB \cdot CD$ teńlik orınlı. Bunnan $CD = CA\,CB : AB = 3\,4 : 5 = 2{,}4$ (cm). Demek, C noqattan AB tuwrı sızıqqa radius uzınlıǵına teń bolǵanı ushın AB tuwrı sızıq sheńberge urınadı.

Juwap: AB — urınba.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Sheńber degenimiz ne? Sheńber: orayı, radiusı, xordası hám diametri dep nege aytıladı? Qanday tuwrı sızıq sheńberge urınba delinedi?
2) Urınbanıń qanday qásiyet hám belgisin bilesiz?

2. d — R radiuslı sheńberdiń orayınan l tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıq. Eger: 1) $R=8$ cm, $d=6$ cm; 2) $R=10$ cm, $d=8{,}4$ cm; 3) $R=14{,}4$ dm, $d=7{,}4$ dm; 4) $R=1{,}6$ dm, $d=24$ cm; 5) $R=4$ cm, $d=40$ mm bolsa, l tuwrı sızıq penen sheńber óz ara qanday jaylasqan boladı?

3. $ABCD$ kvadrattıń tárepi 8 sm ge hám orayı A noqatta bolǵan sheńberdiń radiusı 7 sm ge teń. AB, BC, CD hám BD tuwrı sızıqlardan qaysı biri usı sheńberge qarata kesiwshi boladı?

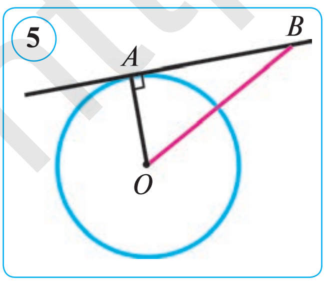
4. AB tuwrı sızıq O oraylı sheńberdiń A noqatına ótkizilgen urınba. Eger $AB=24$ cm, sheńberdiń radiusı 7 cm ge teń bolsa, OB kesindiniń uzınlıǵın tabıń (5-súwret).

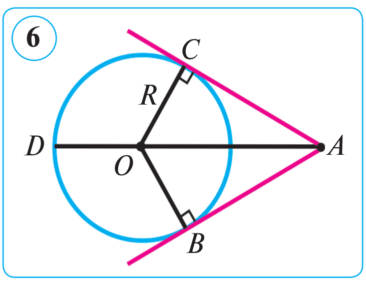
5. Tuwrı múyeshli ACB ($\angle C=90^\circ$) úshmúyeshlikte $AB=10$ cm, $\angle ABC=30^\circ$. Orayı A noqatta bolǵan sheńber ótkerilgen. Bul sheńberdiń radiusı qanday bolǵanda: 1) sheńber BC tuwrı sızıqqa urınadı; 2) BC tuwrı sızıq penenulıwma noqatqa iye bolmaydı; 3) BC tuwrı sızıq penen eki ulıwma noqatqa iye boladı?

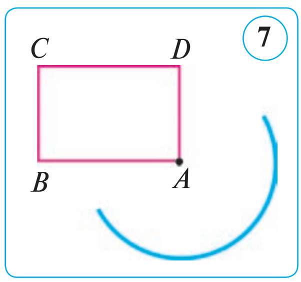
6. Sheńber sırtındaǵı bir noqattan oǵan eki urınba ótkizilse, olardıń sol noqattan urınıw noqatlarına shekemgi bolǵan aralıqlar teń boladı. Usını dálilleń. (6-súwret).

7. Eger sheńber radiusı 5 cm ge teń, sheńber orayınan tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıq: 1) 6 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm bolsa, tuwrı sızıq penen sheńber óz ara qanday jaylasqan boladı?

8. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik berilgen, onda $AB=16$ cm, $AD=12$ cm (7-súwret). AC, BC, CD hám BD tuwrı sızıqlardan qaysi biri radiusı 12 cm li A orayı sheńberge urınba boladı?







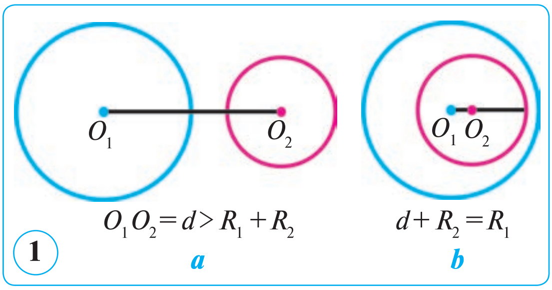
56. EKI SHEŃBERDIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ ORAYLÍQ MÚYESH HÁM DOǴANÍŃ GRADUS ÓLSHEWI

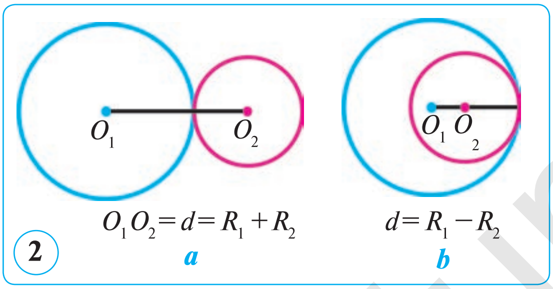
1. Eki sheńberdiń óz ara jaylasıwı.

Eki sheńber óz ara jaylasatuǵın jaǵdayların kórip shıǵamız.

1) Eki sheńber ulıwma noqatqa iye bolmaydı. Bul jaǵdayda olar sheńberden sırtta (1-*a* súwret) yaki biri ekishisiniń ishinde boladı (1-*b* súwret).

2) Eki sheńber bir ulıwma noqatqa iye boladı (2-súwret). Bul jaǵdayda, sheńberler bir-birine *urınadı,* delinedi. Biraq, bul jaǵdayda sheńberler *sırtqı* tárepten (2-*a* súwret) yaki *ishki* tárepten urınıwı múmkin (2-*b* súwret).





3) Eki sheńber eki ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin (3-súwret). Bul jaǵdayda sheńberler bir-biri menen *kesisedi*, delinedi.

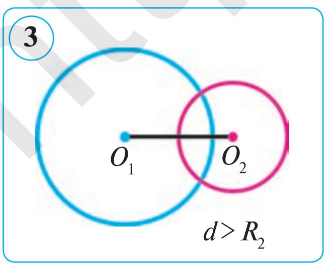
Ulıwma orayǵa iye bolǵan sheńberler *koncentraciyalıq sheńberler* delinedi (4-súwret).

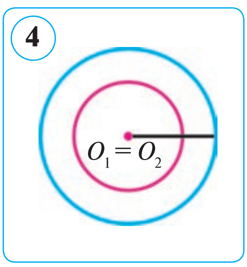
Eki sheńberdiń óz ara jaylasıwı olardıń radiusı hám oraylar arasındaǵı araqlıqqa baylanıslı boladı.

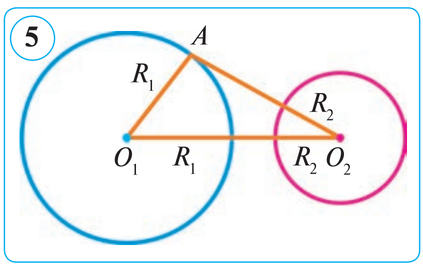
Teorema.

Eger eki sheńberdiń orayları arasındaǵı aralıq olardıń radiusları qosındısınan úlken yaki ayırmasınan kishi bolsa, bul sheńberler ulıwma noqatqa iye bolmaydı.

Dálil. O_1, O_2 oraylı hám radiusları sáykes túrde R_1, R_2 ($d = R_1 + R_2 < O_1O_2$) bolǵan ekisheńber berilgen bolsın (5-súwret). Sheńberdegi A noqattı kórip shıǵıń: $O_1A = R_1$. Ol jaǵdayda $O_2A \geq O_1O_2 - O_1A > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ hám demek, A noqat ekinshi sheńberge tiyisli emes. Demek, bul sheńberler ulıwma noqatqa iye bolmaydı.





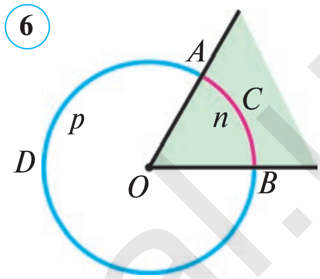


Eki sheńber bir ulıwma noqatqa iye bolǵan jaǵdaydı, sonday-aq, eki sheńber eki ulıwma noqatqa iye bolǵan jaǵdaylardı óz betińizshe kórip shıǵıń.

2. Oraylıq múyesh.

Anıqlama. *Tóbesi sheńberdiń orayında bolǵan múyesh* ***oraylıq múyesh*** *dep ataladı.*

Uluwma tóbesi sheńberdiń O orayında bolǵan eki nur OA ham OB eki oray múyeshin belgileydi olardan biri dóńes bólim menen shegaralanǵan boladı. Sheńberdiń eki A hám B noqatı onı eki doǵaǵa ajırtadı. Bul doǵalardı bir-birinen ajıratıw ushın hárbirinde birewden aralıq noqat (doǵanıń tóbesinen basqa) yamasa latınsha kishi hárip benen belgilenedi hám de ACB (yamasa AnB) hám ADB (yamasa ApB) *doǵalar* delinedi (6-súwret). Bul doǵalardı tómendegishe belgilew qabıl etilgen: $\cup ACB$ (yaki $\cup AnB$) hám $\cup ADB$ (yaki $\cup ApB$). Ayırım hallarda doǵa: aralıq noqatsız belgilenedi: $\cup AB$ (doǵanıń qaysı biri haqqında sóz etiletuǵını túsinikli bolǵanda). Eger doǵanıń tóbelerin tutastırıwshı kesindi sheńber diametri bolsa, *doǵa yarım sheńber* delinedi. 7-*b* súwrette eki yarım sheńber súwretlengen, olardıń biri bólek ajıratılıp kórsetilgen.



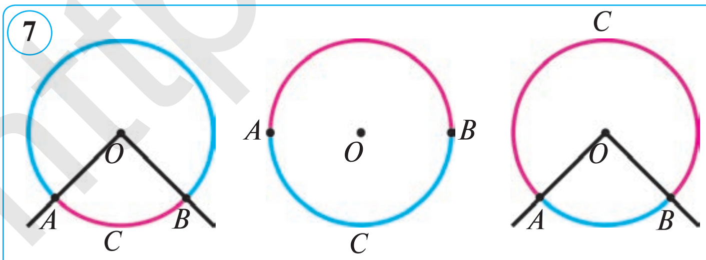
$\angle AOB$– Oraylıq múyesh

3. Doǵanıń gradus ólshewi.

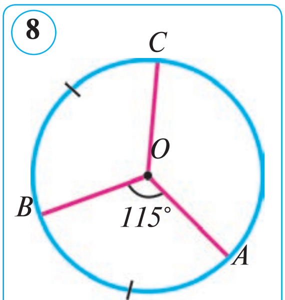
Anıqlama. ***Sheńber doǵanıń múyesh úlkenligi*** *dep sheńberdiń usı doǵaǵa sáykes oraylıq múyeshiniń úlkenligine aytıladı.*

Sheńber doǵanı graduslarda ólshew múmkin. Eger *O oraylı sheńberdiń ACB — yarım sheńberden kishi yamasa yarım sheńberge teń bolsa, bunday jaǵdayda onıń gradus ólshemi AOB oraylıq múyesh gradus ólshemine teń esaplanadı. (7-a súwret). Eger ACB doǵa yarım sheńberinen úlken bolsa, onda onıń gradus ólshemi* $360° — \angle AOB$ *ǵa teń esaplanadı* (7-*b* súwret)

Bunnan, aqırları ulıwma bolǵan sheńber eki gradus ólshemleri qosındısı 360° teńligi kelip shıǵadı.



$\cup ACB = \cup AOB$ **a** $\cup ACB = 180°$ **b** $\cup ACB = 360° - \angle AOB$ **d**



Sheńber eki doǵanıń múyesh úlkenlikleri (yaǵnıy olarǵa sáykes oraylıq múyeshler) teń bolǵanda hám tek sonda ǵana usı doǵalar teń boladı.

Másele. O noqat—sheńberdiń orayı $\angle AOB = 115^\circ$, $\cup BC = \cup AB$ (8-súwret). AOC múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. AOB múyesh sheńberdiń oraylıq múyeshi, AB doǵa bolsa yarım sheńberden kishi, sonıń ushın $\cup AB = \angle AOB = 115^\circ$. Másele shárti boyınsha, $\cup BC = \cup AB$ demek, BC doǵa 115° qa teń. $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 230^\circ > 180^\circ$, yaǵnıy ABC doǵa yarım sheńberden úlken, sonıń ushın $\angle AOC = 360^\circ - ABC = = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$. *Juwap:* $\angle AOC = 130^\circ$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Sheńber berilgen noqatta urınadı degende, neni túsinesiz?
2) Koncentraciyalıq sheńberler dep nege aytıladı?
3) Oraylıq múyesh úlkenligi degen ne? Sheńber doǵası qalay belgilenedi?
4) Sheńber doǵasınıń múyesh úlkenligi degen ne?

2. Eger eki sheńberdiń orayları arasındaǵı aralıq 2 cm, radiusları sáykes túrde: 1) 3 cm hám 5 cm; 2) 2 cm hám 5 cm bolsa, olar bir-birine salıstırǵanda óz ara qanday jaylasqan boladı?

3. Eger radiusları 4 cm hám 6 cm ge teń sheńberler: 1) sırtqı tárepten urınsa; 2) ishki tárepten urınsa, olardıń orayları arasındaǵı aralıq nege teń?

4. Sheńber orayınan ótiwshi eki tuwrı sızıq bul sheńberde neshe doǵa hám neshe oraylıq múyeshti anıqlaydı?

5. Berilgen sheńberdiń noqatınan radiusına teń eki xorda ótkizilgen. Olar neshe oraylıq múyeshti anıqlaydı.

6. Oraylıq múyeshke sáykes doǵa sheńberdiń: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ bólshegine teń. Usı oraylıq múyeshti tabıń.

7. Sheńber eki noqat penen eki doǵaǵa bólinedi. Eger: 1) olardıń birewiniń múyesh úlkenligi ekinshisiniń múyesh úlkenliginen 40° artıq bolsa; 2) bul doǵalardıń múyesh úlkenligi $2:7$ qatnasta bolsa, hárbir qaysı múyeshtiń úlkenligin tabıń.

8. A, B, C noqatlar orayı O noqatta bolǵan sheńberde jatadı. Eger $\cup ABC = 70^\circ$ bolsa, AOC múyeshin tabıń.

9. Sheńberdiń: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ bólegin payda etiwshi AB doǵaǵa sáykes keliwshi oraylıq múyeshlerdi tabıń. Bul jaǵdaylardıń hárbirinde AB doǵanıń múyesh úlkenligin belgiler járdeminde jazıń.

10. Sheńberdiń radiusı: 1) 7,8 cm; 2) 10,5 cm; 3) 0,8 dm. Sheńberdiń diametrin tabıń.

57.SHEŃBERGE ISHLEY SÍZÍLĠAN MÚYESH

Anıqlama. *Tóbesi sheńberde jatıwshı, tárepleri bolsa sol sheńberdi kesip ótıwshi múyesh* ***sheńberge ishley sızılǵan múyesh*** *delinedi.*

1-súwrette ABC múyesh sheńberge ishley sızılǵan, AnC doǵa sol múyeshtiń ishine jaylasqan. Bunday jaǵdayda, *ishley sızılǵan ABC múyesh AnC doǵaǵa tirelgen* dep te aytıladı.

Teorema.

Sheńberge ishley sızılǵan múyesh ózi tirelgen doǵanıń yarımı menen ólshenedi:

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AC.$$

Dálil. $\angle ABC$ — O oraylı sheńberdiń AC doǵaǵa tirelgen ishley sızılǵan múyeshi bolsın (2-súwret). Sheńber orayınıń sol ishley sızılǵan múyeshke salıstırǵanda jaylasıwınıń úsh jaǵdayın kórip shıǵamız.

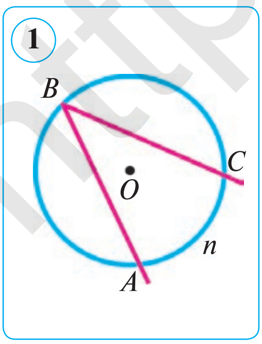
1-jaǵday. Sheńber orayı ishley sızılǵan múyeshtiń táreplerinen biri mısalı, BC tárepte jatadı (2-*a* súwret). OA radiustı ótkizemiz hám AOC oraylıq múyeshti qaraymız. Ol BOA úshmúyeshliktiń sırtqı múyeshi. Úshmúyeshliktiń sırtqı múyeshiniń qásiyeti boyınsha: $\angle AOC=\angle OBA+\angle OAB$. Biraq $\angle OBA=\angle OAB$, sebebi AOB úshmúyeshlik teń qaptallı ($OA=OB=R$). OBA hám OAB múyeshler bolsa teń qaptallı úshmúyeshliktiń ultanındaǵı múyeshler. Demek, $\angle AOC=2\angle ABC$ (1). Oraylıq múyeshtiń úlkenligi usı múyeshke sáykes doǵanıń múyesh úlkenligine teń bolıwın bilemiz (56-tema). Bul waqıtta AC doǵa yarım sheńberden kishi, sonıń ushın oraylıq múyesh qásiyeti boyınsha:

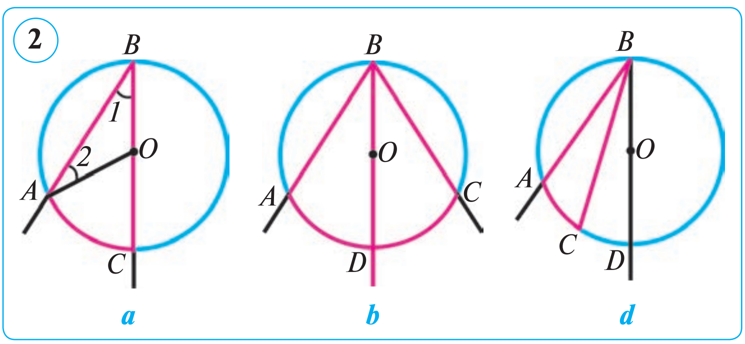
$$\angle AOC=\cup AC. \qquad (2).$$

(1) hám (2) teńliklerinen: $2\angle ABC=\cup AC$, yaǵnıy $\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AC$.

Teorema 1-jaǵday ushın dálillendi.

2-jaǵday. Sheńberdiń orayı O ishley sızılǵan múyesh tárepleri arasında jatadı. BO nurdı ótkeremiz, ol AC doǵanı qanday da bir D noqatta kesedi (2-





b súwret). D noqat AC doǵanı eki $\cup AD$ hám $\cup DC$ doǵaǵa bo‘ledi. Demek, dálillegende (1-jaǵday): $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ hám $\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$. Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qosıp tómendegilerdi payda etemiz:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

3-jaǵday. Sheńberdiń orayı O ishley sızılǵan múyeshten sırtta jatadı. Bul jaǵdaydıń dálilin 2-d súwretten paydalanıp, ózińiz óz betńizshe orınlań.

1-nátiyje. *Bir doǵaǵa tirelgen barlıq ishley sızılǵan múyeshler óz ara teń* (3-*a* súwret):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2}\cup AC.$$

2-nátiyje. *Diametrge (yarım sheńberge) tirelgen hám de ishley sızılǵan múyeshler tuwrı múyesh esaplanadı* (3-b súwret):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90°.$$

Másele. Sheńberdiń radiusına teń xorda ókizilgen. Usı xorda: 1) sheńber orayınan; 2) berilgen xorda tóbesinen parıqlı sheńberdiń qálegen noqatınan qaysı múyesh kórinedi?

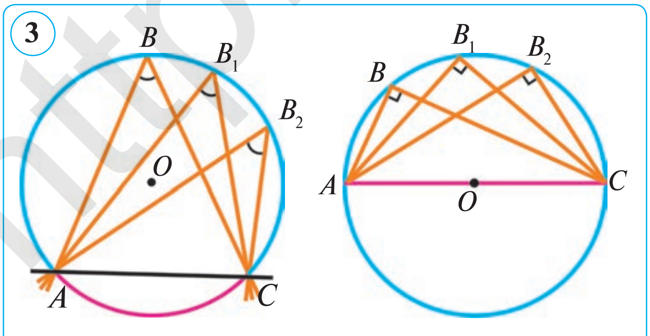
Sheshiliwi. AB — O oraylı sheńberdiń radiusına teń xorda bolsın (4-súwret). Bunda AOB úshmúyeshlik — teń tárepli, demek, oraylıq múyesh (sheńber orayınan AB xorda kórinetuǵın múyesh) 60° qa teń. A hám B noqatlardan basqa sheńberdiń qálegen C noqatınan ishley sızılǵan ACB múyesh (C noqattan AB xorda kórinetuǵın múyesh) oraylıq múyeshtiń yarımına teń, yaǵnıy 30° qa teń.

Juwap: 1) 60°; 2) 30°.

Soraw, másele hám tapsırmalar

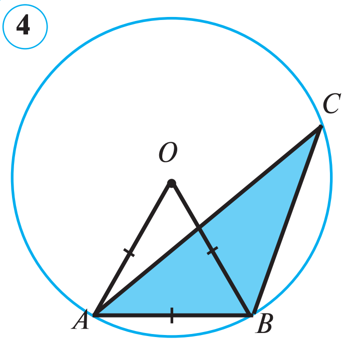
1. 1) Qanday múyesh sheńberge ishley sızılǵan múyesh delinedi?
2) Ishley sızılǵan múyesh qalay ólshenedi?
3) Yarım sheńberge tirelgen ishley sızılǵan múyesh nege teń?

3



a *b*

4



2. (*Awızeki.*) Ishley sızılğan múyesh 25° qa teń. Usı ishley múyeshke tirelgen doğanıń muğdarın tabıń.

3. AB hám BC — orayı O noqatta bolğan sheńberdiń xordaları, $\angle ABC = 30°$. Eger sheńber radiusı 10 sm ge teń bolsa, AC xordanıń uzınlığın tabıń.

4. 1) 5-súwrette O noqat — sheńber orayı, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$ nı tabıń.

Sheshiliwi. AOB múyesh berilgen sheńberdiń ... múyeshi boladı ...° ge teń. Demek, $\cup ADB = ...°$. ACB múyesh ... sızılğan múyesh boladı hám ... doğağa tireledi, sonıń ushın $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup ... = ...°$.

Juwap: $\angle ACB = ...°$.

2) 6-súwrette $\cup CAB = 130°$. $\angle CAB$ nı tabıń.

Sheshiliwi. CAB múyesh sheńberge ishki sızılğan múyesh boladı hám $\cup CDB$ doğağa tirelgen. Bunnan:

$$\cup CDB = 360° - \cup CAB = 360° - 130° = 230°,$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\cup CDB = \frac{1}{2}\,230° = 115°.$$

Juwap: $\angle CAB = 115°$.

3) 7-súwrette $\angle APE = 46°, \angle BCE = 34°$. $\angle AEP$ nı tabıń

Sheshiliwi. PAB hám BCP ishley sızılğan múyeshler BP ..., demek, $\angle PAB = \angle ... = ...$. AEP úshmúyeshlikten iye bolamız:

$$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$$

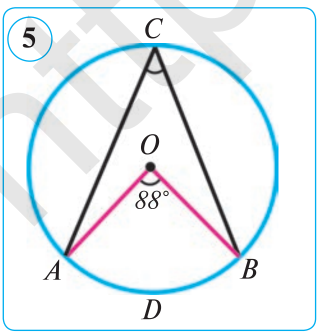
Juwap: $\angle AEP = ...$.

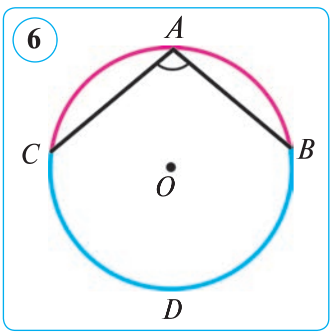
5. Sheńberde jatıwshı A, B, C noqatlar bul sheńberdi úsh doğağa bólip, olardıń gradus ólshemler qatnası 3 : 5 : 7 sıyaqlı. ABC úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

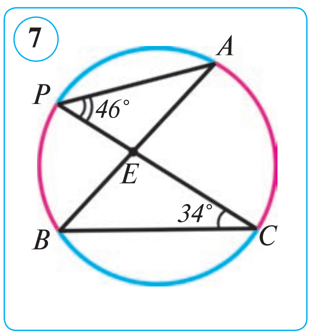
6. Xorda sheńberdi eki doğağa bóledi. Eger bul doğalar múyesh shamalarınıń qatnası: 1) 5 : 4; 2) 7 : 3 sıyaqlı bolsa, xorda sheńber noqatınan qanday múyesh astında kórinedi?

7. Sheńberge AB diametr hám AC xorda ótkizilgen. Eger AC hám CB doğalardıń gradus ólshemi 7 : 2 qatnasta bolsa, BAC múyeshti tabıń.

8. AB hám AC — sheńber xordaları, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. AC doğanıń gradus muğdarın tabıń.







58. SHEŃBERDIŃ KESIWSHILERI PAYDA ETKEN MÚYESHLER

1. Urınba menen xordadan dúzilgen múyesh.

1- teorema.

Urınba menen xordadan dúzilgen múyesh óz ishine alǵan doǵanıń yarımı menen ólshenedi.

Dálil. AB urınba hám BC xordası bolsın. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$ ekenligin dálilleymiz (1-súwret). Bunıń ushın C tóbesinen $CD \| AB$ nı ótkizsek, $\angle ABC = \angle BCD$, sebebi olar ishley almasıwshı múyeshler.

Biraq $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$ hám $CD \| AB$ bolǵanı ushın $\cup BnD = \cup BmC$ va

$\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$.

Teorema dálillendi.

1-másele. AB xorda 56° li doǵanı tartıp turadı. Usı xordanıń tóbelerinen sheńberge ótkizilgen urınbalar menen xordadan payda bolǵan múyeshlerdi tabıń.

Berilgen: $(O,\ R)$, AB – xorda, $\angle AOB = 56^\circ - AB$ xordanı tartıp turǵan oraylıq múyesh, $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (2-súwret).

Tabıw kerek: $\angle CAB$, $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

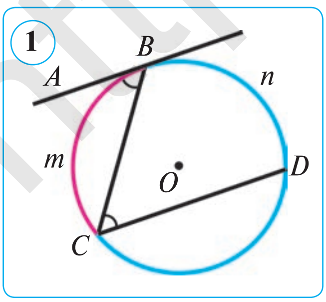
Sheshiliwi. Urınba menen xorda arasındaǵı doǵa $\cup AB = 56^\circ$ qa (1-jaǵday) yaki $\cup AnB = 360^\circ - 56^\circ = 304^\circ$ qa (2-jaǵday) boladı.

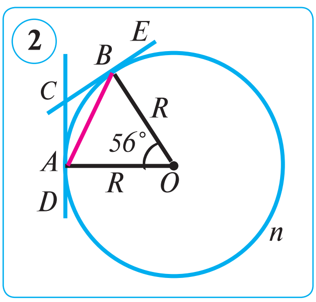
Solay etip, 1-jaǵdayda $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ$, 2-jaǵdayda $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304^\circ = 152^\circ$ qa iye bolamız.

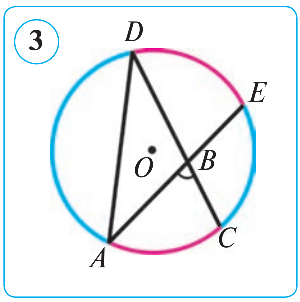
Bizge belgili, sheńber sırtındaǵı bir noqattan sheńberge ótkizilgen urınbalardıń urınıw noqatlarına shekem bolǵan kesindileri teń boladı. Sonıń ushın $\triangle ACB$ – teń qaptallı.

Demek, $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$ va $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.

Juwap: $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$, $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.







2. Eki xordanıń kesilisiwinen payda bolǵan múyeshler.

2- teorema.

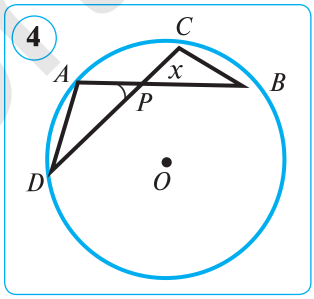
Qálegen eki xordanıń kesilisiwinen payda bolǵan hárqaysı vertikal múyesh, olardıń tárepleri tirelgen doǵalar qosındısınıń yarımına teń.

Dálil. $\angle ABC-CD$ hám AE xordalardıń kesilisiwinen payda bolǵan múyeshlerden birewi bolsın (3-súwret).

$\angle ABC=\frac{1}{2}(\cup AC+\cup DE)$ ekenin dálilleymiz. Bunıń ushın A hám D noqatların birlestiremiz, bul halda $\angle ABC \triangle ABD$ ǵa qarata sırtqı múyesh boladı. Demek, $\angle ABC=\angle ADC+\angle DAE$. Lekin $\angle ADC=\frac{1}{2}\cup AC$ hám $\angle DAE=\frac{1}{2}\cup DE$. Sonıń ushın

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AC+\frac{1}{2}\cup DE=\frac{1}{2}(\cup AC+\cup DE).$$

$\angle ABD=\angle CBE=\frac{1}{2}(\cup AD+\cup EC)$ ekenligin tap joqarıdaǵıday dállillenedi. Bunı óz betińizshe dálilleń.



2-másele. AB hám CD — bir sheńberdiń xordaları, P — olardıń kesilisiw noqatı. Eger BPD múyesh BPC múyeshlerden 4 márte úlken, CDA múyesh bolsa BPC dan 26° qa úlken bolsa, CBP múyeshti tabıń.

Berilgen: $\angle BPD=4\angle BPC$, $\angle CDA=\angle BPC+26^\circ$ (4-súwret).

Tabıw kerek: $\angle CBP$.

Sheshlilwi. $\angle BPD+\angle BPC=180^\circ$,

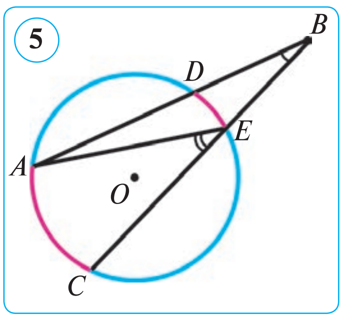
$4\angle BPC+\angle BPC=180^\circ$, bunnan $5\angle BPC=180^\circ$ hám nihoyat, $\angle BPC=36^\circ$. $\angle CDA=\angle BPC+26^\circ=36^\circ+26^\circ=62^\circ$. $\angle CBA=\angle CDA=62^\circ$, sebebi olar bir $\cup AC$ ge tirelgen ishki sızılǵan múyeshler. Bunnan $\angle CBP=\angle CBA=62^\circ$.

Juwap: $\angle CBP=62^\circ$.

3. Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki kesiliwshi arasındaǵı múyesh.

3- teorema.

Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki kesiwshi arasındaǵı múyesh (ABC) kesiwshiler arasındaǵı doǵalar (AC hám DE) ayırmasınıń yarımına teń.



Dálil. B — sheńber sırtındaǵı noqat, BA hám BC kesiwshler bolsın. $\angle B=\frac{1}{2}(\cup AC-\cup DE)$ bolǵanın dálilleymiz. Bunıń ushın A hám E noqatların birlestiremiz (5-súwret).

$\angle AEC$ $\triangle AEB$ ǵa sırtqı múyesh boladı. Demek, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, bunnan $\angle B = \angle AEC - DAE$. Biraq $\angle AEC = 0{,}5 \cup AC$ hám $\angle DAE = 0{,}5 \cup DE$. Bulardı óz orınlarına qoysaq:

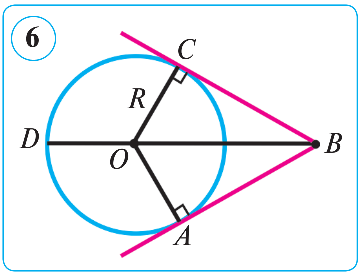
$$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC - \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE).$$

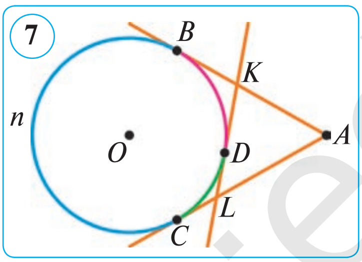
Demek, $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$. Teorema dálillendi.

4. Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan ótkizilgen eki urınbanıń qásiyeti.

4-teorema.

Sheńberdiń sırtındaǵı bir noqattan oǵan eki urınba ótkizilse, olardıń sol noqattan urınıw noqatlarına shekem bolǵan kesindileri teń hám sheńberdiń orayı olar arasındaǵı múyesh bissektrisasında jatadı, bul múyesh 180° penen urınbalar tirelgen doǵa ayırmasına teń.





Dálil. BC hám BA tuwrı sızıqlar sheńberge C hám A noqatlardan ótiwshi urınbalar, BD bolsa ABC múyesh bissektrisası bolsın. $AB = CB$ hám O oraydıń BD da jatıwın hám de $\angle B = 180^\circ - \cup AC$ ekenin kórsetemiz (6-súwret).

OA hám OC radiuslar ótkizilse, $OA \perp BA$ hám $OC \perp BC$ bolǵanı ushın: $\triangle AOB$ hám $\triangle COB$ – tuwrı múyeshli. $\triangle AOB = \triangle COB$, sebebi BO gipotenuza ulıwma, $OA = OC = R$. Úshmúyeshliklerdiń teńliginen: $AB = BC$. Endi $OC = OA = R$ hám $OA \perp BA$, $AB = BC$ hám $OC \perp BC$ bolǵanı ushın O oray turaqlı BD bissektrisada jatadı. Sheńber sırtındaǵıbir noqattan ótkizilgen eki kesiwshi arasındaǵı múyeshti ólshew haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp:

$$\angle B = 0{,}5(\cup ADC - \cup AC) =$$
$$= 0{,}5(360^\circ - \cup AC - \cup CA) = 180^\circ - \cup AC.$$

Demek, $\angle B = 180^\circ - \cup AC$ boladı. Teorema dálillendi.

3-másele. Sheńberdiń A, B hám C noqatları onı $11:3:4$ qatnastaǵı doǵalarǵa bóledi. A, B hám C noqatlardan urınbalar ótkerilip, bir-biri menen kesiskenshe dawam ettirilgen. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11:3:4$, urınıw noqatlarına urınbalar ótkeriwden payda bolǵan úshmúyeshlik AKL bolsın (7-súwret). A, AKL hám ALK múyeshlerdi tabamız:

$$\cup BnC = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 11 = 220^\circ; \quad \cup CD = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 3 = 60^\circ;$$

$\cup DB = \dfrac{360°}{11+3+4} \cdot 4 = 80°;$

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60° + 80° = 140°;$

$\angle A = 180° - \cup CDB = 180° - 140° = 40°,$

$\angle BKD = 180° - \cup DB = 180° - 80° = 100°,$

$\angle AKL = 180° - \angle BKD = 180° - 100° = 80°,$

$\angle ALK = 180° - (\angle A + \angle AKL) = 180° - (40° + 80°) = 180° - 120° = 60°.$

Juwabı: $\angle A = 40°$, $\angle AKL = 80°$, $\angle ALK = 60°$.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Urınba menen xordadan dúzilgen; eki xordanıń kesisiwinen payda bolǵan; eki kesisiwshi xorda arasındaǵı múyesh qalay ólshenedi?
2) Bir noqattan ótkerilgen eki urınba qanday qásiyetke iye?

2. Sheńberdiń radiusına teń AB xorda A noqatta ótkizilgen urınba menen qanday múyeshler payda etedi?

3. Sheńberdi kesiwshi eki xorda arasındaǵı múyeshlerden biri 70° qa teń. Usı múyeshke qońsılas bolǵan múyeshlerdiń qosındısın tabıń.

4. 8-súwrette súwretlengen x belgisiz muǵdardı tabıń.

5. Eki radius arasındaǵı múyesh 150°qa teń. Bul radiuslardıń aqırlarınan sheńberge ótkizilgen urınbalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

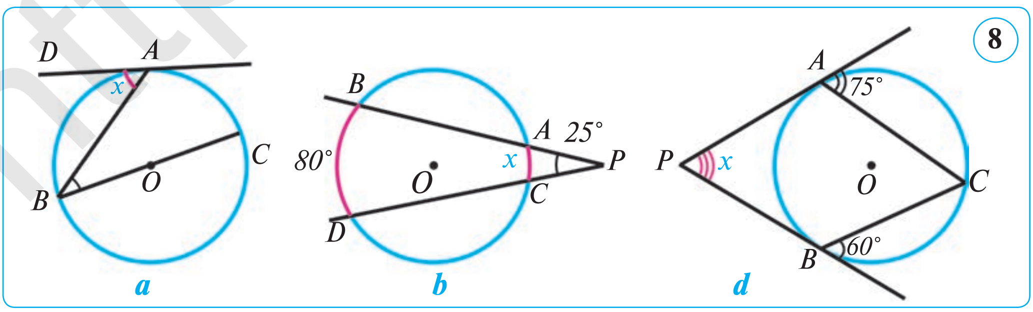
6. B noqattan sheńberge ótkizilgen BA hám BC urınbalar sheńberdi urınıw noqatlarında: 1) 5:4; 2) 12:6; 3) 9:6; 4) 13:7; 5) 2:3 qatnasta eki doǵaǵa bóledi. ABC múyeshiniń ólshemin tabıń.

7. Sheńberdi 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 qatnasta bóliwshi xordanıń tóbelerinen eki urınba ótkizilgen. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

8. Sheńberdiń sırtındaǵı noqattan ótkerilgen eki urınbanıń urınıw noqatları sheńberdi: 1) 1:9; 2) 3:15; 3) 7:11; 4) 3: 7 qatnastaǵı eki doǵaǵa ajıratadı. Urınbalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

9. 1) 52°; 2) 74°; 3) 104° lı oraylıq múyesh payda etken eki radiustıń tóbesine ótkizilgen urınbalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

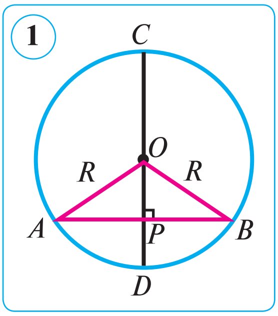
10. Sheńberdiń radiusı diametrinen 40 mm qısqa. Sheńberdiń diametrin tabıń.



59. SHEŃBER XORDASÍ HÁM DIAMETRINIŃ QÁSIYETLERI

1-teorema.

Xordaǵa perpendikulyar diametr usı xordanı hám oǵan tirelgen doǵanı teń ekige bóledi.



Dálil. Orayı O noqatta hám radiusı R bolǵan sheńber, AB xordaǵa perpendikulyar CD diametr, CD hám AB lardıń kesisiw noqatı P berilgen bolsın (1-súwret). $AP=PB$ hám $\cup AD=\cup DB$ ekenligin dálilleymiz. Eger AB xorda diametr bolsa, P noqat O noqat penen betpe-bet túsedi hám usı noqatta AB xorda hámde onı tartıp turǵan yarım sheńberdiń ADB doǵası teń ekige bólinedi, yaǵnıy tastıyıqlaw orınlı boladı. AB xorda diametr bolmasın. OA hám OB radiuslardı ótkizemiz. Payda bolǵan AOB úshmúyeshlik — teń qaptallı úshmúyeshlik, sebebi $OA=OB=R$. OP − teń qaptallı úshmúyeshlik AB tárepine túsirilgen biyiklik teń qaptallı úshmúyeshliktiń qásiyeti boyınsha ol ultanǵa ótkizilgen mediana hám O tóbesindegi múyeshtiń bissektrisası boladı. Xordanıń ortası arqalı ótken diametr bolsa AB xordanı teń ekige bóledi, yaǵnıy $AP=PB$. $OP-AOB$ múyeshtiń bissektrisası ekenliginen $\angle AOP=\angle BOP$ nı payda etemiz. Bul múyeshler tirelgen doǵalar bolǵanı ushın $\cup AD=\cup DB$. Teorema dálillendi.

2-teorema.

Sheńber xordası onıń diametrinen úlken bolmaydı.

Dálil. OPB úshmúyeshliktiń — tuwrı múyeshli (1-súwretke q.). Ol jaǵdayda, bul úshmúyeshlikte OB — gipotenuza, PB — katet. Bizge málim, katet gipotenuzadan úlken, yaǵnıy $PB \leq OB$. Bunnan, $2PB \leq 2\ OB$ hám de $2PB=AB$ hám $2OB=2R=d$. Demek, $AB \leq d$ eken.

1-nátiyje. *Xordanıń ortasınan ótiwshi diametr sol xordaǵa perpendikulyar.*

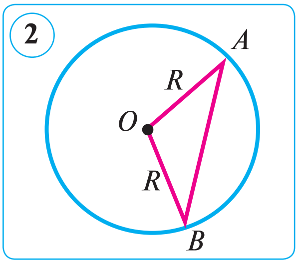
2-nátiyje. *Xordanıń orta perpendikulyarları sheńberdiń diametri boladı.*

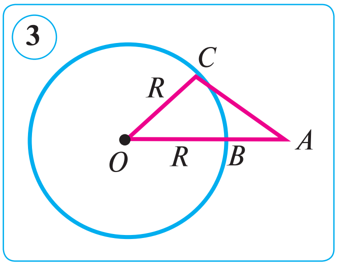
Bul nátiyjelerdi dálillew ózińizge tapsırıladı.

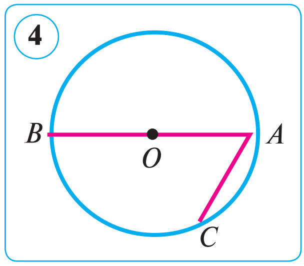
1-másele. Diametr eń úlken xorda ekenin dálilleń.

Sheshiliwi. O oraylı hám R radiuslı sheńber hám de diametrden parıqlı qálegen AB xorda berilgen bolsın (2-súwret). OA hám OB kesindilerin ótkizemiz. AOB úshmúyeshlikte AB tárep qalǵan eki tárep qosındısınan kishi, yaǵnıy $AB<OA+OB=R+R=2R$. Demek, AB xorda diametrden kishi boladı.

2-másele. A noqat R radiuslı sheńberden sırtta hám bul sheńberdiń O orayınan d aralıqta jaylasqan. A noqattan usı sheńberdegi noqatqa shekem bolǵan eń qısqa aralıq qanshaǵa teń?







Sheshiliwi. B — sheńberdiń OA kesindi menen kesilisiwinen noqatı bolsın (3-súwret). AB aralıq A noqattan sheńberdegi noqatlarǵa shekem múmkin bolǵan aralıqlar ishinde eń kishisi ekenin kórsetemiz. Haqıyqattan da, sheńberdiń qálegen C noqatı ushın $AB+BO<AC+CO$ teńsizlik orınlanadı. $BO=CO=R$ di itibarǵa alıp, aqırı teńsizlikten $AB<AC$ teńsizlikti payda etemiz. $AO=d$ hám $BO=R$ di esapqa alsaq, izlenip atırǵan eń qısqa aralıq AB kesindiniń uzınlıǵına, yaǵnıy $d-R$ ǵa teń ekeni kelip shıǵadı.

Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Xordaǵa perpendikulyar diametr qanday qásiyetke iye?
2) Sheńber xorda onıń diametrinen úlken bolıwı múmkin be?
3) Xordanıń orta perpendikulyar diametr bolmawı múmkin be?

2. Sheńber sızıń hám onıń bir-birine perpendikulyar eki AB hám CD diametrlerin ótkiziń. A, B, C hám D noqatlar ajıratqan sheńber doǵalarınıń gradus ólshemin tabıń.

3. 8 cm li xorda sheńberden 90° li doǵa ajıratadı. Sheńber orayınan xordaǵa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

4. Berilgen sheńberdiń noqatınan radiusına teń eki xorda ótkerilgen. Olar arasındaǵı múyeshti tabıń.

5. Sheńberdiń berilgen noqatınan diametr hám radiusqa teń xorda ótkizilgen. Diametr menen xorda arasındaǵı múyeshti tabıń (4-súwret).

6. Sheńberde onnan 90° lı doǵa ajıratıwshı eki parallel xorda ótkerilgen. Olardan biriniń uzınlıǵı 8 cm. Xordalar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

7. Sheńberdiń orayınan basqa noqatta kesisiwshi eki xorda kesilisiw noqatında teń ekige bólinbeytuǵının dalilleń.

8. Sheńberdegi A noqattan sheńberdiń radiusına teń eki xorda AB hám AC ótkerilgen. B hám C noqatlar tuwrı sızıq penen tutastırılǵan. Sheńberdiń radiusı 12 cm. Sheńberdıń orayınan BC xordaǵa shekemgi aralıqtı tabıń.

9. Sheńberde onnan 90° lı doǵa ajıratıwshı eki parallel xorda ótkerilgen. Olardan biriniń uzınlıǵı 10 cm. Xordalar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

10. Sheńberdiń radiusı 13 cm ge teń. Usı sheńberde 10 cm ge teń xorda ótkizilgen. Sheńberdiń orayınan xordaǵa shekemgi aralıqtı tabıń.

11. AB kesindi — orayı O noqatta bolǵan sheńberdiń diametri, AC hám CB — usı sheńberdiń teń xordaları. COB múyeshti tabıń.

60. ÁMELIY JUMÍS HÁM QOLLANÍW

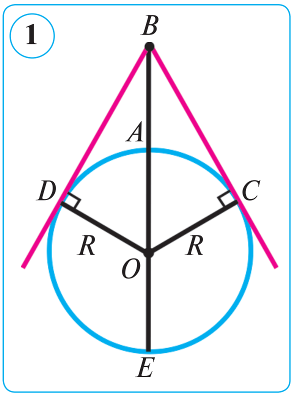
ÁMELIY KOMPETENCIYANÍ RAWAJLANDÍRÍWSHÍ QOSÍMSHA MATERIALLAR

GORIZONTTÍŃ UZAQLÍĞÍ

1-másele. (*Tayanısh másele.*) Kesiwshi menen onıń sırtqı bólimi kóbeymesi urınba kvadratına teń. Sonı dálilleń.

Sheshiliwi O oraylı sheńber sırtındağı alıngan B noqattan BE kesiwshi BC hám BD urınbalar ótkizilgen bolsın (1-súwret).

$BC^2 = BE \cdot BA$ ekenin dálilleymiz. Bunıń ushın tuwrı múyeshli BOC ($\angle C = 90°$) úshmúyeshlikti kórip shıǵamız. Pifagor teoreması boyınsha:



$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

Bul teńlikke $BO = BA + AO = BA + R$ hám $OC = R$ belgilewlerdi qoyıp, payda bolǵan teńlikti figura almastıramız:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Usını dálillew talap etilgen edi.

1. Gorizont haqqında túsinik.

Uzaqtı kóriw ushın hesh nárse kesent etpeytuǵın ashıq jerde turıp alısqa qaraǵanıńızda siz ózińizdi jer beti (teńiz beti) aspan menen tutasıp ketkendey hám onnan keyin hesh zat joqtay kórinetuǵın (sheńber) dóńgelek orayında turǵanday sezesiz. Bul — gorizont. Gorizont sızıǵına jetip bolmaydı: siz oǵan jaqınlasqan sayın, ol sizden uzaqlasa beredi. Oǵan barıp bolmaydı, biraq, soǵan qaramastan ol haqıyqattan bar. Hárbir baqlaw noqatı ushın usı jerden turıp qaraǵanda jer betin kóriw múmkin bolǵan belgili shegarası boladı, hám de shegaranıń uzaqlılǵın esaplaw qıyın emes. Gorizontqa baylanıslı bolǵan geometriyalıq qatnaslardı túsiniw ushın jer sharınıń belgili bólimin súwretleytuǵın 1-súwretke (yaki 2-súwretke) múrájáát etemiz. Jerden BA biyikliktegi B noqatta baqlawshınıń kózi jaylasadı. Sol baqlawshı bul jerde óziniń qorshaǵan ortalıqtı qanday uzaqlıqqa shekem kóre aladı? Qaraw nurı Jer betine urınatuǵın C hám D (1-súwret) yaki C (2-súwret) noqatlarǵa shekem ekeni anıq: bunnan arıda Jer qaraw nurınan tómende boladı. Bul noqatlar (hám DAC doǵada jatqan basqa noqatlar da) jer beti kórinetuǵın bóliminiń shegarasın súwretleydi, yaǵnıy gorizont sızıǵın payda etedi. Baqlawshıǵa mine usı jerde aspan jerge túskendey bolıp kórinedi, sebebi baqlawshı bul noqatlarda bir waqıttıń ózinde hám aspandı, hám jerdegi zatlardı kóredi.

2. Gorizonttıń uzaqlıǵı.

Gorizont sızıǵı baqlawshıdan qanday uzaqlıqta boladı? Basqasha aytqanda, tegiz jerde biz orayında ózimizdi kórgen sheńber radiusınıń shaması qansha? Baqlawshınıń jer betinen kóterilgen biyikligi belgili bolsa, gorizonttıń uzaqlıǵı qalay esaplanadı?

Másele baqlawshınıń kózinen jer betine ótkerilgen urınba (2-súwret) BC kesindiniń uzınlıǵın esaplawǵa keltiriledi. 1-máseleden belgili, urınbanıń kvadratı kesiwshiniń sırtqı kesindisi $BA=h$ penen kesiwshiniń barlıq uzınlıǵı, yaǵnıy $BE=h+2R$ diń kóbeymesine teń: $d^2=(h+2R)\cdot h$, bunda R — Jerdiń radiusı, $BC=d$ — baqlawshıdan kórinetuǵın eń uzaq aralıq. Baqlawshı kóziniń jerden kóteriliwi Jer sharınıń diametrine ($2R$ ge) salıstırmalı júdá kishi, máselen, samolyottıń eń biyik kóteriliwi Jer sharı diametriniń shama menen 0,001 úlesin ǵana quraydı, ol jaǵdayda $2R+h\approx 2R$ dep alıwǵa boladı, onda formula jáne de ápiwayılasadı:

$$d^2 \approx 2Rh.$$

Demek, gorizonttıń uzaqlıǵın júdá ápiwayı formula boyınsha esaplawǵa boladı:

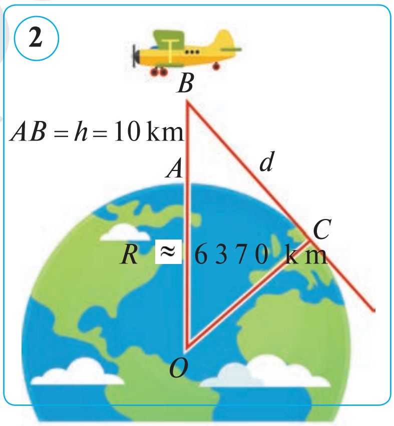
$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

bunda: R—Jer sharınıń radiusı (shama menen 6400 km yaki anıǵıraǵı 6371 km), h—jer betinen baqlawshı kóterilgen biyiklik, $\sqrt{6400}=80$, onda formula tómendegishe kórinisti aladı:

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h},$$

bunda h álbette kilometrdiń bóleklerinde ańlatılıwı kerek.

2-másele. Jerden 10 km biyiklikte ushıp baratırǵan samolyottan qansha uzaqlıqtaǵı aralıqtı kóriw múmkin? (Jerdiń radiusı sha-ma menen 6370 km.)



Sheshiliw. $OA=R\approx 6370$ km, $AB=h=10$ km. $BC=d$ ni tabamız (2-súwret). Kesiwshi menen onıń sırtqı bólimi kóbeymesi urınbanıń kvadratına teń ekenin bilesiz, yaǵnıy

$$d^2=(h+2R)\cdot h \quad \text{yaki}$$

$$d^2=(10+2\cdot 6370)\cdot 10=127\,500, \text{ bunnan:}$$

$$d=\sqrt{127500}=\sqrt{51\cdot 2500}=50\sqrt{51}\approx$$

$$\approx 50\cdot 7{,}141=357{,}05\approx 360 \text{ (km)}.$$

Juwabı: ≈ 360 km.

3-másele. Jerden 4 km biyiklikke kóte-rilgen hawa sharınan qansha uzaqlıqtaǵı aralıq kórinedi? Jerdiń radiusı shama menen 6370 km. *Juwabı:* $\approx$ 225,8 km.

4-másele. Kavkazdaǵı Elburs shoqqısı teńiz betinen $\approx$5600 m (anıǵı 5642 m) bálentlikte jaylasqan. Usı shıqqıdan qanday uzalıqtaǵı kóriw múmkin? Jerdiń radiusı shama menen 6370 km. *Juwabı:* $\approx$ 270 km.

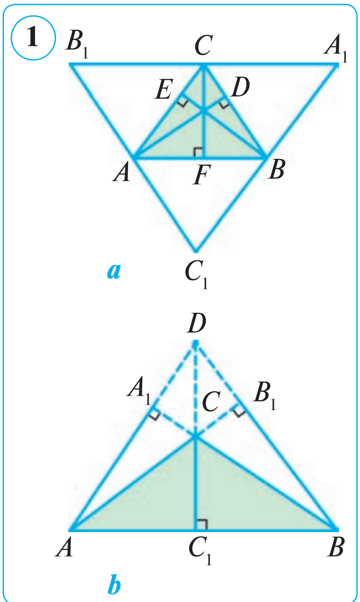
Eskertiw! *Joqarıda sheshilgen máselelerde gorizonttıń uzaqlıǵına tásir etetuǵın fizikalıq faktorlardı esapqa almadıq Gorizonttıń uzaqlıǵı kóplegen faktorlarǵa baylanıslı jaǵdayda bir qansha artıwı yaki kemeyiwi múmkin.*

ÚSHMÚYESHLIKTIŃ ÁJAYÍP NOQATLARÍ

Úshmúyeshliktiń tórt ájayıp noqatın kórip shıǵamız.

1. Úshmúyeshlik biyiklikleriniń kesilisiw noqatı.

1-teorema. **Úshmúyeshliktiń biyiklikleri (yaki olardıń dawamı) bir noqatta kesisedi.**

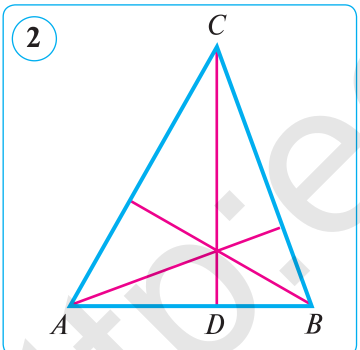


Dálil. AD, BF hám CE—ABC úshmúyeshliktiń biyiklikleri (1-*a* súwret). Úshmúyeshliktiń tóbeleri arqalı qarama-qarsı jatqan tárepleri parallel etip tuwrı sızıqlar ótkerip, nátiyjede tárepleri ABC úshmúyeshliktiń biyiklerine perpendilulyar bolǵan jańa $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti payda etemiz. Sızıw boyınsha, C_1BCA hám B_1ABC tórtmúyeshlikler–parallelogramm, bunnan $C_1A=BC$ hám $BC=AB_1$ ekeni kelip shıǵadı. Demek, A noqat — B_1C_1 kesindiniń ortası. Tap sonday, B noqat — A_1C_1 nıń ortası, C bolsa A_1B_1 dıń ortası ekeni dálillenedi.

Solay etip, AD, BF hám CE biyikliker $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliktiń orta perpendikulyarında jatadı. Demek, olar bir noqatta kesisedi. Úshmúyeshliktiń biyiklikleri kesispewi de múmkinligin belgilep ótemiz. Súyir múyeshli úshmúyeshlik biyiklikleri olardıń dawamında bir noqatta kesisedi, biraq biyikliklerdiń ózi kesispeydi (1-*b* súwret).

Úshmúyeshlik biyiklikleri (yaki olardıń dawamı)nıń kesisiw noqatı onıń orta orayı da delinedi.

Másele. Úshmúyeshlik tárepl erinen qaysı biri orta orayǵa jaqın jaylasqan?

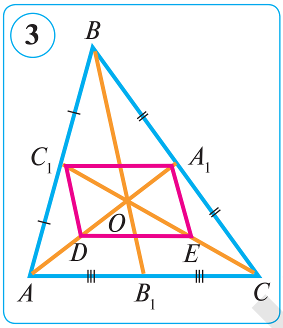


Sheshiliwi. ABC úshmúyeshlikte $AC>BC$ bolsın (2-súwret). Úshmúyeshliktiń CD biyikligi ushın $AD>BD$ teńsizlik hám demek, $\angle ACD>\angle BCD$ teńsizlik orınlanıwınan paydalanamız. Bul biyiklik noqatları usı tóbeden shıǵıwshı tárepl erden eń kishisine jaqın jaylasqanlıǵın bildiredi. Demek, úshmúyeshliktiń orta orayı kishi tárepke jaqın jaylasadı.

2. Úshmúyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı.

2-teorema. **Úshmúyeshlik medianaları bir noqatta kesisedi hám bul noqatta tóbesinen baslap esaplaǵanda 2 : 1 qatnasta boladı.**

Dálil. ABC úshmúyeshlikte AA_1, BB_1 hám CC_1 medianalar ótkerilgen bolsın (3-súwret). Olar qandayda bir O noqatta kesilsiwin hám de $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ bolıwın dálilleymiz.



O — AA_1 hám CC_1 medianalarınıń kesisiw noqatı, D hám E sáykes túrde AO hám CO kesindilerdiń ortası bolsın. C_1A_1 kesindi ABC úshmúyeshliktiń orta sızıǵı hám úshmúyeshlik orta sızıǵınıń qásiyeti boyınsha: $C_1A_1 \| AC$, $C_1A_1=0{,}5AC$. Bunnan basqa, DE—AOC úshmúyeshliktiń orta sızıǵı hám sol qásiyet boyınsha: $DE \| AC$, $DE=0{,}5AC$. Demek, DC_1A_1E tórtmúyeshliktiń eki tárepi parallel hám teń. Solay etip, DC_1A_1E — parallelogramm, onıń DA_1 hám C_1E diagonalları kesisiw noqatında teń ekige bólinedi. Demek, $AD=DO=OA_1$, $CE=EO=OC_1$, yaǵnıy AA_1 hám CC_1 medianalar O noqatta $2:1$ qatnasta bólinedi.

Tap sonda-aq, úshinshi BB_1 mediana — AA_1 hám CC_1 medianalarınıń hárbiri menen kesisiw noqatında $2:1$ qatnasta bóliniwi dálillendi. Hárbir mediana ushın bunday bóliniw birden-bir demek, úsh mediana bir noqatta kesiser eken.

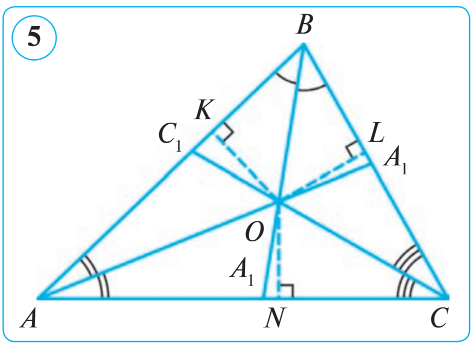
Úshmúyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı *sentroid* yaki *awırlıq orayı* da delinedi. Bunday atalıwshı tómendegi tájiriybe tekserip kóriń: karton qaǵazdan qálegen úshmúyeshlik qırqıp alıń hám onıń medianaların ótkeriń, keyin iyne yaki ushı ushqır etip shıǵarılǵan qálem ushın medianalarınıń kesisiw noqatına qoyıp, teń salmaqlıqta uslawǵa háreket etiń (4-súwret).

3. Úshmúyeshlik bissektrisalarınıń kesisiw noqatı.

3-teorema.

Úshmúyeshliktiń úsh bissektrisası bir noqatta kesisedi.

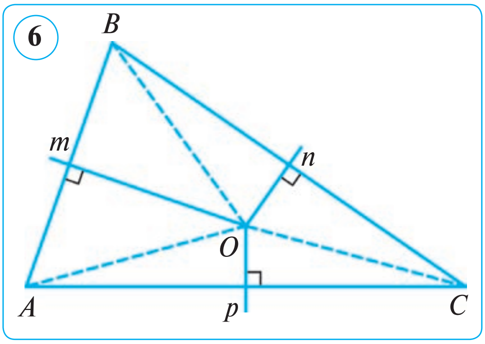
Dálil. ABC úshmúyeshliktiń AA_1 hám BB_1 bissektrisaları kesisken noqatın O menen belgileymiz. Ol noqattan sáykes túrde AB, BC hám CA tuwrı sızıqlarǵa OK, OL hám OM perpendikulyarın ótkizemiz (5-súwret). Bizge belgili múyesh bissektrisasınıń qálegen noqatınan múyesh táreplerine shekem bolǵan aralıqlar teń. Usıǵan tiykarlanıp, $OK=OK$ hám $OK=OL$. Sonıń ushın $ON=OL$, yaǵnıy O noqat ACB múyeshtiń táreplerinen teń uzaqlasqan boladı hám demek, usı múyeshtiń CC_1 bissektrisasında jatadı. Bunnan, ABC úshmúyeshliktiń úsh bissektrisası O noqatta kesisiwi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.



4. Úshmúyeshlik orta perpendikulyardıń kesisiw noqatı.

4- teorema.

Úshmúyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarlı bir noqatta kesisedi.



Dálil. $\triangle ABC$ berilgen (6-súwret). Onıń AB hám BC táreplerine m hám n orta perpendikulyarlar ótkizemiz. Olar qandayda bir O noqatta kesisedi (kesisiwshi tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar tuwrı sızıqlar kesisedi). Bizge belgili, kesindi orta perpendikulyardıń qálegen noqatınan kesindi ultanlarına shekem bolǵan aralıqlar teń. Usıǵan baylanıslı, $OA=OB$ (1) hám $OB=OC$ (2) boladı. (1) hám (2) teńliklerden tabamız: $OA=OC$. Demek, AC táreptiń orta perpendikulyarı p hám O noqattan ótedi. Solay etip, O noqat $\triangle ABC$ úshmúyeshliktiń úsh tóbesinen teń uzaqlasqan boladı: $OA=OB=OC$. Bunnan, $\triangle ABC$ úshmúyeshliktiń táreplerine ótkerilgen úsh m, n hám p orta perpendikulyarı O noqatta kesiliwi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

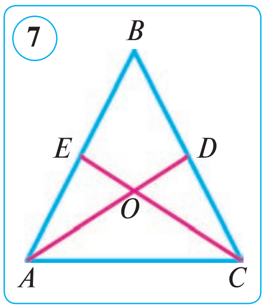
Soraw, másele hám tapsırmalar

1. 1) Bárháma úshmúyeshliktiń biyiklikleri kesisedi me?

? 2) Úshmúyeshliktiń neshe ájayıp noqatın bilesiz? Olardı aytıń.

2. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń ájayıp noqatları qalay jaylasqan boladı?

3. Eger úshmúyeshlikte eki mediana teń bolsa, ol jaǵdayda ol teń qaptallı boladı. Sonı dálilleń.



Sheshiliwi. ABC úshmúyeshlikte AD hám CE medianalar teń hám de O noqatta kesissin (7-súwret). AOE hám COD úshmúyeshliklerdi kórip shıǵamız. O noqat teń AD hám CE medianalardıń há birin $2:1$ qatnasta boladı. Sonıń ushın, $AO=CO$, $EO=DO$ boladı. Bunnan basqa, vertikal múyeshler bolǵanı ushın: $\angle AOE=\angle COD$. Demek, úshmúyeshlikler teńliginiń birinshi belgisi boyınsha: $\triangle AOE=\triangle COD$. Bunnan, $AE=CD$ ekeni kelip shıǵadı.

Bul kesindiler mediananıń anıqlaması boyınsha, AB hám CB tárepleriniń yarımına teń. Demek, $AB=CB$, yaǵnıy ABC úshmúyeshlik teń qaptallı eken. Sonı dálillew talap etilgen edi.

4. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tórt ájayıp noqatı bir tuwrı sızıqta jatıwın dálilleń. Ol qaysı tuwrı sızıq boladı?

5. Úshmúyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı orta oray menen betpe-bet túsedi. Berilgen úshmúyeshlik teń qaptallı ekenin dálilleń.

6. Úshmúyeshliktiń tóbesi biyiklikleri keskin noqatı bolıwı múmkin be?

7. Úshmúyeshlik medianalarınıń kesisiw noqatı medianalardan biriniń ayırması 3 cm ge teń bóleklerge bóledi Bul mediana uzınlıǵın tabıń.

61–62. 5-BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. AB – O oraylı sheńberdiń diametri. Eger $OA=OC=AC$ bolsa, BCO múyeshti tabıń

2. 1) Sheńber sırtında berilgen noqattan sheńber noqatlarına shekem bolǵan eń úlken hám eń kishi aralıqlar sáykes túrde 50 cm hám 20 cm ge teń. berilgen sheńberdiń radiusın tabıń.

2) Sheńber orayınan B noqatına shekem 3 cm ge radius 10 cm ge teń. B noqattan sheńberge shekem bolǵan eń kishi hám eń úlken aralıqtı tabıń.

3. AB hám AC tuwrı sızıqlar O oraylı sheńberge B hám C noqatlarda urınadı. Eger $\angle OAB = 30^\circ$ hám $AB = 5$ cm bolsa, BC nı tabıń.

4. Sheńber 11 : 16 : 9 qatnasta úsh doǵaǵa bólingen hám bóliniw noqatları tutastırılǵan. Payda bolǵan úshmúyeshlik múyeshleriniń kólemin tabıń.

5-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. Sheńber orayınan B noqatına shekem aralıq 5 cm ge, radius 12 cm ge teń. B noqattan sheńberge shekem bolǵan eń kishi hám eń úlken aralıqtı tabıń.
A) 7 cm, 17 cm; B) 7 cm, 12 cm; D) 5 cm, 7 cm; E) 7 cm, 24 cm.

2. Sheńber sırtında berilgen noqattan sheńber noqatlarına shekem bolǵan eń úlken hám eń kishi aralıqlar sáykes túrde 30 cm hám 10 cm ge teń. Berilgen sheńberdiń radiusın tabıń.
A) 20 cm; B) 10 cm; D) 15 cm; E) 5 cm.

3. AB – O oraylı sheńberdiń diametri. Eger $OA=OC=BC$ bolsa, CAO múyeshti tabıń.
A) 60°; B) 30°; D) 90°; E) 120°.

4. Radiusı R ge teń bolǵan sheńberdegi noqattan uzınlıqları R ge teń bolǵan eki xorda ótkizildi. Xordalar arasındaǵı múyeshti tabıń.
A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

5. Sheńberdi kesiwshi eki xorda arasındaǵı múyeshlerden biri 80° qa teń. Usı múyeshke qońsı bolǵan múyeshlerdiń qosındısın tabıń.
A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

6. Sheńberdiń sırtındaǵı noqattan sheńberge eki urınba ótkizilgen. Eger urınbalar arasındaǵı múyesh 72° bolsa, sheńberdiń urınıw noqatları arasındaǵı úlken doǵanı tabıń.
A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

Inglis tilin úyrenemiz!

Sheńber – circle
Xorda – chord
Radius – radius
Doǵa – arc

Diametr – diameter
Oraylıq múyesh – central angle
Sheńberge urınba – tangent to the circle
Perpendikulyar – perpendicular

Tariyxıy maǵlıwmatlar

Abul Vafo Buzjaniy
(940–998)

Abul Vafo Buzjaniy 940-jılı Xorasan wálayatınıń Gerat hám Nishapur qalaları arasındaǵı Buzjon qalasında (házirgi Túrkmenstannıń Sarxatabad qalası átirapında) tuwılǵan. Ol Baǵdadta oqıǵan hám dóretiwshilik penen shuǵıllanǵan.

Abul Vafo Buzjaniydiń «Ónermentshiler geometriyalıq sızıwlardan nelerdi biliwleri zárúr» degen kitabınıń birinshi hám ekinshi bapları sızǵısh hám cirkul járdeminde sızıwlarǵa baǵıshlanǵan. Biz sizge Abul Vafonıń sheńberdiń orayın tabıw máselesin keltiremiz.

«Eger «Sheńberdiń orayı qalay tabıladı?» dep soralsa, onıń sheńberinde A hám B noqatlardı belgilep AB aralıq penen A hám B noqatlardı oray qılıp eki teńdey sheńber sızamız, olar C hám D noqatlarda kesilisedi (1-súwret). CD sızıǵın ótkizemiz hám onı sheńber menen E hám F noqatlarda kesiliskenshe dawam ettiremiz, keyin EF sızıqtı O noqatta teń ekige bólemiz. Ol jaǵdayda O noqat sheńberdiń orayı boladı».

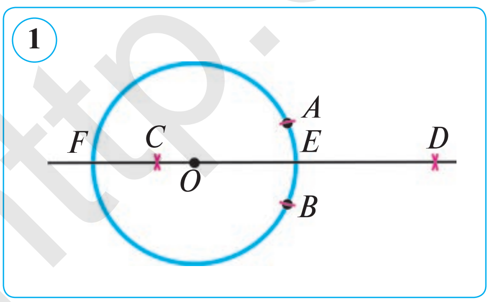
Abul Vafonıń bul usılı A hám B noqatlardı oray etip doǵa sızılǵanda olardıń kesilisken noqatların tutastırıwshı CD tuwrı sızıq berilgen sheńberdiń orayınan ótip, onıń AB xordasına perpendikulyar bolıwına tiykarlanǵan.

Házir bul másele tómendegishe sheshiledi: kóz aldımızǵa keltireyik, bizge orayı belgilenbegen sheńber berilgen hám onıń orayın anıqlaw talap etilgen (2-súwret).

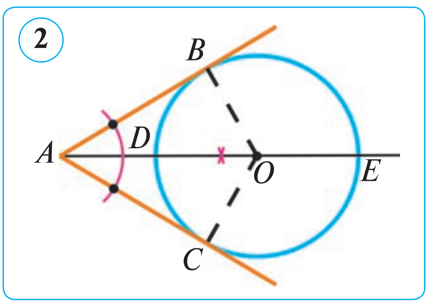
A noqattan bul sheńberge AB hám AC urınbalardı ótkizemiz hám de BAC múyeshtiń bissektrisasın jasaymız. Bissektrisa sheńberdi D hám E noqatlarda kesedi. DE ni teń ekige bólsek, bóliniw noqatı O sheńberdiń orayı boladı. Nege? Yamasa B noqatta AB urınbaǵa perpendikulyar ótkizsek, ol bissektrisanı O noqatta kesedi. O noqat sheńber orayı boladı. Nege?

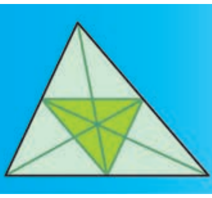
Sonıń menen bir qatarda Abul Vafo usı shıǵarmasında jáne jayıq doǵanı tolıq sheńberge toltırıw, sheńberge onıń sırtındaǵı noqattan urınba ótkiziw, sheńberge onıń sheńberinde jatqan noqattan urınba ótkiziw sıyaqlı sızıw usılların bergen.

1



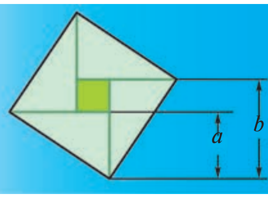
2





VI BAP

TÁKIRARLAW



8-KLASTA ÓTILGEN TEMALARDÍ TÁKIRARLAW USHÍN SHÍNÍǴÍWLAR

1. Tórtmúyeshliktiń tárepleri 2:4:5:7 sıyaqlı qatnasta, perimetri 108 cm ge teń. Usı tórtmúyeshliktiń tăreplerin tabıń.

2. Tórtmúyeshliktiń eń kishi tárepi 5 cm ge teń, qalǵan tărepleriniń hárbiri aldıngısınan sáykes túrde 2 cm ge úlken. Usı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

3. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń súyir múyeshi 45° qa teń. Kishi qaptal tárepi hám kishi ultanı 24 cm ge teń. Usı trapeciyanıń úlken ultanın tabıń.

4. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tárepleri: 1) 6 cm, 5 cm hám 5 cm; 2) 24 cm, 15 cm hám15 cm; 3) 3,2 dm, 20 cm hám 20 cm; 4) 22 cm, 60 cm hám 60 cm. Usı úshmúyeshliktiń maydanı hám qaptal tárepine ótkizilgen biylikti tabıń.

5. $ABCD$ tórtmúyeshlikte: $AB=CD$, $AD=BC$, A múyesh B múyeshten úsh ese úlken. Usı tórtmúyeshlikti tabıń.

6. $ABCD$ teń qaptallı trapeciyada $BC=20$ cm, $AB=24$ cm hám $\angle D=60°$ bolsa, onıń AD ultanın tabıń.

7. $\triangle ABC$ da AE hám BD – biyiklikler $AC=20$ cm, $BD=16$ cm hám $BC=32$ cm. AE nı tabıń.

8. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanı 168 cm^2 ge teń. Eger katetlerden biri ekinshisiniń $\frac{7}{12}$ bólegine teń bolsa, úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń

9. Úshmúyeshliktiń 24 cm^2. Úshmúyeshliktiń 16 cm ge teń tárepine ótkizilgen biyikligin tabıń.

10. $ABCD$ romb berilgen. AC hám BD diagonalları sáykes túrde 30 cm hám 12 cm ge teń. Rombnıń maydanın tabıń.

11. Úsh tárepine qaray úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. ABC úshmúyeshlikte $BC=34$ cm. BC kesindiniń ortasınan AC tuwrı sızıqqa ótkizilgen EF perpendikulyar AC tárepti $AF=25$ cm hám $FC=15$ cm li kesindilerge ajıratadı. ABC úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

13. Rombnıń diagonalları 18 dm hám 24 dm. Usı rombnıń perimetri hám parallel tárepler arasındaǵı aralıqtı tabıń.

14. Teń qaptallı trapeciyanıń biyikligi qaptal tárepinen eki ese kishi. Trapeciyanıń múyeshlerin tabıń.

15. Teń tárepli trapeciyanıń biyikligi qaptal tárepinen eki ese kishi. Trapeciyanıń múyeshlerin tabıń.

16. Sheńberdiń A, B hám C noqtaları onı: 1) $14:6:4$; 2) $13:12:5$; 3) $17:10:9$ qatnastaǵı doǵalarǵa boladı. A, B hám C noqatlardan urınbalar ótkerilip, bir-biri menen kesiskenshe dawam ettirilgen. Payda bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

17. Tuwrı tórmúyeshliktiń uzınlıǵı 30% ke arttırılsa hám eki 30%ke kemeyttirilse, onıń maydanı qalay ózgeredi?

18. Eger úshmúyeshliktiń ultanı 20% uzayttırılıp, biyikligi 20% ke qısqartılsa, onıń maydanı qalay ózgeredi?

19. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 540 cm^2, eki tárepiniń qatnası $3:5$ sıyaqlı. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

20. Parallelogrammnıń maydanı 24 cm^2 ge teń. Eger biyiklikleri 3 cm hám 4cm ge teń bolsa, onıń perimetrin tabıń.

21. $ABCD$ parallelogrammdı sızıń. Vektorların tabıń:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

22. Eger: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$; 2) $A(–2;\ 1)$, $B(–4;\ 3)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ vektordıń koordinataları nege teń boladı?

23. ABC úshmúyeshlikte AA_1 – mediana, O – AA_1 nıń ortası. $\overrightarrow{BO}$ vektordı $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ hám $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

24. $ABCD$ parallelogramm diagonalları O noqatta kesisedi, P noqat OB nıń ortası $\overrightarrow{AP}$ vektordı $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ hám $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ vektorlar arqalı ańlatıń.

25. 240° li doǵanıń tóbelerinen ótkerilgen urınbalar kesiskenshe dawam ettirilgen. Olar arasındaǵı múyeshti tabıń.

26. Parallelogrammnıń múyeshlerinen biri ekinshisinen 4 ese úlken. Usı parallelogrammnıń úlken múyeshin tabıń.

27. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 288 cm^2, eki tárepiniń qatnası $1:2$ ge teń. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

28. Parallelogrammnıń táreplerinen birine ótkerilgen biyikligi usı tárepten úsh ese kishi. Parallelogrammnıń maydanı 48 cm^2. Usı tárep hám biyikligin tabıń.

29. Kvadrattıń maydanı 16 cm^2. Eger: 1) onıń barlıq tárepin eki ese qısqartsaq; 2) onıń barlıq tárepin úsh ese uzaytsaq, kvadrattıń maydanı qalay ózgeredi?

30. Eger: 1) 1) $A(7;\ –5)$, $B(–9;\ –3)$; 2) $A(–8;\ 2)$, $B(–12;\ –4)$; 2) $A(8;\ –1)$, $B(–16;\ –11)$ bolsa, AB kespe ortası – C noqat kooordinataların tabıń.

JUWMAQLAWSHÍ BAQLAW JUMÍSÍ. QÁTELER ÚSTINDE ISLEW

1. Tuwrı tórtmúyeshliktiń kishi tárepi 10 cm ge teń, diagonalları bolsa 60° li múyesh astında kesisedi. Usı tuwrı tórtmúyeshliktiń diagonalların tabıń.
2. Úshmúyeshliktiń tárepleri 11 cm, 7 cm hám 10 cm ge teń Berilgen úshmúyeshlik orta sızıqlarınan payda bolǵan úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.
3. Úshmúyeshliktiń tárepleri 21 cm, 72 cm hám 75 cm ge teń. Usı úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
4. Sheńberge sırtındaǵı noqattan ótkizilgen eki urınba arasındaǵı múyesh 75° qa teń. Usı urınba tároplerin óz ishine alǵan doǵalardı tabıń.
5. $\vec{a}(2;-3)$ hám $\vec{b}(-2;-3)$ vektorlar berilgen. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ vektordıń koordinataların tabıń.

6-TEST Ózińizdi sınap kóriń!

1. Tórtmúyeshliktiń múyeshleri óz ara 3:5:4:6 qatnasta. Tórtmúyeshliktiń kishi múyeshin tabıń.
A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.

2. Dóńes tórtmúyeshliktiń diagonalları onı neshe úshmúyeshlikke ajıratadı?
A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.

3. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eni 5 ke teń, uzınlıǵı onnan 7 cm ge artıq. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.
A) 32 cm; B) 34 cm; D) 24 cm; E) 26 cm.

4. Hárbir ishki múyeshi 162° bolǵan dóńes kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?
A) 18 ta; B) 20 ta; D) 15 ta; E) 12 ta.

5. Parallelogrammnıń eki tárepi qatnası 3:7 ge, onıń perimetri bolsa 18 cm ge teń. Usı parallelogrammnıń kishi tárepin tabıń.
A) 2,7 cm; b) 3,4 cm; d) 5,4 cm; E) 4,5 cm.

6. Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydannıń eni 32 m. Eger maydannıń beti 2 gektar bolsa, onıń uzınlıǵı neshe metr boladı?
A) 610 m; B) 615 m; D) 625 m; E) 630 m.

7. Rombnıń biyikligi 5 cm ge, diagonallarınıń kóbeymesi 80 cm^2 ge teń. Onıń perimetrin tabıń.
A) 32 cm; B) 16 cm; D) 24 cm; E) 28 cm.

8. $\vec{a}(2;\ -3)$ hám $\vec{b}(-2;\ -3)$ vektor berilgen. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ vektordıń koordinataların tabıń.
A) (–6; –3); B) (–3; 6); D) (–2; −9); E) (2; –3).

9. $\vec{a}(3;\ 2)$ hám $\vec{b}(0;\ -1)$ vektor berilgen. $2\vec{a}-4\vec{b}$ vektordıń modulin tabıń.
A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Súyir múyeshli trigonometriyalıq funkciyalarınıń mánisleri kestesi. 1-Qosımsha

Graduslar	sinα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	tgα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	ctgα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	cosα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	Graduslar
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Graduslar	**cosα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**ctgα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**tgα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**sinα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**Graduslar**

JUWAPLAR

7-klasta ótkenlerdi tákirarlaw. 5. 9 dm. **7.** 3 cm. **9.** Awa, teń. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Yaq, kelip shıqpaydı. **18.** 58°.

I bap. 1-tema. 2. 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. **4.** 80°. **5.** 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. **6.** $n=8$ ta. **7.** 1) $n=20$ ta; 2) $n=15$ ta; 3) $n=6$ ta. **9.** 1) $n=24$ ta; 2) $n=8$ ta; 3) $n=5$ ta. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **2-tema. 2.** 25,5 cm, 50,5 cm. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** $P_{ABO}=20$ cm; $P_{BOC}=24$ cm. **5.** $AB=DC=16$ cm, $AD=BC=4$ cm. **3-tema. 2.** 1) Awa, tuwrı. **3.** 32 cm. **7.** 26 cm. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 cm. **4-tema. 2.** 1) 9 cm; 2) 7 cm. **3.** 12 cm. **4.** $AB=DC=4$ cm, $BC=AD=8$ cm. **6.** 1) $4+7<12$ – úshmúyeshlik teń salmaǵı orınlanbaydı; joq, bolıwı múmkin emes. **7.** 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **5–6-temalar. 2.** 10 cm. **3.** $BP=12$ cm. **5.** 7 cm. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 cm, 24 cm, 30 cm, 42 cm. **10.** 64 cm. **12.** 30 cm. **13.** 32 cm. **7–8-temalar. 3.** 150°. **4.** 23 cm. **6.** 27 cm, 11 cm. **7.** 20 cm, 14 cm. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **11.** 48 cm. **12.** 70 cm. **9-tema. 3.** $AC=5$ cm. **4.** $OB_1=3{,}2$ cm, $OB_2=4{,}8$ cm, $OB_3=6{,}4$ cm. **6.** 2) 19 cm. **8.** $x=4$. **9.** $OB_1=9$ cm, $OB_2=13{,}5$ cm, $OB_3=18$ cm. **10–11-temalar. 2.** 2,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm. **4.** 22 cm, 10 cm. **6.** 2) 15 cm. **9.** 24 cm, 12 cm. **10.** 3 cm. **11.** 30 cm, 10 cm. **12.** 12 cm.

II bap. 15-tema. 2. a) cosα; b) tgα; d) sinα; e) ctgα. **4.** a) Awa, sebebi $0{,}98<1$; b) jaq, sebebi $\sqrt{2}>1$; d) awa, sebebi $\sqrt{5}-2<1$. **5.** $ML=24$, $MN=25$. **6.** $\sin M=\frac{5}{13}$, $\cos M=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} M=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} M=\frac{12}{5}$. **16-tema. 2.** a) Tuwrı, sebebi $a=c\sin\alpha$; d) nadurıs, sebebi $c=\frac{a}{\sin\alpha}$. **3.** Awa, sebebi tangenstiń mánisi qálegen oń san boladı. **4.** 1) 16 cm; 2) 50 cm. **6.** 16 cm. **7.** 5 cm. **8.** 50 cm. **17-tema. 2.** 1) 13; 2) 9; 3) 6,5. **3.** 1) 40 cm; 2) 100 cm. **4.** $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-tema. 2.** 1) Yaq, sebebi $121+49\neq289$; 2) awa, sebebi $3^2+1{,}6^2=3{,}4^2$, $11{,}56=11{,}56$. **5.** Eki sheshimge iye. **6.** 1) Awa, sebebi $12^2+35^2=37^2$; 2) yaq, sebebi $11^2+20^2\neq25^2$. **7.** 2 cm. **19-tema. 1.** 1) 9,6 cm, 9,6 cm, 8 cm. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ cm; 2) $h_c=11{,}2$ dm; 3) $h_b=6{,}72$ cm. **4.** $h=6\sqrt{3}$ cm. **5.** $h_a=\frac{15}{4}\sqrt{7}$ cm; $h_c=\frac{5}{2}\sqrt{7}$ cm. **7.** $h_a=\frac{3}{2}\sqrt{15}$ cm. **20–21-temalar. 2.** 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) tgα. **7.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$. **12.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^3\alpha$. **14.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^3\alpha$. **22-tema. 2.** 1) $x\approx40°$; 2) $x\approx14°$; 3) $x\approx34°$; 4) $x\approx74°$. **3.** 1) $\sin B=0{,}6$; $\cos B=0{,}8$. **5.** $\cos A=0{,}5$; $\operatorname{tg} A=\sqrt{3}$. **7.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=0{,}8$. **8.** 1) sinα; 2) $\cos^3\alpha$. **23-tema. 1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-tema. 1.** a) 1) $\approx0{,}0523$; 2) $\approx0{,}3584$; 3) $\approx0{,}7660$; 4) $\approx0{,}6428$; e) 1) $\approx5{,}671$; 2) $\approx1{,}732$; 3) $\approx0{,}2679$; 4) $\approx11{,}430$. **2.** b) 1) $\approx42°$; 2) $\approx50°$; 3) $\approx87°$; d) 1) $\approx25°$; 2) $\approx85°$; 3) $\approx10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx0{,}9397$; 4) $\approx23{,}078$. **8.** $x\approx8°$. **25-tema. 1.** 14 cm. **2.** 45°, 45°. **3.** $a\approx6{,}691$; $b\approx7{,}431$; $\beta\approx48°$. **5.** $\cos^2\alpha$. **7.** $a=4$ cm; $b=4\sqrt{3}$ cm, $\beta=60°$. **26-tema. 1.** $b=9$ cm, $\alpha=\beta=45°$. **2.** $c=12$ cm, $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **5.** 0. **7.** $c=26$ cm. **27-tema. 3.** $a=7$ cm, $\alpha=\beta=45°$. **4.** $a=6\sqrt{3}$ cm, $b=6$ cm, $\beta=30°$. **5.** $a=5$ cm (5-súwret); $AC=2\sqrt{13}$ cm, $BC=3\sqrt{13}$ cm (6-súwret). **6.** 198 cm.

III bap. 31-tema. 3. 1) III sherek; 2) II sherek; 3) IV sherek; 4) I sherek. **4.** 1) (–10; –1); 2) (0; –5,5); 3) (–2; 1). **5.** $B(-1; 5)$. **8.** 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **32–33-temalar. 2.** 1) 10; 2) 17; 3) 13. **3.** 1) $x_1=-2$; $x_2=6$. **4.** $P=16$. **5.** 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **6.** 1)

(2; 5), $R=7$; 2) (−1; 5), $R=2$. **7.** 1) $C(3; -1)$, $R=4$; 2) $C(0; \ -5)$, $R=1$. **8.** 1) Teń qaptallı. **9.** 1) $(x-9)^2+(y-4)^2=49$; 2) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. **10.** 1) $C(7; -2)$, $R=5$; 2) $C(4; 0)$, $R=1$. **11.** 1) (8; −6) hám (8; 6); 2) (−5; −12) hám (5; −12). **34-tema. 3.** 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3) $3x-2y+2=0$. **4.** $c=-3$. **5.** $a=b=\frac{1}{3}$. **6.** 1) (0; −1,5) hám (−3; 0); 2) (0; 3) hám (4; 0); 3) (0; −5) hám (2,5; 0). **9.** $x+1=0$, $x-3y-8=0$, $x-y=0$. **35-tema. 2.** 1) $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$ hám $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. **4.** 1) Romb; 2) trapeciya. **36–37-temalar. 5.** Awa, orınlandı. **6.** $|\overrightarrow{AO}| = 16$ cm. **7.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$.

9. $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{b}$. **10.** $\overrightarrow{BF} = -2\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{EC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$. **38–39-temalar. 4.** $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. **5.** 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. **7.** 1) (4; 5); 2) (−1; 4); 3) (0; 0). **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1) (1; −2); 2) $(2m; 2n)$. **11.** $m=7$. **12.** $B(-2; -11)$. **40-tema. 2.** 1) (−3; 4); 2) (−5; 12). **3.** 1) (−4; 10); 2) (0; 2); 4) (4; −10). **4.** 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (−4; −3). **5.** 1) (6; 3); 2) (−6; 3); 3) (−2; 15). **6.** 1) $\vec{c}(-4;-4)$; 2) $\vec{c}(8;6)$. **7.** 1) $\vec{c}(-12;6)$; 2) $\vec{c}(-11;8)$. **8.** 1) $\vec{c}(-2;-1)$; 2) $\vec{c}(2;-13)$. **41-tema. 1.** $CC_1=2$. **2.** $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **3.** (5; 12). **4.** $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. **5.** $B(-5; 11)$. **8.** $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

IV bap. 45-tema. 2. 2) 0,0225 dm²; 5) 6,25 m². **6.** 1) 4 márte artadı; 2) 9 márte kemeyedi; 3) 28 cm² qa artadı **11.** 2) 3,6 dm; 3) 68 mm; 5) 80 dm. **13.** 359,12 mıń km². **46–47-temalar. 2.** 1) $P=65{,}8$ cm, $S=87$ cm²; 3) $P=7{,}4$ dm, $S=3$ dm². **4.** $S=5000$ m². **5.** 1) $P=126$ cm, $S=920$ cm². **8.** 12 cm. **9.** 1) $S=500$ cm²; 2) $a=12$ cm; 3) $h_a=5$ cm. **11.** 1) 1,6 márte artadı; 2) 6,25 márte kemeyedi. **13.** 2) 280 cm²; 4) 4,8 dm². **14.** $P=42$ cm. **15.** $S=280$ cm². **48-tema. 2.** 1) 14 cm²; 2) 150 cm². **3.** 4 cm. **4.** 5 : 1. **8.** 1) 756 cm²; 2) 84 cm²; 3) 192 cm². **10.** 60 cm. **11.** 7,5 dm². **49–50-temalar. 2.** 1) 32 cm. **3.** 1) 512 cm²; 2) 1,62 dm². **4.** 12 cm. **5.** 5 cm. **7.** 1) 1,35 dm²; 2) 180 cm²; 3) 8 cm². **8.** 1) 87 cm²; 2) 14 cm. **10.** 1) $0{,}5a^2$ kv. birl. **11.** 360 cm². **12.** 1) 2,45 dm²; 2) 238 cm²; 3) 31,5 cm². **14.** 1) 1,44 m². **15.** 1) 140 cm². **51-tema. 1.** 2125 kv. birl. **2.** $(a+b)\,c$. **3.** 144 cm². **5.** 16 kv. birl. **6.** 1) 20,8 km; 2) 8 km.

V bap. 55-tema. 3. AB hám BD kesiwshi. **4.** 25 cm. **5.** 1) $R=5$ cm; 2) $R<5$ cm; 3) $R>5$ cm. **8.** CD. **56-tema. 2.** 1) Sheńberler eki tárepinen bir-birine urınadı; 2) ulıwma noqatqa iye emes, biri ekinshisiniń ishinde jatadı. **3.** 1) 10 cm; 2) 2 cm. **6.** 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. **7.** 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. **8.** 70°. **9.** 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. **10.** 1) 15,6 cm; 2) 21 cm; 3) 1,6 dm. **57-tema. 3.** $AC=10$ cm. **4.** 1) $\angle ACB=44°$; 3) $\angle AEP=100°$. **5.** 36°, 60°, 84°. **6.** 1) 100° yaki 80°; 2) 126° yaki 54°. **7.** $\angle BAC=20°$. **8.** 100°. **58-tema. 3.** 220°. **4.** *a*) $x=45°$; *b*) $x=30°$; *d*) $x=90°$. **5.** 30°. **6.** 1) $\angle ABC=20°$; 2) $\angle ABC=60°$; 3) $\angle ABC=36°$; 4) $\angle ABC=54°$; 5) $\angle ABC=36°$. **7.** 1) 100°, 40°, 40°. **8.** 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. **9.** 1) 128°; 3) 76°. **59-tema. 3.** 4 cm. **6.** 8 cm. **9.** 10 cm. **11.** 90°.

VI bap. 1. 38°, 158°, 144°, 120°. **2.** 52 cm. **3.** 48 cm. **4.** 1) 12 cm²; 4,8 cm; 2) 108 cm²; 14,4 cm. **6.** 44 cm. **7.** 10 cm. **9.** 3 cm. **10.** 180 cm². **13.** 60 dm, 14,4 dm. **14.** 30°, 150°, 150°, 30°. **17.** 9% ke kemeyedi. **19.** 96 cm. **20.** 28 cm. **22.** 1) (1; −1); 2) (−2; 2). **23.** $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ **25.** 60°. **26.** 144°. **27.** 72 cm. **28.** 12 cm, 4 cm. **29.** 1) 4 cm² qa kemeyedi; 2) 128 cm² qa artadı.

MAZMUNÍ

Rahimqoriyev A.A.
R 29 **Geometriya 8:** Ulıwma bilim beriw mekteplериniń 8-klası ushın sabaqlıq. / A.A. Rahimqoriyev, M.A. Toxtaxodjayeva. — Qayta islengen hám tolıqtırılǵan 4-basılımı. — T.: «O'zbekiston» BPDÚ, 2019. — 160 b.

ISBN 978-9943-25-794-8

UOK 514(075)
KBK 22.151ya721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

Ulıwma bilim beriw mekteplериniń 8-klası ushın sabaqlıq

Qayta islengen hám tolıqtırılǵan 4-basılımı

Awdarmashılar S. Aytmuratova
Redaktor S. Aytmuratova
Xudojnikler *Sh. Rahimqoriyev, X. Abdullayev*
Tex. redaktor *T. Xaritonova*
Operator *Á. Ataǵullaeva*

Baspa licenziyası AI №158, 14.08.2009
Basıwǵa ruqsat etildi 2019-jıl 17-iyunda. Formatı 70x100$^1/_{16}$.
Kegli 11. Times KRKP garniturası. Ofset baspa usılında basıldı.
Shártli baspa tabaǵı 13,0. Esap baspa tabaǵı 10,0. 14220 nusqa.
Buyırtpa №.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administraciyası janındaǵı
Málimleme hám ǵalaba kommunikaciyalar agentliginiń
«O'zbekiston» baspa-poliografiyalıq dóretiwshilik úyinde basıp shıǵarıldı.
100011, Tashkent, Nawayı kóshesi, 30-úy.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20
Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.

e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz
www.iptd-uzbekistan.uz

İjaraǵa berilgen sabaqlıqtıń jaǵdayın kórsetiwshi keste

T/n	Oqıwshınıń atı, familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alınǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbası	Sabaqlıqtıń qaytıp tapsırılǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbası
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Sabaqlıq ijaraǵa berilgende hám oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp alınǵanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishe bahalawǵa muwapıq toltırıladı

Jańa	Sabaqlıqtıń paydalanıwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı
Jaqsı	Muqabası pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, kóshpegen, betlerinde jazıw hám sızıwlar joq.
Qanaatlanarlıq	Muqaba jazılǵan, bir qansha sızılıp, shetleri jelingen, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlanarlıq ońlanǵan. Kóshken betleri qayta ońlanǵan, ayırım betleri sızılǵan.
Qanaatlandırmaydı	Muqaba sızılǵan, ol jırtılǵan, tiykarǵı bólimnen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırarsızlıq ońlanǵan. Betleri jırtılǵan, betleri jetispeydi, sızıp, boyap taslanǵan, sabaqlıqtı tiklewge bolmaydı.