**Ш.А. АЛИМОВ, О.Р. ХАЛМУХАМЕДОВ,
М.А. МИРЗААХМЕДОВ**

АЛГЕБРА

ЖАЛПЫ ОРТО БИЛИМ БЕРҮҮЧҮ МЕКТЕПТЕРДИН
9-КЛАССЫ ҮЧҮН ОКУУ КИТЕБИ

Кайра иштелген 4-басылышы

*Өзбекстан Республикасынын Элге билим берүү министрлиги
сунуш кылган*

«O‘QITUVCHI» БАСМА-ПОЛГИТРАФИЯЛЫК ЧЫГАРМАЧЫЛЫК ҮЙҮ
ТАШКЕНТ – 2019

УЎК: 512(075.3)=512.154
КБК 22.14я72
А 39

Рецензенттер:

Ф. С. Рахимова – *Ал- Харезмий атындагы ТАТУ математика предмети мугалими;*
Г. А. Фазилова – *Ташкент шаары, Юнусабад районундагы 274-мектептин математика предмети мугалими;*
Д. Ш. Абраев – *Ташкент шаары, Алмазар районундагы 326-мектептин математика предмети мугалими.*

Окуу китебиндеги шарттуу белгилер:

– билүү зарыл жана эстеп калуу пайдалуу (жаттоо шарт эмес) текст

△ – масeлени чыгаруу башталды

▲ – масeлени чыгаруу аяктады

○ – математикалык тастыкты негиздөө же формуланы келтирип чыгаруу башталды

● – негиздөө же формуланы келтирип чыгаруу аяктады

– чыгарылышы милдеттүү маселелерди ажыраткан белги

33, 34... – татаалыраак маселе

– негизги материалды ажыратуу

Өзүңдү текшерип көр! – негизги материал боюнча билимди текшерүү үчүн өз алдынча иш

– практикалык жана предметтер аралык маселелер

– тарыхый маселелер

– тарыхый маалыматтар

Республикалык максаттуу китеп фондунун каражаттары эсебинен басылды.

ISBN 978-9943-5750-6-6

8-КЛАССТА ҮЙРӨНҮЛГӨН ТЕМАЛАРДЫ КАЙТАЛОО

Кымбаттуу окуучу! 8-класста „Алгебрадан“ алган билимдериңди эске салуу максатында сага бир нече көнүгүүлөрдү сунуш кылабыз.

1. 1) $y=2x+3$; 2) $y=-3x+4$; 3) $y=4x-1$; 4) $y=-2x-5$ функциясынын графигин чий. График кайсы чейректерде жатат? Графиктин Ox жана Oy октор менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын айт.

2. $y=kx+b$ функциясынын графиги $A(0; -7)$, $B(2; 3)$ чекиттеринен өтөт. k жана b ны тап.

3. Түз сызык $A(0; 5)$, $B(1; 2)$ чекиттеринен өтөт. Ошол түз сызыктын теңдемесин жаз.

4. Теңдемелер системасын чыгар:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. 3 жылкы жана 4 уйга бир күндө 27 кг тоют берилет. Бир күндө 9 жылкыга берилген тоют 5 уйга берилген тоюттан 30 кг га көп. Бир жылкыга жана бир уйга 1 күндө канча тоют берилет?

6. Китеп жана дептер чогуу 5 800 сум турат. Китеп наркынын 10 %ы дептер наркынын 35 % ынан 220 сумга кымбат. Китеп жана дептер өз алдынча канча сумдан турат?

7. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\le 3$; 3) $|3x-4|\ge 2$.

8. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$ барабарсыздыгынын эң кичине бүтүн чыгарылышын тап.

10. Эсепте:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Жөнөкөйлөштүр:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Теңдемени чыгар (**12–14**):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. 240 км аралыкты бир автомобиль экинчисине караганда 1 саат тезирээк басып өттү. Эгерде биринчи автомобилдин ылдамдыгы экинчисинин ылдамдыгынан 20 км/саат ка чоң болсо, ар бир автомобилдин ылдамдыгын тап.

16. 1) Эки сандын айырмасы 2,5 ке, квадраттарынын айырмасы болсо 10 го барабар. Ошол сандарды тап.

2) Суммасы 1,4 кө, квадраттарынын суммасы 1 ге барабар болгон эки санды тап.

17. $x^2-8x+3=0$ теңдеменин тамырлары x_1 жана x_2 болсо, 1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$ 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$ ни тап.

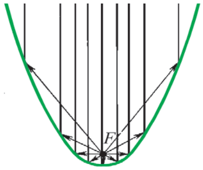
18. Санды жүздөн бирге чейин тегеректе. Тегеректөөнүн салыштырма каталыгын тап:

1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Санды стандарттык формада жаз:

1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

I ГЛАВА. КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ. КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР



1-§. КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯНЫН АНЫКТАМАСЫ

Сен 8 класста $y=kx+b$ сызыктуу функциясы жана анын графиги менен таанышкансың.

Илим жана техниканын түрдүү тармактарында *квадраттык функциялар* деп аталган функциялар кездешет. Мисалдар келтиребиз.

1) Жагы x болгон квадраттын аянты $y = x^2$ формула менен эсептелет.

2) Эгерде тело жогоруга v ылдамдык менен атылса, m убакытта андан Жерге чейинки аралык $s=-\frac{gt^2}{2}+vt+s_0$ формула менен аныкталат, мында s_0–убакыттын $t=0$ баштапкы учурдагы телодон Жерге чейин болгон аралык.

Бул мисалдарда $y=ax^2+bx+c$ көрүнүштөгү функциялар каралды. Биринчи мисалда $a=1$, $b=c=0$, өзгөрүүчүлөр болсо x жана y тер болот. Экинчи мисалда $a=-\frac{g}{2}$, $b=v$, $c=s_0$, өзгөрүүчүлөр болсо m жана c тамгалары менен белгиленген.

Аныктама. ***$y=ax^2+bx+c$ функциясына квадраттык функция дейилет, мында a, b жана c – берилген чыныгы сандар, $a\neq 0$, x–чыныгы өзгөрүүчү.***

Мисалы, төмөнкү функциялар квадраттык функциялар болот:

$y = x^2$, $\quad y=-2x^2$, $\quad y=x^2-x$,

$y=x^2-5x+6$, $\quad y=-3x^2+\frac{1}{2}x$.

1 - маселе. $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$ болгондо

$$y(x)=x^2-5x+6$$

функциясынын маанисин тап.

$$\triangle\ y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2)+6 = 20;$$
$$y(0) = 0^2 - 5\cdot 0+6=6;$$
$$y(3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0. \blacktriangle$$

2 - маселе. x тин кандай маанилеринде $y = x^2 + 4x-5$ квадраттык функция: 1) 7 ге; 2) –9 га; 3) –8 ге; 4) 0 гө барабар маанини кабыл алат?

△ 1) Шарт боюнча $x^2+4x-5=7$. Бул теңдемени чыгарып, төмөнкүнү алабыз:

$$x^2 +4x-12 = 0,$$
$$x_{1,2} = 2-\sqrt{4+12}=-2-4,\ x_1=2,\ x_2=-6.$$

Демек, $y(2) = 7$ жана $y(-6) = 7$.

2) Шарт боюнча $x^2 + 4x - 5 = -9$, мындан

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) Шарт боюнча $x^2 +4x - 5 =-8$, мындан $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Бул теңдемени чыгарып, $x_1=-3$, $x_2=-1$ экенин табабыз.

4) Шарт боюнча $x^2+4x-5=0$, мындан $x_1 = 1$, $x_2 =-5$. ▲

Акыркы учурда x тин $y = x^2 + 4x - 5$ функциясы 0 гө барабар, б. а. $y(1)=0$ жана $y(-5) = 0$ болгон маанилери табылды. x тин мындай маанилерине *квадраттык функциянын нөлдөрү* дейилет.

3 - маселе. $y=x^2-3x$ функциясынын нөлдөрүн тап.

△ $x^2-3x=0$ теңдемени чыгарып, $x_1=0$, $x_2=3$ экенин табабыз. ▲

Көнүгүүлөр

1. (Оозеки.) Төмөндө көрсөтүлгөн функциялардан кайсылары квадраттык функция болот:

1) $y = 2x^2 + x + 3$; 2) $y = 3x^2 - 1$; 3) $y = 5x + 1$;
4) $y = x^3 + 7x - 1$; 5) $y = 4x^2$; 6) $y = -3x^2 + 2x$?

2. x тин чыныгы маанилерин тапканыңда, $y = x^2 -x-3$ квадраттык функция: 1) –1 ге; 2) –3 кө; 3) $-\frac{13}{4}$ ө; 4) –5 ке барабар маанини кабыл алсын.

3. x тин кандай чыныгы маанилеринде $y = -4x^2 + 3x - 1$ квадраттык функция: 1) –2; 2) –8; 3) –0,5; 4) –1 ге барабар маанини кабыл алат?

4. –2; 0; 1; $\sqrt{3}$ сандарынан кайсылары төмөнкү квадраттык функциянын нөлдөрү болот:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Квадраттык функциянын нөлдөрүн тап:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Эгерде $y = x^2 + px + q$ квадраттык функциянын x_1 жана x_2 нөлдөрү белгилүү болсо, p жана q коэффициенттерди тап:

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

7. x тин $y = x^2 + 2x - 3$ жана $y = 2x + 1$ функциялар барабар маанилерди кабыл алган маанилерин тап.

2-§. $y = x^2$ ФУНКЦИЯСЫ

$y = x^2$ функциясын, башкача айтканда $a = 1$, $b = c = 0$ болгондогу $y = ax^2 + bx + c$ квадраттык функцияны карап көрөбүз. Бул функциянын графигин түзүү үчүн анын маанилери жадыбалын түзөбүз:

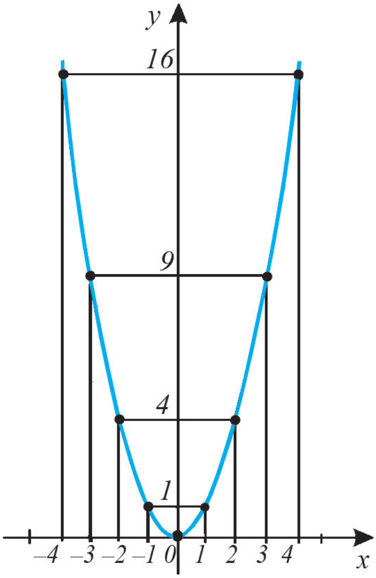
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Жадыбалда көрсөтүлгөн чекиттерди түзүп жана аларды ийри сызык менен туташтырып, $y = x^2$ функциясынын графигин алабыз (1-сүрөт).

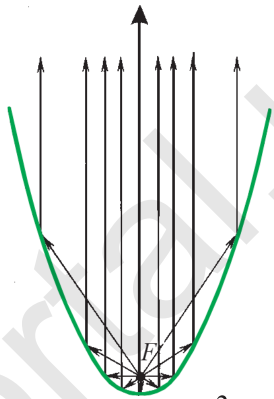
! $y = x^2$ функциясынын графиги болгон ийри сызыкка *парабола* дейилет.

$y = x^2$ *функциясынын касиеттерин* карап көрөбүз.

1) $y = x^2$ функциясынын мааниси $x \neq 0$ болгондо *оң* жана $x = 0$ болгондо *нөлгө* барабар. Демек, $y = x^2$ парабола координаталар башынан өтөт,



1-сүрөт.



2-сүрөт.

параболанын калган чекиттери болсо абсциссалар огунан жогоруда жатат. $y=x^2$ ка *парабола абсциссалар огуна* $(0;0)$ *чекитте жаунат,* дейилет.

2) $y=x^2$ функциясынын графиги *ординаталар огуна салыштырмалуу симметриялуу,* анткени $(-x)^2=x^2$. Мисалы, $y(-3)=y(3)=9$ (1-сүрөт). Ошентип, ординаталар огу *параболанын симметрия огу* болот. Параболанын өзүнүн симметрия *огу* менен кесилишүү чекитине *параболанын чокусу* дейилет. $y=x^2$ парабола үчүн координаталар башы анын чокусу болот.

3) $x\geq0$ болгондо, x тин чоң маанисине y тин чоң мааниси туура келет. Мисалы, $y(3)>y(2)$. $y=x^2$ функциясына $x\geq0$ *аралыкта өсүүчү,* дейилет (1-сүрөт).

$x\leq0$ болгондо, x тин чоң маанисине y тин кичине мааниси туура келет. Мисалы, $y(-2)<y(-4)$. $y=x^2$ функциясына $x\leq0$ *аралыкта кемүүчү* дейилет (1-сүрөт).

Маселе. $y=x^2$ парабола менен $y=x+6$ түз сызыктын кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап.

△ Кесилишүү чекиттери $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x+6 \end{cases}$

системанын чыгарылыштары болот.

Бул системадан $x^2 = x + 6$, б. а. $x^2 - x - 6 = 0$ дү алабыз, мындан $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. x_1 жана x_2 тин маанилерин системанын теңдемелеринен бирине коюп, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$ тү табабыз.

Жообу: (3; 9), (–2; 4). ▲

Парабола техникада кеңири пайдаланылчу көптөгөн укмуш касиеттерге ээ. Мисалы, анын симметрия огунда *параболанын фокусу* деп аталган F чекити бар (2-сүрөт). Эгерде жарыктын булагы ошол чекитте жайлашкан болсо, анда параболадан чагылган бардык жарыктын шоолалары параллель болот. Бул касиеттен прожектор, локатор жана башка аспаптарды даярдоодо пайдаланылат.

$y = x^2$ параболанын фокусу $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ чекити болот.

Көнүгүүлөр

8. $y = x^2$ функциясынын графигин миллиметрлүү кагазда түз. График боюнча:

1) $x = 0{,}8$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}9$; $x = -2{,}3$; $x = -1{,}5$ болгондо y тин маанисин болжолдуу тап;

2) эгерде $y = 2$; $y = 3$; $y = 4{,}5$; $y = 6{,}5$ болсо, x тин маанисин болжолдуу тап.

9. $y = x^2$ функциясынын графигин түзбөстөн: $A(2;\ 6)$, $B\ (-1;\ 1)$, $C(12;\ 144)$, $D(-3;\ -9)$ чекиттеринен кайсылары параболага тиешелүү болушун аныкта.

10. (Оозеки.) $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}\ ; 3)$ чекиттерге ординаталар огуна салыштырмалуу симметриялуу болгон чекиттерди тап. Бул чекиттер $y = x^2$ функциясынын графигине тиешелүү болобу?

11. (Оозеки.) $y=x^2$ функциясынын маанилерин

1) $x = 2{,}5$ жана $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ жана $x = 0{,}3$;

3) $x = -0{,}2$ жана $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ жана $x = -5{,}2$

болгондо салыштыр.

12. $y = x^2$ параболанын:

1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;
4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$

түз сызык менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап.

13. A чекит $y = x^2$ парабола менен

1) $y = -x - 6$, $A(-3; 9)$; 2) $y = 5x-6$, $A(2; 4)$

түз сызыктын кесилишүү чекити болобу?

14. Тастык туурабы: $y = x^2$ функциясы:

1) $[1; 4]$ кесиндиде; 2) $(2; 5)$ интервалда;

3) $x > 3$ интервалда; 4) $[-3; 4]$ кесиндиде өсөт?

15. Бир координата тегиздигинде $y=x^2$ парабола менен $y=3$ түз сызыгыны түз. x тин кандай маанилеринде параболанын чекиттери түз сызыктан жогоруда болот; ылдыйда болот?

16. x тин кандай маанилеринде $y = x^2$ функциясынын мааниси:

1) 9 дан чоң; 2) 25 тен чоң эмес; 3) 16 дан кичине эмес;

4) 36 дан кичине болот?

3-§. $y = ax^2$ ФУНКЦИЯСЫ

1- маселе. $y = 2x^2$ функциясынын графигин түз.

△ $y = 2x^2$ функциясынын маанилер жадыбалын түзөбүз:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

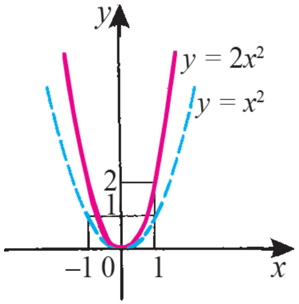
Табылган чекиттерди түзөбүз жана алар аркылуу ийри сызык жүргүзөбүз (3-сүрөт). ▲

$y=2x^2$ жана $y=x^2$ функцияларынын графиктерин салыштырабыз (3-сүрөт). x тин окшош бир маанисинде $y=2x^2$ функциясынын мааниси $y=x^2$ функциясынын маанисинен 2 эсе чоң. Бул $y=2x^2$ функциясы графигинин ар бир чекитин $y=x^2$ функциясы графигинин куду ушундай абсциссалуу чекитинин ординатасын 2 эсе чоңойтуу менен алууга болорун билдирет.

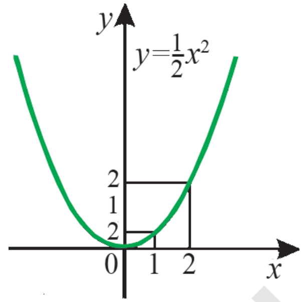
$y=2x^2$ функциясынын графигине $y=x^2$ *функциясынын графигин Ох* огунан *Оу* огу боюнча 2 эсе *созуу* менен алынат, дейилет.

2- маселе. $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин түз.

△ $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын маанилер жадыбалын түзөбүз:



3-сүрөт.



4-сүрөт.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Табылган чекиттерди түзүп, алар аркылуу ийри сызык жүргүзөбүз (4-сүрөт). ▲

$y=\frac{1}{2}x^2$ жана $y = x^2$ функцияларынын графиктерин салыштырабыз.

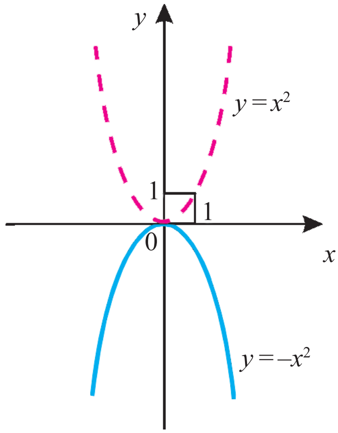
$y=\frac{1}{2}x^2$ функциясы графигинин ар бир чекитин $y=x^2$ функциясы графигинин куду ушундай абсциссалуу чекитинин ординатасын 2 эсе кемитүү менен алууга болот.

$y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигине *$y=x^2$ функциясынын графигин Ox* огуна *Oy* огу боюнча 2 эсе *кысуу* жолу менен алынат, дейилет.

3- маселе. $y = -x^2$ функциясынын графигин түз.

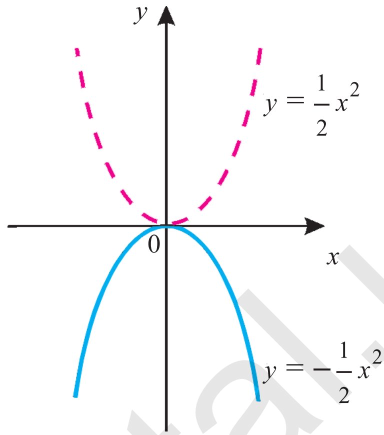
△ $y=-x^2$ жана $y=x^2$ функцияларын салыштырабыз. x тин бирдей маанисинде алардын маанилери модулдары боюнча барабар жана карама-каршы белгилүү. Демек, $y=-x^2$ нин графигин $y=x^2$ нин графигин Ox огуна салыштырмалуу симметриялуу көчүрүү менен алууга болот (5-сүрөт). ▲

Ушуга окшош, $y=-\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графиги Ox огуна салыштырмалуу $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигине симметриялуу (6-сүрөт).



5-сүрөт.

0



6-сүрөт.

> **❗ $y = ax^2$ функциясынын графиги, мында $a \neq 0$, да *парабола* деп аталат. $a > 0$ дө параболанын тармактары *жогоруга,* $a < 0$ дө болсо *ылдыйга* багытталган.**

$y = ax^2$ параболанын фокусу $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ чекитинде жайлашкандыгын белгилей кетебиз.

$y = ax^2$ *функциясынын негизги касиеттерин* эсептейбиз, мында $a \neq 0$:

1) эгерде $a > 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $x \neq 0$ болгондо оң маанилерди кабыл алат;

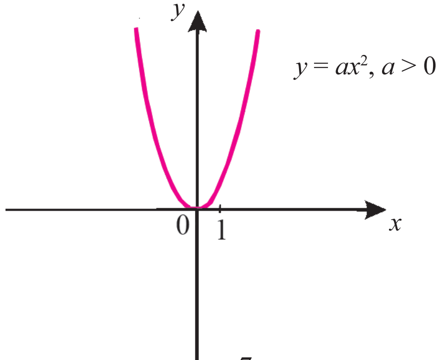
эгерде $a < 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $x \neq 0$ болгондо терс маанилерди кабыл алат;

$y = ax^2$ функциясынын мааниси $x = 0$ болгондо гана 0 гө барабар болот;

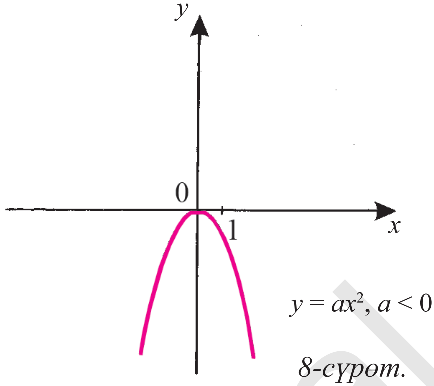
2) $y = ax^2$ парабола ординаталар огуна салыштырмалуу симметриялуу болот;

3) эгерде $a > 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $x \geq 0$ болгондо өсөт жана $x \leq 0$ болгондо азаят;

эгерде $a < 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $x \geq 0$ болгондо азаят жана $x \leq 0$ болгондо өсөт.



7-сүрөт.



8-сүрөт.

Бул касиеттерди бардыгын түздөн-түз графиктен көрүүгө болот (7- жана 8- сүрөттөр).

Көнүгүүлөр

17. Миллиметрлүү кагазда $y = 3x^2$ функциясынын графигин түз. График боюнча:

1) $x = -2{,}8;\ -1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$ болгондо, y тин маанисин тап;
2) эгерде $y = 9;\ 6;\ 2;\ 8;\ 1{,}3$ болсо, x тин маанисин болжолдуу тап.

18. (Оозеки.) Парабола тармактарынын багытын аныкта:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Функциялардын графиктерин бир координата тегиздигинде түз:

1) $y = x^2$ жана $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ жана $y = -3x^2$;

3) $y = 3x^2$ жана $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ жана $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Графиктерден пайдаланып, бул функциялардан кайсылары $x \geq 0$ аралыкта өсүүчү экенин аныкта.

20. Төмөнкү функциялардын графиктери кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап:

1) $y = 2x^2$ жана $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ жана $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Функция $x \leq 0$ аралыкта кемүүчү болобу:

1) $y = 4x^2$; 2) $y=-\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y=-\frac{1}{5}x^2$?

22. $y=-2x^2$ функциясы:

1) $[-4; -2]$ кесиндиде; 3) $(3; 5)$ интервалда;

2) $[-5; 0]$ кесиндиде; 4) $(-3; 2)$ интервалда

өсүүчү же кемүүчү болушун аныкта.

23. Бир калыпта ылдамдануучу кыймылда тело өткөн жол $s=\frac{at^2}{2}$ формуласы менен эсептелет, мында s – жол, метрлерде; a – ылдамдануу, м/с^2 лерде; $т$ – убакыт, секунддарда өлчөнөт. Эгерде тело 8 с да 96 м жолду өткөн болсо, a ылдамданууну тап.

4-§. $y = ax^2 + bx + c$ ФУНКЦИЯСЫ

1-маселе. $y=x^2-2x+3$ функциясынын графигин түз жана аны $y = x^2$ функциясы графиги менен салыштыр.

△ $y = x^2 - 2x + 3$ функциясынын маанилер жадыбалын түзөбүз:

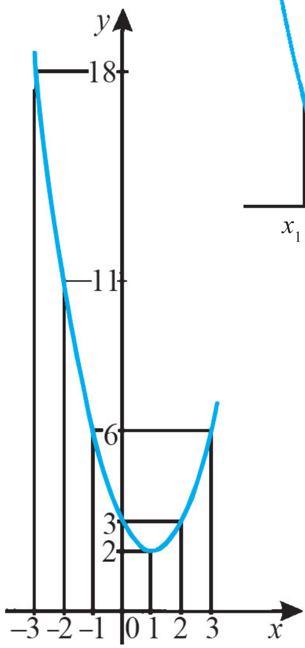
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=x^2-2x+3$	18	11	6	3	2	3	6

Табылган чекиттерди түзөбүз жана алар аркылуу ийри сызык жүргүзөбүз (9-сүрөт).

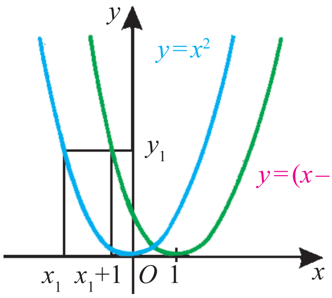
Графиктерди салыштыруу үчүн толук квадратты ажыратуу усулунан пайдаланып, $y = x^2 - 2x + 3$ формуланын формасын алмаштырабыз:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

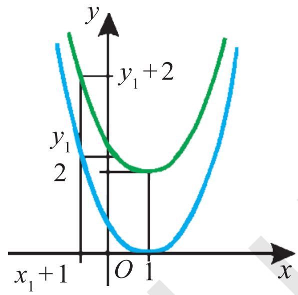
Адегенде $y = x^2$ жана $y = (x - 1)^2$ функциялардын графиктерин салыштырабыз. Эгерде $(x_1; y_1)$ чекит $y=x^2$ параболанын чекити, б. а. $y_1 = x_1^2$ болсо, анда $(x_1+1; y_1)$ чекит $y = (x-1)^2$ функциясынын графигине тиешелүү, анткени $((x_1+1)-1)^2= x_1^2 =y_1$. Демек, $y=(x-1)^2$ функциясынын графиги $y = x^2$ параболадан аны оңго бир бирдикке *которуу* (параллель көчүрүү) натыйжасында алынган парабола болот (10-сүрөт).



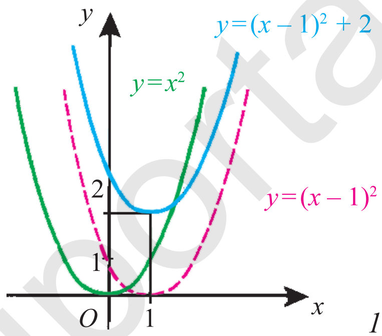
9-сүрөт.



10-сүрөт.



11-сүрөт.



12-сүрөт.

Эми $y=(x-1)^2$ жана $y=(x-1)^2+2$ функциялардын графиктерин салыштырабыз. x тин ар бир маанисинде $y=(x-1)^2+2$ функциясынын мааниси $y=(x-1)^2$ функциясынын тиешелүү маанисинен 2 ге чоң. Демек, $y=(x-1)^2+2$ функциясынын графиги $y=(x-1)^2$ параболаны эки бирдикке жогоруга которуу менен алынган парабола болот (11-сүрөт).

Ошентип, $y=x^2-2x+3$ функциясынын графиги $y=x^2$ параболаны бир бирдикке оңго жана эки бирдикке жогоруга которуунун натыйжасында алынган парабола (12-сүрөт). $y=x^2-2x+3$ параболанын симметрия огу ординаталар огуна параллель жана параболанын чокусу болгон (1; 2) чекитинен өткөн түз сызыктан турат. ▲

$y=a(x-x_0)^2+y_0$ функциясынын графиги $y=ax^2$ параболаны:

эгерде $x_0>0$ болсо, абсциссалар огу боюнча оңго x_0 ке, эгерде $x_0<0$ болсо, солго $|x_0|$ ке которуу;

эгерде $y_0>0$ болсо, ординаталар огу боюнча жогоруга y_0 ке, эгерде $y_0<0$ болсо, ылдыйга $|y_0|$ ке которуу жолу менен алынган парабола болушу ушуга окшош далилденет.

Каалагандай $y=ax^2+bx+c$ *квадраттык функцияны* андан толук квадратты ажыратуунун жардамында

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

б. а. $y=a(x-x_0)^2+y_0$ *сыяктуу көрүнүштө жазууга болот,* мында

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Ошентип, $y=ax^2+bx+c$ функциясынын графиги $y=ax^2$ параболаны координаталар октору боюнча которуулардын натыйжасында алынган парабола болот. $y=ax^2+bx+c$ барабардыгына параболанын теңдемеси дейилет. $y=ax^2+bx+c$ парабола чокусунун $(x_0;\ y_0)$ координаталарын төмөнкү формула боюнча табууга болот:

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c.$$

$y=ax^2+bx+c$ параболанын симметрия огу ординаталар огуна параллель жана параболанын чокусунан өткөн түз сызык болот.

$y=ax^2+bx+c$ параболанын тармактары, эгерде $a>0$ болсо, жогоруга багытталган, эгерде $a<0$ болсо, ылдыйга багытталган болот.

2 - маселе. $y=2x^2-x-3$ парабола чокусунун координаталарын тап.

△ Парабола чокусунун абсциссасы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}.$$

Парабола чокусунун ординатасы:

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-3=-3\frac{1}{8}.$$

Жообу: $\left(\frac{1}{4};\ -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

3- маселе. Эгерде параболанын (–2; 5) чекит аркылуу өтүшү жана анын чокусу (–1; 2) чекитинде болушу белгилүү болсо, параболанын теңдемесин жаз.

△ Параболанын чокусу (–1; 2) чекити болгондуктан, параболанын теңдемесин төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y=a(x+1)^2+2.$$

Шарт боюнча (–2; 5) чекити параболага тиешелүү жана, демек,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

мындан $a = 3$.

Ошентип, парабола

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{же} \quad y = 3x^2 + 6x + 5$$

теңдеме менен берилет. ▲

Көнүгүүлөр

Парабола чокусунун координаталарын тап **(24–26)**:

24. (Оозеки.)
1) $y = (x - 3)^2 - 2$;
2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$;
4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$;
2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;
4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = -x^2 - 5$;
3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$;
5) $y = -3x^2 + x$;
6) $y = 2x^2 - x$.

27. *Ox* огунан чекитти тапканыңда, андан параболанын симметрия огу өтсүн:
1) $y = x^2 + 3$;
2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$;
4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$;
6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. $y=x^2-10x$ параболанын симметрия огу: 1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1) чекитинен өтөбү?

29. Параболанын координаталар октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап:
1) $y = x^2 - 3x + 2$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;
4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Эгерде параболанын (–1; 6) чекит аркылуу өтүшү жана анын чокусу (1; 2) чекит экендиги белгилүү болсо, параболанын теңдемесин жаз.

31. (Оозеки.) (1;–6) чекит $y=-3x^2+4x-7$ параболага тиешелүү болобу? (–1; 8) чекитчи?

32. Эгерде (–1; 2) чекит: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$ параболага тиешелүү болсо, k нын маанисин тап.

33. $y=x^2$ параболанын үлгүсү жардамында функциясынын графигин түз:

1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;

4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

34. $y=2x^2$ параболадан аны:

1) *Ox* огу боюнча 3 бирдикке оңго которуу;
2) *Oy* огу боюнча 4 бирдикке жогоруга которуу;
3) *Ox* огу боюнча 2 бирдикке солго жана кийин *Oy* огу боюнча бир бирдикке ылдыйга которуу;
4) *Ox* огу боюнча 1,5 бирдикке оңго жана кийин *Oy* огу боюнча 3,5 бирдикке жогоруга которуунун натыйжасында алынган параболанын теңдемесин жаз.

5-§. КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯНЫН ГАРФИГИН ТҮЗҮҮ

1- маселе. $y=x^2-4x+3$ функциясынын графигин түз.

△ 1. Парабола чокусунун координаталарын эсептейбиз:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$
$$y_0=2^2-4\cdot2+3=-1.$$

(2; –1) чекитин түзөбүз.

2. (2; –1) чекити аркылуу ординаталар огуна параллель түз сызык, б. а. параболанын симметрия огун жүргүзөбүз (13-*а* сүрөт).

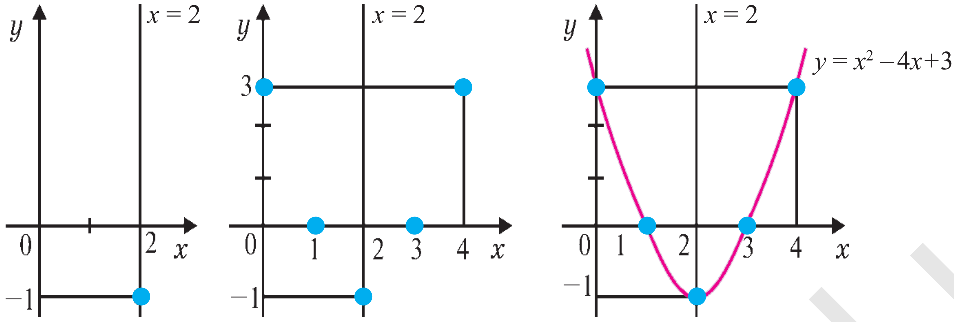
3. Төмөнкү

$$x^2-4x+3=0$$

теңдемени чыгарып, функциясынын нөлдөрүн табабыз: $x_1=1$, $x_2=3$. (1; 0) жана (3; 0) чекиттерди түзөбүз (13-*б* сүрөт).

4. *Ox* огунда $x=2$ чекитке салыштырмалуу симметриялуу болгон эки чекитти, мисалы, $x=0$ жана $x=4$ чекиттерин алабыз. Функциянын ушул чекиттердеги маанилерин эсептейбиз: $y(0)=y(4)=3$.

(0; 3) жана (4; 3) чекиттерин түзөбүз (13-*б* сүрөт).



а) *б)* *в)* *13-сүрөт.*

5. Түзүлгөн чекиттер аркылуу параболаны жүргүзөбүз (13-*в* сүрөт). ▲

Ушундайча *каалагандай* $y = ax^2 + bx + c$ *квадраттык функциянын графигин түзүүгө болот:*

1. x_0, y_0 терде $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ формулалардан пайдаланып эсептеп, параболанын $(x_0;\ y_0)$ чокусу түзүлөт.

2. Параболанын чокусунан ординаталар огуна параллель түз сызык – параболанын симметрия огу жүргүзүлөт.

3. Функциянын нөлдөрү (эгерде алар болсо) табылат жана абсциссалар огунда параболанын тиешелүү чекиттери түзүлөт.

4. Параболанын анын огуна салыштырмалуу симметриялуу болгон каалагандай эки чекити түзүлөт. Ал үчүн *Ox* огунда x_0 $(x_0 \neq 0)$ чекитке салыштырмалуу симметриялуу болгон эки чекит алуу жана функциясынын тиешелүү маанилерин (бул маанилер бирдей) эсептөө керек. Мисалы, параболанын абсциссалары $x = 0$ жана $x = 2x_0$ болгон чекиттерин (бул чекиттердин ординаталары *c* га барабар) түзүүгө болот.

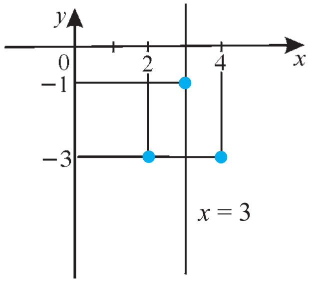
5. Түзүлгөн чекиттер аркылуу парабола жүргүзүлөт. Графикти дагы да тагыраак түзүү үчүн параболанын дагы бир нече чекитин табуу пайдалуу.

2- маселе. $y = -2x^2 + 12x - 19$ функциясынын графигин түз.

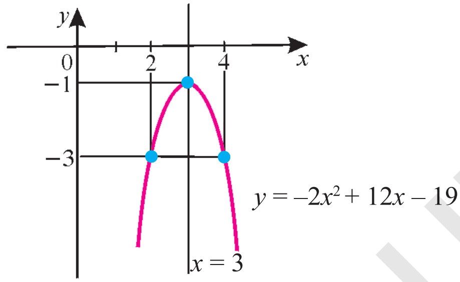
△ 1. Парабола чокусунун координаталарын эсептейбиз:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3,\ \ y_0 = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 19 = -1\,.$$

(3; –1) чекитин – параболанын чокусун түзөбүз (14- сүрөт).



14-сүрөт.



15-сүрөт.

2. (3; –1) чекит аркылуу параболанын симметрия огун жүргүзөбүз (14-сүрөт).

3. $-2x^2 + 12x - 19 = 0$ теңдемесин чыгарып, чыныгы тамырлардын жоктугуна, андыктан парабола *Ox* огун кеспестигине ишеним пайда кылабыз.

4. *Ox* огунда $x = 3$ чекитке салыштырмалуу симметриялуу болгон эки чекитти, мисалы, $x = 2$ жана $x = 4$ чекиттерин алабыз. Функциянын бул чекиттердеги маанилерин эсептейбиз:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

(2; –3) жана (4; –3) чекиттерин түзөбүз (14-сүрөт).

5. Түзүлгөн чекиттер аркылуу парабола жүргүзөбүз (15-сүрөт). ▲

3- маселе. $y = -x^2 + x + 6$ функциясынын графигин түз жана ошол функциясы кандай касиеттерге ээ экенин аныкта.

△ Функциянын графигин түзүү үчүн анын нөлдөрүн табабыз: $-x^2+x+6=0$, мындан $x_1=-2$, $x_1=3$. Парабола чокусунун координаталарын мындайча табууга болот:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

$a=-1 < 0$ болгондуктан, параболанын тармактары ылдыйга багытталган.

Параболанын дагы бир нече чекитин табабыз: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)= 6$, $y(2) = 4$. Параболаны түзөбүз (16-сүрөт).

Графиктин жардамында $y = -x^2 + x + 6$ *функциясынын* төмөнкү *касиеттерин* алабыз:

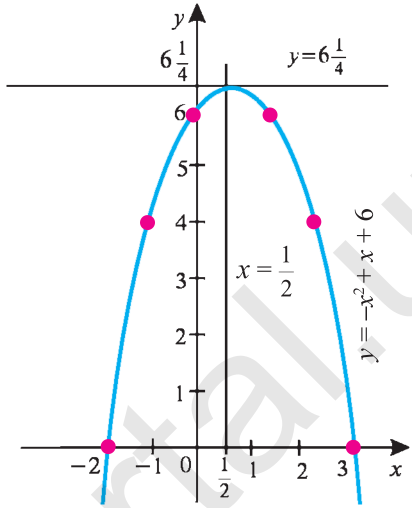
1) x тин каалагандай маанилеринде функциянын маанилери $6\frac{1}{4}$ га барабар же андан кичине;

2) $-2<x<3$ тө функциянын маанилери оң, $x<-2$ де жана $x>3$ тө терс, $x=-2$ жана $x=3$ тө нөлгө барабар;

3) функциясы $x\le\frac{1}{2}$ аралыкта өсөт, $x\ge\frac{1}{2}$ аралыкта азаят;

4) $x=\frac{1}{2}$ болгондо функциясы $6\frac{1}{4}$ ге барабар болгон эң чоң маанисин кабыл алат;

5) функциясынын графиги $x=\frac{1}{2}$ түз сызыгына салыштырмалуу симметриялуу.



16-сүрөт.

$y=ax^2+bx+c$ функциясы $x_0=-\frac{b}{2a}$ чекитте *эң кичине* же *эң чоң маанилерди* кабыл алат; бул x_0 чекит парабола чокусунун абсциссасы.

Функциянын x_0 чекиттеги маанисин $y_0 = y(x_0)$ формула боюнча табууга болот. *Эгерде $a > 0$ болсо, функция эң кичине мааниге ээ болот, эгерде $a < 0$ болсо, функция эң чоң мааниге ээ болот.*

Мисалы, $y = x^2 - 4x + 3$ функциясы $x = 2$ болгондо -1 ге барабар болгон эң кичине маанисин кабыл алат (13-*в* сүрөт); $y = -2x^2 + 12x-9$ функциясы $x = 3$ болгондо -1 ге барабар болгон эң чоң маанисин кабыл алат (15-сүрөт).

4 - маселе. Эки оң сандын суммасы 6 га барабар. Эгерде алардын квадраттарынын суммасы эң кичине болсо, ошол сандарды тап. Ошол сандар квадраттары суммасынын эң кичине мааниси кандай болот?

△ Биринчи санды x тамгасы менен белгилейбиз, анда экинчи сан $6-x$, алар квадраттарынын суммасы болсо $x^2 + (6 - x)^2$ болот. Бул туюнтманын формасын алмаштырабыз:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Маселе $y=2x^2-12x+36$ функциясынын эң кичине маанисин табууга келтирилди. Ошол парабола чокусунун координаталарын табабыз:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \; y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Демек, $x = 3$ болгондо, функция 18 ге барабар эң кичине маанини кабыл алат.

Ошентип, биринчи сан 3 кө барабар, экинчи сан да $6 - 3 = 3$ кө барабар. Бул сандар квадраттары суммасынын мааниси 18 ге барабар. ▲

Көнүгүүлөр

35. Парабола чокусунун координаталарын тап:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Параболанын координата октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

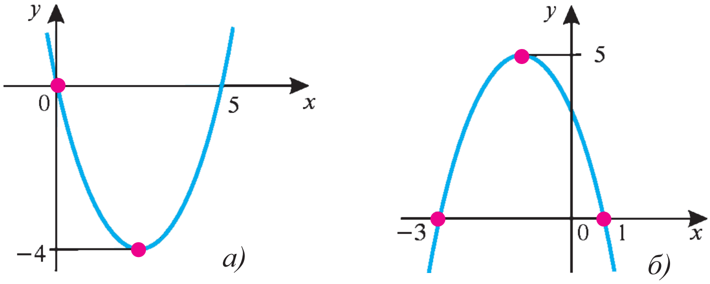
Функциянын графигин түз жана график боюнча: 1) x тин функциянын маанилери оң, терс болгон маанилерин тап; 2) функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тап; 3) x тин кандай маанилеринде функция эң чоң же эң кичине маанилерди кабыл алышын аныкта жана аларды тап **(37–38):**

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Квадраттык функциянын берилген графиги (17-сүрөт) боюнча анын касиеттерин аныкта.

40. 15 санын эки сандын суммасы түрүндө сүрөттөгөнүңдө, бул сандардын көбөйтүндүсү эң чоң болсун.



17-сүрөт.

41. Эки сандын суммасы 10 го барабар. Эгерде ошол сандар кубдарынын суммасы эң кичине болсо, ошол сандарды тап.

42. Үйдүн дубалдарына кыналган тик бурчтук формасындагы аянтты үч жагынан 12 м лүү тосмо менен курчап алуу талап кылынат. Аянттын өлчөмдөрү кандай болгондо, анын аянты эң чоң болот?

43. Үч бурчтукта негизи менен ошол негизге түшүрүлгөн бийиктиктин суммасы 14 см ге барабар. Ушундай үч бурчтук 25 см^2 ге барабар аянтка ээ болушу мүмкүнбү?

44. Графикти түзбөстөн, x тин кандай маанисинде функция эң чоң (эң кичине) мааниге ээ болушун аныкта; ошол маанини тап:

1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Эгерде:

1) параболанын тармактары жогоруга багытталган, анын чокусунун абсциссасы терс, ал эми ординатасы оң болсо;
2) параболанын тармактары ылдыйга багытталган, анын чокусунун абсцисса жана ординатасы терс болсо, $y = ax^2 + bx + c$ парабола теңдемеси коэффициенттеринин белгилерин аныкта.

46. 5 м бийиктиктен жаадан 50 м/с ылдамдык менен жогоруга вертикалдуу түрдө жебе атылды. Жебенин t секунддан кийин көтөрүлгөн бийиктиги метрлерде $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$ формула менен эсептелет, мында г ≈ 10 м/с^2. Жебе канча секунддан кийин: 1) эң чоң бийиктикке чыгат жана ал кандай бийиктик болот? 2) Жерге түшөт?

6-§. КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫК ЖАНА АНЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

1 - маселе. Тик бурчтуктун жактары 2 дм жана 3 дм ге барабар. Анын ар бир жагы бирдей сандагы дециметрлерге чоңойтурулду, натыйжада тик бурчтуктун аянты 12 дм^2 ден чоң болду. Ар бир жагы кандайча өзгөргөн?

△ Тик бурчтуктун ар бир жагы x дециметрге чоңойтурулган болсун. Анда жаңы тик бурчтуктун жактары $(2 + x)$ жана $(3+x)$ дециметрге, анын аянты болсо $(2+x)(3+x)$ квадрат дециметрге барабар болот. Маселенин шарты боюнча $(2+x)(3+x)>12$, мындан $x^2+5x+6 > 12$ же $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Бул барабарсыздыктын сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Маселенин шарты боюнча, $x > 0$ болгондуктан $x + 6 > 0$.

Барабарсыздыктын эки бөлүгүн $x + 6$ оң санга бөлүп, $x-1 >0$, б. а. $x > 1$ ди алабыз.

Жообу: тик бурчтуктун ар бир жагы 1 дм ден көбүрөөккө чоңойтурулган. ▲

$x^2 + 5x - 6 > 0$ барабарсыздыгында x менен белгисиз сан белгиленген. Бул– квадраттык барабарсыздыкка мисал.

Эгерде барабарсыздыктын сол бөлүгүндө квадраттык функция, оң бөлүгүндө болсо нөл турса, мындай барабарсыздыкка квадраттык барабарсыздык дейилет.

Мисалы,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \qquad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

барабарсыздыктары квадраттык барабарсыздыктар болот.

Бир белгисиздүү *барабарсыздыктын чыгарылышы* деп, белгисиздин ошол барабарсыздыкты туура сандуу барабарсыздыкка айландырган бардык маанилерине айтылышын эскерте кетебиз.

Барабарсыздыкты чыгаруу — анын бардык чыгарылыштарын табуу же алардын жоктугун көрсөтүү дегенди билдирет.

2- маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ $x^2-5x+6=0$ квадраттык теңдеме эки түрдүү $x_1=2$, $x_2=3$ тамырга ээ. Демек, x^2-5x+6 квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратууга болот:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Ошондуктан берилген барабарсыздыкты мындайча жазууга болот:

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Эгерде эки көбөйтүүчү бирдей белгиге ээ болсо, алардын көбөйтүндүсү оң экени анык.

1) Эки көбөйтүүчү оң, б. а. $x-2>0$ жана $x-3>0$ болгон учурду карап көрөбүз.

Бул эки барабарсыздык төмөнкү системаны түзөт:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0. \end{cases}$$

Системаны чыгарып, $\begin{cases} x>2, \\ x>3 \end{cases}$ ын алабыз, мындан $x>3$.

Демек, бардык $x>3$ сандар $(x-2)(x-3)>0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары болот.

2) Эки көбөйтүүчү терс, б. а. $x-2<0$ жана $x-3<0$ болгон учурду карап көрөбүз.

Бул эки барабарсыздык төмөнкү системаны түзөт:

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Системаны чыгарып, $\begin{cases} x<2, \\ x<3 \end{cases}$ ын алабыз, мындан $x<2$.

Демек, бардык $x<2$ сандар да $(x-2)(x-3)>0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары болот.

Ошентип, $(x-2)(x-3)>0$ дүн, демек, берилген $x^2-5x+6>0$ барабарсыздыгынын да чыгарылыштары $x<2$ жана $x>3$ сандар болот.

Жообу: $x<2$, $x>3$. ▲

Эгерде $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеме эки түрдүү тамырга ээ болсо, анда $ax^2+bx+c>0$ жана $ax^2+bx+c<0$ квадраттык барабарсыздыктарды чыгарууну, алардын сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып, биринчи даражалуу барабарсыздыктар системасын чыгарууга келтирүүгө болот.

3- маселе. $-3x^2-5x+2>0$ барабарсыздыгын чыгар.

△ Эсептөөлөрдү оңой жүргүзүү үчүн берилген барабарсыздыкты биринчи коэффициенти оң болгон квадраттык барабарсыздыктар көрүнүшүндө сүрөттөйбүз. Ал үчүн анын эки бөлүгүн -1 ге көбөйтөбүз:

$$3x^2+5x-2<0.$$

$3x^2+5x-2=0$ теңдеменин тамырларын табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{-5-\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5-7}{6},$$

$$x_1=\frac{1}{3},\ \ x_2=-2.$$

Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Мындан эки системаны алабыз:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3}>0, \\ x+2<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3}<0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

Биринчи системаны минтип жазууга болот:

$$\begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x<-2, \end{cases}$$

бул система чыгарылыштарга ээ эместиги көрүнүп турат.

Экинчи системаны чыгарып, төмөнкүнү табабыз:

$$\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ x>-2, \end{cases}$$

мындан $-2<x<\frac{1}{3}$.

Демек, $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$ барабарсыздыгынын, б. а. $-3x^2-5x+2>0$ дүн чыгарылыштары $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$ интервалдагы бардык сандар болот.

Жообу: $-2<x<\frac{1}{3}$. ▲

Көнүгүүлөр

47. (Оозеки.) Төмөнкү барабарсыздыктардан кайсылары квадраттык барабарсыздык экенин көрсөт:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \le 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \le 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Барабарсыздыкты квадраттык барабарсыздык көрүнүшүнө келтир:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Оозеки.) 0; –1; 2 сандарынан кайсылары

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \ge 0$;
3) $x^2 - x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

барабарсыздыгынын чыгарылыштары болот?

Барабарсыздыкты чыгар (**50–52**):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$; 3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

53. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \le 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Функциянын графигин түз. График боюнча x тин функциясы оң маанилер; терс маанилер; нөлгө барабар маанини кабыл алган бардык маанилерин тап:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. x_1 жана x_2 сандар (мында $x_1 < x_2$) $y = ax^2 + bx + c$ функциясынын нөлдөрү. Эгерде x_0 саны x_1 жана x_2 ортосунда жатса, б. а. $x_1 < x_0 < x_2$ болсо, анда $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ барабарсыздыктын аткарылышын далилде.

7-§. КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТЫ КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯНЫН ГРАФИГИ ЖАРДАМЫНДА ЧЫГАРУУ

Квадраттык функция $y = ax^2 + bx + c$ (мында $a \neq 0$) формуласы менен берилишин эскерте кетебиз. Ошондуктан квадраттык барабарсыздыкты чыгаруу квадраттык функциянын нөлдөрүн жана квадраттык функция оң же терс маанилер кабыл алган аралыктарды издөөгө келтирилет.

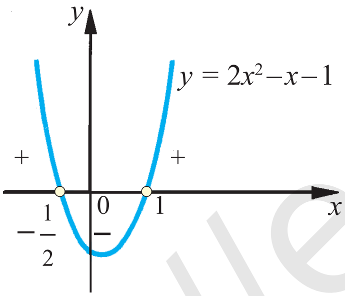
1- маселе. Барабарсыздыкты график жардамында чыгар:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

△ $y = 2x^2 - x - 1$ квадраттык функциянын графиги — тармактары жогоруга багытталган парабола.

Анын Ox огу менен кесилишүү чекиттерин табабыз. Ал үчүн $2x^2 - x - 1 = 0$ квадраттык теңдемени чыгарабыз. Бул теңдеменин тамырлары:

$$x_{1,2} = \frac{1-\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1-3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$



18- сүрөт.

Демек, парабола Ox огун $x = -\frac{1}{2}$ жана $x = 1$ чекиттерде кесилишет (18- сүрөт).

$2x^2 - x - 1 \leq 0$ барабарсыздыгын x тин функция нөлгө барабар же функциянын маанилери терс болгон маанилери канааттандырат, б. а. x тин мындай маанилеринде параболанын чекиттери Ox огунда же ошол октон ылдыйда жатат. 18- сүрөттөн көрүнүп тургандай, бул маанилер $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ кесиндидеги бардык сандар болот.

Жообу: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$ ▲

Бул функциянын графигинен берилген барабарсыздыктан белгиси менен гана айырмаланган башка барабарсыздыктарды чыгарууда да пайдаланууга болот. 18- сүрөттөн көрүнүп тургандай:

1) $2x^2 - x - 1 < 0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары $-\frac{1}{2} < x < 1$, б. а. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ интервалдагы бардык сандар;

2) $2x^2 - x - 1 > 0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары $x < -\frac{1}{2}$ жана $x > 1$ аралыктардагы бардык сандар болот;

3) $2x^2 - x - 1 \geq 0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары $x \leq -\frac{1}{2}$ жана $x \geq 1$ аралыктардагы бардык сандар болот.

2- маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

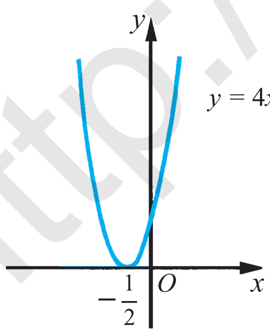
$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

△ $y = 4x^2 + 4x + 1$ функциясы графигинин эскизин чиебиз. Бул параболанын тармактары жогоруга багытталган. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ теңдеме бир $x = -\frac{1}{2}$ тамырга ээ, ошондуктан парабола Ox огуна $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ чекитте жанат. Бул функциясынын графиги 19-сүрөттө берилген. Берилген барабарсыздыкты чыгаруу үчүн x тин кандай маанилерде функциянын маанилери оң болушун аныктоо керек. Ошентип, $4x^2 + 4x + 1 > 0$ барабарсыздыгын x тин параболанын чекиттери Ox огунан жогоруда жаткан маанилери канааттандырат. 19-сүрөттөн көрүнүп тургандай, мындай маанилер $x = -0,5$ тен башка бардык чыныгы сандар болот.

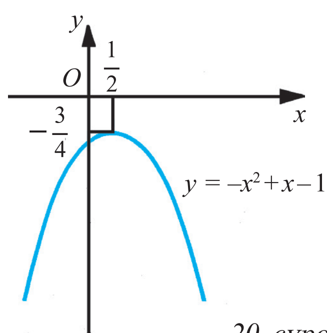
Жообу: $x \neq -0,5$. ▲

19-сүрөттөн көрүнүп тургандай:

1) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ барабарсыздыгынын чыгарылышы бардык чыныгы сандар болот;



19-сүрөт.



20-сүрөт.

2) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ барабарсыздык бир $x = -\frac{1}{2}$ чыгарылышка ээ;

3) $4x^2 + 4x + 1 < 0$ барабарсыздык чыгарылыштарга ээ эмес.

Эгерде $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ экендиги этибар алынса, бул барабарсыздыктарды оозеки чыгарууга болот.

3- маселе. $-x^2 + x - 1 < 0$ барабарсыздыгын чыгар.

△ $y = -x^2 + x - 1$ функциясы графигинин эскизин чиебиз. Бул параболанын тармактары ылдыйга багытталган. $-x^2 + x - 1 = 0$ теңдеменин чыныгы тамырлары жок, андыктан парабола Ox огун кесип өтпөйт. Демек, бул парабола Ox огунан ылдыйда жайлашкан (20- сүрөт). Бул бардык x терде квадраттык функциянын маанилери терс, б. а. $-x^2 + x - 1 < 0$ барабарсыздыгы x тин бардык чыныгы маанилеринде аткарылышын билдирет.▲

20- сүрөттөн $-x^2 + x - 1 \leq 0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары x тин бардык чыныгы маанилери болушу, $-x^2 + x - 1 > 0$ жана $-x^2 + x - 1 \geq 0$ барабарсыздыктар болсо чыгарылыштарга ээ эместиги көрүнүп турат.

Ошентип, *квадраттык барабарсыздыкты график жардамында чыгаруу үчүн:*

1) квадраттык функциянын биринчи коэффициентинин белгиси боюнча парабола тармактарынын багытын аныктоо;

2) тиешелүү квадраттык теңдеменин чыныгы тамырларын табуу же алардын жоктугун аныктоо;

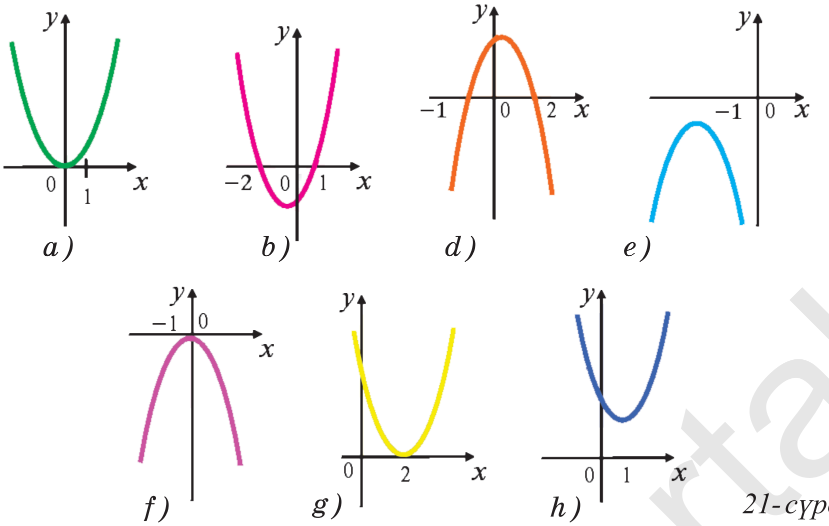
3) квадраттык функциянын Ox огу менен кесилишүү чекиттеринен же урунуу чекитинен (эгерде алар болсо) пайдаланып, квадраттык функция графигинин эскизин түзүү;

4) график боюнча функциянын керектүү маанилерди кабыл алган аралыктарды аныктоо керек.

Көнүгүүлөр

56. $y = x^2 + x - 6$ функциясынын графигин түз. График боюнча x тин функциясы оң маанилер; терс маанилерди кабыл алган маанилерин тап.

57. (Оозеки.) $y = ax^2 + bx + c$ функциясынын графигинен пайдаланып (21-сүрөт), x тин кандай маанилеринде бул функция оң маанилерди, терс маанилерди, нөлгө барабар маанини кабыл алышын көрсөт.



21-сүрөт.

Квадраттык барабарсыздыкты чыгар (**58–62**):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \le 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \ge 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \ge 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \le 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \le 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \ge 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \ge 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Оозеки.) Барабарсыздыкты чыгар:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

Квадраттык барабарсыздыкты чыгар (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
5) $2x^2 - 4x + 9 \le 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \ge 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$; 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \geq 0$; 6) $3x^2 + x \leq 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;

3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. x тин функциясы нөлдөн чоң болбогон маанилерди кабыл алган бардык маанилерин тап:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;

3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) $x^2 - 2x + q > 0$ барабарсыздыгынын $q > 1$ болгондогу чыгарылыштары x тин бардык чыныгы маанилери болушун көрсөт;
2) $x^2 + 2x + q \leq 0$ барабарсыздыгы $q > 1$ болгондо чыныгы чыгарылыштарга ээ эместигин көрсөт.

69. r дин $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$ барабарсыздыгы x тин бардык чыныгы маанилеринде аткарылтган бардык маанилерин тап.

8-§. ИНТЕРВАЛДАР УСУЛУ

Барабарсыздыктарды чыгарууда көбүнесе интервалдар усулу колдонулат. Бул усулду мисалдарда түшүндүрөбүз.

1-маселе. x тин кандай маанилеринде $x^2 - 4x + 3$ квадраттык үч мүчө оң маанилерди, кандай маанилеринде болсо терс маанилерди кабыл алышын аныкта.

△ $x^2 - 4x + 3 = 0$ теңдеменин тамырларын табабыз:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Ошондуктан $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$x = 1$ жана $x = 3$ чекиттер (22-сүрөт) сан огун үч аралыкка бөлөт:

22-сүрөт.

$$x < 1; \quad 1 < x < 3; \quad x > 3.$$

$1 < x < 3$ сыяктуу $x < 1$, $x > 3$ аралыктарга да *интервалдар* дейилет.

Сан огу боюнча оңдон солго араткеттенип, $x > 3$ интервалда $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ үч мүчө оң маанилерди кабыл алышын көрөбүз, анткени андагы эки $x - 1$ жана $x - 3$ көбөйтүүчү да оң.

Кийинки $1<x<3$ интервалда ошол үч мүчө терс маанилерди кабыл алат жана, ошентип, $x = 3$ чекит аркылуу өткөндө белгисин өзгөртөт. Мунун себеби, $(x-1)(x-3)$ көбөйтүндүдө $x = 3$ чекит аркылуу өткөндө $x - 1$ көбөйтүүчү белгисин өзгөртпөйт, экинчи $x-3$ көбөйтүүчү болсо белгисин өзгөртөт.

$x = 1$ чекит аркылуу өткөндө үч мүчө кайра белгисин өзгөртөт, анткени $(x-1)(x-3)$ көбөйтүндүдө биринчи $x-1$ көбөйтүүчү белгисин өзгөртөт, экинчи $x-3$ көбөйтүүчү болсо өзгөртпөйт.

Демек, сан огу боюнча ондон солго карай аракеттенип, бир интервалдан кошуна интервалга өтүү учурунда $(x-1)(x-3)$ көбөйтүндүнүн белгилери алмашып отурат.

Ошентип, $x^2 - 4x + 3$ квадраттык үч мүчөнүн белгиси жөнүндөгү маселени төмөнкү усул менен чыгарууга болот.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ теңдеменин тамырларын сан огунда белгилейбиз: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Алар сан огун үч интервалга ажыратат (22-сүрөт). $x > 3$ интервалда $x^2 - 4x + 3$ үч мүчөнүн оң болушун тактап, үч мүчөнүн калган интервалдардагы белгилерин алмашып баруу тартипте белгилейбиз (23-сүрөт). 23-сүрөттөн көрүнүп тургандай, $x < 1$ жана $x > 3$ болгондо $x^2-4x + 3 > 0$, $1 < x < 3$ болгондо болсо $x^2 - 4x + 3 < 0$. ▲

23-сүрөт.

Каралган усулга *интервалдар усулу* дейилет. Бул усулдан квадраттык жана башка кээ бир барабарсыздыктарды чыгарууда пайдаланылат.

Мисалы, 1-маселени чыгарганда биз $x^2 - 4x + 3 > 0$ жана $x^2 - 4x + 3 < 0$ барабарсыздыктарын интервалдар усулу менен чыгардык.

2- маселе. $x^3 - x < 0$ барабарсыздыгын чыгар.

△ $x^3 - x$ көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

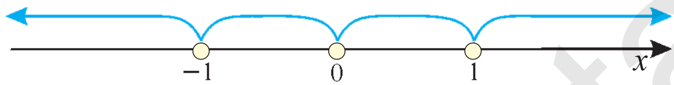
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Демек, барабарсыздыкты минтип жазууга болот:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

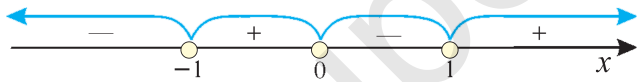
Сан огунда -1, 0 жана 1 чекиттерин белгилейбиз. Бул чекиттер сан огун төрт интервалга ажыратат (24- сүрөт):

$$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1.$$



24- сүрөт.

$x > 1$ болгондо $(x + 1)x(x - 1)$ көбөйтүндүнүн бардык көбөйтүүчүлөрү оң, андыктан $x > 1$ интервалда $(x+1)x(x-1) > 0$ болот. Кошуна интервалга өткөндө көбөйтүндү белгисинин алмашышын этибар алып, ар бир интервал үчүн $(x + 1)x(x - 1)$ көбөйтүндүнүн белгисин табабыз (25-сүрөт).



25- сүрөт.

Ошентип, барабарсыздыктын чыгарылыштары x тин $x < -1$ жана $0 < x < 1$ интервалдардагы бардык маанилери болот.

Жообу: $x < -1,\ 0 < x < 1.$ ▲

3- маселе. $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ барабарсыздыгын чыгар.

△ Берилген барабарсыздыкты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Бардык $x \neq -3$ тө $(x + 3)^2 > 0$ болгондуктан, $x \neq -3$ тө (1) барабарсыздыгынын чыгарылыштары жыйнагы

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

барабарсыздыгын чыгарылыштары жыйнагы менен үстү-үстүнөн түшөт.

$x = -3$ маани (1) барабарсыздыгынын чыгарылышы болбойт, анткени $x = -3$ болгондо барабарсыздыктын сол бөлүгү 0 гө барабар.

(2) барабарсыздыгын интервалдар усулу менен чыгарып, $x < 2$, $x > 3$ тү алабыз (26- сүрөт).

26-сүрөт.

$x = –3$ берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болбостугун этибар алып, акырынды жоопту мындайча жазабыз

$$x < -3, \quad -3 < x < 2, \quad x > 3. \ \blacktriangle$$

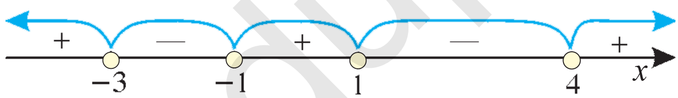
4- маселе. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгар:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

$\triangle$ Бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып алабыз:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \qquad (3)$$

Сан огунда бөлчөктүн алымы же бөлүмү нөлгө айланган –3; –1; 1; 4 чекиттерди белгилейбиз. Бул чекиттер сан түз сызыгын беш интервалга ажыратат (27-сүрөт). $x > 4$ болгондо бөлчөктүн алымы жана бөлүмүндөгү бардык көбөйтүүчүлөр оң жана ошондуктан бөлчөк оң.



27-сүрөт.

Бир интервалдан кийинкисине өткөндө бөлчөк белгисин өзгөртөт, ошондуктан бөлчөктүн белгилерин 27-сүрөттөгүдөй коюуга болот. $x = -3$ жана $x = 1$ маанилер (3) барабарсыздыгын канааттандырат, $x = -1$ жана $x = 4$ болгондо болсо бөлчөк мааниге ээ эмес. Ошентип, берилген барабарсыздык төмөнкү чыгарылыштарга ээ:

$$x \leq -3, \quad -1 < x \leq 1, \quad x > 4. \ \blacktriangle$$

Көнүгүүлөр

70. (Оозеки.) $x = 5$ маани барабарсыздыктын чыгарылышы болушун көрсөт:

1) $(x - 1)(x - 3) > 0$; 2) $(x + 2)(x + 5) > 0$;
3) $(x - 7)(x - 10) > 0$; 4) $(x + 1)(x - 4) > 0$.

Барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгар (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;

3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;

4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;

3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;

3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geq 0$;

4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;

3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Барабарсыздыкты чыгар (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;

4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x\ \ 6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$;

9-§. ФУНКЦИЯНЫН АНЫКТАЛУУ ЗОНАСЫ

Сен 7-класста функция түшүнүгү менен таанышкансың. Ошол түшүнүктү эскерте кетебиз.

Эгерде сандардын кандайдыр жыйнагынан алынган x тин ар бир маанисине y саны туура келтирилсе, ошол жыйнакта *$y(x)$ функциясы* берилген дейилет. Мында x ке *эрктүү өзгөрүүчү* же *аргумент*, y ке *эрксиз өзгөрүүчү* же *функция* дейилет.

Сен $y=kx+b$ сызыктуу функция жана $y=ax^2+bx+c$ квадраттык функция менен таанышсың.

Бул функциялар үчүн аргументтин мааниси каалагандай чыныгы сан болушу мүмкүн.

Эми ар бир терс эмес x санга $\sqrt{x}$ санды туура койгон функцияны, б. а. $y=\sqrt{x}$ функциясын карап көрөбүз. Бул функция үчүн аргумент терс эмес гана маанилерди кабыл алышы мүмкүн: $x \geq 0$. Анда функциясы бардык терс эмес сандар жыйнагында аныкталган дейилет жана бул жыйнак $y=\sqrt{x}$ функциясынын *аныкталуу зонасы* деп аталат.

Демек, функциянын *аныкталуу зонасы* деп, анын аргументи кабыл алышы мүмкүн болгон бардык маанилер жыйнагына айтылат.

Мисалы, $y=\frac{1}{x}$ формула менен берилген функция $x \neq 0$ дө аныкталган, б. а. бул функциянын аныкталуу зонасы – нөлдөн айырмалуу бардык чыныгы сандардын жыйнагы.

Эгерде функция формула менен берилген болсо, анда функция аргументтин берилген формула мааниге ээ болгон (б. а. формуланын оң бөлүгүндөгү туюнтмада көрсөтүлгөн бардык амалдар аткарылган) бардык маанилеринде аныкталган, деп эсептөө кабыл алынган.

Формула менен берилген функциянын аныкталуу зонасын табуу – аргументтин формула мааниге ээ болгон бардык маанилерин табуу дегенди билдирет.

1 -маселе. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

1) $y(x)=2x^2+3x+5x;$ 2) $y(x)=\sqrt{x-1}\,;$

3) $y(x)=\dfrac{1}{x+2}\,;$ 4) $y(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x\ \ 2}}\,.$

△ 1) $2x^2+3x+5$ туюнтма x тин каалагандай маанисинде мааниге ээ болгондуктан, функция бардык x терде аныкталган.

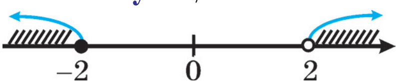
Жообу: x – каалагандай сан.

2) $\sqrt{x-1}$ туюнтма $x-1\geq 0$ болгондо мааниге ээ, б. а. функция $x\geq 1$ болгондо аныкталган.

Жообу: $x\geq 1$.

3) $\dfrac{1}{x+2}$ туюнтма $x+2\neq 0$ болгондо мааниге ээ, б. а. функция $x\neq -2$ болгондо аныкталган.

Жообу: $x\neq -2$.

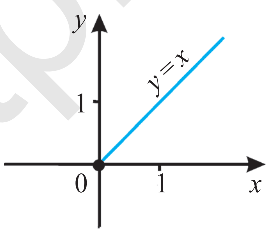


28-сүрөт.

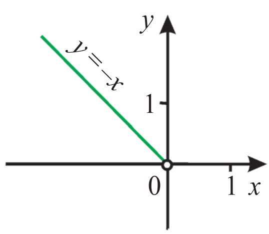
4) $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x\ \ 2}}$ туюнтма $\dfrac{x+2}{x-2}\geq 0$ болгондо мааниге ээ. Бул барабарсыздыкты чыгарып, алабыз (28-сүрөт): $x\leq -2$ жана $x>2$, б. а. функция $x\leq -2$ жана $x>2$ болгондо аныкталган.

Жообу: $x\leq -2,\quad x>2$. ▲

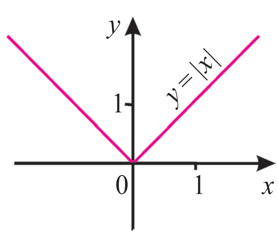
Функциянын графиги деп, координаталар тегиздигинин абсциссалары анын аныкталуу зонасынан алынган эркүү өзгөрүүчүнүн маанилерине, ординаталары функциянын тиешелүү маанилерине барабар болгон чекиттер жыйнагына айтылышын эскерте кетебиз.



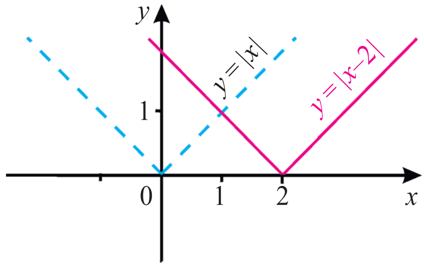
29-сүрөт.



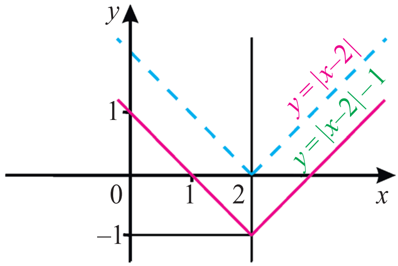
30-сүрөт.



31-сүрөт.



32-сүрөт.



33-сүрөт.

2 - маселе. $y=|x|$ функциясынын аныкталуу зонасын тап жана анын графигин түз.

△ Эскерте кетебиз:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ эгерде } x^3\geq 0 \text{ болсо,} \\ -x, \text{ эгерде } x<0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

$|x|$ туюнтма каалагандай чыныгы x те мааниге ээ, б. а. $y=|x|$ функциясынын аныкталуу зонасы бардык чыныгы сандар жыйнагынан турат.

Эгерде $x\geq 0$ болсо, анда $|x|=x$ болот жана, ошондуктан, $x\geq 0$ болгондо $y=|x|$ функциясынын графиги биринчи координата бурчунун биссектрисасы болот (29-сүрөт).

Эгерде $x<0$ болсо, анда $|x|=-x$ болот, демек, терс x тер үчүн $y=|x|$ функциясынын графиги экинчи координата бурчунун биссектрисасы болот (30-сүрөт).

$y=|x|$ функциясынын графиги 31-сүрөттө берилген. ▲

Каалагандай x үчүн $|-x|=|x|$. Ошондуктан $y=|x|$ функциясынын графиги ординаталар огуна салыштырмалуу симметриялуу жайлашкан.

3 - маселе. $y=|x-2|-1$ функциясынын графигин түз.

△ $y=|x-2|$ функциясынын графиги $y=|x|$ функциясынын графигинен аны Ox огу боюнча 2 бирдикке оңго жылдыруу менен алынат (32-сүрөт).

$y=|x-2|-1$ функциясынын графигин алуу үчүн $y=|x-2|$ функциясынын графигин бир бирдик ылдыйга жылдыруу жетиштүү (33-сүрөт). ▲

Көнүгүүлөр

81. Функция $y(x) = x^2 - 4x + 5$ формуласы менен берилген:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$ ни тап;

2) эгерде $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$ болсо, x тин маанисин тап.

82. Функция $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$ формуласы менен берилген:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$ тү тап;

2) эгерде $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$ болсо, x тин маанисин тап.

Функциянын аныкталуу зонасын тап (**83–84**):

83. (Оозеки).

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 2) $y = 2 - x - 3x^2$; 3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y = \dfrac{3}{5 - x^2}$; 5) $y = \sqrt[4]{6 - x}$; 6) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^2 - 7x + 10}$;

3) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 5}$; 4) $y = \sqrt[6]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{4\ \ x}}$.

85. Функция $y(x) = |2 - x| - 2$ формула менен берилген:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$ ni тап;

2) эгерде $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$ болсо, x тин маанисин тап.

86. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

3) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}}$.

5) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$; 6) $y = \sqrt[8]{\dfrac{x^2+4x\ \ 5}{x-2}}$;

87. (−2; 1) чекит функциянын графигине тиешелүү болобу:

1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;

3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Функциянын графигин түз:

1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;

4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. $y=ax^2+bx+c$ функциясы A (0; 1), B (1; 2), C ($\frac{5}{6}$; 1) чекиттеринен өтөт. 1) a, b, c ны тап; 2) x тин кандай маанилеринде $y = 0$ болот? 3) функциясынын графигин чий.

10-§. ФУНКЦИЯНЫН ӨСҮШҮ ЖАНА КЕМИШИ

Сен $y = x$ жана $y = x^2$ функциялары менен таанышсың. Бул функциялар *даражалуу функция*нын, б. а.

$$y=x^r \tag{1}$$

(мында r – берилген сан) функциясынын өзгөчө учур саналат.

r – натуралдык сан болсун, $r = n = 1, 2, 3, \ldots$ дейли. Анда натуралдык көрсөткүчтүү даражалуу функция $y = x^n$ ди алабыз.

Бул функция бардык чыныгы сандар жыйнагында, б. а. сан огунун бардык жеринде аныкталган. Адатта, бардык чыныгы сандар жыйнагы $\boldsymbol{R}$ тамгасы менен белгиленет. Ошентип, натуралдык көрсөткүчтүү даражалуу функция $y=x^n$, $x\in\boldsymbol{R}$ үчүн аныкталган. Эгерде (1) де $r = -2k$, $k\in\boldsymbol{N}$ болсо, анда $y=x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$ функциясы алынат. Бул функция x тин нөлдөн айырмалуу бардык маанилеринде аныкталган. Анын графиги Oy огуна салыштырмалуу симметриялуу. $r = -(2k-1)$, $k\in\boldsymbol{N}$ болсо, анда $y=x^{-(2k-1)}=\frac{1}{x^{2k-1}}$ функциясын алабыз. Анын касиеттери $y=\frac{1}{x}$ функциясынын касиеттери сыяктуу болот. p жана q – натуралдык сандар жана $r=\frac{p}{q}$ – кыскарбас бөлчөк болсун. $y=\sqrt[q]{x^p}$ функциясынын аныкталуу зонасы p жана q нун жуп-тактыгына карай түрдүүчө болот. Мисалы, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ функциялар каалагандай $x\in \boldsymbol{R}$ da аныкталган. $y=\sqrt[4]{x^3}$ функциясы болсо x тин терс эмес, б. а. $x\geq 0$ маанилеринде аныкталган.

8-класстан белгилүү болгондой, ар бир иррационалдуу санды чектүү ондук бөлчөк менен, б. а. рационалдуу сан менен жакындаштырууга болот. Практикада иррационалдуу сандардын үстүндө амалдар алардын рационалдуу жакындашуулары жардамында аткарылат. Бул амалдар киргизилгенде, амалдардын, барабардыктар жана барабарсыздыктардын рационалдуу сандар үчүн касиеттери иррационалдуу сандар үчүн да толук сакталат.

r_1, r_2, ..., r_k, ... рационалдуу сандар r иррационалдуу сандын рационалдуу жакындашуулары болсун. Анда x оң сан болгондо, x тин рационалдуу даражалары, б. а. x^{r_1}, x^{r_2}, ... , x^{r_k}, ... сандар x^r даражанын жакындашуулары болот. Мындай аныкталган даражага *иррационалдуу көрсөткүчтүү даража* дейилет. Демек, $x > 0$ үчүн даража көрсөткүчү каалагандай r болгон $y = x^r$ функциясын аныктоого болот.

Даражалуу функция x тин (1) формула мааниге ээ болгон маанилери үчүн аныкталган. Мисалы, $y = x$ жана $y = x^2$ ($r = 1$ жана $r = 2$) функциялардын аныкталуу зонасы бардык чыныгы сандар жыйнагы болот; $y=\frac{1}{x}$ ($r = 1$) функциясынын аныкталуу зонасы нөлгө барабар болбогон бардык чыныгы сандар жыйнагы болот; $y=\sqrt{x}$ ($r=\frac{1}{2}$) функциясынын аныкталуу зонасы бардык терс эмес сандар жыйнагынан турат.

! **Эгерде аргументтин кандайдыр аралыктан алынган чоң маанисине функциянын чоң мааниси туура келсе, б. а. ошол аралыкка тиешелүү каалагандай x_1, x_2 үчүн $x_2>x_1$ барабарсыздыктан $y(x_2) > y(x_1)$ барабарсыздык келип чыкса, $y(x)$ функциясына ошол аралыкта *өсүүчү* функция дейилет.**

! **Эгерде кандайдыр аралыкка тиешелүү каалагандай x_1, x_2 үчүн $x_2>x_1$ барабарсыздыктан $y(x_2) < y(x_1)$ келип чыкса, $y(x)$ функциясына ошол аралыкта *кемүүчү* функция дейилет.**

Мисалы, $y = x$ функциясы сандар огунда өсөт. $y = x^2$ функциясы $x\geq 0$ аралыкта өсөт, $x\leq 0$ аралыкта азаят.

$y = x^r$ даражалуу функциясынын өсүүсү же кемүүсү даража көрсөткүчүнүн белгисинен көз каранды.

Эгерде $r>0$ болсо, анда $y=x^r$ даражалуу функция $x\geq 0$ аралыкта *өсөт.*

$x_2>x_1\geq 0$ болсун. $x_2>x_1$ барабарсыздыгын оң r даражага көтөрүп, $x_2^r > x_1^r$ ди, б. а. $y(x_2) > y(x_1)$ ти алабыз.

Мисалы, $y=\sqrt{x}$ жана $y=x^{\frac{3}{2}}$ функциялар $x\geq 0$ аралыкта өсөт. Алардын графиктери 34-сүрөттө берилген. Сүрөттөн $y=\sqrt{x}$ функциясынын графиги $0<x<1$ аралыкта $y = x$ функциясынын графигинен жогоруда, $x > 1$ аралыкта $y = x$ функциясынын графигинен ылдыйда жатышы көрүнөт.

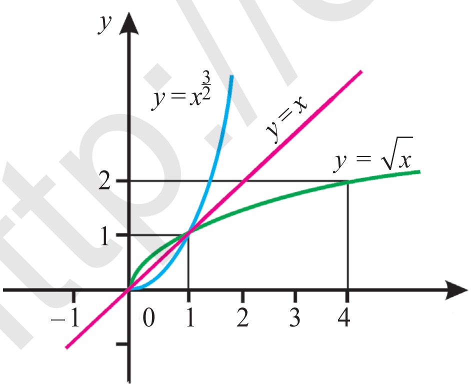
Эгерде $0<r<1$ болсо, $y = x^r$ функциясынын графиги куду ушундай касиетке ээ болот.

$y=x^{\frac{3}{2}}$ нын графиги $0<x<1$ аралыкта $y=x$ функциясы графигинен ылдыйда, $x > 1$ аралыкта $y = x$ функциясы графигинен жогоруда жатат.

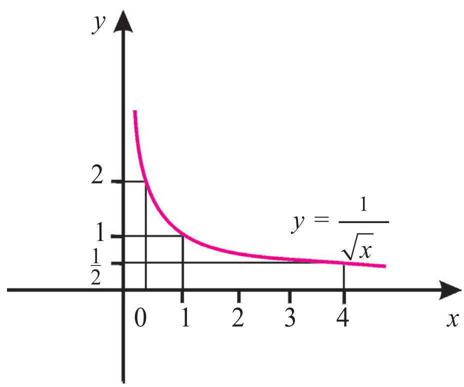
$r>1$ де $y-x^r$ функциясынын графиги да ушундай касиетке ээ болот.

Эми $r>1$ болгон учурду карап көрөбүз.

Эгерде $r < 0$ болсо, анда $y= x^r$ даражалуу функция $x > 0$ аралыкта *кемийт.*



34-сүрөт.



35-сүрөт.

○ $x_2 > x_1 > 0$ болсун. $x_2 > x_1$ барабарсыздыгын терс r даражага көтөрүп, сол жана оң бөлүктөрү оң болгон барабарсыздыктардын касиети боюнча $x_2^r > x_1^r$ ni, б. а. $y(x_2) < y(x_1)$ ти алабыз. ●

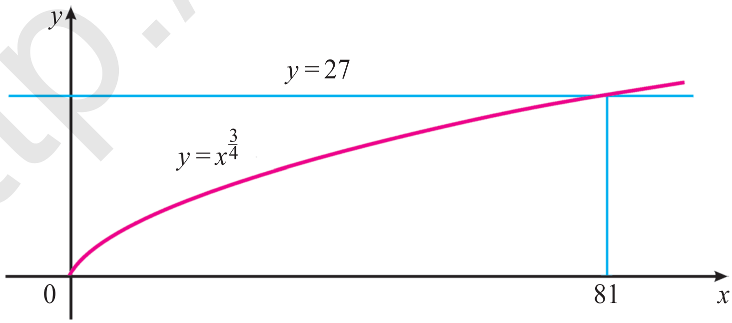
Мисалы, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, б. а. $y=x^{-\frac{1}{2}}$ функциясы $x>0$ аралыкта кемийт. Бул функциянын графиги 35-сүрөттө берилген.

1-маселе. $x^{\frac{3}{4}}=27$ теңдемени чыгар.

△ $y=x^{\frac{3}{4}}$ функциясы $x\geq 0$ дө аныкталган. Ошондуктан берилген теңдеме терс эмес тамырларга гана ээ болушу мүмкүн. Алардан бири: $x=27^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{3^3})^4=3^4=81$. Теңдеменин башка тамырлары жок, анткени $y=x^{\frac{3}{4}}$ функциясы $x\geq 0$ болгондо өсөт жана ошондуктан, эгерде $x>81$ болсо, анда $x^{\frac{3}{4}}>27$, эгерде $x<81$ болсо, анда $x^{\frac{3}{4}}<27$ болот (36-сүрөт). ▲

$x^r=b$ (мында $r\neq 0$, $b>0$) теңдеменин дайыма оң $x=b^{\frac{1}{r}}$ тамырга ээ экендиги, ошону менен бирге, бул тамырдын жалгыздыгы ушуга окшош далилденет. Демек, $y=x^r$ (мында $r>0$) функция $x>0$ болгондо *бардык оң маанилерди кабыл алат.*

Бул болсо, мисалы, $y=x^{\frac{3}{4}}$ (36-сүрөт) функциясынын акырындык менен өсүүсүнө карабастан, анын графиги Ox октон каалаганча



36-сүрөт.

алысташын жана $y = b$ түз сызыгын, b нын кандай оң сан болушуна карабастан, кесишин билдирет.

2 - маселе. $y = x + \frac{1}{x}$ функциясынын $x > 1$ аралыкта өсүшүн далилде.

△ $x_2 > x_1 > 1$ болсун. $y(x_2) > y(x_1)$ экендигин көрсөтөбүз. $y(x_2) - y(x_1)$ айырманы карап көрөбүз:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ болгондуктан $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 > 1$, $x_1x_2 > 0$. Ошондуктан $y(x_2) - y(x_1) > 0$, б. а. $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Көнүгүүлөр

90. Функциянын графигин түз жана анын өсүү жана кемүү аралыктарын тап:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 3 - x^2$; 5) $y = (1 - x)^2$; 6) $y = (2 + x)^2$.

91. (Оозеки). Функция $x > 0$ аралыкта өсөбү же кемийби:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

92. $x > 0$ болгондо функция графигинин эскизин чий:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{\frac{2}{3}}$.

93. Теңдеменин оң тамырын тап:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$;
5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; 7) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$; 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$.

94. Миллиметрлүү кагазга $y = \sqrt[4]{x}$ функциясынын графигин чий. График боюнча:

1) $y = 0{,}5$; 1; 4; $2{,}5$ болгондо x тин маанилерин тап;

2) $\sqrt[4]{1{,}5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2{,}5}$; $\sqrt[4]{3}$ маанилерди болжолдуу тап.

95. Функция графиктери кесилишкен чекиттердин координаталарын тап:

1) $y=x^{\frac{4}{3}}$ жана $y=625$; 2) $y=x^{\frac{6}{5}}$ жана $y=64$;

3) $y=x^{\frac{3}{2}}$ жана $y=216$; 4) $y=x^{\frac{7}{3}}$ жана $y=128$.

96. 1) $y=x+\frac{1}{x}$ функциясынын $0<x<1$ аралыкта кемишин далилде;

2) $y=\frac{1}{x^2+1}$ функциясынын $x\geq 0$ аралыкта кемишин жана $x\leq 0$ аралыкта өсүшүн далилде;

3) $y=x^3-3x$ функциясынын $x\geq -1$ жана $x\geq 1$ аралыктарда өсүшүн жана $-1\leq x\leq 1$ кесиндиде кемишин далилде;

4) $y=x-2\sqrt{x}$ функциясынын $x\geq 1$ аралыкта өсүшүн жана $0\leq x\leq 1$ кесиндиде кемишин далилде.

97. Функциянын графигин түз жана өсүү жана кемүү аралыктарын тап:

1) $y=\begin{cases} x+2, \text{ эгерде } x\leq -1 \text{ болсо,} \\ x^2, \text{ эгерде } x>-1 \text{ болсо,} \end{cases}$

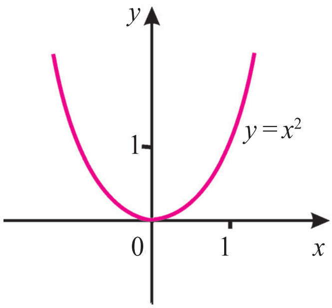
2) $y=\begin{cases} x^2, \text{ эгерде } x\leq 1 \text{ болсо,} \\ 2-x^2, \text{ эгерде } x>1 \text{ болсо,} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x-1, \text{ эгерде } x<-1 \text{ болсо,} \\ -x^2+1, \text{ эгерде } x\geq -1 \text{ болсо,} \end{cases}$

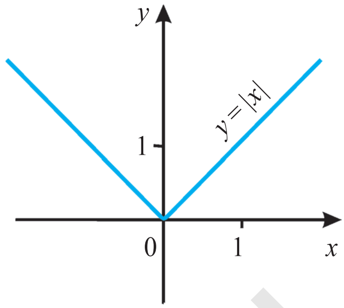
4) $y=\begin{cases} x^3, \text{ эгерде } x\leq 1 \text{ болсо,} \\ -x^2+2x, \text{ эгерде } x\geq 1 \text{ болсо,} \end{cases}$

11-§. ФУНКЦИЯНЫН ЖУПТУГУ ЖАНА ТАКТЫГЫ

Сен $y = x^2$ жана $y = |x|$ функцияларынын графиктери ординаталар огуна салыштырмалуу симметриялуу (37 жана 38-сүрөттөр) экендигин билесиң. Мындай функцияларга *жуп функциялар* дейилет.



37-сүрөт.



38-сүрөт.

Эгерде $y(x)$ функциясынын аныкталуу зонасынан алынган каалагандай x үчүн $y(-x)=y(x)$ болсо, бул функцияга *жуп функция* дейилет.

Мисалы, $y=x^4$ жана $y=\frac{1}{x^2}$ функциялар жуп функциялар, анткени каалагандай x үчүн $(-x)^4=x^4$ жана каалагандай $x\neq 0$ үчүн $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$.

1 - маселе. $y = x^3$ функциясынын графиги координаталар башына салыштырмалуу симметриялуу экендигин далилде жана графигин түз.

△ 1) $y = x^3$ функциясынын аныкталуу зонасы – бардык чыныгы сандардын жыйнагы.

2) $y = x^3$ функциясынын маанилери $x>0$ болгондо оң, $x<0$ болгондо терс, $x=0$ болгондо нөлгө барабар.

○ Алсак, $(x_0; y_0)$ чекит $y = x^3$ функциясынын графигине тиешелүү, б. а. $y_0 = x_0^3$ болсун. $(x_0; y_0)$ чекитке координаталар башына салыштырмалуу симметриялуу болгон чекит $(-x_0; -y_0)$ координаталарга ээ болот. Бул чекит да $y = x^3$ функциясынын графигине тиешелүү болот, анткени $y_0 = x_0^3$ туура барабардыктын эки бөлүгүн -1 ге көбөйтүп, алабыз: $-y_0 = -x_0^3$ же $-y_0=(-x_0)^3$. ●

Бул касиет $y = x^3$ функциясынын графигин түзүү мүмкүнчүлүгүн берет: баштап график $x \geq 0$ үчүн түзүлөт, андан кийин болсо ал координаталардын башына салыштырмалуу симметриялуу чагылдырылат.

3) $y = x^3$ функциясы аныкталуу зонасынын бардык жеринде өсөт. Бул оң көрсөткүчтүү даражалуу функциянын $x \geq 0$ болгондо өсүү ка-

сиетинен жана графиктин координаталар башына салыштырмалуу симметриялуулугунан келип чыгат.

4) $x \geq 0$ дүн кээ бир маанилери (мисалы, $x = 0, 1, 2, 3$) үчүн $y=x^3$ функциясынын маанилери жадыбалын түзөбүз, $x \geq 0$ болгондо графиктин бир бөлүгүн түзөбүз андан кийин симметрия жардамында графиктин x тин терс маанилерине туура келген бөлүгүн түзөбүз (39-сүрөт). ▲

Графиктери координаталар башына салыштырмалуу симметриялуу функцияларга *так* функциялар дейилет. Ошентип, $y=x^3$ – так функция.

Эгерде $y(x)$ функциясынын аныкталуу зонасынан алынган каалагандай x үчүн

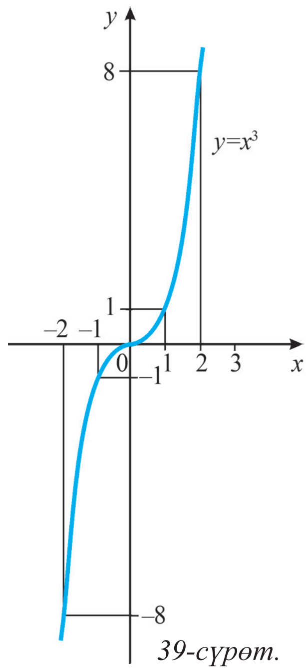
$$y(-x) = -y(x)$$

болсо, бул функцияга *так функция* дейилет.

Мисалы, $y=x^5$, $y=\frac{1}{x^3}$ функциялар – так функциялар, анткени каалагандай x үчүн $(-x)^5 = -x^5$ жана каалагандай $x \neq 0$ үчүн $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$.

Жуп жана так функциялардын *аныкталуу зонасы координаталар башына салыштырмалуу симметриялуу* болот.

Жуптук же тактык касиеттерине ээ болбогон функциялар да бар. Мисалы, $y = 2x + 1$ функциясынын же жуп, же так эместигин көрсөтөбүз. Эгерде бул функция жуп болсо, анда бардык x үчүн $2(-x)+1=2x + 1$ барабардыгы аткарылмак; бирок, мисалы, $x = 1$ болгондо бул барабардык туура эмес: $-1 \neq 3$. Эгерде бул функция так болсо, анда бардык x үчүн $2(-x)+ +1 = -(2x - 1)$ барабардыгы аткарылмак; бирок мисалы, $x=2$ болгондо бул барабардык туура эмес: $-3 \neq -5$.



39-сүрөт.

2- маселе. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясынын графигин түз.

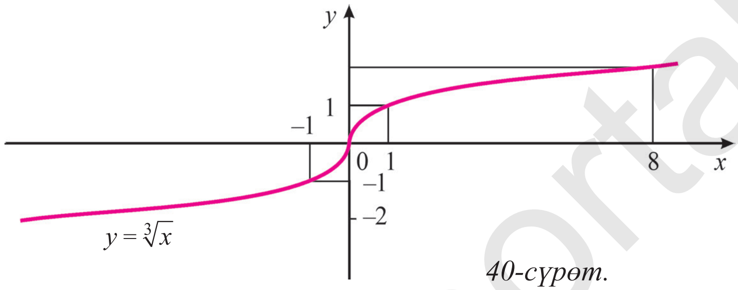
△ 1) Аныкталуу зонасы – бардык чыныгы сандар;

2) функциясы – так, анткени каалагандай x үчүн $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) $x \geq 0$ болгондо, функция оң көрсөткүчтүү даражалуу функциянын касиети боюнча өсөт, анткени $x \geq 0$ болгондо $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) $x > 0$ болгондо, функциянын мааниси оң; $y(0) = 0$;

5) графикке тиешелүү бир нече, мисалы, (0; 0), (1; 1), (8; 2) чекиттерин таап, $x \geq 0$ дүн маанилери үчүн графиктин бир бөлүгүн түзөбүз жана андан кийин симметрия жардамында $x < 0$ үчүн графиктин экинчи бөлүгүн түзөбүз (40-сүрөт). ▲



40-сүрөт.

$y = \sqrt[3]{x}$ функциясы бардык x тер үчүн, ал эми $y = x^{\frac{1}{3}}$ функциясы болсо $x \geq 0$ үчүн гана аныкталгандыгын белгилей кетебиз.

Көнүгүүлөр

Функция так же жуп болушун аныкта **(98–99)**:

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Функция графигинин эскизин чий:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. Функция же жуп, же так эместигин көрсөт:

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Функциянын жуп же так болушун аныкта:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Симметриядан пайдаланып, жуп функциянын графигин түз:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

104. Симметриядан пайдаланып, так функциянын графигин түз:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Функциянын касиеттерин аныкта жана анын графигин түз:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$;

106. Функциянын графигин түз:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ эгерде } x\geq 0 \text{ болсо,} \\ x^3, \text{ эгерде } x<0 \text{ болсо;} \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, \text{эгерде } x>0 \text{ болсо,} \\ x^2, \text{эгерде } x\leq 0 \text{ болсо;} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{эгерде } x\leq 0 \text{ болсо,} \\ -x^2, \text{эгерде } x\geq 0 \text{ болсо;} \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^4, \text{эгерде } x\leq 1 \text{ болсо,} \\ -x^2+2x, \text{эгерде } x\geq 1 \text{ болсо.} \end{cases}$

Аргументтин кандай маанилеринде функциянын маанилери оң болушун аныкта. Өсүү жана кемүү аралыктарын көрсөт.

107. y функциясы берилген:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

$x>0$ болгондо y функциясынын графигин түз. $x<0$ үчүн ошол функциялардан ар биринин графигин түзгөнүңдө, түзүлгөн график: а) жуп функциянын; б) так функциянын графиги болсун. Алынган ар бир функцияны бир формула менен бер.

108. Функциянын графиги симметрия огунун теңдемесин жаз:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Функциянын графиги симметрия борборунун координаталарын көрсөт:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

12-§. ДАРАЖА КАТЫШКАН БАРАБАРСЫЗДЫКТАР ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР

Даражалуу функциянын касиеттеринен түрдүү теңдеме жана барабарсыздыктарды чыгарууда пайдаланылат.

1 - маселе. $x^5 > 32$ барабарсыздыгын чыгар.

△ $y = x^5$ функциясы x тин бардык чыныгы маанилеринде аныкталган жана өсөт. $y(2) = 32$ болгондуктан $x > 2$ болгондо $y(x) > 32$ жана $x > 2$ болгондо $y(x) > 32$.

Жообу: $x > 2$. ▲

2 - маселе. $x^4 \leq 81$ барабарсыздыгын чыгар.

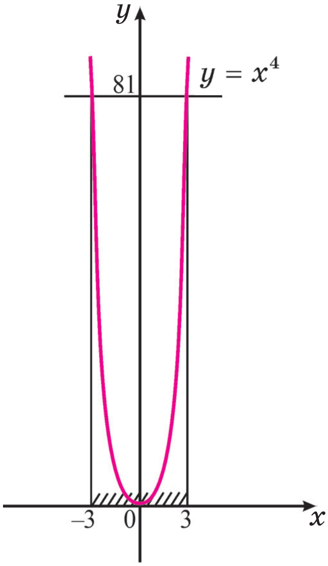
△ $y = x^4$ функциясы $x \leq 0$ болгондо азаят жана $x \geq 0$ болгондо өсөт. $x^4 = 81$ теңдемеси эки чыныгы тамырга ээ: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Ошондуктан $x^4 \leq 81$ барабарсыздыгы $x \leq 0$ болгондо $-3 \leq x \leq 0$ чыгарылыштарга жана $x \geq 0$ болгондо $0 \leq x \leq 3$ чыгарылыштарга ээ (41-сүрөт).

Жообу: $-3 \leq x \leq 3$. ▲

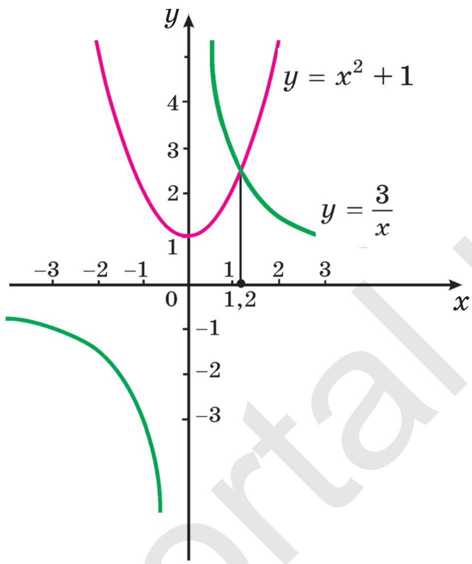
3 - маселе. Функциялардын графиктери жардамында $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ теңдемесин чыгар.

Бир координаталар тегиздигинде $y = \frac{3}{x}$ жана $y = x^2 + 1$ функцияларынын графиктерин түзөбүз (42-сүрөт).

△ $x < 0$ болгондо $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ теңдеме тамырларга ээ эмес, анткени $\frac{3}{x} < 0$, бирок $x^2 + 1 > 0$. $x > 0$ болгондо бул теңдеме ошол функциялар кесилишүү чекитинин абсциссасына барабар болгон бир тамырга ээ. 42-сүрөттөн көрүнүп тургандай, $x_1 \approx 1{,}2$. Теңдеме башка оң тамырларга ээ эмес, анткени $x > x_1$ болгондо $y = \frac{3}{x}$ функциясы азаят, $y = x_2 + 1$ функциясы



41-сүрөт.



42-сүрөт.

болсо өсөт жана демек, функциялардын графиктери $x > x_1$ болгондо кесилишпейт. Ошол себептен алар $0 < x < x_1$ болгондо да кесилишпейт.

Жообу: $x_1 \approx 1{,}2$. ▲

4 - маселе. Теңдемени чыгар:

$$\sqrt{2-x^2} = x. \qquad (1)$$

△ Алсак, x – берилген теңдеменин тамыры болсун, б. а. x – ушундай сан болуп, ал (1) теңдемени туура барабардыкка айландырат. Теңдеменин эки бөлүгүн квадратка көтөрүп, алабыз:

$$2-x^2=x^2. \qquad (2)$$

Мындан $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.

Демек, (1) теңдеме тамырларга ээ, деп элестетип, биз бул тамырлар 1 жана −1 сандары ган болушу мүмкүндүгүн билип алдык, эми бул сандар (1) теңдеменин тамырлары болуш же болбостугун текшеребиз. $x = 1$ болгондо (1) теңдеме туура барабардыкка айланат: $\sqrt{2-1^2}=1$. Ошондуктан $x = 1$ (1) теңдеменин тамыры.

$x=-1$ болгондо (1) теңдеменин сол бөлүгү $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$ ге барабар, оң бөлүгү болсо -1 ге барабар, б. а. $x=-1$ (1) теңдеменин тамыры боло албайт.

Жообу: $x=1$. ▲

Каралган маселеде (1) теңдеме анын эки бөлүгүн квадратка көтөрүү жолу менен чыгарылат. Мында (2) теңдеме алынды.

(1) теңдеме бир гана тамырга ээ: $x=1$, (2) теңдеме болсо эки тамырга ээ: $x_{1,2}=\pm 1$, б. а. (1) теңдемеден (2) теңдемеге өткөндө *четки тамырлар* деп аталган тамырлар пайда болду. Мындай болушунун себеби, $x=-1$ болгондо (1) теңдеме $1=-1$ ден турган туура эмес барабардыкка айланды, бул туура эмес барабардыктын эки бөлүгүн квадратка көтөрүүдө болсо, $1^2=(-1)^2$ тан турган туура барабардык алынды.

Теңдеменин эки бөлүгүн квадратка көтөрүүдө четки тамырлар пайда болушу мүмкүн.

Теңдемени анын эки бөлүгүн квадратка көтөрүү менен чыгарганда текшерүү өткөрүү зарыл.

(1) теңдеме – *иррационалдуу теңдемеге* мисал.

Дагы иррационалдуу теңдемелерге мисалдар келтиребиз:

$$\sqrt{3-2x}=1 \quad x; \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}\,.$$

Бир канча иррационалдуу теңдемелерди чыгаралы.

5- маселе. Теңдемени чыгар: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Теңдеменин эки бөлүгүн квадратка көтөрөбүз:

$$5-2x=x^2-2x+1$$

же $x^2=4$, мындан $x_1=2$, $x_2=-2$. Табылган тамырларды текшеребиз.

$x=2$ болгондо берилген теңдеменин сол бөлүгү $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$ ге барабар, оң бөлүгү $1-2=-1$ ге барабар. $1\neq -1$ болгондуктан $x=2$ берилген теңдеменин тамыры боло албайт.

$x=-2$ болгондо теңдеменин сол бөлүгү $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=3$ кө барабар, оң бөлүгү $1-(-2)=3$ кө барабар. Демек, $x=-2$ берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x=-2$. ▲

6- маселе. Теңдемени чыгар: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Бул теңдемени $\sqrt{x-2}=-3$ көрүнүштө жазып алалы.

Арифметикалык тамыр терс болушу мүмкүн эмес, демек, бул теңдеме тамырларга ээ эмес.

Жообу: Тамырлары жок. ▲

7-маселе. Теңдемени чыгар: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△ Теңдеменин эки бөлүгүн квадратка көтөрүп, алабыз:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Окшош мүчөлөрдү тегеректеп, теңдемени мындай көрүнүштө жазабыз:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ же } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Акыркы теңдеменин эки бөлүгүн квадратка көтөрөлү:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ же } x^2-12x+20=0,$$

мындан $x_1=2$, $x_2=10$. Текшерүү 2 жана 10 сандарынан ар бири берилген теңдеменин тамыры болушун көрсөтөт.

Жообу: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

8-маселе. Барабарсыздыкты чыгар: $\sqrt{5-x}\le 7+x$.

△ Барабарсыздык x тин $-7\le x\le 5$ маанилеринде мааниге ээ. Эгерде барабарсыздык чыгарылышка ээ болсо, чыгарылыш ошол $[-7;5]$ кесиндиге тиешелүү болот. Барабарсыздыктын эки бөлүгү тең квадратка чоңойтобуз жана тегеректегенден кийин $x^2+15x+44\ge 0$ барабарсыздыкка келебиз. Анын чыгарылышы $x\le -11$, $x\ge -4$ экени анык. Бул аралыктардын $[-7;5]$ кесинди менен жалпы бөлүгү $-4\le x\le 5$, б. а. $[-4;5]$ кесинди болот:

Жообу: $-4\le x\le 5$. ▲

Көнүгүүлөр

110. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\le 27$; 3) $y^3\ge 64$; 4) $y^3<125$;
5) $x^4\le 16$; 6) $x^4>625$; 7) $x^5\le 243$; 8) $x^6\ge 64$.

111. 1) Эгерде квадраттын аянты 361 см^2 ден чоң экендиги белгилүү болсо, анын жагы кандай болушу мүмкүн?
2) Эгерде кубдун көлөмү 343 дм^3 ден чоң экендиги белгилүү болсо, анын кыры кандай болушу мүмкүн?

112. (Оозеки.) 7 саны теңдеменин тамыры болушун көрсөт:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Оозеки.) Теңдемени чыгар:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Теңдемени чыгар (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;
4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;
4) $\sqrt{0{,}4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

---

118. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;
4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Берилген теңдеме эмне үчүн тамырларга ээ эместигин түшүндүр:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;
4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Теңдемени чыгар (**120–122**):

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. x тин кандай маанилеринде функциялар бирдей маани кабыл алат:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\leq 1$; 3) $\sqrt{2-x}\geq x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\leq x+1$.

I глава боюнча көнүгүүлөр

125. x тин $y = 2x^2 - 5x + 3$ квадраттык функция: 1) 0 гө; 2) 1 ге; 3) 10 го; 4) –1 ге барабар маанилер кабыл алган маанисин тап.

126. Барабарсыздыкты чыгар:
1) $x^2 \leq 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \geq 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Параболанын координата октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап:
1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Парабола чокусунун координаталарын тап:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Функциянын графигин түз жана график боюнча анын касиеттерин аныкта:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Тик бурчтуктун периметри 600 м. Тик бурчтуктун аянты эң чоң болушу үчүн анын негизи менен бийиктиги кандай болууга тийиш?

131. Эгерде $y = x^2 + px + q$ квадраттык функция:

1) $x = 0$ болгондо 2 ге барабар маанини, $x = 1$ болгондо болсо 3 кө барабар маанини кабыл алса, p жана q коэффициенттерди тап;
2) $x = 0$ болгондо 0 гө барабар маанини, $x = 2$ болгондо болсо 6 га барабар маанини кабыл алса, p жана q коэффициенттерди тап.

132. x тин кандай маанилеринде функциялар барабар маанилерди кабыл алат:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ жана $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ жана $y = |3x - 3|$?

Барабарсыздыкты чыгар (**133–137**):

133. 1) $(x - 5{,}7)(x - 7{,}2) > 0$; 2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2{,}5)(3 - x) < 0$; 4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 > 36$; 3) $4 > x^2$; 4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$; 2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$; 2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$; 4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$; 6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$; 2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;

3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;

6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$; 8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Барабарсыздыкты чыгар (**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\geq 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\leq (x+1)^2$;

3) $x(1–x)>1{,}5–x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\geq x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2}<0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1}\leq 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geq 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2}\leq 0$.

140. Катер 4 сааттан көп болбогон убакыт бою дарыянын агымы менен 22,5 км жүрүшү жана артына кайтышы керек. Эгерде дарыя агымынын ылдамдыгы 3 км/саат болсо, катер сууга салыштырмалуу кандай ылдамдык менен жүрүшү керек?

141. Функциялардын графиктерин бир координата системасында түз жана x тин кандай маанилеринде бир функциянын мааниси экинчисиникинен чоң (кичине) болушун аныкта, натыйжаны, тиешелүү барабарсыздыгын чыгарып, текшер:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2–5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$.

Функциялар графиктери кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап (**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$; 3) $y=3x$, $y=\frac{3}{x}$.

143. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

144. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $x^4\leq 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\leq -32$.

Теңдемени чыгар (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

147. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; 5) $y=\sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x+7}}$; 6) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Функциянын көрсөтүлгөн аралыкта өсүшүн же кемишин аныкта:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}, x>3$ аралыкта; 2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}, x<2$ аралыкта;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}, x\geq 0$ аралыкта; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x<-1$ аралыкта.

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР

1. $y = -x^2 + 2x + 3$ функциясынын графиги жардамында x тин кандай маанисинде функциянын мааниси 3 кө барабар болушун тап.

2. $y=1-x^2$ функциясынын графиги боюнча x тин функциясы оң; терс маанилер кабыл алган маанилерин тап.

3. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ функциясы кандай аралыктарда өсөт? Кемийт? Ошол функциянын графигин түз.

4. Барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгар:

1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Теңдемени чыгар:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Функциянын жуп же тактыгын аныкта:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$;

3) $y=\frac{1}{(x\ \ 2)^2}+1$; 4) $y=x^7+x^5+1$.

150. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\leq 32$; 3) $(x^2-5x)^5>216$.

151. Теңдемени чыгар:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{\ }$; 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}$.

152. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 2) $\sqrt{x^2-3x}<2$; 3) $\sqrt{3x-2}>x-2$;

4) $\sqrt{2x+1}\leq x-1$; 5) $\sqrt{3-x}>1-x$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>4-x$.

I глава боюнча сыноо (тест) көнүгүүлөрү

Сыноо көнүгүүлөрүнүн ар бирине 4 төн „жооп“ берилген. 4 „жооптун“ бири гана туура, калгандары болсо туура эмес. Окуучулардан сыноо көнүгүүлөрүн аткарып же башка түшүнүктөр жардамында мына ошол туура жоопту табуу (аны белгилөө) талап кылынат.

1. a нын маанисин тапканыңда, $y = ax^2$ парабола менен $y=5x+1$ түз сызыктын кесилишүү чекиттеринен биринин абсциссасы $x = 1$ болсун.

A) $a = 6$; B) $a = -6$; C) $a = 4$; D) $a = -4$.

Параболанын координата октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тап (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4$.

A) $(-1;\ 3)$; B) $(3;\ 1)$; C) $(1;\ 3)$; D) $(0;\ 4)$.

3. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

A) $(\frac{1}{3};\ 0)$, $(\frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ 1)$; B) $(-\frac{1}{3};\ 0)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$, $(1;\ 0)$;

C) $(0;\ \frac{1}{3})$, $(0;\ \frac{1}{2})$, $(0;\ 1)$; D) $(\frac{1}{3};\ 0)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ -1)$.

Парабола чокусунун координаталарын тап (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; –4); D) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) (–3; –4); B) (–5; –1); C) (–1; –5); D) (3; 4).

6. Абсциссалар огун $x=1$ жана $x=2$ чекиттеринде, ординаталар огун болсо $y=\frac{1}{2}$ чекитинде кесип өткөн параболанын теңдемесин жаз.

A) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; B) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$;

C) $y = x^2 - 3x + 2$; D) туура жооп берилбеген.

Парабола кайсы чейректерде жайлашкан? (**7–8**):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, III, IV; D) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, II.

9. Эки оң сандын суммасы 160 ка барабар. Эгерде ошол сандар кубдарынын суммасы эң кичине болсо, ошол сандарды тап.

A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80.

10. $y = x^2 - 4x + 3$ функциясынын эң кичине маанисин тап.

A) –1; B) 1; C) 7; D) –8.

Барабарсыздыкты чыгар (**11–17**):

11. $2x^2-8\leq 0$.

A) $-2\leq x\leq 2$; B) $-2\leq x$; C) $x\geq 2$; D) $0\leq x\leq 4$.

12. $3x^2-9\geq 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$; D) $x \geq 3$.

13. $6x^2+5x-6>0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; B) $x < \frac{3}{2}$; C) $x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-3x-10} \le 0.$

A) $-2<x\le 2$; B) $-2< x <5$; C) $x\ne -2,\ x\ne 5$; D) $-2<x<0$.

15. $\dfrac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \ge 0.$

A) $-2<x<3$; B) $x<-2;\ -1\le x\le 1,\ x>3$;

C) $-1\le x<3$; D) $x\ne -2,\quad x\ne 3$.

16. $x^2+6x+5<0$ барабарсыздыгынын бардык бүтүн чыгарылыштарынын суммасын тап.

A) 10; B) 9; C) –9; D) –10.

17. a нын кандай маанилеринде $ax^2+4x+9a<0$ барабарсыздыгы x тин бардык маанилеринде орундуу болот?

A) $a<-\dfrac{2}{3}$; B) $a>\dfrac{2}{3}$; C) $a<-1$; D) $a>1$.

18. a нын кандай маанисинде $ax^2-8x-2<0$ барабарсыздыгы x тин бардык маанилеринде орундуу болот?

A) $-8<a<8$; B) $a\ge 8$; C) $a<8$; D) $a<-8$.

19. Функциянын аныкталуу зонасын тап: $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$.

A) $1\le x\le 2$; B) $1<x<2$; C) $x\ge 2,\ x\le 1$; D) $-2\le x\le -1$.

20. Функциялардын кайсылары жуп функция?

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x^2+|x|$; 3) $y=-3+\dfrac{5}{x^4}$; 4) $y=x^2-\dfrac{3}{x}$.

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.

21. Функциялардын кайсылары так функция?

1) $y=6x$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=4x+7$; 4) $y=2x^3-10$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

1-маселе. Жеңил автомобиль туруктуу v ылдамдык менен аракттенүүдө. Стоп сызыгына чейин 50 метр калганда светофордун жашыл чырагы өчүп-жана баштады. Ушундан жарым секунд өткөндөн кийин айдоочу тормоздолууну баштады жана стоп сызыгына жетпей токтоду. Жолдо жүрүүнүн эрежелеринен белгилүү болгондой, $v_0 = 50$ км/саат ылдамдык менен ракеттенген автомобилдин тормоздолуу жолу $S_0 = 23{,}5$ м, мында тормоздолуу жолу деп тормоздолуу башталгандан аяктаганга чейин автомобиль өткөн жолго айтылат. Автомобилдин светофор өчүп жанууну баштагандыгы v ылдамдыгын баала.

△ Светофор өчүп-жана баштагандан тормоздолуу башталганга чейин автомобиль 0,5 v метр аралыкты, андан кийин болсо физика курсунан белгилүү болгон kv^2 тормоздолуу жолун басып өтөт, мында

$$k = \frac{s_0}{v_0^2} = \frac{23,5}{13,88^2} \approx 0,12.$$

Демек, жалпы өтүлгөн аралык, 50 км/саат ылдамдыктын метр секундда 13,88 м/с экенин эсепке алсак, 50 метрден ашпоого тийиштигинен

$$0,5\,v + 0,12v^2 \leq 50,$$

бащкача айтканда

$$0,12v^2 + 0,5v - 50 \leq 0. \qquad (1)$$

△ Бул барабарсыздыкты чыгаруу үчүн адегенде $0,12v^2 + 0,5v - 50$ үч мүчөнүн тамырларын табабыз:

$$0,12v^2 + 0,5v - 50 = 0,$$

мындан

$$12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Теңдемени чыгарабыз:

$$v_{1,2} = \frac{-50 - \sqrt{50^2 - 4\cdot 12(-5000)}}{2\cdot 12} = \frac{-25(1 - \sqrt{97})}{12},$$

мындан $v_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ жана $v_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Анда, (1) барабарсыздыгынын чыгарылышы $v_1 \leq v \leq v_2$ аралыктагы сандардан турат. Бирок маселенин мазмуну боюнча, $v > 0$, демек, бааланып жаткан v ылдамдык $0 < v \leq v_2$ аралыктан тышка чыкпоого тийиш, б. а. $v \leq \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18{,}43$ м/с же 66,35 *км/саат* тан ашпоого тийиш.

Жообу: ылдамдык 66,35 *км/саат* тан ашпоого тийиш. ▲

2-маселе. Базарда белгилүү бир түрдөгү товарлардан n даанасы бар жана алар даанасы p акча бирдигинде сатылып жатат, дейли. Мониторингдин көрсөтүшүнчө, бул товарга болгон талап күчөгөндө анын наркы чоңоёт жана келтирилип жаткан ушундай товарлардын саны $n = 40p$ формула боюнча көбөйөт. Экинчи жактан, базарга кирип келип, кардарга сунушталган товарлардын саны n ге көбөйө башташы менен анын наркы тескери пропорциялаш төмөндөп түшүп барышы белгилүү:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Базарга кирип келе жаткан товарлар санына коюлган шартты аныкта.

△ Маселеде суралып жаткан шартты аныктоо үчүн сунушталып жаткан нарк $\frac{150}{n-40}$ талаптан көз каранды нарк $\frac{n}{40}$ тан аз болбостугу шартынан пайдаланабыз:

$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

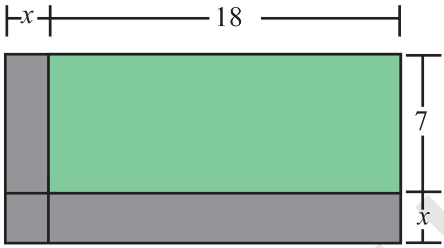
Мындан

$$n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

барабарсыздыгын алабыз. Анын чыгарылыштары $-60 \leq n \leq 100$. Маселенин мазмуну боюнча базарга кирип келе жаткан товарлардын саны n натуралдык сандан жана ал 100 дөн ашпоого тийиш.

Жообу: $n \leq 100$. ▲

3-маселе. Сен 7 метрге 18 метрлүү багындын эки жагында таштан жол төшөмөкчүсүң (43- сүрөт). Сен муну үчүн 54 квадрат метрден чоң болбогон жерди каптоого жеткен каражат ажырата аласың. Мындай жолдун туурасы көп дегенде кандай болууга тийиш?



43- сүрөт

△ Көрүнүп тургандай, маселенин чыгарылышын табуу үчүн жалпы аянт $(x + 18) \cdot (x + 7)$ кв.м ден бактын аянты $18 \cdot 7 = 126$ кв.м ди кемитип, натыйжа – жолдун аянты 54 кв.м ден ашпастыгын этибар алууга тийишпиз:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \qquad (1)$$

Мындан

$$x^2 + 25x - 54 \leq 0 \qquad (2)$$

квадраттык барабарсыздыгын алабыз. $x^2+25x-54$ квадраттык үч мүчөнүн тамырлары $x_1 = -27$ жана $x_2 = 2$ болгондуктан, (2) барабарсыздыгынын чыгарылыштары $-27 \leq x \leq 2$ аралыктагы сандардан турат. Бирок маселенин мазмуну боюнча жолдун туурасы x терс сан же нөл боло албайт. Ошол себептүү жолдун туурасы $0 < x \leq 2$ барабарсыздыгын канааттандырган сан боло алат. Демек, жолдун туурасы 2 метрден ашпоого тийиш.

Жообу: жолдун туурасы көп дегенде 2 метр. ▲

Маселелер

1. Жүк машинасы v туруктуу ылдамдык менен аракттенүүдө. Стоп сызыгына чейин 50 метр калганда светофордун жашыл чырагы өчүп-жана баштады Ошондон жарым секунд өткөндөн кийин айдоочу тормоздолууну баштады жана стоп сызыгына жетпестен токтоду. Жолдо жүрүүнүн эрежелеринен белгилүү болгондой, $v_0 = 50$ *км/саат* ылдамдык менен аракеттенген жүк машинасынын тормоздолуу жолу $S_0 = 28{,}9$ м. Жүк машинасынын светофор өчүп-жанууну баштагандыгы v ылдамдыгын 0,01 тактыкта баала.

2. Базарда белгилүү бир түрдөгү товарлардан n даанасы бар жана алар даанасы p акча бирдигинде сатылып жатат, дейли. Мониторингдин көрсөтүшүнчө, ушул товарга болгон талап чоңойгондо анын наркы чоңоёт жана келтирилип жаткан ушундай товарлардын саны $n = 60p$ формула боюнча көбөйөт. Экинчи жактан, базарга кирип келип, кардарларга сунушталган товарлардын саны n көбөйө баштаашы менен анын наркы тескери пропорциялаш түрдө төмөндөп барышы белгилүү:

$$p = \frac{60}{n-40}.$$

Базарга кирип келе жаткан товарлар санына коюлган шартты аныкта.

3. Компания жарнакка жалпы x (100 миңдерде) сум сарптасын жана анын натыйжасында P киреше алсын, дейли, мында $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Жарнакка канча акча сарпталса, натыйжада киреше эң көп болот?

4. Продукция өндүргөн чакан ишкананын айлык кирешеси $P = 250n - n^2$ (миң сумдарда) модель менен туюнтулат, дейли, бул жерде n – өндүрүлгөн жана сатылган продукциялардын саны. Эң чоң киреше алуу үчүн чакан ишкана айына канча продукция өндүрүшү жана сатышы керек?

5. Түштүк Американын жамгырлуу токойлорунун биринде курт-кумурсканын сейрек кездешүүчү түрү табылды жана айлана-чөйрөнү үйрөнгөн адис курт-кумурскаларды корголгон аймакка өткөрдү. Өткөрүлгөндүн кийин курт-кумурскалардын саны m айда

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t)$$

мыйзам ченемдүүлүк менен көбөйүп отурган болсо:

1) $t = 0$ дө курт-кумурскалардын саны канча болгон?
2) 10 жылдан кийин алардын саны канча болот?
3) Качан алардын саны 549 болот?

Абу Райхан Беруний (973–1048)

„Функция“ сөзү латинче „*functio*“ сөзүнөн алынган болуп, ал „болуу“, „аткаруу“ деген маанини билдирет. Функциянын алгачкы аныктамалары **Г. Лейбниц** (1646–1716), **И. Бернулли** (1667–1748), **Н. И. Лобачевский**дин (1792–1856) чыгармаларында берилген.

Функциянын азыркы аныктамасын билишпесе да, байыркы окумуштуулар өзгөрүүчү сандардын ортосунда функционалдык көз карандылык болууга тийиштигин түшүнүшкөн.

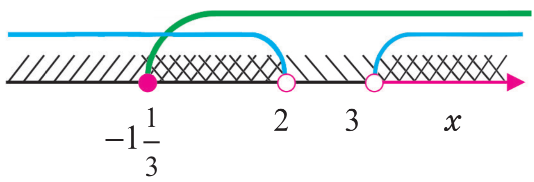
Төрт миң жылдан мурдараак Вавилон окумуштуулары радиусу r болгон тегеректин аянты үчүн – каталыгы сезилерлүү болсо да – $S=3r^2$ формуланы чыгарышкан.

Сандын даражасы жөнүндөгү алгачкы маалыматтар байыркы вавилондуктардан бизге чейин жетип келген кол жазмаларда бар. Алсак, аларда натуралдык сандардын квадраттары, кубдарынын жадыбалдары берилген.

Сандардын квадраттары, кубдарынын жадыбалы, логарифмдер жадыбалы, тригонометриялык жадыбалдар, квадрат тамырлар жадыбалы болгону сандардын ортосундагы көз карандылыктын жадыбал усулунда берилиши гана.

Улуу энциклопедист окумуштуу **Абу Райхан Беруний** да өзүнүн чыгармаларында функция түшүнүгүнөн, анын касиеттеринен пайдаланган. Абу Райхан Беруний белгилүү «Кануни Маъсудий» чыгармасынын 6-макаласында аргумент менен функциянын өзгөрүү аралыктары, функциянын белгилери жана эң чоң, эң кичине маанилерин мүнөздөйт.

II ГЛАВА. ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАЛАРЫ



13-§. ЭКИНЧИ ДАРАЖАЛУУ ТЕҢДЕМЕ КАТЫШКАН ЭҢ ЖӨНӨКӨЙ СИСТЕМАЛАРДЫ ЧЫГАРУУ

1- м а с е л е. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы $\sqrt{13}$ см ге барабар, анын аянты болсо 3 см^2. Үч бурчтуктун катеттерин тап.

△ Үч бурчтуктун катеттери x жана y сантиметрге барабар болсун. Пифагордун теорамасы жана тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты формуласынан пайдаланып, маселенин шартын мындайча жазабыз

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Системанын биринчи теңдемесине 4 кө көбөйтүрүлгөн экинчи теңдемени кошуп, төмөнкүнү алабыз:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

мындан $(x + y)^2 = 25$ же $x + y = \pm 5$. x жана y тер оң сандар болгондуктан $x + y = 5$ болот. Бул теңдемеде y ти x аркылуу туюнтабыз жана (1) системанын теңдемелеринен бирине, мисалы, экинчи теңдемеге коёбуз:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Алынган теңдемени чыгарабыз:

$$5x - x^2 = 6,\ \ x^2 - 5x + 6 = 0,\ \ x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

Бул маанилерди $y = 5 - x$ формулага коюп, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$ ни табабыз. Эки учурда тең катеттерден бири 2 см, экинчиси болсо 3 см.

Жообу: 2 см, 3 см. ▲

2- маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ Виет теоремасына тескери теорема боюнча, x жана y сандары

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

квадраттык теңдеменин тамырлары болот. Бул теңдемени чыгарып, төмөнкүнү алабыз: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Демек, системанын чыгарылыштары төмөнкү сандардын жуптуктары болот: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ жана $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Жообу: (5; –2), (–2; 5). ▲

3- masala. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

△ Бул системаны ордуна коюу усулу менен чыгарабыз:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Бул теңдемени жөнөкөйлөштүрүп, төмөнкүнү алабыз: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, мындан $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. x тин маанисин $y = 3x - 6$ формулага коюп, $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$ экенин табабыз.

Жообу: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

4- masala. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Системанын биринчи теңдемесин мындайча жазабыз:

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Буга $x-y=2$ ни коюп, $x+y=8$ ди алабыз. Ошентип,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Бул системаны кошуу усулу менен чыгарып, $x=5$, $y=3$ экенин табабыз.

Ж о о б у : (5; 3). ▲

Көнүгүүлөр

153. Эки белгисиздүү биринчи даражалуу теңдемелер системасын чыгар:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Теңдемелер системасын чыгар (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=7, \\ x+y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=-11, \\ xy=18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x+y=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2-y^2=-3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x+y=7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=10, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=5, \\ x^2+y^2=26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ xy=7. \end{cases}$

159. Эки сандын суммасы 18 ге, алардын көбөйтүндүсү болсо 65 ке барабар. Ошол сандарды тап.

160. Эки сандын орто арифметикалыгы 20 га, алардын орто геометриялыгы болсо 12 ге барабар. Ошол сандарды тап.

161. Теңдемелер системасын чыгар (**161–163**):

1) $\begin{cases} x+2y=-3, \\ y^2-2x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=21, \\ x+y=7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-y^2=46, \\ xy=10; \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x-y)^2=4, \\ x+y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 4+xy=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=4, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1. \end{cases}$

164. Тик бурчтук формасындагы аянтты 1 км узундуктагы дубал менен курчап алуу керек. Эгерде аянт 6 га болсо, анын узуну жана туурасы кандай болот?

14-§. ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН ЧЫГАРУУНУН ТҮРДҮҮ УСУЛДАРЫ

1-маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Системанын теңдемелерин мүчөлөп кошуп, алабыз: $2x+2y=8$, мындан $y=4-x$. Бул туюнтманы системанын каалагандай, мисалы, экинчи теңдемесине коёбуз:

$$x + 4 - x - 2x(4-x) = -2,$$

$$4 - 8x + 2x^2 = -2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$y=4-x$ экендигинен $y_1=3$, $y_2=1$.

Жообу. (1; 3), (3; 1). ▲

2-маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Системанын биринчи теңдемесинен $y^2=x-3$. Бул туюнтманы системанын экинчи теңдемесине коёбуз:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0,$$

Мындан $x_1=7$, $x_2=-4$.

$y^2=x-3$ экендигинен y тин маанисин табабыз:

1) Эгерде $x=7$ болсо, анда $y^2 = 7 - 3$, $y^2=4$, мындан $y=2$ же $y=-2$;

2) Эгерде $x=-4$ болсо, анда $y^2=-4-3<0$, демек, чыныгы тамырлары жок.

Жообу: (7; 2), (7; –2). ▲

Айта кетчү нерсе, эгерде биринчи теңдемеде x ти y аркылуу туюнтуп, экинчи теңдемеге коюлса, биквадраттык теңдемени чыгарууга алып келмек.

3-маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Эгерде $(x; y)$ – системанын чыгарылышы болсо, анда $x \neq 0$ жана $y \neq 0$. Системанын экинчи теңдемесин төмөнкүдөй жазабыз: $\dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{3}{8}$.

Алынган теңдемеге $x + y = 12$ маанини коёбуз: $\dfrac{12}{xy} = \dfrac{3}{8}$, мындан $xy = 32$.

Берилген системаны чыгаруу төмөнкү системаны чыгарууга келтирилди:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Виет теоремасына тескери теоремага негизденип алабыз: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Жообу: (4; 8), (8; 4). ▲

4-маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Системанын экинчи теңдемесин $xy(x - y) = 2$ көрүнүштө жазып алабыз. Көрүнүп тургандай, $x \neq 0$, $y \neq 0$, жана $x - y \neq 0$, анда системанын биринчи теңдемесин экинчи теңдемеге бөлүп, алабыз:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{7}{2};$$

$$2(x^2+xy+y^2)=7xy,$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Алынган теңдемени x ке салыштырмалуу квадраттык теңдеме иретинде карап, тамырларын табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{5y-\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y-3y}{4}.$$

Мындан $x_1=2y$ же $x_2=\frac{y}{2}$.

Системанын экинчи теңдемесине x тин y аркылуу табылган белгилерин коюп, алабыз:

1) эгерде $x=2y$ болсо, анда $4y^3-2y^3=2$, мындан $y^3=1$ жана $x=2$;

2) эгерде $x=\frac{y}{2}$ болсо, анда $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, мындан $y^3=-8$, $y=-2$ жана $x=-1$.

Жообу: (2; 1), (–1; –2).

5-*маселе.* Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases}x^2-2xy+4y^2=7,\\x^3+8y^3=35.\end{cases}$$

Кубдар суммасынын формуласын колдоп, системанын экинчи теңдемесин төмөнкү көрүнүштө жазабыз:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Бул теңдемени системанын биринчи теңдемесине бөлүп, табабыз: $x+2y=5$.

Бул теңдемеден $2y$ ти x аркылуу туюнтабыз: $2y=5-x$ жана системанын экинчи теңдемесине коёбуз:

$$x^3+(5-x)^3=35,$$
$$x^3+125-75x+15x^2-x^3=35,$$
$$15x^2-75x+90=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=3,\ \ x_2=2.$$

Тиешелүү түрдө y тин маанилерин табабыз:

1) $2y=5-3$, мындан $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, мындан $y_2=\frac{3}{2}$.

Жообу: $(3;\ 1)$, $(2;\ \frac{3}{2})$.

6-маселе. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x-y=5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ деп белгилесек, $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$, $t>0$ болот. Анда системанын экинчи теңдемеси $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$ көрүнүшкө келет. Бул теңдеменин эки жагын t ге көбөйтөбүз:

$$t^2-\frac{5}{6}t-1=0.$$

Мындан $t_{1,2}=\frac{5}{12}-\sqrt{\frac{25}{144}+1}=\frac{5}{12}-\frac{13}{12}$, $\quad t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{2}{3}$.

$t>0$ болгондуктан $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$ же $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$ мындан $x=\frac{9}{4}y$. x үчүн бул туюнтманы системанын биринчи теңдемесине коюп, алабыз: $\frac{9}{4}y-y=5$, $\frac{5}{4}y=5$, $y=4$, ошол себептүү $x=9$.

Жообу: $(9;\ 4)$.

Көнүгүүлөр

Теңдемелер системасын чыгар (**165–175**):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

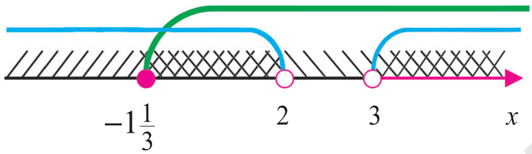
175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

15-§. ЭКИНЧИ ДАРАЖАЛУУ БИР БЕЛГИСИЗДҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАЛАРЫ

1-маселе. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Бул барабарсыздыктардан биринчиси квадраттык барабарсыздык, экинчиси болсо сызыктуу барабарсыздык. Биринчи барабарсыздыктын чыгарылыштары 6-параграфтагы 2-маселеде көрсөтүлгөндөй $x<2$ жана $x>3$ аралыктардагы бардык сандардан турат. Экинчи барабарсыздыктын чыгарылыштары болсо $x \geq -1\frac{1}{3}$ аралыктагы сандар болот. Бир сандар огунда эки барабарсыздыктын тең чыгарылыштары жыйнагын сүрөттөйлү. Көрүнүп тургандай, системанын эки барабарсыздыгын бир мезгилдин өзүндө канааттандырган сандар $-1\frac{1}{3} \le x < 2$ жана $x < 3$ аралыктардан турат (44- сүрөт).



44- сүрөт.

Жообу: $-1\frac{1}{3} \le x < 2, x > 3.$ ▲

2-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$|x^2-x-1|<1.$$

△ $|x^2-x-1|<1$ барабарсыздыгы эки жактуу барабарсыздыкка тең күчтүү экенин билебиз:

$$-1<x^2-x-1<1.$$

Бул болсо эки барабарсыздыктан турган системага тең күчтүү:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

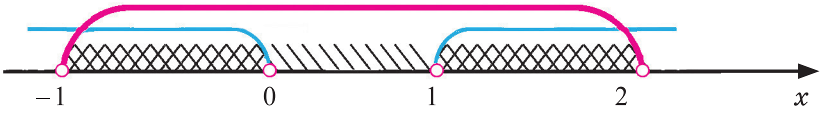
же

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Адегенде биринчи барабарсыздыкты чыгарабыз: $D=(-1)^2-4(-2)=9>0$, демек, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Мындан биринчи барабарсыздыкты канааттандырган сандар $-1<x<2$ аралык экендиги келип чыгат.

Экинчи барабарсыздыкты чыгарабыз: $x^2-x=x(x-1)>0$. Демек, бул барабарсыздыктын чыгарылышы $x<0$ жана $x>1$ аралыктардагы бардык сандар болот.

Эки барабарсыздыктын чыгарылыштарын бир сандар огунда сүрөттөйбүз (45- сүрөт).



45-сүрөт.

Мындан системанын чыгарылышы $-1<x<0$ жана $1<x<2$ аралыктарда жаткан бардык сандардан тургандыгы келип чыгат.

Жообу: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

3-маселе. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

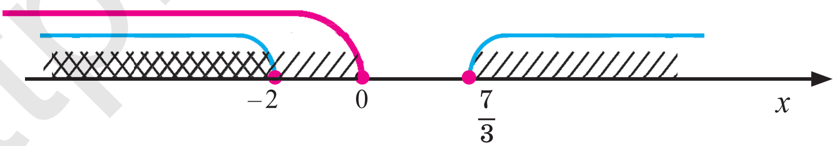
△ Квадрат тамыр астындагы сандар терс болбостугу милдеттүү болгондуктан, берилген функциянын аныкталуу зонасы төмөнкү барабарсыздыктар системасынын чыгарылышынан турат:

$$\begin{cases} 3x^2-x-14\geq 0, \\ -x\geq 0. \end{cases}$$

Биринчи барабарсыздыкты чыгарабыз. $3x^2-x-14$ квадраттык үч мүчөнүн дискриминанты $D=(-1)^2-4\cdot 3(-14)=169$, демек, $x_1=\frac{1-13}{6}=-2$, $x_2=\frac{1+13}{6}=\frac{7}{3}$. Анын тармактары жогоруга багытталгандыктан биринчи барабарсыздыктын чыгарылыштары $x\leq -2$ жана $x\geq\frac{7}{3}$. аралыктардан турат.

Экинчи барабарсыздыкты -1 ге көбөйтүп, анын чыгарылыштары $x\leq 0$ аралыктан алынган бардык сандардан тургандыгын көрүүгө болот.

Биринчи жана экинчи барабарсыздыктардын чыгарылыштарын бир сандар огунда туюнтабыз (46-сүрөт).



46-сүрөт.

Мындан системанын чыгарылышы $x\leq -2$ экендиги келип чыгат.

Жообу. $x\leq -2$. ▲

Көнүгүүлөр

176. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 4x+9>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

177. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $|x^2-6x|<27;$ 2) $|x^2+6x|\le 27;$

3) $|x^2+4x|<12;$ 4) $|x^2-4x|\le 12.$

Барабарсыздыктар системаларын чыгар (**178–181**):

178. 1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x-x^2>0, \\ 36-x^2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+x^2<0, \\ 49-x^2>0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2+x+20\le 0, \\ x^2-x-2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x<0, \\ -x^2+x+2\ge 0. \end{cases}$

182. Функциянын аныкталуу зонасын тап:

1) $y=\sqrt{-x^2-6x-8}+\sqrt{\frac{1}{3}x+2},$ 2) $y=\sqrt{x-x^2}-\sqrt{-x^2+12x-35}.$

16-§. ЖӨНӨКӨЙ БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ ДАЛИЛДӨӨ

Барабарсыздыктарды далилдөөнүн түрдүү усулдары бар. Алардан кээ бирлеринин колдонулушун карап көрөбүз.

1-маселе. Эки оң a жана b сандын орто арифметикалыгы ошол сандардын орто геометриялыгынан кичине эместигин далилде:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Барабарсыздыкты *түздөн-түз аныктамага негизденип* далилдейбиз, мында $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ экенин далилдөө талап кылынат.

Бул барабарсыздыктын сол бөлүгүнүн формасын алмаштырып, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

(1) катышта барабардык белгиси $a=b$ болгондо гана туура болушун баса белгилейбиз. ▲

2-маселе. Эки оң a жана b сандын орто геометриялыгы ошол сандардын орто гармоникасынан кичине эместигин далилде:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Бул барабарсыздыкты *мурда далилденген* (1) *барабарсыздыктан пайдаланып* жана алымы өзгөрбөй бөлүмү кичирейгенде оң бөлчөктүн чоңоюшунан пайдаланып далилдейбиз:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \ ▲$$

3-маселе. Ар кандай оң a сан үчүн барабарсыздыкты далилде:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3)$$

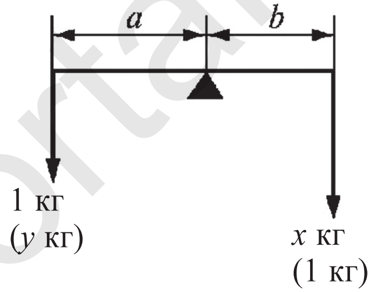
△ Бул барабарсыздыкты *тескерисин элестетүү усулу* менен далилдейбиз. Мында (3) барабарсыздык a нын кандайдыр бир оң маанисинде аткарылбасын деп элестетебиз, башкача айтканда

$$a+\frac{1}{a}<2$$

барабарсыздыгы орундуу болсун. Барабарсыздыктын эки бөлүгүн a га көбөйтүп, алабыз:

$$a^2+1<2a,$$

б. а. $a^2+1-2a<0$ же $(a-1)^2<0$, бул болсо туура эмес барабарсыздык, анткени ар кандай чыныгы сандын квадраты (алсак, $(a-1)^2$ да) терс эмес. Алынган карама-каршылыктан (3) барабарсыздык ар кандай оң a да туура барабарсыздык экендиги келип чыгат. ▲



47-сүрөт.

4-маселе. Сатуучу алманы ийиндүү таразада тартууда. Кардар 1 кг алма алды жана сатуучудан тартканда алма менен таштардын ордуларын алмаштырып тартууну суранды, дагы 1 кг алма алды. Эгерде тараза ырасталбаган болсо, ким зыян тартат?

△ Алсак, таразанын ийиндери a жана b га барабар болсун (47-сүрөт). Сүрөттөн көрүнүп тургандай, $a \neq b$. Биринчи жолу тартканда кардар x килограмм алма алды. Физикадан белгилүү болгондой, $x \cdot b = 1 \cdot a$, мындан $x=\frac{a}{b}$. Экинчи жолу тартканда кардар y килограмм алма алды. Тең салмактын шартынан $y \cdot a = 1 \cdot b$, мындан $y=\frac{b}{a}$. Ошентип, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ килограмм алма сатып алынган.

$\frac{a}{b}$ жана $\frac{a}{b}$ сандардын орто арифметикалыгы жана орто геометриялыгы үчүн барабарсыздыктан пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}>\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}},$$

мындан $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

Жообу: сатуучу зыян тартат. ▲

Көнүгүүлөр

183. Каалагандай чыныгы a, b, x терде барабарсыздыктардын орундуу экендигин далилде:

1) $\frac{a^2+1}{2} \geq a$; 2) $\frac{b^2+16}{4} \geq b$; 3) $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$; 4) $\frac{2x}{4x^2+9} \leq \frac{1}{6}$.

184. Эгерде $ab>0$ болсо, барабарсыздыкты далилде:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$; 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

185. Эгерде $a \geq -1$, $a \neq 0$ болсо, барабарсыздыкты далилде:

$$\frac{4a^2+a+1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

186. $a \geq 0$, $b \geq 0$ жана $a \neq b$ болсо, анда $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ жана $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ лардын кайсы бири чоң?

187. Барабарсыздыкты далилде:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6)>96a^2,$$

мында $a>0$.

188. Эгерде $a>0$ болсо, барабарсыздыкты далилде:

$$\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}.$$

189. Эгерде a, b, c, d лар оң сандар болсо, анда

$$\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

барабарсыздыгын далилде.

190. Эгерде $a \geq 0$, $b \geq 0$ жана $c > 0$ болсо, анда $\dfrac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ болушун далилде.

191. Эгерде $a > 0$, $b > 0$ болсо, анда $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ барабарсыздыгы орундуу болушун далилде.

192. Эгерде $a > 0$, $b > 0$ жана $c > 0$ болсо, анда

$$\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$$

барабарсыздыгы орундуу болушун далилде.

II глава боюнча көнүгүүлөр

193. Берилген туюнтманы бир өзгөрүүчү боюнча квадраттык үч мүчө көрүнүшүндө жаз:

1) $2y^2 - xy + 3$, эгерде $y = 3x + 1$;
2) $2xy + 3x^2 - 7$, эгерде $x = 2y + 1$.

194. Теңдемелер системасын ордуна коюу усулу менен чыгар:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Виет теоремасына тескери теореманы колдоп, теңдемелер системасын чыгар:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Теңдемелер системасын чыгар (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Теңдемелер системасын чыгар (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y - 3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Эки орундуу сан өзүнүн цифраларынын суммасынан үч эсе чоң. Цифралары суммасынын квадраты болсо берилген сандан үч эсе чоң. Ошол санды тап.

2) Эки орундуу сан өзүнүн цифраларынын суммасынан 4 эсе чоң. Цифралары суммасынын квадраты болсо берилген сандын $\frac{3}{2}$ бөлүгүн түзөт. Ошол санды тап.

206. 1) Эки квадраттын жактарынын катышы 5:4 сыяктуу. Эгерде ар бир квадраттын жактары 2 см ге азайтылса, анда алынган квадраттар аянттарынын айырмасы 2,8 см^2 ге барабар болот. Берилген квадраттардын жактарын тап.

2) Тик бурчтуктун узунунун туурасына катышы 3:2 сыяктуу. Эгерде аларды 1 см ден чоңойтсок, жаңы алынган тик бурчтуктун аянты биринчи тик бурчтуктун аянтынан 3 см^2 ге чоң болот. Биринчи тик бурчтуктун узуну менен туурасын тап.

207. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

208. 1) Эгерде $xy = 9$ жана $x > 0$ экендиги белгилүү болсо, $x + y$ тин эң кичине маанисин тап.

2) Эгерде $ab = 8$ жана $b > 0$ болсо, анда $2a+b$ нын эң кичине маанисин тап.

209. Туюнтманын эң кичине маанисин тап:

1) $4x + \frac{81}{25x}$, $(x > 0)$; 2) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$, $x > 0$;

3) $\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}$, $(y > 0)$; 4) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}$.

210. Эгерде $x + y = 10$ жана $x > 0$, $y > 0$ болсо, анда xy тин эң чоң маанисин тап.

211. Эгерде $2x + y = 6$ жана $x > 0$, $y > 0$ болсо, анда xy тин эң чоң маанисин тап.

212. Барабарсыздыкты далилде:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

II глава боюнча сыноо (тест) көнүгүүлөрү

1. Теңдемелер системасын чыгар: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

A) $x = -4$, $y = -1$; B) $x = 1$, $y = -4$;
C) $x = 4$, $y = -1$; D) (1; 4) жана (4; 1).

2. Теңдемелер системасын чыгар: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

A) $x = 3$, $y = 1$; B) $x = 5$, $y = -1$;
C) $x = 4$, $y = 0$; D) $x = 1$, $y = 3$.

3. Эки сандын айырмасы 3 кө, алардын көбөйтүндүсү 28 ге барабар. Ошол сандарды тап.

A) 7 жана 4; B) 5 жана 2; C) 14 жана 2; D) 11 жана 8.

4. Тик бурчтуктун периметри 30 м ге, аянты болсо 56 $м^2$ ге барабар. Анын узуну туурасынан канча метрге узун?

A) 1,2 м; B) 1 м; C) 2 м; D) 2,5 м.

5. 60 км аралыкты бир велосипедчи экинчисине караганда 1 саат кечирээк басып өттү. Эгерде биринчи велосипедчинин ылдамдыгы экинчисинин ылдамдыгынан 5 *км/саат* ка аз болсо, ар биринин ылдамдыгын тап.

A) 20 км/саат, 25 км/саат; B) 10 км/саат, 15 км/саат;
C) 15 км/саат, 20 км/саат; D) 12 км/саат, 17 км/саат.

6. Теңдемелер системасын чыгар: $\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$

A) (0,6; 4) жана (12; 0,2); B) (0,4; 6) жана (0,12; 2);
C) (4; 0,6) жана (12; 0,2); D) (4; 0,2) жана (12; 0,6).

7. Теңдемелер системасын чыгар: $\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$

A) (6; 4) жана (4; 3); B) (–3; 6) жана (6; –3);
C) (6; 3) жана (3; –6); D) (6; 3) жана (6; –3).

8. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

A) (–10; 5) жана (2; 5); B) (–10; 2) жана (5; 5);
C) (5; –10) жана (–10; 2); D) (5; 5) жана (–2; 10).

9. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$

A) (4; $\frac{1}{2}$) жана (–2; –1); B) (–2; $\frac{1}{2}$) жана (4; –1);
C) (4; 1) жана (–4; –2); D) (–2; –1) жана (2; 1).

10. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}}-\sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}}=\dfrac{5}{6},\\ x-y=12.\end{cases}$$

A) (–1;12); B) (12;–1); C) (–1;11); D) (11;–1).

11. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases}3x^2+10x-8<0,\\ 2x+9\ge 0.\end{cases}$$

A) $-4<y<\frac{2}{3}$; B) $-4,5<y<\frac{2}{3}$; C) $x>-4,5$; D) $x<\frac{2}{3}$.

12. Барабарсыздыкты чыгар: $|x^2+x-1|\le 1$.

A) $-2\le x\le 1,\ 2<x\le 3$; B) $-2\le x\le -1,\ \ 0\le x\le 1$;

C) $-1\le x\le 0,\ 1<x\le 2$; D) $x\le -2,\ \ x\ge 1$.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

Маселе. Эки жүк машинасы чогуу иштеп, жүктү 6 саатта ташууга тийиш эле. Экинчи машина иш башталышына кеч калгандыктан, ал келгенге чейин биринчи машина жалпы жүктүн $\frac{3}{5}$ бөлүгүн ташып болду. Жүктүн калган бөлүгүн экинчи машина гана ташыды жана ошол себептүү жүктү ташууга 12 саат убакыт кетти. Жүктү ар бир машинанын жеке өзү канча убакытта ташымак?

△ Жүк машиналары ташууга тийиш болгон жүктү бир деп кабыл алалы. Жалпы жүктү жеке өзү ташышы үчүн биринчи машина сарптай турган убакытты x саат, экинчи машина сарптай турган убакытты болсо y саат аркылуу белгилейли. Анда бир саатта биринчи машина жүктүн $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, экинчиси болсо $\frac{1}{y}$ бөлүгүн ташымак.

Чогуу иштеп, алар бир саатта бүтүн жүктүн $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ бөлүгүн ташымак жана маселенин шарты боюнча жүктү 6 саатта ташып болмок. Ошол себептүү, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6 = 1.$

Чындыгында болсо биринчи машина жүктүн $\frac{3}{5}$ бөлүгүн ташыганга өз убактынын $\frac{3}{5}$ бөлүгүн сарптады, жүктүн калган бөлүгүн болсо экинчи машина ташыды жана ага өз убактынын $\frac{2}{5}$ бөлүгүн сарптады. Анда жалпы жүктү ташууга 12 саат кеткендигин эсепке алсак, экинчи теңдемени алабыз:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Маселе төмөнкү теңдемелер системасын чыгарууга келтирилди:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6 = 1,\\ \frac{3}{5}\text{x}+\frac{2}{5}\text{y}=12.\end{cases}$$

Адегенде системаны жөнөкөйлөштүрүп, андан кийин аны ордуна коюу усулу менен чыгарабыз:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x = 60 - 2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

мындан, $y^2 - 27y + 180 = 0,$

$$y_{1,2}=\frac{27}{2}-\sqrt{\frac{729}{4}-180}=\frac{27}{2}-\frac{3}{2},\ y_1=15,\ y_2=12.$$

$x = -20 - \frac{2}{3}y$ формуладан пайдаланып, алабыз

$$x_1 = 10,\ x_2 = 12.$$

Жообу: 10 саат жана 15 саат – эгерде машиналардын жүк көтөрүү мүмкүнчүлүктөрү түрдүүчө болсо;

12 саат жана 12 саат – эгерде машиналардын жүк көтөрүү мүмкүнчүлүктөрү бирдей болсо.

Маселелер

1. 1) Биринчи залда 420, экинчи залда болсо 480 отургуч бар. Экинчи залда биринчиге караганда 5 катарга аз, бирок ар бир катарда биринчи залдагы ар бир катардан 10 го отургуч көбүрөөк. Биринчи залдагы ар бир катарда канча отургуч бар?

2) Кызыл залда 320, көк залда 360 отургуч бар. Кызыл залда көк залдагыга караганда 2 катарга көп, бирок ар бир катарда көк залдын ар бир катарындагыга караганда 4 төн отургуч аз. Кызыл залда канча катар бар?

2. 1) Эки насос чогуу иштеп 80 $м^3$ көлөмдүү бассейнди кандайдыр убакытта толтурушат. Эгерде өнүмдүүлүгүн $1\frac{1}{3}$ эсе чоңойткон биринчи насос жеке өзү иштесе бассейнди толтурууга 2 саат көбүрөөк убакыт керек болмок. Эгерде экинчи насос гана өзүнүн өнүмдүүлүгүн саатына 1 $м^3$ ге азайтып иштесе, бассейнди толтурууга кеткен убакыт $3\frac{1}{3}$ эсе көбүрөөк болмок (эки насос чогуу иштегендеги убакытка салыштырмалуу). Ар бир насостун өнүмдүүлүгү кандай?

2) Тажрыйбалары бирдей түрдүү сандагы жумушчулардан турган эки бригада тетик даярдашат, мында ар бир жумушчу иш күнү бою 2 тетик даярдайт. Адегенде биринчи бригада гана иштеп 32 тетик даярдады. Андан кийин экинчи бригаданын өзү иштеп, дагы 48 тетик даярдады.Бул иштердин бардыгына 4 күн убакыт кетти. Ошондон кийин чогуу 6 күн иштеп, 240 тетик даярдашты. Ар бир бригадада канчадан жумушчу бар?

3. 1) Продукциянын жарымы 10 % киреше менен, экинчи жарымынын жарымы 20 % киреше менен сатылды. Эгерде бардык продукцияны саткандан түшкөн жалпы киреше 12 % ды түзгөн болсо, анда продукциянын калган чейреги канча пайыз кирешеге сатылган?

2) Соода фирмасы дүкөндөргө товарды кошумча нарк менен жеткирип берет: товарлардын $\frac{3}{5}$ бөлүгүнө 5 % кошумча нарк коюп, калган товарлардын жарымына 4 % кошумча нарк коюп сатылды. Эгерде бардык товарларга коюлган кошумча нарк 7 % ды түзгөн болсо, калган товарлардын экинчи жарымына пайыз эсебинде кандай кошумча нарк коюлган?

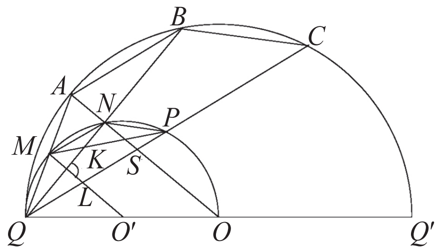
4. 1) Эки заттын аралашмасы бар. Эгерде бул аралашмага экинчи заттан 3 кг кошулса, анда анын аралашмадагы саны пайыздарда эки эсе чоңоёт, эгерде баштапкы аралашмага биринчи заттан 3 кг кошулса, анда экинчи заттын саны пайыз эсебинде эки эсе азаят. Ар бир заттын баштапкы аралашмадагы массасын тап.

2) Эки суюктуктун аралашмасы бар. Эгерде бул аралашмага биринчи суюктуктан 8 литр куюлса, анда анын аралашмадагы концентрациясы эки эсеге чоңоёт, эгерде баштапкы аралашмага экинчи суюктуктан 8 литр куюлса, анда биринчи суюктуктун концентрациясы бир жарым эсеге азаят. Ар бир суюктуктун аралашмадагы көлөмүн тап.

5. Самолёт A дан B га чейин шамалдын багытында жана B дан A га шамалга каршы учту, мында шамалдын ылдамдыгы өзгөрбөдү. Башка жолу самолёт ошол маршрут боюнча рейсти шамалсыз аба-ырайында ишке ашырды. Эки учурда тең самолёттун моторлору бирдей кубаттуулукта иштеди. Кайсы учурда жалпы учууга азыраак убакыт кетти?

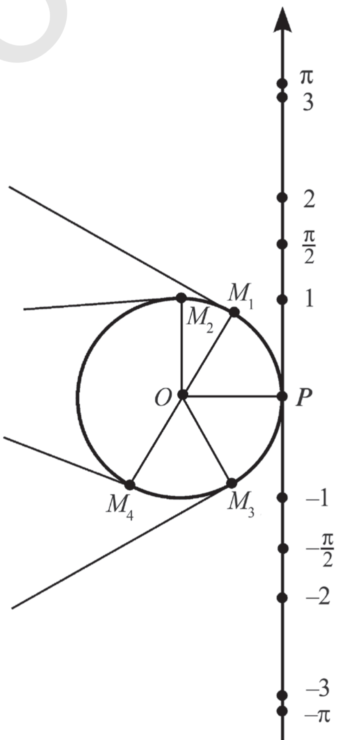
6. Эки тракторчу жер аянтын p күндө айдай алышат. Эгерде биринчи тракторчу аянттын жарымын айдаса, андан кийин экинчи тракторчу калган бөлүгүн айдаса, анда q күн керек болмок. $q \geq 2p$ экендигин далилде.

III ГЛАВА. ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

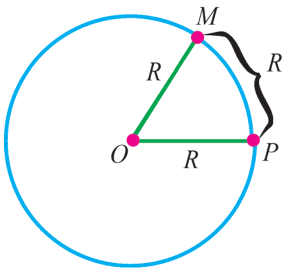


17-§. БУРЧТУН РАДИАНДЫК ЧЕНИ

Алсак, вертикалдуу түз сызык борбору O чекитинде жана радиусу 1 ге барабар болгон айланага P чекитте жансын (48-сүрөт). Бул түз сызыкты башы P чекитинде болгон сан огу деп, жогоруга багытты болсо түз сызыктагы оң багыт деп эсептейбиз. Сан огунда узундук бирдиги иретинде айлананын радиусун алабыз. Түз сызыкта бир нече чекитти белгилейли: $\pm 1, \pm\frac{\pi}{2}{}_{0}, \pm 3, \pm\pi$ (π –болжолдуу 3,14 кө барабар болгон иррационалдуу сан). Бул түз сызыкты айланадагы P чекитине бекиген чоюлбаган жип иретинде элестетип, аны ойдо айланага орой баштайбыз. Мында сан (огунун) түз сызыгынын, мисалы, 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2 координаталуу чекиттери айлананын, тиешелүү түрдө, M_1, M_2, M_3, M_4 чекиттерине өткөндүктөн, PM_1 жаанын узундугу 1 ге барабар, PM_2 жаанын узундугу $\frac{\pi}{2}$ ге барабар жана у. с. болот.



48-сүрөт.



49-сүрөт.

Ошентип, *түз сызыктын ар бир чекитине айлананын кандайдыр чекити туура келтирилет.*

Түз сызыктын координатасы 1 ге барабар болгон чекитине M_1 чекити туура келтирилгендиктен, POM_1 бурчун бирдик бурч деп эсептөө жана бул бурчтун өлчөмү менен башка бурчтарды өлчөө табигый абал. Мисалы, POM_2 бурчун $\frac{\pi}{2}$ ге барабар, POM_3 бурчун -1 ге барабар, POM_4 бурчун -2 ге барабар деп эсептөө зарыл. Бурчтарды өлчөөнүн мындай усулу математика жана физикада кеңири колдонулат. Ага бурчтар *радиандык чендерде өлчөнүп жатат* дейилет, POM_1 ге болсо 1 радиан (1 рад)га барабар бурч дейилет. Айлана PM_1 жаасынын узундугу радиуска барабар экендигин белгилей кетебиз (48-сүрөт).

Эми каалагандай R радиустуу айлананы карап көрөбүз жана анда узундугу R ге барабар болгон PM жааны жана POM бурчту белгилейбиз (49-сүрөт).

! Узундугу айлананын радиусуна барабар болгон жаага керилген борбордук бурчка 1 *радиандык бурч* дейилет.

Ага 1 радиандык бурч узундугу ***R*** ге барабар жааны керип турат, дейбиз. 1 рад бурчтун градустук өлчөмүн табалы. 180° туу борбордук бурч узундугу πR (жарым айлана) болгон жааны керип тургандыктан, узундугу R болгон жааны π эсе кичине бурч керип турат, б. а.

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.}$$

$\pi \approx 3{,}14$ болгондуктан 1 рад $\approx 57{,}3°$ болот.

Эгерде бурч α радиандан турган болсо, анда анын градустук өлчөмү төмөнкүгө барабар болот:

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}a\right)^{\circ}.} \qquad (1)$$

1- маселе. 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад га барабар бурчтун градустук өлчөмүн тап.

△ (1) формула боюнча табабыз:

1) π рад$=180°$; 2) $\frac{\pi}{2}\text{rad}=90$; 3) . $\frac{3\pi}{4}\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=135$.▲

1° туу бурчтун радиандык өлчөмүн табалы. 180° туу бурч π рад га барабар болгондуктан

$$\boxed{1^{o}=\frac{\pi}{180}\text{rad}}$$

болот.

Эгерде бурч α градустан турган болсо, анда анын радиандык өлчөмү

$$\boxed{\alpha^{o}=\frac{\pi}{180}\alpha\ \text{rad}} \qquad (2)$$

га барабар болот.

2- маселе. 1) 45° ка барабар бурчтун; 2) 15° ка барабар бурчтун радиандык өлчөмүн тап.

△ (2) формула боюнча табабыз:

1) $45^{o}=\frac{\pi}{180}\cdot 45$ рад $=\frac{\pi}{4}$ рад; 2) $15^{o}=\frac{\pi}{180}\cdot 15$ рад $\frac{\pi}{12}$рад. ▲

Көбүрөөк кездешүүчү бурчтардын градустук өлчөмдөрүн жана аларга туура келген радиандык өлчөмдөрүн келтиребиз:

Градус	0	30	45	60	90	180
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Адатта, бурчтун өлчөмү радиандарда берилсе, «рад» аталышы түшүрүп калтырылат.

Бурчтун радиандык өлчөмү айлана жааларынын узундуктарын эсептөө үчүн ыңгайлуу. 1 радиан бурчтун узундугу R радиуска барабар жааны керип тургандыктан, α радиан бурч

$$l=\alpha R \qquad (3)$$

узундуктагы жааны керип турат.

3-маселе. Курант минут жебесинин учу радиусу $R \approx 0{,}8$ м болгон айлана боюнча аракеттенет. Жебенин учу 15 мин та канча жолду басып өтөт?

△ Сааттын жебеси 15 мин та $\frac{\pi}{2}$ радианга барабар бурчка бурулат. (3) формула боюнча $\alpha = \frac{\pi}{2}$ болгондо табабыз:

$$1 = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8 \text{ м} \approx 1{,}3 \text{ м}.$$

Жообу: 1,3 м. ▲

(3) формула айлананын радиусу $R=1$ болгондо айныкса жөнөкөй көрүнүшкө ээ болот. Анда жаанын узундугу ошол жааны керип турган борбордук бурчтун чоңдугуна барабар, б. а. $l=\alpha$ болот. Радиандык өлчөөнүн математика, физика, механика жана башка илимдерде колдонулушунун ыңгайлуулугу ошону менен түшүндүрүлөт.

4-маселе. Радиусу R болгон тегерек сектор α рад бурчка ээ. Ошол сектордун аянты

$$S = \frac{R^2}{2} a$$

га барабар экендигин далилде, мында $0 < \alpha < \pi$.

△ π рад дуу тегерек сектор (жарым тегерек)дун аянты $\frac{\pi R^2}{2}$ ге барабар. Ошондуктан 1 рад дуу сектордун аянты π эсе кичине, б. а. $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Демек, α рад дуу сектордун аянты $\frac{R^2}{2} a$ га барабар. ▲

Көнүгүүлөр

213. Градустарда туюнтулган бурчтун радиандык өлчөмүн тап:

1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Радиандарда туюнтулган бурчтун градустук өлчөмүн тап:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;

6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Санды 0,01 ге чейин тактыкта жаз:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$..

216. Сандарды салыштыр:

1) $\frac{\pi}{2}$ жана 2; 2) 2π жана 6,7; 3) π жана $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ жана 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ жана $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ жана $-\sqrt{10}$.

217. (Оозеки.) а) тең жактуу үч бурчтук; б) тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук; в) квадрат; г) туура алты бурчтук бурчтарынын градус жана радиандык өлчөмдөрүн аныкта.

218. Эгерде айлананын 0,36 м узундуктагы жаасын 0,9 рад дуу борбордук бурч керип турса, анда айлана радиусун эсепте.

219. Эгерде айлананын радиусу 1,5 см болсо, айлананын узундугу 3 см болгон жаасын керип турган бурчтун радиандык өлчөмүн тап.

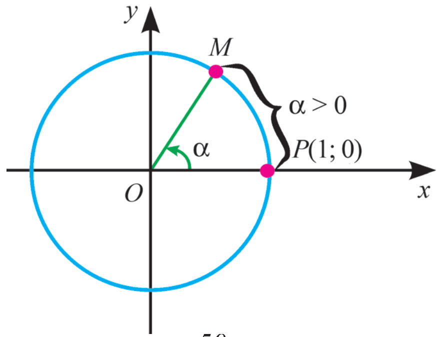
220. Тегерек сектордун жаасын $\frac{3\pi}{4}$ рад дуу бурч керип турат. Эгерде тегеректин радиусу 1 см ге барабар болсо, сектордун аянтын тап.

221. Тегеректин радиусу 2,5 см ге, тегерек сектордун аянты 6,25 см^2 ге барабар. Ошол тегерек сектордун жаасын керип турган бурчту тап.

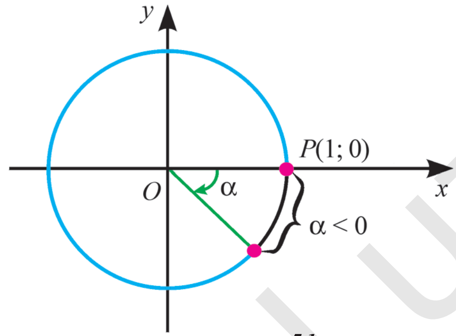
18-§. ЧЕКИТТИ КООРДИНАТАЛАР БАШЫНЫН АЙЛАНАСЫНДА БУРУУ

Мурдагы параграфта сан түз сызыгынын чекиттери менен айлананын чекиттери ортосунда тиешелүүлүктү орнотуунун көргөзмөлүү усулунан пайдаланылды. Эми кантип чыныгы сандар менен айлананын чекиттери ортосунда айлананын чекитин буруу жардамында тиешелүүлүктү орнотууга болорун көрсөтөбүз.

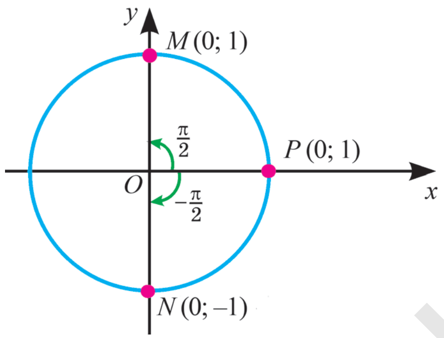
Координата тегиздигинде радиусу 1 ге барабар жана борбору координатанын башында болгон айлананы карап көрөбүз. Ага *бирдик айлана* дейилет. Бирдик айлананын чекитин координата башынын айланасында α радиан бурчка *буруу түшүнүгүн* киргизебиз (бул жерде α – каалагандай чыныгы сан).



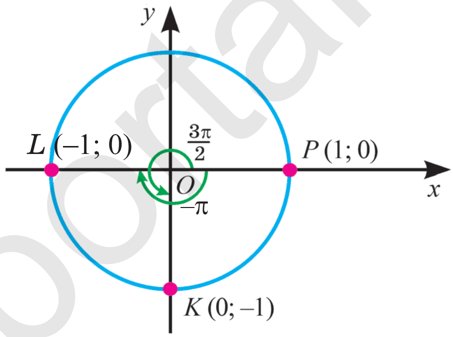
50-сүрөт.



51-сүрөт.



52-сүрөт.



53-сүрөт.

1. Алсак, $\alpha > 0$ болсун. Чекит бирдик айлана боюнча P чекитинен саат жебесинин багытына карама-каршы аракеттенип, α узундуктагы жолду басып өттү, дейли (50-сүрөт). Жолдун соңку чекитин M менен белгилейбиз.

Ага M чекити P чекитин координата башынын айланасында α радиан бурчка буруу менен алынат, деп айтабыз.

2. Алсак, $\alpha < 0$ болсун. Анда α радиан бурчка буруу кыймыл саат жебесиинн багытында жасалгандыгын жана чекит $|\alpha|$ узундуктагы жолду басып өткөнүн билдирет (51-сүрөт).

0 рад га буруу чекит өзүнүн ордунда калгандыгын билдирет.

Мисалдар:

1) $P(1;\ 0)$ чекитин $\frac{\pi}{2}$ рад бурчка бурганда $(0;\ 1)$ координаталуу M чекити алынат (52-сүрөт).

2) $P(1;\ 0)$ чекитин $-\frac{\pi}{2}$ рад бурчка бурганда $N(0;\ -1)$ чекити алынат (52-сүрөт).

3) $P(1;\ 0)$ чекитин $\frac{3\pi}{2}$ рад бурчка бурганда $K(0;\ -1)$ чекити алынат (53- сүрөт).

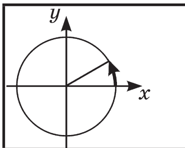
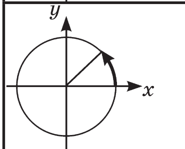
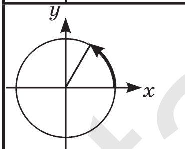
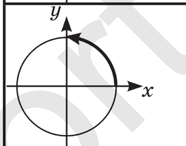
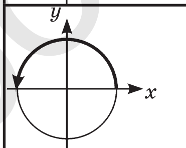
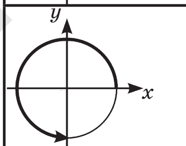
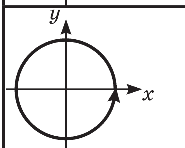
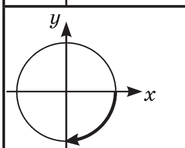
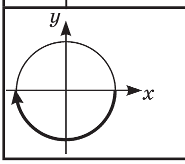
4) $P(1;\ 0)$ чекитин $-\pi$ рад бурчка бурганда $L(-1;\ 0)$ чекити алынат (53-сүрөт).

Геометрия курсунда 0° тан 180° ка чейин болгон бурчтар каралган. Бирдик айлананын чекиттерин координаталар башынын айланасында буруудан пайдаланып, 180° тан чоң бурчтарды, ошондой эле, терс бурчтарды да кароого болот. Буруу бурчун градустарда да, радиандарда да берүүгө болот. Мисалы, $P\ (1;\ 0)$ чекитин $\frac{3\pi}{2}$ бурчка буруу аны 270° ка бурганды билдирет; $-\frac{\pi}{2}$ бурчка буруу –90° ка буруу болот.

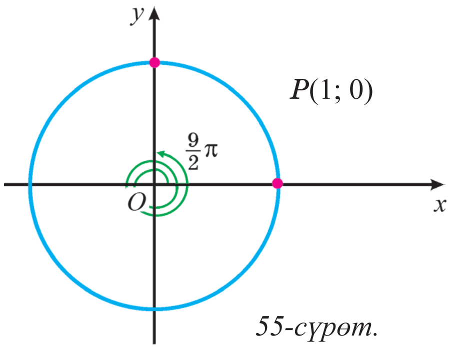
Бурчтарды буруунун радиандык жана градустук чендери жадыбалын келтиребиз (54-сүрөт).

$P(1;\ 0)$ чекитин 2π ге, б. а. 360° ка бурганда чекит баштапкы абалына кайтат (жадыбалга кара). Ошол чекитти -2π ге, б. а. –360° ка бурганда ал кайра баштапкы абалына кайтат.

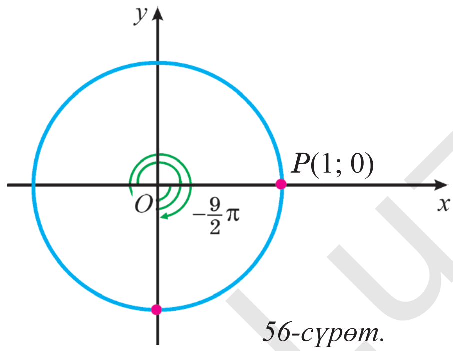
Чекитти 2π ден чоң бурчка жана -2π ден кичине бурчка буруу боюнча мисалдарды карап көрөбүз. Мисалы, $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ бурчка бурууда чекит саат

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

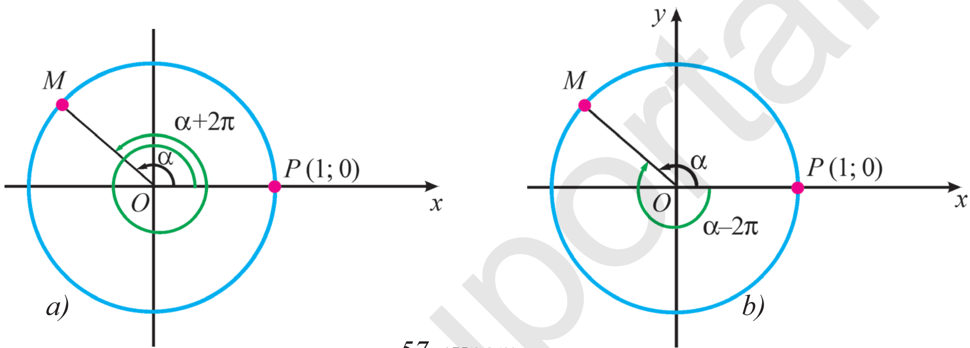
54-сүрөт.



55-сүрөт.



56-сүрөт.



57-сүрөт.

жебесинин кыймылына карама-каршы толук эки жолу айланат жана дагы $\frac{\pi}{2}$ жолду басып өтөт (55- сүрөт).

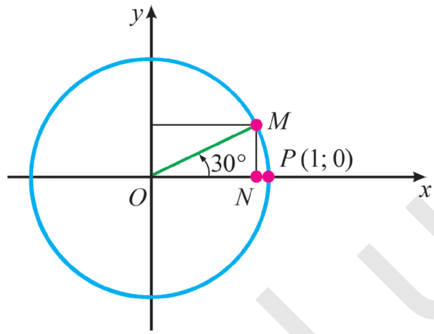
$-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ бурчка буруударда чекит саат жебесинин кыймыл багытында эки жолу толук айланып, ошол багытта $\frac{\pi}{2}$ жолду өтөт (56-сүрөт).

$P(1;\ 0)$ чекитин $\frac{9\pi}{2}$ бурчка бурганда $\frac{\pi}{2}$ бурчка бургандагы чекиттин окшош дал алынышын белгилей кетебиз (55-сүрөт). $-\frac{9\pi}{2}$ бурчка бурганда $-\frac{\pi}{2}$ бурчка бургандагы чекиттин дал өзү алынат (56-сүрөт).

Жалпысынан алганда, эгерде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ (мында k – бүтүн сан) болсо, анда α бурчка бурганда α_0 бурчка бургандагы чекиттин дал өзү алынат.

Ошентип, ар бир чыныгы α санга бирдик айлананын (1; 0) чекитин α рад бурчка буруу менен алынган бир гана чекити туура келет.

Бирок, бирдик айлананын окшош бир M чекитине (P(1; 0) чекитин буруудa M чекити алынган) чексиз көп $\alpha + 2\pi k$ чыныгы сандар туура келет, k – бүтүн сан (57-сүрөт).



58-сүрөт.

1- маселе. P (1; 0) чекитин: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$ бурчка бургандан алынган чекиттин координаталарын тап.

△ 1) $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$ болгондуктан 7π ге бурууда π ге бургандагы чекиттин өзү, б. а. (–1; 0) координаталуу чекит алынат.

2) $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ болгондуктан $-\frac{5\pi}{2}$ ге бурганда $-\frac{\pi}{2}$ ге бургандагы чекиттин өзү, б. а. (0; –1) координаталуу чекит алынат. ▲

2- маселе. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ чекитин алуу үчүн (1; 0) чекитти буруу керек болгон бардык бурчтарды жаз.

△ NOM тик бурчтуу үч бурчтугунан (58-сүрөт) NOM бурч $\frac{\pi}{6}$ га барабардыгы келип чыгат, б. а. мүмкүн болгон буруу бурчтарынан бири $\frac{\pi}{6}$ га барабар. Ошондуктан $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ чекитин алуу үчүн (1; 0) чекитин буруу керек болгон бардык бурчтар мындайча туюнтулат: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, бул жерде k – каалагандай бүтүн сан, б. а. $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ ▲

Көнүгүүлөр

222. Бирдик айлананын $P(1; 0)$ чекитин:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π

бурчка буруу менен алынган чекиттердин координаталарын тап.

223. Бирдик айланада $P(1; 0)$ чекитин:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$

бурчка буруунун натыйжасында алынган чекитти белгиле.

224. $P(1; 0)$ чекитин:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$ бурчка буруунун натыйжасында алынган чекит жайлашкан координаталар чейрегин аныкта.

225. $P(1; 0)$ чекитти:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) $540°$; 6) $810°$; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) $450°$

бурчка буруу натыйжасында алынган чекиттин координаталарын тап.

226. 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$ чекиттерин алуу үчүн $P(1; 0)$ чекитин буруунун керек болгон бардык бурчтарды жаз.

227. $P\ (1; 0)$ чекити берилген:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8

бурчка буруу натыйжасында алынган чекит жайлашкан координаталар чейрегин тап.

228. Эгерде:

1) $a = 6{,}7\pi$; 2) $a = 9{,}8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$

болсо, $a = x + 2\pi k$ барабардыгы аткарылган x санды (бул жерде $0 \le x \le 2\pi$) жана k натуралдык санды тап.

229. Бирдик айланада $P(1;\ 0)$ чекитин:

1) $\frac{\pi}{4}-2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}-2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}-6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4}-8\pi$;
5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π

бурчка буруудан алынган чекитти түз.

230. $P(1;\ 0)$ чекитти:

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$

бурчка (бул жерде k – бүтүн сан) буруудан алынган чекиттин координаталарын тап.

231. $(1;\ 0)$ чекитти:

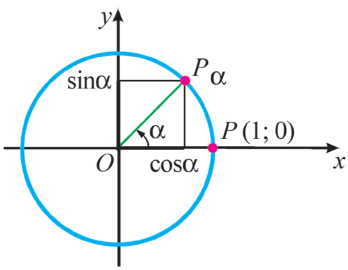
1) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

координаталуу чекитин алуу үчүн буруу керек болгон бардык бурчтарды жаз.

19-§. БУРЧТУН СИНУСУ, КОСИНУСУ, ТАНГЕНСИ ЖАНА КОТАНГЕНСИНИН АНЫКТАМАЛАРЫ

Геометрияда градустарда туюнтулган бурчтун синусу, косинусу, тангенси киргизилген эле. Бул бурч 0° тан 180° ка чейин болгон аралыкта каралган. Каалагандай бурчтун синусу жана косинусу төмөнкүдөй мүнөздөлөт:

1- аныктама. α ***бурчтун синусу деп (1; 0) чекитин координаталар башынын айланасында α бурчка буруунун натыйжасында алынган чекиттин ординатасына айтылат*** **(sinα сыяктуу белгиленет).**



2-аныктама. ***α бурчтун косинусу деп (1; 0) чекитин координаталар башынын айланасында α бурчка буруунун натыйжасында алынган чекиттин абсциссасына айтылат (cosα сыяктуу белгиленет).***

Бул аныктамаларда α бурч градустарда, ошондой эле, радиандарда да туюнтулушу мүмкүн.

Мисалы, (1; 0) чекитин $\frac{\pi}{2}$ бурчка, б. а. 90° ка бурууда (0; 1) чекити алынат. (0; 1) чекитинин ординатасы 1 ге барабар, ошондуктан

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90\ =1;$$

бул чекиттин абсциссасы 0 гө барабар, ошондуктан

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90\ =0\,.$$

Бурч 0° тан 180° ка чейин аралыкта болгон учурда синус жана косинустардын аныктамалары геометрия курсунан белгилүү болгон синус жана косинустун аныктамалары менен дал түшүшүн белгилей кетебиз.

Мисалы,

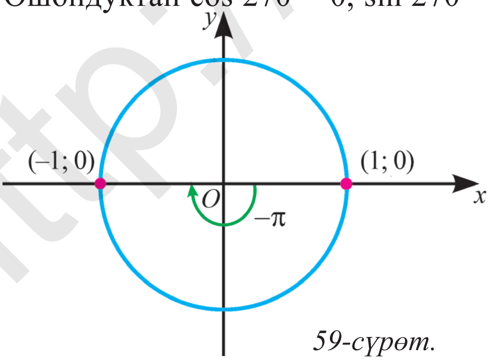
$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin 30\ =\frac{1}{2},\ \cos\pi=\cos 180\ =-1\,.$$

1-маселе. sin(–π) жана cos(–π) ни тап.

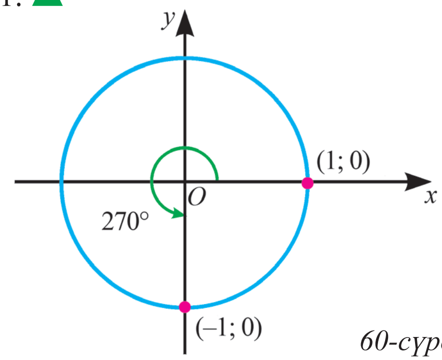
△ (1; 0) чекитин –π бурчка бурганда, ал (–1; 0) чекитке өтөт (59-сүрөт). Ошондуктан sin (–π)= 0, cos (–π) = –1. ▲

2- маселе. sin 270° жана cos 270° ты тап.

△ (1; 0) чекитин 270° ка бурганда, ал (0; –1) чекитке өтөт (60- сүрөт). Ошондуктан cos 270°=0, sin 270°= –1. ▲

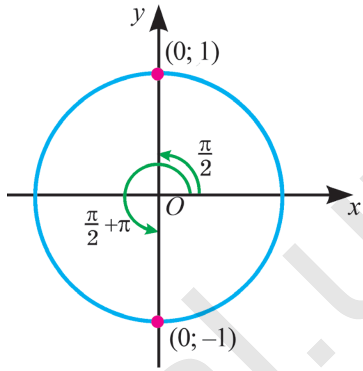


59-сүрөт.



60-сүрөт.

3- маселе. $\sin t=0$ теңдемени чыгар.



61-сүрөт.

△ $\sin t=0$ теңдемени чыгаруу – бул синусу нөлгө барабар болгон бардык бурчтарды табуу дегенди билдирет.

Бирдик айланада ординатасы нөлгө барабар болгон эки чекит бар: (1; 0) жана (–1; 0) (59-сүрөт). Бул чекиттер (1; 0) чекитин 0, π, 2π, 3π жана у. с., ошондой эле, $-\pi$, -2π, -3π жана у. с. бурчтарга буруу менен алынат.

Демек, $t=k\pi$ болгондо (мында k – каалагандай бүтүн сан) $\sin t=0$ болот. ▲

Бүтүн сандардын жыйнагы $\boldsymbol{Z}$ тамгасы менен белгиленет. k саны $\boldsymbol{Z}$ ке тиешелүү экендигин белгилөө үчүн $k\in\boldsymbol{Z}$ жазуусунан пайдаланылат („k саны Z ке тиешелүү“ деп окулат). Ошондуктан 3-маселенин жообун минтип жазууга болот:

$$t=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

4- маселе. $\cos t=0$ теңдемесин чыгар.

△ Бирдик айланада абсциссасы нөлгө барабар болгон эки чекит бар: (0, 1) жана (0; –1) (61- сүрөт).

Бул чекиттер (1; 0) чекитин $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi$ жана у. с., ошондой эле, $\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi$ жана у. с. бурчтарга, б. а. $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (мында $k\in\boldsymbol{Z}$) бурчтарга буруу менен алынат.

Жообу: $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

5-маселе. Теңдемени чыгар: 1) $\sin t=1$; 2) $\cos t=1$.

△ 1) Бирдик айлананын (0; 1) чекити бирге барабар ординатага ээ. Бул чекит (1; 0) чекитин $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ бурчка буруу менен алынат.

2) (1; 0) чекитин $2k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$ бурчка буруу менен алынган чекиттин абсциссасы бирге барабар болот.

Жообу: $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ болгондо $\sin t=1$,

$t=2\pi k$ болгондо $\cos t=1$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

3- аныктама. α ***бурчтун тангенси деп,*** α ***бурч синусунун анын косинусуна катышына айтылат*** **(tgα сыяктуу белгиленет).**

Ошентип, $\operatorname{tg}a=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Мисалы, $\operatorname{tg}0^{\circ}=\dfrac{\sin0^{\circ}}{\cos0^{\circ}}=\dfrac{0}{1}=0,\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt2}{2}}{\dfrac{\sqrt2}{2}}=1$.

Кээде α *бурчтун котангенсинен* пайдаланылат (ctgα сыяктуу белгиленет). Ал $\operatorname{ctg}a=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ формуласы менен аныкталат.

Мисалы, $\operatorname{ctg}270^{\circ}=\dfrac{\cos270^{\circ}}{\sin270^{\circ}}=\dfrac{0}{-1}=0,\ \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{1}=1.$

sinα жана cosα лар каалагандай бурч үчүн мүнөздөлгөндүгүн, алардын маанилери болсо –1 ден 1 ге чейин аралыкта экендигин белгилей кетебиз; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cos\alpha\neq0$ болгон бурчтар үчүн гана, б. а. $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ тен башка каалагандай бурчтар үчүн аныкталган.

Синус, косинус, тангенс жана котангенстердин көбүрөөк кездешүүчү маанилеринин жадыбалын келтиребиз.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	Жок	0	Жок	0
ctgα	Жок	$\sqrt3$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	0	Жок	0	Жок

6- маселе. Эсепте:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

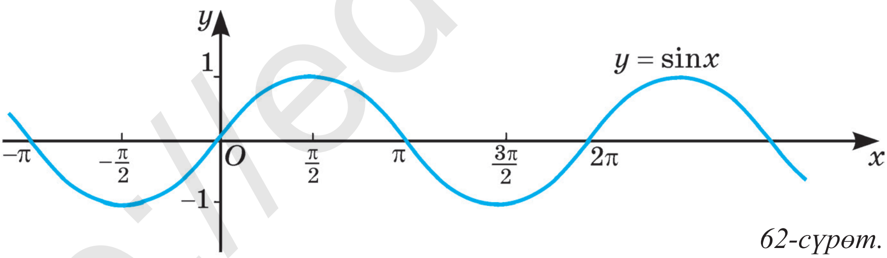
△ Жадыбалдан пайдаланып, алабыз:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2,5\,. \ ▲$$

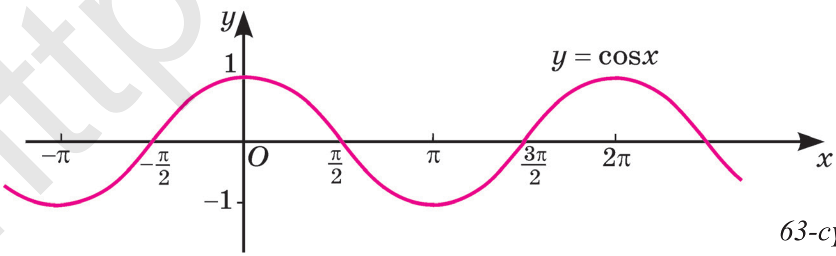
Синус, косинус, тангенс, котангенстердин бул жадыбалга кирбеген бурчтар үчүн маанилерин В. М. Брадистин төрт орундуу математикалык жадыбалдарынан, ошондой эле, микрокалькулятор жардамында табууга болот.

Эгерде ар бир чыныгы x санга $\sin x$ сан туура келтирилсе, анда чыныгы сандар жыйнагында $y=\sin x$ функциясы берилген болот. $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ жана $y=\operatorname{ctg}x$ функциялар ушуга окшош аныкталат. $y=\cos x$ функциясы бардык $x\in\boldsymbol{R}$ де аныкталган, $y=\operatorname{tg}x$ функциясы $x \neq \frac{\pi}{2} + \ k, k \in \boldsymbol{Z}$, $y=\operatorname{ctg}x$ болсо $x\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ болгондо аныкталган. $y=\sin x$ жана $y=\cos x$ функциялардын графиктери 62- жана 63-сүрөттөрдө берилген.

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ функцияларга *тригонометриялык* функциялар дейилет.



62-сүрөт.



63-сүрөт.

Көнүгүүлөр

232. Эсепте:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Эгерде:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

болсо, бирдик айланада α бурчка дал келген чекитти сүрөттө.

Эсепте (**234–236**):

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi$; 6) $\cos 0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}0°-\mathrm{tg}180°$; 3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Теңдемени чыгар:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Оозеки.) $\sin\alpha$ же $\cos\alpha$:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$

ге барабар болушу мүмкүнбү?

239. α нын берилген маанисинде туюнтманын маанисин тап:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, мында $\alpha=\frac{\pi}{4}$; 2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, мында $\alpha=60°$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$, мында $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, мында $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Теңдемени чыгар:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;
4) $\cos 0,5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Теңдемени чыгар:

1) $\sin(x+\pi) = -1$; 2) $\sin\frac{1}{2}(x-1) - 0$; 3) $\cos(x+\pi) = -1$;
4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x-2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

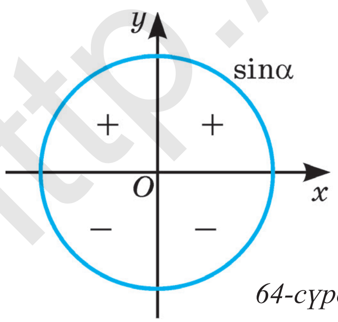
20-§. СИНУС, КОСИНУС ЖАНА ТАНГЕНСТИН БЕЛГИЛЕРИ

1. Синус жана косинустун белгилери

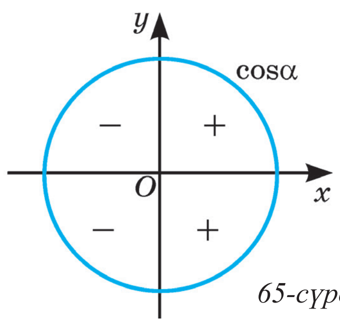
Алсак, (1; 0) чекити бирдик айлана боюнча саат жебесинин кыймылына карама-каршы аракеттенүүдө. Анда биринчи чейректе (квадрантта) жайлашкан чекиттердин ординаталары жана абсциссалары оң. Ошондуктан, эгерде $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha > 0$ жана $\cos\alpha > 0$ болот (64, 65-сүрөттөр).

Экинчи чейректе жайлашкан чекиттер үчүн ординаталар оң, абсциссалар болсо терс. Ошондуктан, эгерде $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ болот (64, 65-сүрөттөр). Ушуга окшош, үчүнчү чейректе $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, төртүнчү чейректе болсо $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (64, 65-сүрөттөр). Чекиттин айлана боюнча мындан кийинки кыймылында синус жана косинустардын белгилери чекит кайсы чейректе тургандыгы менен аныкталат.

Синустун белгилери 64-сүрөттө, ал эми косинустун белгилери болсо 65-сүрөттө көрсөтүлгөн.



64-сүрөт.



65-сүрөт.

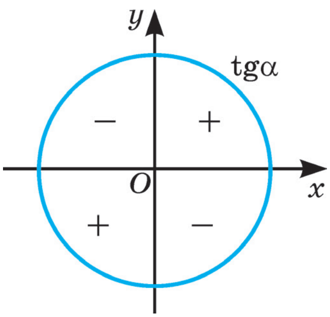
Эгерде (1; 0) чекити саат жебесинин багытында аракеттенсе, *анда да синус жана косинустун белгилери чекит кайсы чейректе жайлашканына карай аныкталат;* мунун 64, 65-сүрөттөрдөн да билүүгө болот.

1- маселе. Бурчтун синус жана косинустарынын белгилерин аныкта:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $745°$; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) $\frac{3\pi}{4}$ бурчуна бирдик айлананын экинчи чейрегинде жайлашкан чекит туура келет. Ошондуктан $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) $745° = 2 \cdot 360° + 25°$ болгондуктан (1; 0) чекитин $745°$ ка буруууга биринчи чейректе жайлашкан чекит туура келет. Ошондуктан $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.



66-сүрөт.

3) $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ болгондуктан (1; 0) чекитин $-\frac{5\pi}{7}$ бурчка бурганда үчүнчү чейректе жайлашкан чекит алынат. Ошондуктан $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

2. Тангенстин белгилери

Аныктама боюнча $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Ошондуктан, эгерде $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ бирдей белгиге ээ болсо, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ карама-каршы белгилерге ээ болсо, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ болот. Тангенстин белгилери 66- сүрөттө берилген.

$\operatorname{ctg}\alpha$ нын белгилери $\operatorname{tg}\alpha$ нын белгилери менен бирдей болот.

2- маселе. Бурч тангенсинин белгилерин аныкта:

1) $260°$; 2) 3.

△ 1) $180° < 260° < 270°$ болгондуктан $\operatorname{tg}260° > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ болгондуктан $\operatorname{tg}3 < 0$. ▲

Көнүгүүлөр

242. Эгерде:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;

5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

болсо, (1; 0) чекитин α бурчка буруудa алынган чекит кайсы чейректе жатышын аныкта.

243. Эгерде:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;

5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$

болсо, $\sin\alpha$ санынын белгисин аныкта.

244. Эгерде:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;

5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$

болсо, $\cos\alpha$ санынын белгисин аныкта.

245. Эгерде:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;

5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$

болсо, $\mathrm{tg}\alpha$ жана $\mathrm{ctg}\alpha$ сандарынын белгилерин аныкта.

246. Эгерде:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;

4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\leq1{,}8\pi$

болсо, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ сандарынын белгилерин аныкта.

247. Эгерде:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$

болсо, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ сандарынын белгилерин аныкта.

248. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ болсун. Сандын белгисин аныкта:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;	2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;	3) $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;	4) $\sin(\pi-\alpha)$;
5) $\cos(\alpha-\pi)$;	6) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$;	7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;	8) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

249. Синус жана косинустардын белгилери бирдей (түрдүү) болгон α санынын 0 дөн 2π ге чейинки аралыкта жайлашкан бардык маанилерин тап.

250. Сандын белгисин аныкта:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Туюнтмалардын маанилерин салыштыр:

1) $\sin 0{,}7$ жана $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ жана $\cos 2{,}3$.

252. Теңдемени чыгар:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

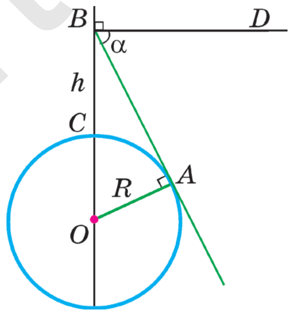
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. Эгерде:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1{,}2$

болсо, α санга дал келген чекит кайсы чейректе жайлашкан?

254. (*Берунийдин маселеси.*) Тоонун бийиктиги $h=BC$ жана $\alpha=\angle ABD$ бурч белгилүү болсо, Жердин радиусу R ди тап (67-сүрөт).



***67** сүрөт*

21-§. БИР БУРЧТУН СИНУСУ, КОСИНУСУ ЖАНА ТАНГЕНСИ ОРТОСУНДАГЫ КАТЫШТАР

Синус менен косинустун ортосундагы катышты аныктайбыз.

Алсак, бирдик айлананын $M(x; y)$ чекити (1; 0) чекитин α бурчка буруунун натыйжасында алынган болсун (68-сүрөт). Анда синус жана косинустун аныктамасы боюнча,

$$x=\cos\alpha,\ \ y=\sin\alpha$$

болот.

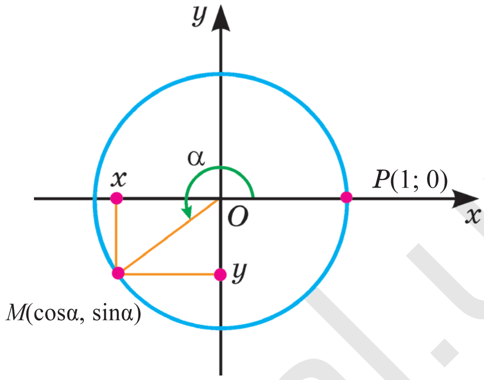
M чекити бирдик айланага тиешелүү, ошондуктан анын $(x; y)$ координаталары $x^2+y^2=1$ теңдемени канааттандырат.

Демек,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

(1) барабардык α нын каалагандай маанисинде аткарылат жана *негизги тригонометриялык окшоштук* дейилет.

(1) барабардыктан sinα ны cosα аркылуу жана, тескерисинча, cosα ны sinα аркылуу туюнтууга болот:



68 сүрөт

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,. \qquad (3)$$

Бул формулаларда тамырдын алдындагы белги формуланын сол бөлүгүндө турган туюнтманын белгиси менен аныкталат.

1-маселе. Эгерде $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ жана $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болсо, sinα ны эсепте.

△ (2) формуладан пайдаланабыз. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болгондуктан $\sin\alpha < 0$ болот, ошондуктан (2) формулада тамырдын алдына „–" белгисин коюу керек:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ ▲$$

2-маселе. Эгерде $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ жана $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ болсо, cosα ны эсепте.

△ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ болгондуктан $\cos\alpha > 0$ болот жана ошондуктан (3) формулада тамырдын алдына „+" белгисин коюу керек:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Эми *тангенс менен котангенстин ортосундагы катышты* аныктайбыз. Тангенс жана котангенстин аныктамасы боюнча:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Бул барабардыктарды көбөйтүп,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1} \tag{4}$$

барабардыгын алабыз. (4) барабардыгынан $\mathrm{tg}\alpha$ ны $\mathrm{ctg}\alpha$ аркылуу жана тескерисинча, $\mathrm{ctg}\alpha$ ны $\mathrm{tg}\alpha$ аркылуу туюнтууга болот:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, \tag{5}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{6}$$

(4)–(6) барабардыктар $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \boldsymbol{Z}$ болгондо орундуу.

3- маселе. Эгерде $\mathrm{tg}\alpha = 13$ болсо, $\mathrm{ctg}\alpha$ ны эсепте.

△ (6) формула боюнча табабыз: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

4-маселе. Эгерде $\sin\alpha = 0{,}8$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\mathrm{tg}\alpha$ ны эсепте.

△ (3) формула боюнча $\cos\alpha$ ны табабыз. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болгондуктан $\cos\alpha < 0$ болот. Ошондуктан

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Демек, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Негизги тригонометриялык окшоштуктан жана тангенстин аныктамасынан пайдаланып, *тангенс менен косинустун ортосундагы катышты* табабыз.

△ $\cos\alpha \neq 0$ деп элестетип, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ барабардыктын эки бөлүгүн $\cos^2\alpha$ га бөлөбүз: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, мындан

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.} \tag{7}$$ ▲

Эгерде $\cos\alpha \neq 0$ болсо, б. а. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ болсо, (7) формула туура болот.

(7) формуладан тангенсти косинус жана косинусту тангенс аркылуу туюнтууга болот.

5- маселе. Эгерде $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсо, $\mathrm{tg}\alpha$ ны эсепте.

△ (7) формуладан алабыз:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс экинчи чейректе терс, ошондуктан $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ▲

6- маселе. Эгерде $\mathrm{tg}\alpha=3$ жана $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\cos\alpha$ ны эсепте.

△ (7) формуладан табабыз:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болгондуктан, $\cos\alpha<0$ жана ошондуктан $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$. ▲

Көнүгүүлөр

255. Эгерде:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ va $\frac{3p}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\mathrm{tg}\alpha$ ны;

2) $\sin\alpha=0,8$ va $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсо, $\cos\alpha$ жана $\mathrm{tg}\alpha$ ны;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ va $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсо, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ жана $\mathrm{ctg}\alpha$ ны;

4) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ va $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ жана $\mathrm{ctg}\alpha$ ны;

5) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ va $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ ны;

6) $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ va $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ ны эсепте.

256. Негизги тригонометриялык окшоштуктун жардамында барабардыктар бир мезгилде аткарылышын же аткарылбастыгын аныкта:

1) $\sin\alpha = 1$ жана $\cos\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$ жана $\cos\alpha = -1$;

3) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ жана $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ жана $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

257. Барабардыктар бир мезгилде аткарылышы мүмкүнбү:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ жана $\sin\alpha = \frac{1}{5}$; 2) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ жана $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

258. Алсак, тик бурч үч бурчтуктун бурчтарынан бири болсун. Эгерде $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$ болсо, $\cos\alpha$ жана $\mathrm{tg}\alpha$ ны тап.

259. Тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчунун тангенси $2\sqrt{2}$ ге барабар. Ошол бурчтун косинусун тап.

260. Эгерде $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{8}$ болсо, $\cos\alpha$ ны тап.

261. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ болсо, $\cos\alpha$ ны тап;

2) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ болсо, $\sin\alpha$ ны тап.

262. $\mathrm{tg}\alpha = 2$ экендиги белгилүү. Туюнтманын маанисин тап:

1) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

263. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ экендиги белгилүү. 1) $\sin\alpha\,\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ туюнтмалардын маанилерин тап.

264. Теңдемени чыгар:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$; 2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$; 4) $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

22-§. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ОКШОШТУКТАР

1- маселе. $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ болгондо

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (1)$$

барабардыгынын орундуу экендигин далилде.

△ Котангенстин аныктамасы боюнча $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ жана ошондуктан

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Бул форма алмаштыруулар туура, анткени $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ болгондо $\sin\alpha \neq 0$. ▲

(1) барабардык α нын мүмкүн болгон бардык (керектүү) маанилери үчүн орундуу, б. а. анын сол жана оң бөлүктөрү мааниге ээ болгон бардык маанилери үчүн туура болот. Бул сыяктуу барабардыктарга *окшоштуктар* дейилет, мындай барабардыктарды далилдөө боюнча маселелерге окшоштуктарды далилдөө боюнча маселелер дейилет.

Кийинчерээк окшоштуктарды далилдөөдө, эгерде маселенин шартында талап кылынбаган болсо, бурчтардын керектүү маанилерин издеп отурбайбыз.

2- маселе. Окшоштукту далилде: $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

△ $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. ▲

3- маселе. Окшоштукту далилде: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△ Бул окшоштукту далилдөө үчүн анын сол жана оң бөлүктөрүнүн айырмасы нөлгө барабар экендигин көрсөтөбүз:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0.$$ ▲

1–3-маселелерди чыгарууда *окшоштуктарды далилдөөнүн төмөнкү усулдарынан* пайдаланылды: оң бөлүгүндө форма алмаштырып, анын сол бөлүгүнө барабардыгын көрсөтүү; оң жана сол бөлүктөрүнүн айырмасы нөлгө барабардыгын көрсөтүү. Кээде окшоштуктарды далилдөөдө анын оң жана сол бөлүктөрүнүн формасын алмаштырып, бирдей туюнтмага келтирген оң.

4- маселе. Окшоштукту далилде: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

$$\triangle\ \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Окшоштук далилденди, анткени анын сол жана оң бөлүктөрү $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ га барабар. ▲

5- маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.\ ▲$$

Тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөштүрүү боюнча маселелер чыгарууда, эгерде маселенин шартында талап кылынбаган болсо, бурчтардын кабыл алышы мүмкүн болгон керектүү маанилерин таппайбыз.

Көнүгүүлөр

265. Окшоштукту далилде:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$; 2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 1$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = tg^2\alpha$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = ctg^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+tg^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$; 6) $\frac{1}{1+ctg^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$.

266. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\cos\alpha \cdot tg\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot ctg\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$; 5) $\frac{tg\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын сандык маанисин тап:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, мында а $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$, мында $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, мында $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\text{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, мында $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

268. Окшоштукту далилде:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\text{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\text{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

269. α нын бардык керектүү маанилеринде төмөнкү туюнтма окшош бирдей маанини кабыл алышын, б. а. α дан көз каранды эместигин далилде:

1) $(1+\text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\text{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\text{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}-\text{tg}^2\alpha$.

270. Окшоштукту далилде:

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\text{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын сандык маанисин тап:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\text{ctg}^2\alpha)$, мында $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\text{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, мында $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

272. Эгерде $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$ болсо, $\sin\alpha\cos\alpha$ нын маанисин тап.

273. Эгерде $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$ болсо, $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$ нын маанисин тап.

274. Теңдемени чыгар:

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$; 2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

23- §. α ЖАНА –α БУРЧТАРЫНЫН СИНУСУ, КОСИНУСУ, ТАНГЕНСИ ЖАНА КОТАНГЕНСИ

Алсак, бирдик айлананын M_1 жана M_2 чекиттери $P(1;\ 0)$ чекитин тиешелүү түрдө, α жана –α бурчтарга буруунун натыйжасында алынган болсун (69-сүрөт). Анда Ox о‘гу M_1OM_2 бурчту тең экиге бөлөт ошондуктан M_1 жана M_2 чекиттер Ox о‘гуна салыштырмалуу симметриялуу жайлашкан. Бул чекиттердин абсциссалары бирдей болот, ординаталары болсо белгилери менен гана айырмаланат. M_1 чекити $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ координаталарга, M_2 чекити $(\cos(-\alpha);\ \sin(-\alpha))$ координаталарга ээ. Ошондуктан

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \qquad (1)$$

Тангенстин аныктамасынан пайдаланып, алабыз:

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha.$$

Демек,

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Ушуга окшош,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

(1) формула α нын каалагандай маанисинде орундуу болот, (2) формула болсо $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in$ болгондо орундуу.

Эгерде $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ болсо, анда $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ болушун көрсөтүүгө болот.

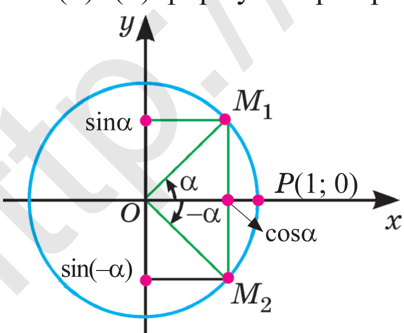
(1)–(2) формулалар терс бурчтар үчүн синус, косинус жана тангенстин маанилерин табууга шарт түзөт.

Маселен:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$



69-сүрөт.

Көнүгүүлөр

275. Эсепте:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\text{tg}(-\frac{\pi}{4})$;   2) $\frac{1+\text{tg}^2(-30^o)}{1+\text{ctg}^2(-30^o)}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\text{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\text{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\text{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\text{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$;   2) $\cos\alpha-\text{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;   4) $\text{tg}(-\alpha)\text{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

277. Окшоштукту далилде: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\text{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Эсепте:

1) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7,5\text{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$;   2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

24-§. КОШУУНУН ФОРМУЛАЛАРЫ

Кошуунун формулалары деп, $\cos(\alpha\pm\beta)$ жана $\sin(\alpha\pm\beta)$ ларды α жана β бурчтардын синус жана косинустары аркылуу туюнткан формулаларга айтылат.

Теорема. Каалагандай α *жана* β *үчүн төмөнкү барабардык орундуу болот:*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

○ M_0 (1; 0) чекитин координаталар башынын айланасында α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ радиан бурчтарга буруунун натыйжасында, тиешелүү түрдө, M_α, $M_{-\beta}$ жана $M_{\alpha+\beta}$ чекиттери алынат, дейли (70-сүрөт).

Синус жана косинустун аныктамасы боюнча, бул чекиттер төмөнкү координаталарга ээ:

$$M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

$\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$ болгондуктан $M_0OM_{\alpha+\beta}$ жана $M_{-\beta}OM_\alpha$ тең капталдуу үч бурчтуктар барабар жана, демек, алардын $M_0M_{\alpha+\beta}$ жана $M_{-\beta}M_\alpha$ негиздери да барабар. Ошондуктан

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

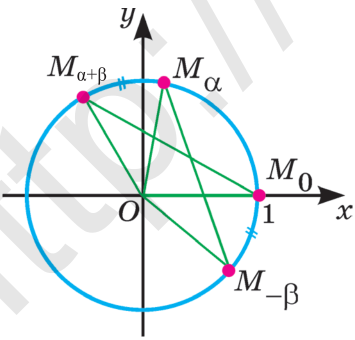
Геометрия курсунан белгилүү болгон эки чекиттин ортосундагы аралыктын формуласынан пайдаланып, алабыз:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

23-§ тагы (1) формуладан пайдаланып, барабардыктын формасын алмаштырабыз:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Негизги тригонометриялык окшоштуктан пайдаланып, алабыз:



70-сүрөт.

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

мындан $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$ ●

1- маселе. $\cos75^\circ$ ту эсепте.

△ (1) формула боюнча табабыз:

$$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=$$
$$=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\ ▲$$

(1) формулада β ны –β га алмаштырып, алабыз:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

мындан

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

2- маселе. cos15° ту эсепте.

△ (2) формула боюнча, алабыз:

$$\cos15°=\cos(45°-30°)=\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\ ▲$$

3- маселе. Төмөнкү формулаларды далилде:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin–,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (3)$$

△ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ болгондо (2) формулага негизденип:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=\sin\beta,$$

б. а.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta. \qquad (4)$$

Бул формулада β ны α га алмаштырып, алабыз:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

(4) формулада $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ деп элестетсек:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.\ ▲$$

(1)–(4) формулалардан пайдаланып, *синус үчүн кошуунун формуласын* келтирип чыгарабыз:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin–\cos\beta+\cos–\sin\beta.$$

Ошентип

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

(5) формулада β ны –β га алмаштырып, алабыз:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

мындан

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

4- маселе. sin210° ту эсепте.

$$\triangle\ \sin210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) =$$
$$= \sin180^\circ\cos30^\circ + \cos180^\circ\sin30^\circ = 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

5- маселе. Эсепте:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle\ \sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0.\ \blacktriangle$$

6- маселе. Барабардыкты далилде:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}. \quad (7)$$

$$\triangle\ \mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Бул бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн cosαcosβ га бөлүп, (7) формуланы алабыз. $\blacktriangle$

(7) формула эсептөөлөрдө пайдалуу болушу мүмкүн.

Мисалы, ошол формула боюнча табабыз:

$$\mathrm{tg}225^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\mathrm{tg}180^\circ + \mathrm{tg}45^\circ}{1 - \mathrm{tg}180^\circ\,\mathrm{tg}45^\circ} = 1.$$

Көнүгүүлөр

Кошуунун формулалары жардамында эсепте (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) $\cos 57°30'\cos 27°30' + \sin 57°30'\sin 27°30'$;

2) $\cos 19°30'\cos 25°30' - \sin 19°30'\sin 25°30'$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, мында $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ жана $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, мында $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**283–284**):

283. 1) $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$; 2) $\cos 5\beta\cos 2\beta + \sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)$.

Кошуунун формулалары жардамында эсепте (**285–286**):

285. 1) $\sin 73°\cos 17° + \cos 73°\sin 17°$;

2) $\sin 73°\cos 13° - \cos 73°\sin 13°$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, мында $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ жана $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, мында $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

287. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Эгерде $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ жана $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ болсо, $\cos(\alpha+\beta)$ жана $\cos(\alpha-\beta)$ ны эсепте.

289. Эгерде $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ жана $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin(\alpha-\beta)$ ны эсепте.

290. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Окшоштукту далилде:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\;}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\;}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha$.

292. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:1) $\frac{\mathrm{tg}29^\circ+\mathrm{tg}31^\circ}{1-\mathrm{tg}29^\circ\,\mathrm{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi-\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi\,\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

25-§. ЭКИЛЕНГЕН БУРЧТУН СИНУСУ ЖАНА КОСИНУСУ

Кошуунун формулаларынан пайдаланып, *экиленген бурчтун синусу жана косинусу формулаларын* келтирип чыгарабыз.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Ошентип,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

1- маселе. Эгерде $\sin\alpha = -0{,}6$ жана $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin 2\alpha$ ны эсепте.

△ (1) формула боюнча табабыз:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot \cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болгондуктан, $\cos\alpha < 0$ болот жана ошондуктан:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8\,.$$

Демек, $\sin 2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
Ошентип,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

2- маселе. Эгерде $\cos\alpha = 0{,}3$ болсо, $\cos 2\alpha$ ны эсепте.

△ (2) формуладан жана негизги тригонометриялык окшоштуктан пайдаланып, алабыз:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \text{ ▲}$$

3- маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha\,. \text{ ▲}$$

4- маселе. Эгерде $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ болсо, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ны эсепте.

$$\triangle\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

формулада $\beta = \alpha$ деп элестетип (24-§ ga кара), алабыз:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Эгерде $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ болсо, анда (3) формула боюнча табабыз:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \blacktriangle$$

Көнүгүүлөр

Эсепте (**293–294**):

293. 1) $2\sin15°\cos15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $(\cos75° - \sin75°)^2$; 4) $(\cos15° + \sin15°)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Эгерде:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ жана $\pi < - < \frac{3\pi}{2}$

болсо, $\sin2\alpha$ ны эсепте.

296. Эгерде:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ болсо, $\cos2\alpha$ ны эсепте.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**297–298**):

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos2\alpha+1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$.

299. Окшоштукту далилде:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Эгерде:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$

болсо, $\sin 2\alpha$ ны эсепте.

301. Окшоштукту далилде:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

302. Эсепте:

1) $2\cos^2 15° - 1$; | 2) $1 - 2\sin^2 22{,}5°$; | 3) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; | 4) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Окшоштукту далилде:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

305. Эгерде $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}6$ болсо, $\mathrm{tg}\,2\alpha$ ны эсепте.

306. Эсепте: 1) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\,15^{\circ}}{1 - \mathrm{tg}^2 15^{\circ}}$; 3) $\dfrac{4\,\mathrm{tg}\,75^{\circ}}{1 - \mathrm{tg}^2 75^{\circ}}$.

26-§. КЕЛТИРҮҮНҮН ФОРМУЛАЛАРЫ

Синус, косинус, тангенс жана котангенстин маанилеринин жадыбалдары 0° тан 90° ка чейин (же 0 дөн $\frac{\pi}{2}$ ге чейин) бурчтар үчүн түзүлөт. Бул учур алардын башка бурчтар үчүн маанилери тар бурчтар үчүн маанилерине келтирилиши менен түшүндүрүлөт.

1 - маселе. sin870° жана cos870° ту эсепте.

△ $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Ошондуктан $P(1; 0)$ чекитин координаталар башынын айланасында 870° ка бурганда чекит эки жолу толук айланат жана дагы 150° бурчка бурулат, б. а. 150° ка бургандагы M чекитинин дал өзү алынат (71-сүрөт). Ошондуктан $\sin 870° = \sin 150°$ $\cos 870° = \cos 150°$.

M чекитине Oy огуна салыштырмалуу симметриялуу болгон M_1 чекитин түзөбүз (72-сүрөт). M жана M_1 чекиттеринин ординаталары бирдей, ал эми абсциссалары болсо белгилери менен гана айырмаланат.

Ошондуктан $\sin 150^{\circ} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$; $\cos 150^{\circ} = -\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жообу: $\sin 870^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\cos 870^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

1-маселени чыгарууда

$$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°,\ \cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \qquad (1)$$

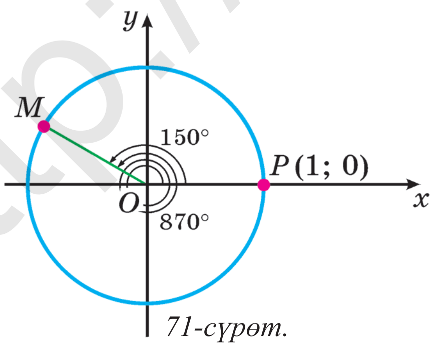
$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°,\ \cos(180° - 30°) = -\cos 30° \qquad (2)$$

барабардыктарынан пайдаланылды.

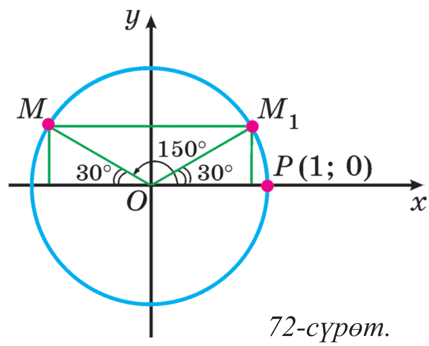
(1) барабардык туура барабардык, анткени $P(1; 0)$ чекитин $\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ бурчка бурганд, аны α бурчка бургандагы чекиттин дал өзү алынат.

Ошондуктан төмөнкү формулалар туура болот:

! $$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z. \qquad (3)$$



71-сүрөт.



72-сүрөт.

Алсак, $k = 1$ болгондо:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

барабардыктары орундуу.

(2) барабардык

$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha} \qquad \mathbf{(4)}$$

формулалардын өзгөчө учуру саналат.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ формуласын далилдейбиз.

Синус үчүн кошуунун формуласын колдоп, алабыз:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

(4) формулалардын экинчиси да ушуга окшош далилденет. (4) формулаларга *келтирүүнүн формулалары* дейилет. (3) жана (4) формулалардын жардамында каалагандай бурчтун синусу жана косинусун эсептөөнү алардын тар бурч үчүн маанилерин эсептөөгө келтирүүгө болот.

2 - маселе. $\sin930°$ ту эсепте.

(3) формуладан пайдаланып, алабыз:

$$\sin930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°).$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ формула боюнча $\sin(-150°) = -\sin150°$ ту алабыз.

(4) формула боюнча табабыз:

$$-\sin150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin30° =- -\frac{1}{2}.$$

Жообу: $\sin930° = -\frac{1}{2}$.

3- маселе. $\cos\frac{15\pi}{4}$ ту эсепте.

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эми каалагандай бурчтун тангенсин эсептөөнү тар бурчтун тангенсин эсептөөгө кандайча келтирүүгө болорун көрсөтөбүз.

(3) формуладан жана тангенстин аныктамасынан

$$\mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{tg}\alpha,\ k\epsilon \boldsymbol{Z}$$

барабардыгы келип чыгат.

Бул барабардык жана (4) формуладан пайдаланып, алабыз:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \mathrm{tg}(\alpha - \pi) = -\mathrm{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\ \ -\alpha)}{\cos(\ \ -\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Ошондуктан төмөнкү формула орундуу болот:

! $$\mathbf{tg}(\alpha + \pi \boldsymbol{k}) = \mathbf{tg}\alpha,\ \boldsymbol{k}\epsilon\boldsymbol{Z}. \qquad \mathbf{(5)}$$

4- маселе. Эсепте: 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{13}{4}$.

△ 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3} = \mathrm{tg}(4\ \ -\frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4} = \mathrm{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

24- § da (3-маселе)

! $$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

формулалар далилденген эле, алар да *келтирүүнүн формулалары* деп аталат. Бул формулалардан пайдаланып, мисалы, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ ны алабыз.

x тин каалагандай мааниси үчүн $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ барабардыктардын тууралыгы белгилүү.

Бул барабардыктардан көрүнүп тургандай, аргумент 2π ге өзгөргөндө, синус менен косинустун маанилери мезгилдүү кайталанат. Мындай функцияларга *мезгили* 2π *болгон мезгилдүү функциялар* дейилет.

Эгерде $T \neq 0$ саны болуп, $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу зонасындагы каалагандай x үчүн

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

барабардыгы аткарылса, $f(x)$ *мезгилдүү функция деп* аталат. T санына $f(x)$ функциясынын *мезгили* дейилет.

Бул аныктамадан көрүнүп тургандай, эгерде x саны $f(x)$ функциясынын аныкталуу зонасына тиешелүү болсо, анда $x + T$, $x - T$ сандар жана, жалпысынан алганда, $x + Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$ сандары да ошол мезгилдүү функциянын аныкталуу зонасына тиешелүү жана $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ болот.

2π саны $y = \cos x$ функциясынын *эң кичине оң мезгили* экенин көрсөтөбүз.

$T > 0$ косинустун мезгили болсун, б. а. каалагандай x үчүн $\cos(x + T) = \cos x$ барабардыгы аткарылат. $x = 0$ деп, $\cos T = 1$ ди алабыз. Мындан болсо $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $T > 0$ болгондугунан T төмөнкү 2π, 4π, 6π, ... маанилерди кабыл ала алат жана ошондуктан T нын мааниси 2π ден кичине болушу мүмкүн эмес.

$y = \sin x$ *функциясынын эң кичине оң мезгили да* 2π ге *барабар* экенин далилдөөгө болот.

Көнүгүүлөр

Эсепте (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;

5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\, 570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\, 960°$;

5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\, 585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Туюнтманын сандык маанисин тап:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Эсепте:

1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 2) $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$;

3) $2\sin 6{,}5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4{,}25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\dfrac{\sin(-6{,}5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16{,}25\pi)}$; 6) $\dfrac{\cos(-540^\circ)+\sin 480^\circ}{\operatorname{tg} 405^\circ-\operatorname{ctg} 330^\circ}$.

314. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

315. Үч бурчтуктун эки ички бурчу суммасынын синусу үчүнчү бурчунун синусуна барабардыгын далилде.

316. Окшоштукту далилде:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Теңдемени чыгар:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$; ;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; 5) $\cos(\pi-2x)=1$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

27-§. СИНУСТАРДЫН СУММАСЫ ЖАНА АЙЫРМАСЫ. КОСИНУСТАРДЫН СУММАСЫ ЖАНА АЙЫРМАСЫ

1 - маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Кошуунун формуласы жана экиленген бурчтун синусу формуласынан пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ▲

Эгерде *синустар суммасынын формуласы*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (1)$$

ден пайдаланылса, бул маселени жөнөкөйүрөөк чыгарууга болот. Ошол формуланын жардамында төмөнкүнү алабыз:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Эми (1) формуланын орундуу экенин далилдейбиз.

○ $\frac{\alpha+\beta}{2}=x, \frac{\alpha-\beta}{2}=y$ белгилөө киргизебиз. Анда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ жана ошондуктан $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+$ $+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

(1) формула менен бирге төмөнкү *синустар айырмасынын, косинустар суммасы* жана *айырмасынын формулаларынан да* пайдаланылат:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\;\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

(3) жана (4) формулалар да (1) формуланын далилденишине окшош далилденет; (2) формула β ны $-\beta$ га алмаштыруу менен (1) формуладан алынат (*муну өз алдынча далилде*).

2-маселе. $\sin75^\circ+\cos75^\circ$ ту эсепте.

△ $\sin75^\circ+\cos75^\circ=\sin75^\circ+\sin15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$ ▲

3- маселе. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ тү көбөйтүндүгө алмаштыр.

△ $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

4- маселе. $\sin\alpha + \cos\alpha$ туюнтманын эң кичине мааниси $\sqrt{2}$ ге, эң чоң мааниси болсо $\sqrt{2}$ ге барабар экенин далилде.

△ Берилген туюнтманы көбөйтүндүгө алмаштырабыз:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Косинустун эң кичине мааниси –1 ге, эң чоң мааниси болсо 1 ге барабар болгондуктан, берилген туюнтманын эң кичине мааниси $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$ ге, эң чоң мааниси болсо $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$ ге барабар. ▲

Көнүгүүлөр

318. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$;
2) $\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \beta)$;
3) $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \sin^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)$;
4) $\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4})$.

319. Эсепте:

1) $\cos 105° + \cos 75°$;
2) $\sin 105° - \sin 75°$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\sin\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin 105° + \sin 165°$.

320. Көбөйтүндүгө алмаштыр:

1) $1 + 2\sin\alpha$;
2) $1 - 2\sin\alpha$;
3) $1 + 2\cos\alpha$;
4) $1 + \sin\alpha$;
5) $1 - \cos\alpha$;
6) $1 + \cos\alpha$;

321. Окшоштукту далилде:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;
2) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

322. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$;
2) $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

Окшоштукту далилде (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$.

324. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

325. Көбөйтүндү көрүнүшүндө жаз:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}$.

326. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ окшоштугун далилде жана эсепте:

1) $\operatorname{tg}267^\circ + \operatorname{tg}93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg}99^\circ + \operatorname{tg}81^\circ$.

327. Көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

III глава боюнча көнүгүүлөр

328. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсун. $P(1; 0)$ чекитин:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; | 2) $\alpha - \pi$; | 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; | 4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; | 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; | 6) $\pi - \alpha$

бурчка буруунун натыйжасында алынган чекит кайсы чейректе жатышын аныкта.

329. Бурчтун синусу жана косинусунун маанисин тап:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 7) $2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Эсепте:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2k\pi$, мында k – бүтүн сан;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, мында k – бүтүн сан.

331. Тап:

1) эгерде $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\cos\alpha$ ны;

2) эгерде $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ жана $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\mathrm{tg}\alpha$ ны;

3) эгерде $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ жана $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ ны;

4) эгерде $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ жана $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ ны.

332. Окшоштукту далилде:

1) $5\sin^2\alpha + \mathrm{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $(1 - \mathrm{tg}(-\alpha))(1 - \mathrm{tg}(\pi + \alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1 + \mathrm{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын сандык маанисин тап:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, мында $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, мында $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Эсепте:

1) $2\sin75°\cos75°$; 2) $\sin15°$; 3) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
4) $\sin75°$; 5) $\cos75°$; 6) $\sin135°$.

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР

1. Эгерде: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\sin2\alpha$ ны,

2) $\cos\alpha = -0{,}6$ va $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\cos2\alpha$ ны эсепте.

2. Туюнтманын маанисин тап:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos150°$; 3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (*Гиясиддин Жамшид ал-Кашийнин маселеси.*)
$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ экенин далилде.

4. Окшоштукту далилде:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2\alpha + \cos2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Эсепте (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;
3) $3\cos3660° + \sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°) + \operatorname{tg}1035°$.

339. Сандарды салыштыр.
1) sin3 жана cos4; 2) cos0 жана sin5; 3) sin1 жана cos1.

340. Сандын белгисин аныкта:
1) $\sin3{,}5\operatorname{tg}3{,}5$; 2) $\cos5{,}01\sin0{,}73$; 3) $\frac{\operatorname{tg}13}{\cos15}$;
4) $\sin1\cos2\operatorname{tg}3$; 5) $\sin2\cos2$; 6) $\operatorname{tg}1\cos1$.

341. Эсепте:
1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin165°$; 3) $\sin105°$;
4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2 195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:
1) $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. Берилген: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$ лардын маанилерин эсепте.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha+\sin4\alpha}$;
3) $\frac{\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha-\cos2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;
3) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

347. 1) Эгерде $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ жана $tg\beta = 2,4$ болсо, $tg(\alpha+\beta)$ ны;

2) эгерде $ctg\alpha = \frac{4}{3}$ жана $ctg\beta = -1$ болсо, $ctg(\alpha+\beta)$ ны эсепте.

348. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

III глава боюнча сыноо (тест) көнүгүүлөрү

1. 153° тун радиандык өлчөмүн тап.

A) $\frac{17\pi}{20}$; B) $\frac{19\pi}{20}$; C) 17π; D) $\frac{2\pi}{9}$.

2. $0,65\pi$ нин градустук өлчөмүн тап.

A) 11,7°; B) 117°; C) 116°; D) 118°.

3. Көбөйтүндүлөрдүн кайсы бири терс?

A) $\cos314°\sin147°$; B) $tg200°ctg201°$;
C) $\cos163°\cos295°$; D) $\sin170°ctg250°$.

4. Көбөйтүндүнүн кайсы бири оң?

A) $\sin2\cos2\sin1\sin1°$; B) $tg8°ctg8ctg10°ctg\sqrt{10}$;

C) $\sin9°\sin9\cos9°\cos9$; D) $\cos10°\cos10\cos11°\cos\sqrt{11}$.

5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ чекитине түшүү үчүн (1; 0) чекитин буруу керек болгон бардык бурчтарды тап?

A) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; B) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

C) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; D) $2\pi+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

6. (1; 0) чекитин $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$ бурчка буруудан алынган чекиттин координаталарын тап.

A) (0; 1); B) (0; –1); C) (1; 0); D) (–1; 0).

7. Сандарды өсүү тартибинде жаз:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

A) $a < c < b$; B) $b < c < a$; C) $c < a < b$; D) $b < a < c$.

8. Сандарды кемүү тартибинде жаз:

$$a = \cos 2; \ b = \cos 2°; \ c = \sin 2; \ d = \sin 2°.$$

A) $a > c > d > b$; B) $d > c > b > a$;
C) $b > c > d > a$; D) $c > d > b > a$.

9. Эсепте: $\dfrac{\sin 136° \cdot \cos 46° - \sin 46° \cdot \cos 224°}{\sin 110° \cdot \cos 40° - \sin 20° \cdot \cos 50°}$.

A) $\cos 40°$; B) 0,5; C) $\sin 44°$; D) 2.

10. Эсепте: $\dfrac{\sin 10° \cdot \sin 130° - \sin 100° \cdot \sin 220°}{\sin 27° \cdot \cos 23° - \sin 157° \cdot \cos 153°}$.

A) 1; B) –1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Эсепте: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

A) 1; B) –1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin\alpha = 0{,}6$ болсо, $\mathrm{tg}2\alpha$ ны тап $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

A) 3,42; B) $3\frac{3}{7}$; C) $\frac{7}{24}$; D) $-\frac{7}{24}$.

13. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{5}$ болсо, $\sin 2\alpha$ ны тап.

A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$.

14. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ болсо, $\cos 2\alpha$ ны тап.

A) $\frac{4}{3}$; B) $-\frac{4}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $-\frac{3}{4}$.

15. Жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) -1; B) 1; C) 0,5; D) $-\frac{1}{2}$.

16. Жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$; B) $\frac{1}{3}\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}$ болсо, $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$ ны эсепте.

A) 0,59; B) 0,49; C) $-0{,}49$; D) 0,2.

18. $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$ болсо, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ ны тап.

A) $\frac{81}{49}$; B) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; C) $\frac{49}{81}$; D) $-1\frac{32}{49}$.

19. Эсепте: $\sin 100^\circ\cdot\cos 440^\circ+\sin 800^\circ\cdot\cos 460^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) -1; D) 0.

20. Жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$; B) $-2\sin 4\alpha$; C) $\sin 4\beta$; D) $2\cos 2\alpha$.

21. $8x^2-6x+1=0$ теңдемесинин тамырлары $\sin\alpha$ жана $\sin\beta$ болуп, α, β лар I чейректе болсо, $\sin(\alpha+\beta)$ ны тап.

A) $\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; C) $\dfrac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; D) $\dfrac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. $6x^2-5x+1=0$ теңдемесинин тамырлары $\cos\alpha$ жана $\cos\beta$ болуп, α, β лар I чейректе болсо, $\cos(\alpha+\beta)$ ны тап.

A) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$; B) $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. x ти тап: $2(x+\sqrt{2})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)$.

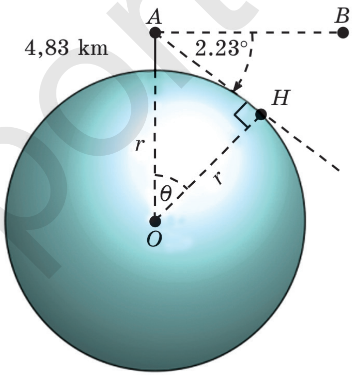
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$.

24. $x^2-7x+12=0$ теңдеменин тамырлары $\mathrm{tg}\alpha$ жана $\mathrm{tg}\beta$ болсо, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ ны тап:

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

Маселе. (Берунийдин маселеси.) Байкоочу деңиз деңгээлинен 4,83 км бийиктиктеги тоонун чокусунда туруп, океандын горизонтуна жантаюу бурчу 2,23° экенин өлчөдү. Жердин радиусун тап.



73-сүрөт.

Орто кылымдардын улуу энциклопедист окумуштуусу Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад Беруний (973–1048-ж). Жер шарынын радиусун чоң тактыкта өлчөгөн, маселенин төмөндө келтирилген чыгаруу усулу ага таандык.

△ Жерди шар деп элестетебиз. r аркылуу Жердин радиусун, A аркылуу тоонун чокусун жана H аркылуу A чекитинен чыккан түз сызыкта жаткан горизонттун чекитин 73-сүрөттө көрсөтүлгөндөй белгилейли. O чекити Жердин борбору жана B чекити A чекитинен чыккан жана $\overline{A}$ га перпендикуляр болгон горизонталдуу сызыктын чекити болсун. Бурч $\angle AOH$ ты θ аркылуу белгилейли.

A чекити деңиз деңгээлинен 4,83 км бийиктикте болгондуктан, $OA=r+4{,}83$. Мындан тышкары, $OH=r$. $\overline{AB}$ сызыгы $\overline{A}$ га перпендикуляр болгондуктан, $\angle OAB$=90° жана ошол себептүү $\angle OAH$=90°—2,23°=87,77°. Жердин бетин сүрөттөгү сыяктуу айлана иретинде карасак, $\overline{AH}$ бул айланага жанат жана, демек, $\overline{AH}$ менен $\overline{H}$ өз ара перпендикуляр болот, натыйжада

$\Delta OHA = 90°$. $\angle OAH$ бурчтарынын суммасы 180° экендигинен $\theta = 180° - 90°$

$- 87{,}77° = 2{,}23°$. Демек, $\cos\theta = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{r}{r + 4{,}83}$, мындан $\dfrac{r}{r+4{,}83} = \cos 2{,}23°$.

Бул теңдемени r ге салыштырмалуу чыгарабыз:

$$r = (r + 4{,}83)\cos 2{,}23° \Rightarrow r - r\cos 2{,}23° = 4{,}83\cos 2{,}23° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4{,}83\cos 2{,}23°}{1 - \cos 2{,}23°} \Rightarrow r = 6372{,}91.$$

Айта кетчү жери, алынган натыйжа Жердин чыныгы орточо радиусу 6371 км ге өтө жакын.

Жообу: $r = 6372{,}91$ км. ▲

Маселелер

1. Байкоочу Жердин жандоочусу Жердин бетинен h(км) аралыкта айлана боюнча аракеттенсин. Элестетели, d жандоочудан Жердин бетине байкоо жүргүзүү мүмкүн болгон аралыктын узундугу болсун (74-сүрөт).

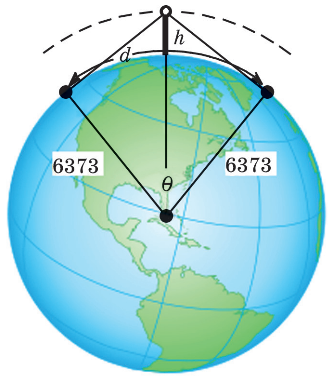
1) Борбордук бурч θ (радиандарда) жана h бийиктикти байланыштырган теңдемени тап;

2) байкоо жүргүзүү мүмкүн болгон аралыктын d узундугу менен θ ны байланыштырган теңдемени тап;

3) d менен h ты байланыштырган теңдемени тап;

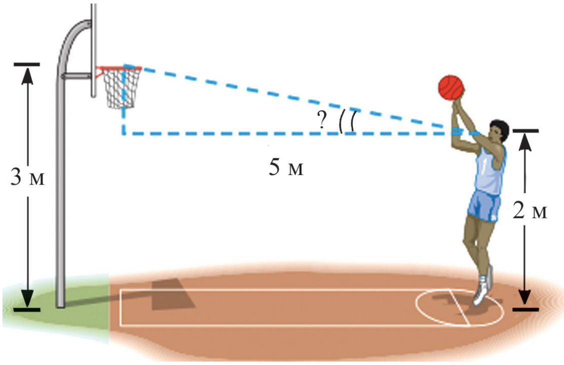
4) эгерде $d = 4000$ км болсо, Жердин жандоочусу кандай бийиктикте болууга тийиш?

5) эгерде Жердин жандоочусу 100 км бийиктикте болсо, d кандай болот?



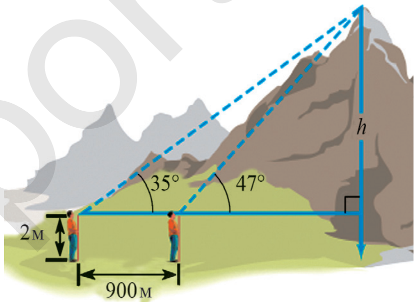
74-сүрөт.

2. Баскетбол торунан 5 метр аралыкта турган баскетболчунун көздөрү полдон 2 метр бийиктик деңгээлинде, мында тордун алкагы полдон 3 метр бийиктикте (75-сүрөт). Анын көздөрүнөн тордун алкагынын борборуна караган бурчу кандай?



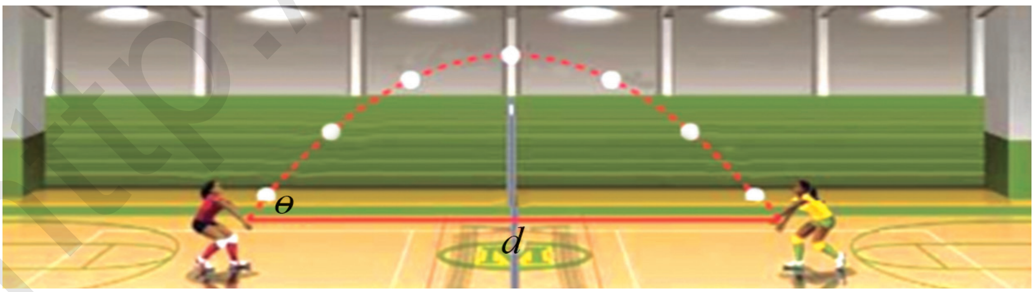
75-сүрөт.

3. Маркшейдер (кендерди планга киритүү жана алардан туура пайдалануу боюнча адис) тоонун бийиктигин өлчөө максатында ортолорундагы аралык 900 метр болгон эки чекитинен көтөрүлүү бурчтарын өлчөдү (76-сүрөт). Натыйжада биринчи бурч 47° жана экинчиси 35° экендиги аныкталды. Эгерде теодолиттин (бурчту ченөөчү аспаптын) бийиктиги 2 метр болсо, тоонун бийиктигин тап.



76-сүрөт.

4. Волейбол оюнунда көтөрүлүү бурчу θ жана баштапкы ылдамдыгы v м/с менен атылган топ $d = \dfrac{v}{9{,}75}\sin 2(\theta)$ формулага негизденип, d горизонталдуу аралыкка учуп барат. Эгерде $\theta = 60°$ жана ылдамдык 12 м/с болсо, d ны тап (77-сүрөт).

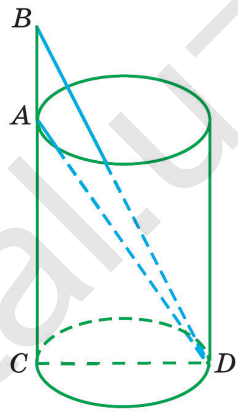


77-сүрөт.

Тарыхый маселелер

Абу Райхан Берунийнин маселелери

1. Кудук цилиндр формасында болуп, анын түбү кудуктун жээгиндеги A чекитинен α бурч менен, кудук капталынын уландысы B чекитинен β бурч астында көрүнөт (78-сүрөт). Эгерде $AB = a$ болсо, кудуктун терендигин тап:



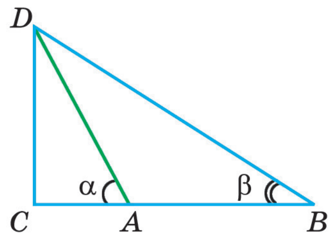
78-сүрөт.

Берилген:

$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Табуу керек: $AC = ?$

2. Мунара жердеги A чекитинен α бурч менен, B чекитинен болсо β бурч менен көрүнөт (79-сүрөт). $AB = a$ болсо, мунаранын бийиктигин тап.



79-сүрөт.

Берилген:

$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Табуу керек: $CD = ?$

Гиясиддин Жамшид ал-Кашийнин маселеси

3. Каалагандай α бурч үчүн

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{2}}$$

болушун далилде.

Белгилүү математик Абулвафа Мухаммад ал-Бузжанийдин (940–998) маселеси

4. Каалагандай α жана β үчүн

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

болушун далилде.

Математиканын, атап айтканда, тригонометриянын өнүгүшүнө кеменгер окумуштуулар Мухаммад ал-Харезмий, Ахмад Ферганий, Абу Райхан Беруний, Мырза Улугбек, Али Кушчу, Гиясиддин Жамшид ал-Каший чоң салым кошушкан. Жылдыздардын асман сферасындагы координаталарын аныктоо, планеталардын кыймылдарына байкоо жүргүзүү, Ай менен Күндүн тутулушун алдын ала айтып берүү жана башка илимий, практикалык мааниге ээ маселелер так эсептерди, бул эсептердин негизинде жадыбалдар түзүүнү талап кылган. Мына ушундай астрономиялык (тригонометриялык) жадыбалдар Чыгышта „Зиждер“ деп аталган.

Мырза Улугбек (1394–1449)

Мухаммад ал-Харезмий, Абу Райхан Беруний, Мырза Улугбек сыяктуу окумуштууларыбыздын математикалык чыгармалары менен бирге „Зиждери“ да белгилүү болгон, алар латин жана башка тилдерге которулган, Европада математиканын, астрономиянын өнүгүшүнө салмактуу таасирин тийгизишкен.

Берунийдин „Кануни Маъсудий“ чыгармасында синустар жадыбалы 15 минут аралык менен, тангенстер жадыбалы 1° аралык менен 10^{-8} ге чейин тактыкта берилген. Аябай так „Зиждерден“ бири Мырза Улугбектин „Зижи“ – „Зижи Көраганий“. Мында синустар жадыбалы 1 минут аралык менен, тангенстер жадыбалы 0° тан 45° ка чейин 1 минут аралык менен, 46° тан 90° ка чейин болсо 5 минут аралык менен 10^{-10} го чейин тактыкта берилген.

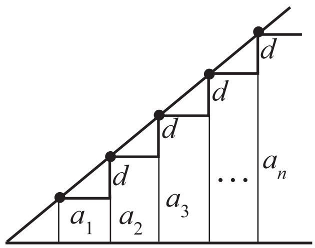
Гиясиддин Жамшид ал-Каший „Хорда менен синус жөнүндө китебинде“ $\sin 1^\circ$ ту үтүрдөн кийин 17 орун тактыкта эсептейт:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Айлананын узундугу ага ичтен жана тыштан чийилген туура $3 \cdot 2^n$ – көп бурчтуктар периметрлеринин орто арифметикалыгына барабар деп, $n = 28$ болгондо Жамшид ал-Каший „Айлана жөнүндө китеп“ чыгармасында 2π үчүн төмөнкү натыйжаны алды:

$$2\pi = 6{,}2831853071795865...$$

IV ГЛАВА. САНДУУ УДААЛАШТЫКТАР. ПРОГРЕССИЯЛАР



28-§. САНДУУ УДААЛАШТЫКТАР

Күндөлүк турмушта түрдүү буюмдардын жайлашуу тартибин көрсөтүү үчүн аларды номерлөөдөн пайдаланылат. Мисалы, ар бир көчөдө жайлашкан үйлөр номерленет. Китепканада китеп окуучулардын абонементтери номерленет жана алар ыйгарылган номерлер тартибинде атайын картотекаларга жайлаштырылат.

Банкта сактоочунун эсеп номери боюнча андагы каражаттын санын көрүүгө болот. Алсак, №1 эсеп номеринде a_1 сум, №2 эсеп номеринде a_2 сум жана у. с. болсун. Натыйжада

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$$

сандуу удаалаштыгын алабыз, бул жерде N – бардык эсеп номерлеринин саны. Мында 1 ден N ге чейин болгон ар бир натуралдык n санына a_n саны туура коюлган.

Математикада *чексиз* сандуу удаалаштыктар үйрөнүлөт:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

a_1 – санына удаалаштыктын биринчи мүчөсү, a_2 – удаалаштыктын экинчи мүчөсү, a_3 – удаалаштыктын үчүнчү мүчөсү дейилет жана у. с. a_n – санына удаалаштыктын n- (энинчи) мүчөсү деп, натуралдык n саны болсо анын номери деп аталат. Мисалы, натуралдык сандар квадраттарынан турат 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... сандуу удаалаштык үчүн $a_1 = 1$

удаалаштыктын биринчи мүчөсү; $a_n = n^2$ удаалаштыктын n-мүчөсү; $a_{n+1} = (n+1)^2$ удаалаштыктын $(n+1)$- мүчөсү.

Сандуу удаалаштыктар көбүнесе жалпы n- мүчөнүн формуласы жардамында берилет. Мисалы, $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$ формула жардамында $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, .., \frac{1}{n}, ...$ сандуу удаалаштык берилген.

1-маселе. Сандуу удаалаштык $a_n = n(n-2)$ формуласынын жардамында берилген. Анын жүзүнчү мүчөсүн эсепте.

$$\triangle\ a_{100} = 100 \cdot (100-2) = 9800.\ \blacktriangle$$

2-маселе. Сандуу удаалаштык $a_n = 2n + 3$ формуласынын жардамында берилген. 1) Удаалаштыктын 43 кө барабар болгон мүчөсүнүн номерин аныкта; 2) 50 саны удаалаштыктын мүчөсү болушу же болбостугун аныкта.

$\triangle$**1)** Шарт боюнча $2n + 3 = 43$, мындан $n = 20$.

2) Эгерде 50 саны удаалаштыктын n-номерлүү мүчөсү болсо, анда $2n + 3 = 50$, мындан $n = 23{,}5$. Алынган n дин мааниси натуралдык сан болбогондуктан, ал удаалаштык мүчөсүнүн номери боло албайт. Ошол себептүү, 50 саны удаалаштыктын мүчөсү эмес. $\blacktriangle$

Кээде удаалаштык формула аркылуу берилип, мында анын кандайдыр номерден баштап каалагандай мүчөсүн андан мурдагы бир же бир нече мүчөлөрү жардамында эсептөөгө болот. Удаалаштыктын мындай берилүү усулуна *реккурент* (латинче *recuro* – кайтуу) усулу дейилет.

3-маселе. Сандуу удаалаштык $b_{n+2} = b_{n+1} + b_1$ реккурент формула жана $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ шарттар жардамында берилген. Бул удаалаштыктын бешинчи мүчөсүн эсепте.

$\triangle$ $b_3 = b_2 + b_1 = 3 + 1 = 4.$

$b_4 = b_3 + b_2 = 4 + 3 = 7.$

$b_5 = b_4 + b_3 = 7 + 4 = 11.$

Жообу: $b_5 = 11$. $\blacktriangle$

Көнүгүүлөр

349. Натуралдык сандар квадраттарынан турган 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... сандуу удаалаштык берилген.
1) Удаалаштыктын үчүнчү, алтынчы, n-мүчөлөрүн айт.
2) Удаалаштыктын 4, 25, n^2, $(n+1)^2$ ге барабар болгон мүчөлөрүнүн номерлерин көрсөт.

350. n-мүчөнүн формуласы менен берилген удаалаштыктын биринчи үч мүчөсүн эсепте:
1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;
4) $a_n = \frac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Оозеки). Сандуу удаалаштык $x_n = n^2$ формуласы менен берилген. Удаалаштыктын 100; 144; 225 ке барабар болгон мүчөлөрүнүн номери кандай? 48, 49, 169 сандары ошол удаалаштыктын мүчөлөрү болобу?

352. Удаалаштык $a_n = n^2 - 2n - 6$ формуласы менен берилген.
1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9
сандары удаалаштыктын мүчөлөрү болобу?

353. 1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$
реккурент формула жана $a_1 = 2$ шарт менен берилген удаалаштыктын баштапкы төрт мүчөсүн тап.

354. Сандуу удаалаштык n-мүчөнүн формуласы $a_n = (n - 1)(n + 4)$ менен берилген. Эгерде
1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ болсо, n ди тап.

355. $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ реккурент формула жана $a_1 = 256$ шарт менен берилген удаалаштыктын биринчи төрт мүчөсүн эсепте.

356. $a_1 = 1$ шарт жана

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$;

реккурент формула менен берилген удаалаштыктын баштапкы алты мүчөсүн жаз.

357. Сандуу удаалаштык $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ реккурент формула жана $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, шарт менен берилген. Удаалаштыктын бешинчи мүчөсүн эсепте.

358. n-мүчөнүн формуласы менен берилген сандуу удаалаштыктын, $(n+1)$-, $(n+2)$- жана $(n+5)$-, мүчөлөрүн жаз:

1) $a_n = -5n + 4$; | 2) $a_n = 2(n - 10)$; | 3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; | 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

29- §. АРИФМЕТИКАЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Төмөнкү маселени көрөлү.

Маселе. Окуучу сыноодон өтүү үчүн даярдык көрүп, күнүгө 5 тен сыноо маселелерин чыгарууну пландаштырды. Күн сайын чыгарылышы пландаштырылган сыноо маселелеринин саны кандайча өзгөрүп отурат?

Пландаштырылган маселелер саны күн сайын төмөнкүдөй өзгөрүп отурат:

1- күн	2- күн	3- күн	4- күн...
5	10	15	20 ...

Натыйжада төмөнкү удаалаштыкты алабыз:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots .$$

a_n аркылуу n- күнгө келип чыгарылышы керек болгон бардык маселелердин санын белгилейли. Маселен:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ \ldots .$$

Алынган

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

сандарына *сандуу удаалаштык* дейилет.

Бул удаалаштыкта экинчисинен баштап анын ар бир мүчөсү мурдагы мүчөгө окшош бирдей 5 санын кошулганына барабар. Мындай удаалаштыкка *арифметикалык прогрессия* дейилет.

Аныктама. ***Эгерде $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сандуу удаалаштыгында бардык натуралдык n дер үчүн***

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(мында d – кандайдыр сан) барабардыгы аткарылса, мындай удаалаштыкка арифметикалык прогрессия дейилет.

Бул формуладан $a_{n+1} - a_n = d$ экендиги келип чыгат. d санын *арифметикалык прогрессиянын айырмасы* дейилет. Мисалы,

1) Сандардын 1, 2, 3, 4 ..., n, ... натуралдык катары арифметикалык прогрессияны түзөт. Бул прогрессиянын айырмасы $d = 1$.

2) Бүтүн терс сандардын –1, –2, –3, ..., $-n$, ... удаалаштыгынын айырмасы $d = -1$ болгон арифметикалык прогрессия болот.

3) 3, 3, 3, ..., 3, ... удаалаштыгы айырмасы $d = 0$ болгон арифметикалык прогрессиядан турат.

1-маселе. $a_n = 1{,}5 + 3n$ формуласы менен берилген удаалаштык арифметикалык прогрессия болушун далилде.

△ $a_{n+1} - a_n$ айырма бардык n үчүн окшош өзү (n ден көз каранды эмес) экендигин көрсөтүү талап кылынат.

Берилген удаалаштыктын ($n + 1$)- мүчөсүн жазабыз

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Ошондуктан

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Демек, $a_{n+1} - a_n$ айырма n ден көз каранды эмес. ▲

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасынан $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$, мындан

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n > 1.$$

Ошентип, арифметикалык прогрессиянын экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир мүчөсү ага кошуна болгон эки мүчөнүн орто арифметикалыгына барабар. „Арифметикалык" прогрессия деген аталыш ошону менен түшүндүрүлөт.

Эгерде a_1 жана d берилген болсо, анда арифметикалык прогрессиянын калган мүчөлөрүн $a_{n+1} = a_n + d$ формуласы боюнча эсептөөгө болот. Мындай усул менен прогрессиянын бир нече баштапкы мүчөсүн эсептөө кыйынчылык туудурбайт; бирок, мисалы, a_{100} үчүн бир топ эсептөөлөр талап кылынат. Адатта, ал үчүн n- мүчө формуласынан пайдаланылат.

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ жана у. с.}$$

Жалпысынан алганда,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d,} \qquad \textbf{(1)}$$

анткени арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсү анын биринчи мүчөсүнө d санын $(n - 1)$ жолу кошуунун натыйжасында алынат.

(1) формулага *арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласы* дейилет.

2 - маселе. Эгерде $a_1 = -6$ жана $d = 4$ болсо, арифметикалык прогрессиянын жүзүнчү мүчөсүн тап.

△ (1) формула боюнча: $a_{100} = -6 + (100 - 1)\cdot 4 = 390$. ▲

3 - маселе. 99 саны 3, 5, 7, 9, ... арифметикалык прогрессиянын мүчөсү. Ошол мүчөнүн номерин тап.

△ Алсак, n – изделген номер болсун. $a_1 = 3$ жана $d = 2$ болгондуктан, $a_n = a_1 + (n - 1)d$ формуласы боюнча: $99 = 3 + (n - 1)\cdot 2$. Ошондуктан $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Жообу: $n = 49$. ▲

4 - маселе. Арифметикалык прогрессияда $a_8 = 130$ жана $a_{12} = 166$. n-мүчөсүнүн формуласын тап.

△ (1) формуладан пайдаланып, табабыз:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

a_8 жана a_{12} лердин берилген маанилерин коюп, a_1 жана d га салыштырмалуу теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} a_1 + 7\mathrm{d} = 130, \\ a_1 + 11\mathrm{d} = 166. \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден биринчи теңдемени кемитип, алабыз:

$$4d = 36, \ d = 9.$$

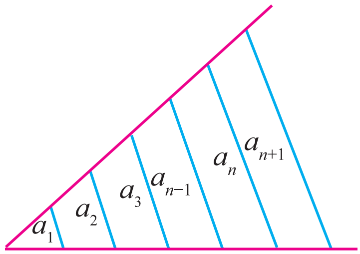
Демек, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жазабыз:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Жообу: $a_n = 9n + 58$. ▲

5- маселе. Бурчтун бир жагында анын чокусунан баштап барабар кесиндилер ажыратылат. Алардын аягынан параллель түз сызыктар жүргүзүлөт (80- сүрөт). Алардын бурч жактарынын ортосундагы a_1, a_2, a_3, ... кесиндилеринин узундуктары арифметикалык прогрессияны түзүшүн далилде.



80-сүрөт.

△ Негиздери a_{n-1} жана a_{n+1} болгон трапецияда анын орто сызыгы a_n ге барабар. Ошондуктан

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Мындан $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ же

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Удаалаштыктын ар бир мүчөсү менен андан мурдагы мүчөсүнүн айырмасы окшош бирдей сан болгондуктан, бул удаалаштык арифметикалык прогрессия болот. ▲

Көнүгүүлөр

359. (Оозеки.) Арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана айырмасын айт:

1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Эгерде:

1) $a_1 = 2$ жана $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ жана $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ жана $d = -1$ болсо, арифметикалык прогрессиянын баштапкы беш мүчөсүн жаз.

361. n- мүчөсүнүн формуласы менен берилген төмөнкү удаалаштык арифметикалык прогрессия болушун далилде:

1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Арифметикалык прогрессияда:

1) эгерде $a_1 = 2$, $d = 3$ болсо, a_{15} ти тап;

2) эгерде $a_1 = 3$, $d = 4$ болсо, a_{20} ны тап;
3) эгерде $a_1 = -3$, $d = -2$ болсо, a_{18} ди тап;
4) эгерде $a_1 = -2$, $d = -4$ болсо, a_{11} ди тап.

363. Арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жаз:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. –22 саны 44, 38, 32, ... арифметикалык прогрессиянын мүчөсү. Ошол сандын номерин тап.

365. 12 саны –18, –15, –12, ... арифметикалык прогрессиянын мүчөсү болобу?

366. –59 саны 1, –5 ... арифметикалык прогрессиянын мүчөсү. Анын номерин тап. –46 саны ошол прогрессиянын мүчөсү болобу?

367. Эгерде арифметикалык прогрессияда:
1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8$, $a_{10} = 64$ болсо, анын айырмасын тап.

368. Арифметикалык прогрессиянын айырмасы 1,5 ке барабар. Эгерде:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$ болсо, a_1 ди тап.

369. Эгерде арифметикалык прогрессияда:
1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5{,}5$;
3) $a_3 = -1$, $a_9 = 17$ болсо, анын биринчи мүчөсүн тап.

370. Эгерде арифметикалык прогрессияда:
1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11$, $a_{13} = 29$ болсо, анын n-мүчөсүнүн формуласын тап.

371. n дин кандай маанилеринде 15, 13, 11, ... арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү терс болот?

372. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$ болсо, n дин кандай маанилеринде $a_n < 2$ барабарсыздыгы аткарылат?

373. Эгерде арифметикалык прогрессияда:
1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5$, $a_{10} = -2{,}5$
болсо, анын тогузунчу мүчөсүн жана айырмасын тап.

30-§. АРИФМЕТИКАЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН БАШТАПКЫ *n* МҮЧӨСҮНҮН СУММАСЫ

1-маселе. 1 ден 100 гө чейин болгон бардык натуралдык сандардын суммасын тап.

△ Бул сумманы эки усул менен жазабыз

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

Бул барабардыктарды мүчөлөп кошобуз:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{100 \text{ кошулуучу}}$$

Ошондуктан $2S = 101 \cdot 100$, мындан $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Эми каалагандай

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

арифметикалык прогрессияны карап көрөбүз. S_n – ошол прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасы болсун:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

! ***Теорема.*** **Арифметикалык прогрессиянын баштапкы *n* мүчөсүнүн суммасы төмөнкүгө барабар:**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \qquad \textbf{(1)}$$

○ S_n ди эки усул менен жазып алабыз:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча, бул барабардыктарды төмөнкүдөй жазууга болот:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d), \qquad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d). \qquad (3)$$

(2) жана (3) барабардыктарын мүчөлөп кошобуз:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ кошулуучу}}$$

Демек, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, мындан $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$. ●

2- маселе. Баштапкы n натуралдык сандын суммасын тап.

△ Натуралдык сандардын

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

удаалаштыгынын айырмасы $d = 1$ болгон арифметикалык прогрессия болот. $a_1 = 1$ жана $a_n = n$ болгондуктан, (1) формула боюнча табабыз:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Ошентип,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \ ▲$$

3- маселе. Эгерде 38 + 35 + 32 + ... + (–7) сумманын кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болсо, ошол сумманы тап.

△ Шарт боюнча, $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. Эми $a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласын колдоп, $-7 = 38 + (n-1)(-3)$ тү алабыз, мындан $n = 16$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ формуласы боюнча табабыз:

$$S_{16} = \frac{38 - 7}{2} \cdot 16 = 248. \ ▲$$

4-маселе. Сумма 153 кө барабар болушу үчүн 1 ден баштап канча удаалаш натуралдык сандарды кошуу керек?

△ Сандардын натуралдык катары – айырмасы $d = 1$ болгон арифметикалык прогрессия. Шарт боюнча $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Баштапкы n мүчө суммасынын формуласын төмөнкүдөй өзгөртөбүз:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\mathrm{d}}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Берилгендерден пайдаланып, белгисиз n ге салыштырмалуу теңдемени алабыз:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

мындан

$$306 = 2n + (n-1)n,\ \ n^2 + n - 306 = 0.$$

Бул теңдемени чыгарып, табабыз:

$$n_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1-35}{2},$$

$$n_1 = -18,\ n_2 = 17.$$

Кошулуучулардын саны терс болушу мүмкүн эмес, ошондуктан $n = 17$. ▲

Көнүгүүлөр

374. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = 1,\ a_n = 20,\ n = 50;$ 3) $a_1 = -1,\ a_n = -40,\ n = 20;$
2) $a_1 = 1,\ a_n = 200,\ n = 100;$ 4) $a_1 = 2,\ a_n = 100,\ n = 50$

болсо, анын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

375. 2 ден 98 ге чейин болгон бардык натуралдык сандардын суммасын тап (98 да суммага кирет).

376. 1 ден 133 кө чейин болгон бардык так сандардын суммасын тап (133 да суммага кирет).

377. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = -5,\ d = 0,5;$ 2) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = -3;$ 3) $a_1 = 36,\ d = -2,5$

болсо, анын баштапкы он эки мүчөсүнүн суммасын тап.

378. 1) эгерде $n = 11$ болсо, 9; 13; 17; ...;
2) эгерде $n = 12$ болсо, –16; –10; –4; ...

арифметикалык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

379. Эгерде:

1) $3 + 6 + 9 + ... + 273;$ 2) $90 + 80 + 70 + ... + (-60)$

сумманын кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болсо, ошол сумманы тап.

380. Бардык эки орундуу, бардык үч орундуу сандардын суммасын тап.

381. Арифметикалык прогрессия n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген. Эгерде:

1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$ болсо, S_{50} нү тап.

382. Сумма 75 ке барабар болуусу үчүн 3 төн баштап канча удаалаш натуралдык санды кошуу керек?

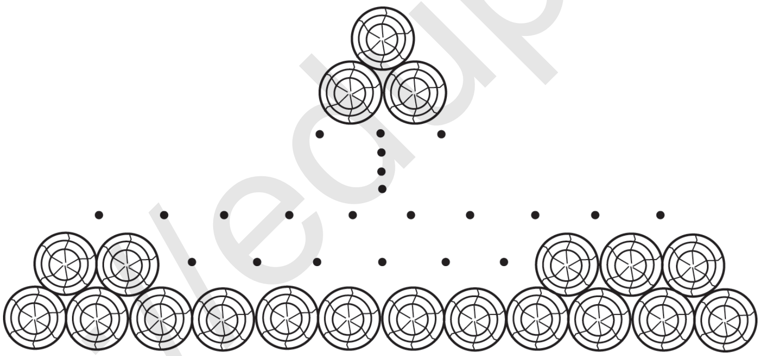
383. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$ болсо, a_n жана d ны тап.

384. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; | 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$; | 3) $a_{20} = 65$, $S_{20} = 350$ болсо, a_1 жана d ны тап.

385. Үй жыгачтарын 81-сүрөттө көрсөтүлгөндөй жыйышкан. Эгерде жыйымдын негизинде 12 жыгач болсо, жыйымда канча жыгач бар?



81-сүрөт.

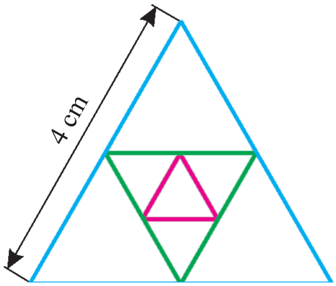
386. Арифметикалык прогрессияда $a_3 + a_9 = 8$. S_{11} ди тап.

387. Эгерде арифметикалык прогрессияда $S_5 = 65$ жана $S_{10} = 230$ болсо, анын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тап.

388. Арифметикалык прогрессия үчүн $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ барабардыгынын аткарылышын далилде.

31-§. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Жагы 4 см болгон теӊ жактуу туура үч бурчтукту карап көрөбүз. Чокулары берилген үч бурчтук жактарынын ортолорунан турган үч бурчтук түзөбүз (82-сүрөт). Үч бурчтук орто сызыгынын касиети боюнча экинчи үч бурчтуктун жагы 2 см ге барабар. Ушуга окшош түзүүлөрдү улантып, жактары 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см жана у. с. болгон үч бурчтуктарды алабыз. Ошол үч бурчтуктардын жактары узундуктарынын удаалаштыгын жазабыз



82-сүрөт.

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots .$$

Бул удаалаштыкта, экинчисинен баштап, анын ар бир мүчөсү мурдагы мүчөнү окшош бирдей $\frac{1}{2}$ санга көбөйтүрүлгөнүнө барабар. Мындай удаалаштыктарга *геометриялык прогрессиялар* дейилет.

Аныктама. ***Эгерде***

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_n, \ldots$$

сандуу удаалаштыгында бардык натуралдык n үчүн

$$b_{n+1} = b_n q$$

барабардыгы аткарылса, мындай удаалаштыкка геометриялык прогрессия дейилет, мында $b_n \neq 0$, q – нөлгө барабар болбогон кандайдыр сан.

Бул формуладан $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ экендиги келип чыгат. q санына *геометриялык прогрессиянын бөлүмү* дейилет.

Мисалдар.

1) 2, 8, 32, 128, ... – бөлүмү $q = 4$ болгон геометриялык прогрессия;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – бөлүмү $q = \frac{2}{3}$ болгон геометриялык прогрессия;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – бөлүмү $q = -12$ болгон геометриялык прогрессия;

4) 7, 7, 7, 7, ... – бөлүмү $q = 1$ болгон геометриялык прогрессия.

1- маселе. $b_n = 7^{2n}$ формуласы менен берилген удаалаштык геометриялык прогрессия болушун далилде.

△ Бардык n дерде $b_n = 7^{2n} \neq 0$ экендигин белгилей кетебиз. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ тийинди бардык n дер үчүн n ден көз каранды болбогон окшош бирдей санга барабардыгын далилдөө талап кылынат. Чындыгында да,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

б. а. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ тийинди n ден көз каранды эмес. ▲

Геометриялык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

мындан

$$b^2_{n+1} = b_{n-1}\, b_{n+1}, \quad n > 1.$$

! **Эгерде прогрессиянын бардык мүчөлөрү оң болсо, анда $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ болот, б. а. геометриялык прогрессиянын экинчисинен баштап ар бир мүчөсү ага кошуна болгон эки мүчөнүн орто геометриялыгына барабар. „Геометриялык“ прогрессия деген аталыш ошону менен түшүндүрүлөт.**

Эгерде b_1 жана q берилген болсо, анда геометриялык прогрессиянын калган мүчөлөрүн $b_{n+1} = b_n q$ реккурент формула боюнча эсептөөгө болорун белгилей кетебиз. Бирок, n чоң болгондо бул көп эмгекти талап кылат. Адатта n-мүчөнүн формуласынан пайдаланылат.

Геометриялык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ жана у. с.}$$

Жалпысынан алганда,

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

анткени геометриялык прогрессиянын n- мүчөсү анын биринчи мүчөсүн q санына (n–1) эсе көбөйтүү менен алынат.

(1) формулага геометриялык прогрессия *n-мүчөсүнүн формуласы* дейилет.

2- маселе. Эгерде $b_1 = 81$ жана $q = \frac{1}{3}$ болсо, геометриялык прогрессиянын жетинчи мүчөсүн тап.

△ (1) формула боюнча:

$$b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \ ▲$$

3-маселе. 486 саны 2, 6, 18, ... геометриялык прогрессиянын мүчөсү. Ошол мүчөнүн номерин тап.

△ Алсак, n – изделген номер болсун. $b_1 = 2$, $q = 3$ болгондуктан, $b_n = b_1 q^{n-1}$ формула боюнча:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \ \ 243 = 3^{n-1}, \ \ 3^5 = 3^{n-1},$$

мындан $n - 1 = 5$, $n = 6$. ▲

4-маселе. Геометриялык прогрессияда $b_6 = 96$ жана $b_8 = 384$. n-мүчөсүнүн формуласын тап.

△ $b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласы боюнча: $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. b_6 жана b_8 дин берилген маанилерин коюп, алабыз: $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Бул барабардыктардан экинчисин биринчисине бөлөбүз:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

мындан $4 = q^2$ же $q^2 = 4$. Акыркы барабардыктан $q = 2$ же $q = -2$ экенин табабыз.

Прогрессиянын биринчи мүчөсүн табуу үчүн $96 = b_1 q^5$ барабардыгынан пайдаланабыз:

1) $q = 2$ болсун. Анда $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96 = b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$.

Демек, $b_1 = 3$ жана $q = 2$ болгондо n-мүчөнүн формуласы

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

болот.

2) $q = -2$ болсун. Анда $96 = b_1(-2)^5$, $96 = b_1(-32)$, $b_1 = -3$.

Демек, $b_1 = -3$ жана $q = -2$ болгондо, n-мүчөнүн формуласы

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

болот.

Жообу: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ же $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

5-маселе. Айланага квадрат ичтен чийилген, ага болсо экинчи айлана ичтен чийилген. Экинчи айланага экинчи квадрат ичтен чийилген, ага болсо үчүнчү айлана ичтен чийилген жана у. с. (83-сүрөт). Айланалардын радиустары геометриялык прогрессияны түзүшүн далилде.

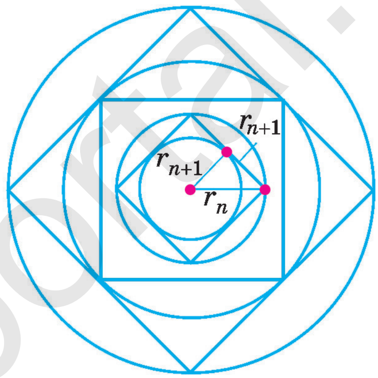
△ n-айлананын радиусу r_n болсун. Анда Пифагордун теорамасы боюнча,

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

мындан

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ б. а. } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n.$$

Демек, айланалар радиустарынын удаалаштыгы бөлүмү $\frac{1}{\sqrt{2}}$ болгон геометриялык прогрессияны түзөт. ▲



83-сүрөт.

Көнүгүүлөр

389. (Оозеки.) Төмөнкү геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсү жана бөлүмү эмнеге барабар:

1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ;
3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$

болсо, анын баштапкы беш мүчөсүн жаз.

391. n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген төмөнкү удаалаштык геометриялык прогрессия болушун далилде.

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 3$ жана $q = 10$ болсо, b_4 тү;

2) $b_1 = 4$ жана $q = \frac{1}{2}$ болсо, b_7 ни;

3) $b_1 = 1$ жана $q = -2$ болсо, b_5 ти;

4) $b_1 = -3$ жана $q = -\frac{1}{3}$ болсо, b_6 ны эсепте.

393. Геометриялык прогрессия n-мүчөсүнүн формуласын жаз:

1) 4, 12, 36, ...; | 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...; | 3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;

4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ; 5) 16, 8, 4, 2, ... ; 6) –9, 3, –1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Геометриялык прогрессияда астына чийилген мүчөнүн номерин тап:

1) 6, 12, 24, ... , <u>192</u>, ...; 2) 4, 12, 36, ... , <u>324</u>, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , <u>128</u>, ...

395. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

болсо, анын бөлүмүн тап.

396. 2, 6, 18, ... геометриялык прогрессия берилген.

1) ушул прогрессиянын сегизинчи мүчөсүн эсепте;

2) удаалаштыктын 162 ге барабар мүчөсүнүн номерин тап.

397. Эгерде оң мүчөлүү геометриялык прогрессияда:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

болсо, анын жетинчи мүчөсүн жана бөлүмүн тап.

398. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$ болсо, анын бешинчи жана биринчи мүчөлөрүн тап.

399. Сактоочу сактык банкына 2009-жылдын 4-январь күнү 300 000 сум акча койду. Эгерде сактык банкы жылда коюлган акчанын

30 % ы көлөмүндө киреше берсе, сактоочунун акчасы 2012-жылдын 4-январына барып канча болот?

400. Жагы 4 см болгон квадрат берилген. Анын жактарынын ортолору экинчи квадраттын чокулары болот. Экинчи квадрат жактарынын ортолору үчүнчү квадраттын чокулары болот жана у. с. Ошол квадраттар аянттарынын удаалаштыгы геометриялык прогрессияны түзүшүн далилде. Жетинчи квадраттын аянтын тап.

32-§. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН БАШТАПКЫ *n* МҮЧӨСҮНҮН СУММАСЫ

1- маселе. Төмөнкү сумманы тап:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

△ Барабардыктын эки бөлүгүн 3 кө көбөйтөбүз:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

(1) жана (2) барабардыктарды мындайча жазып чыгабыз:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Кашаалардын ичиндеги туюнтмалар бирдей. Ошондуктан ылдыйдагы барабардыктан жогорудагы барабардыкты кемитип, алабыз:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \ ▲$$

Эми бөлүмү $q \neq 1$ болгон каалагандай $b_1, \ b_1q, \ ..., \ b_1q^n, \ ...$ геометриялык прогрессияны карап көрөбүз. S_n – ошол прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасы болсун:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Теорема. ***Бөлүмү $q \neq 1$ болгон геометриялык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасы төмөнкүгө барабар:***

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad \textbf{(4)}$$

○ (3) барабардыктын эки бөлүгүн q га көбөйтөбүз:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n. \qquad (5)$$

(3) жана (5) барабардыктарды, алардагы бирдей кошулуучуларды ажыратып, жазып чыгабыз:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Кашаалардын ичиндеги туюнтмалар барабар. Ошондуктан жогорудагы барабардыктан ылдыйдагысын кемитип, алабыз:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Мындан

$$S_n(1-q) = b_1(1-q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Эгерде $q = 1$ болсо, анда

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ кошулуучу}} = b_1 n, \text{ б. а. } S_n = b_1 n.$$

2-маселе. 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... геометриялык прогрессиянын баштапкы беш мүчөсүнүн суммасын тап.

△ Бул прогрессияда $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. (4) формула боюнча табабыз:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \ ▲$$

3- маселе. Бөлүмү $q = \frac{1}{2}$ болгон геометриялык прогрессияда баштапкы алты мүчөнүн суммасы 252 ге барабар. Ошол прогрессиянын биринчи мүчөсүн тап.

△ (4) формуладан пайдаланып, алабыз:

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Мындан $252=2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right), 252=\frac{b_1\cdot 63}{32}, b_1=128$. ▲

4- маселе. Геометриялык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасы –93 кө барабар. Бул прогрессиянын биринчи мүчөсү –3 кө, бөлүмү болсо 2 ге барабар. n ди тап.

△ (4) формуладан пайдаланып, алабыз:

$$-93=\frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Мындан $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

5- маселе. 5, 15, 45, ..., 1215, ... – геометриялык прогрессия. 5 + 15 + 45 + ... + 1215 сумманы тап.

△ Бул прогрессияда $b_1=5$, $q=3$, $b_n=1215$. Баштапкы n мүчө суммасынын формуласын мындайча алмаштырабыз:

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1-b_1q^{n-1}q}{1-q}=\frac{b_1-b_nq}{1-q}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Маселенин шартынан пайдаланып, табабыз:

$$S_n=\frac{1215\cdot 3-5}{3-1}=\frac{3645-5}{2}=1820.$$ ▲

Көнүгүүлөр

401. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=2$, $n=6$;   2) $b_1=-2$, $q=\frac{1}{2}$, $n=5$;

3) $b_1=1$, $q=-\frac{1}{3}$, $n=4$;   4) $b_1=-5$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=5$

болсо, анын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

402. Геометриялык прогрессиянын баштапкы жети мүчөсүнүн суммасын тап:

1) 5, 10, 20, ... ;   2) 2, 6, 18, ... ;   3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $q=2$, $S_7=635$ болсо, b_1 жана b_7 ни тап;

2) $q=-2$, $S_8=85$ болсо, b_1 жана b_8 ди тап.

404. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2;$

2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2;$

3) $S_n = 170, b_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2};$

4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

болсо, анын мүчөлөрүнүн саны n ди тап.

405. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 847$ болсо, n жана b_n ди;

2) $b_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$ болсо, n жана b_n ди;

3) $b_1 = 2,\ b_n = 1458,\ S_n = 2186$ болсо, n жана q ну;

4) $b_1 = 1,\ b_n = 2401,\ S_n = 2801$ болсо, n жана q ну

тап.

406. Эгерде сандар суммасынын кошулуучулары геометриялык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болсо, ошол сумманы тап:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128;$ 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243;$

3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128;$ 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405.$

---

407. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_2=15,\ b_3=25;$ | 2) $b_2=14,\ b_4=686,$ | 3) $b_2=15,\ b_4=375, q > 0$

болсо, b_5 жана S_4 тү тап.

408. Геометриялык прогрессия n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ болсо, S_5 ти тап;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ болсо, S_6 ны тап.

409. Окшоштукту далилде:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1,$

мында n даража көрсөткүчү жана ал 1 ден чоң натуралдык сан.

410. Геометриялык прогрессияда:

1) $b_3 = 135, S_3 = 195$ болсо, b_1 жана q ну тап;

2) $b_1 = 12, S_3 = 372$ болсо, q жана b_3 тү тап.

411. Геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 1$ жана $b_3 + b_5 = 90$ болсо, q ну;
2) $b_2 = 3$ жана $b_4 + b_6 = 60$ болсо, q ну;
3) $b_1 - b_3 = 15$ жана $b_2 - b_4 = 30$ болсо, S_{10} ду;
4) $b_3 - b_1 = 24$ жана $b_5 - b_1 = 624$ болсо, S_5 ти тап.

33-§. ЧЕКСИЗ КЕМҮҮЧҮ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

84-сүрөттө берилген квадраттарды карап көрөбүз. Биринчи квадраттын жагы 1 ге барабар, экинчисиники $\frac{1}{2}$ ге, үчүнчүсүнүкү болсо $\frac{1}{2^2}$ ге барабар жана у. с. Ошентип, квадраттын жактары бөлүмү $\frac{1}{2}$ болгон төмөнкү геометриялык прогрессияны түзөт:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ... \qquad (1)$$

Бул квадраттардын аянттары болсо бөлүмү $\frac{1}{4}$ болгон төмөнкү геометриялык прогрессияны түзөт:

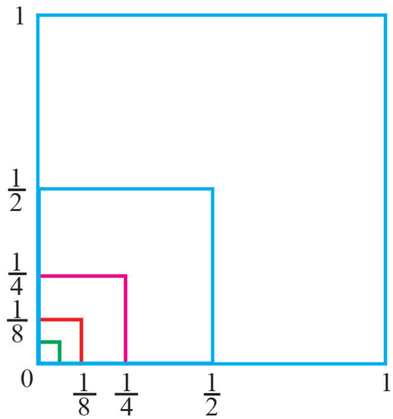
$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, ..., \frac{1}{4^{n-1}}, ... \qquad (2)$$

84-сүрөттөн көрүнүп тургандай, квадраттардын жактары жана алардын аянттары n номердин чоңоюшу менен барган сайын азайып, нөлгө жакындашып отурат. Ошондуктан (1) жана (2) прогрессияларга чексиз кемүүчү прогрессиялар дейилет. Бул прогрессиялардын бөлүмдөрү бирден кичине экендигин белгилей кетебиз.

Эми төмөнкү геометриялык прогрессияны карап көрөбүз:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, ..., \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, ... \qquad (3)$$

Бул прогрессиянын бөлүмү $q = -\frac{1}{3}$, мүчөлөрү болсо $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ жана у. с.



84-сүрөт.

n номердин чоңоюшу менен бул прогрессиянын мүчөлөрү нөлгө жакындашат. (3) прогрессияга да *чексиз кемүүчү прогрессия* дейилет. Анын бөлүмүнүн модулу бирден кичине экендигин белгилей кетебиз: $|q|<1$.

Бөлүмүнүн модулу бирден кичине болгон геометриялык прогрессияга *чексиз кемүүчү* геометриялык прогрессия дейилет.

1-маселе. n-мүчөсүнүн $b_n = \frac{3}{5^n}$ формуласы менен берилген геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү болушун далилде.

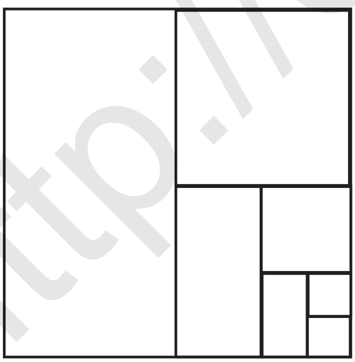
△ Шарт боюнча $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, мындан $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. $|q|<1$ болгондуктан берилген геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү болот. ▲

85-сүрөттө жагы 1 болгон квадрат сүрөттөлгөн. Анын жарымын штрихтейбиз. Андан кийин калган бөлүгүнүн жарымын штрихтейбиз жана у. с. Штрихтелген тик бурчтуктардын аянттары төмөнкү чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияны түзөт:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots .$$

Эгерде ушундай жол менен алынган бардык тик бурчтуктарды штрихтеп чыксак, анда бүтүн квадрат штрих менен капталат. Бардык штрихтелген тик бурчтуктар аянттарынын суммасын 1 ге барабар деп эсептөө табигый, б. а.:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$



85-сүрөт.

Бул барабардыктын сол бөлүгүндө чексиз сандагы кошулуучулардын суммасы турат. Баштапкы n кошулуучунун суммасын карап көрөбүз:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Геометриялык прогрессиянын баштапкы n мүчөсү суммасынын формуласы боюнча:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Эгерде n чексиз өсүп отурса, анда $\frac{1}{2^n}$ нөлгө каалаганча жакындашып отурат (нөлгө умтулат). Мындай учур төмөнкүдөй жазылат:

$$n \to \infty \text{ da } \frac{1}{2^n} \to 0$$

(окулушу: n чексиздикке умтулганда $\frac{1}{2^n}$ нөлгө умтулат) же

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(n чексиздикке умтулганда, $\frac{1}{2^n}$ удаалаштыгынын лимити нөлгө барабар).

Жалпысынан алганда, кандайдыр a_n удаалаштык үчүн $n\to\infty$ де $a_n - a \to 0$ болсо, анда a_n удаалаштык a санга умтулат (a_n удаалаштыктын $n\to\infty$ деги лимити a га барабар) дейилет жана бул $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ сыяктуу жазылат.

$n\to\infty$ da $\frac{1}{2^n} \to 0$ болгондуктан $n\to\infty$ те $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 1$, б. а. $n\to\infty$ те $S_n \to 1$.

Ошондуктан $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ чексиз сумма 1 ге барабар деп эсептелет.

Эми каалагандай чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияны карап көрөбүз:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots,$$

мында $|q| < 1$.

Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы деп, $n \to \infty$ де анын баштапкы n мүчөсү суммасы умтулган санга айтылат.

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласынан пайдаланабыз. Аны мындайча жазабыз:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n.} \tag{4}$$

Эгерде n чексиз өссө, $|q|<1$ болгондуктан $q^n \to 0$. Ошондуктан $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ да $n\to\infty$ де нөлгө умтулат. (4) формулада биринчи кошулуучу n ден көз каранды эмес. Демек, $n\to\infty$ де S_n сумма $\frac{b_1}{1-q}$ санына умтулат.

Ошентип, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын S суммасы төмөнкүгө барабар:

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

Жекече учурда, $b_1=1$ болгондо, $S=\frac{1}{1-q}$ ну алабыз. Бул барабардык адатта төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$1+q+q^2+...+q^{n-1}+...=\frac{1}{1-q}.$$

Бул барабардык жана (5) барабардык $|q|<1$ болгондо гана орундуу болушун белгилей кетебиз.

2- маселе. $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},-\frac{1}{54},...$ чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап.

△ $b_1=\frac{1}{2}, b_2=-\frac{1}{6}$ болгондуктан $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{3}, S=\frac{b_1}{1-q}$ формула боюнча:

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}. \blacktriangle$$

3- маселе. Эгерде $b_3=-1,\ q=\frac{1}{7}$ болсо, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап.

△ $n=3$ болгондо $b_n=b_1q^{n-1}$ формуланы колдосок, $-1=b_1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1=b_1\cdot\frac{1}{49}$ алынат, мындан $b_1=-49$.

(5) формула боюнча S сумманы табабыз:

$$S=\frac{-49}{1-\frac{1}{7}}=-57\frac{1}{6}. \blacktriangle$$

4- маселе. (5) формуладан пайдаланып, $a=0,(15)=0,151515...$ чексиз ондук мезгилдүү бөлчөктү жөнөкөй бөлчөк көрүнүшүндө жаз.

△ Берилген чексиз бөлчөктүн болжолдуу маанилеринин төмөнкү удаалаштыгын түзөбүз:

$$a_1=0,15=\frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$
$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Болжолдуу маанилерди мындайча жазуу берилген мезгилдүү бөлчөктү чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы көрүнүшүндө сүрөттөөгө болорун көрсөтөт:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots .$$

(5) формула боюнча:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \blacktriangle$$

Көнүгүүлөр

412. Төмөнкү геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү болушун далилде:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots;$ 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots;$ 3) $-81, -27, -9, \dots;$

4) $-16, -8, -4, \dots;$ 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots;$ 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots .$

413. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 40,\ b_2 = -20;$ 2) $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4};$

3) $b_7 = -30,\ b_6 = 15;$ 4) $b_5 = -9,\ b_9 = -\frac{1}{27}$

болсо, ал чексиз кемүүчү болобу? Ушуну аныкта.

414. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots;$ 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots;$ 3) $-25, -5, -1, \dots;$

4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots;$ 5) $128, 64, 2, \dots;$ 6) $-81, -27, -9, \dots .$

415. Эгерде чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда:

1) $q = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{8};$ 2) $q = -\frac{1}{3},\ b_1 = 9;$

3) $q = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{81};$ 4) $q = -\frac{1}{2},\ b_4 = -\frac{1}{8}$

болсо, анын суммасын тап.

416. n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген төмөнкү удаалаштык чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия боло алабы?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) $100, -10, 1 \ldots$; 3) $98, 28, 8, \ldots$.

418. Эгерде чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

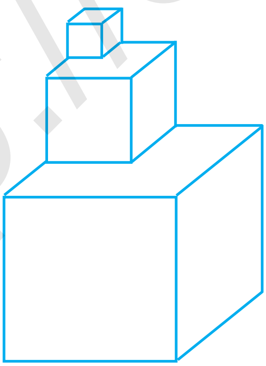
болсо, анын суммасын тап.

419. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы 150 гө барабар. Эгерде:

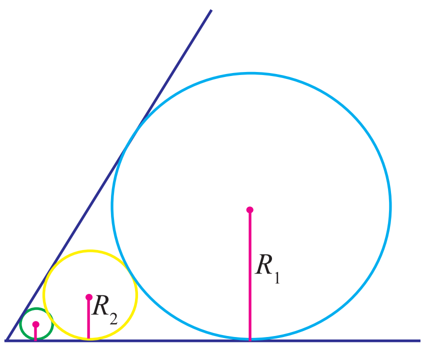
1) $q = \frac{1}{3}$ болсо, b_1 ди; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

болсо, q ну тап.

420. Кыры a болгон кубдун үстүнө кыры $\frac{a}{2}$ болгон, анын үстүнө кыры $\frac{a}{4}$ болгон кубду коюшту, андан кийин анын үстүнө кыры $\frac{a}{8}$ болгон кубду коюшту жана у. с. (86-сүрөт). Алынган фигуранын бийиктигин тап.



86-сүрөт.



87-сүрөт.

421. $60°$ туу бурчка бири-бирине жанган айланалар удаалаш ичтен чийилген (87-сүрөт). Биринчи айлананын радиусу R_1 ге барабар. Калган айланалардын R_2, R_3, ..., R_n, ... радиустарын тап жана алар чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияны түзүшүн көрсөт. $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ сумма биринчи айлананын борборунан бурчтун чокусуна чейин болгон аралыкка барабардыгын далилде.

422. Чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктү жөнөкөй бөлчөк көрүнүшүндө жаз:
1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

IV глава боюнча көнүгүүлөр

423. Арифметикалык прогрессиянын айырмасын тап, анын төртүнчү жана бешинчи мүчөлөрүн жаз:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ ...;$ 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ ...;$

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ ...;$ 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ ... .$

424. n-мүчөсү $a_n = -2(1-n)$ формуласы менен берилген удаалаштык арифметикалык прогрессия болушун далилде.

425. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = 6$, $d = \frac{1}{2}$ болсо, a_5 ти; 2) $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$ болсо, a_7 ни;

3) $a_1 = 4{,}8$, $d = 1{,}2$ болсо, a_{11} ди эсепте.

426. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2$, $a_5 = 6$ болсо, анын баштапкы жыйырма мүчөсүнүн суммасын тап.

427. Эгерде арифметикалык прогрессияда:
1) $a_1 = -2$, $a_n = -60$, $n = 10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 11$

болсо, анын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

428. Эгерде:
1) $-38 + (-33) + (-28) + ... + 12$;
2) $-17 + (-14) + (-11) + ... + 13$

сумманын кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болсо, ошол сумманы тап.

429. Геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тап жана анын төртүнчү жана бешинчи мүчөлөрүн жаз:

1) $3, 1, \frac{1}{3}, ...;$ 2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...;$ 3) $3, \sqrt{3}, 1, ...;$

4) $5, -5\sqrt{2}, 10, ...;$ 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Геометриялык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жаз:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2}, 1, -2, ...;$ 3) –27, –9, –3... .

431. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = 2$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{8}$, $q = 5$, $n = 4$;

3) $b_1 = -8$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$ болсо, b_n ди тап.

432. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -4$, $n = 5$; 2) $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 10$;

3) $b_1 = 10$, $q = 1$, $n = 6$; 4) $b_1 = 5$, $q = -1$, $n = 9$

болсо, анын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

433. Геометриялык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6$; 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5$;

3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, ..., n = 5;$ 4) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., n = 4.$

434. Берилген геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү экендигин далилде жана анын суммасын тап:

1) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...;$ 2) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, ...;$ 3) $7, 1, \frac{1}{7}, ...$

435. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_1 = 2\frac{1}{2}$ жана $a_8 = 23\frac{1}{2}$ болсо, анын айырмасын тап.

436. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = 5$, $a_3 = 15$; 2) $a_3 = 8$, $a_5 = 2$; 3) $a_2 = 18$, $a_4 = 14$

болсо, анын баштапкы беш мүчөсүн жаз.

437. –10 жана 5 сандарынын ортосуна бир санды кой, натыйжада арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү алынсын.

438. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_{13} = 28$, $a_{20} = 38$; 2) $a_{18} = -6$, $a_{20} = 6$; 3) $a_6 = 10$, $a_{11} = 0$

болсо, анын он тогузунчу жана биринчи мүчөсүн тап.

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР

1. Арифметикалык прогрессияда: 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$ болсо, a_{10} ду жана баштапкы он мүчөнүн суммасын тап.

2. Геометриялык прогрессияда: 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ болсо, b_6 ны жана баштапкы алты мүчөнүн суммасын тап.

3. 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $128, 32, 8 \ldots$, удаалаштык чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия экендигин далилде жана анын бардык мүчөлөрүнүн суммасын тап.

439. x тин кандай маанилеринде:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x - 1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$; 3) x^2, $10x$, 25

сандар арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болот?

440. Төмөнкү сандар арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү болушун көрсөт:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1; 4) $\sin5\alpha$, $\sin3\alpha\cos2\alpha$, $\sin\alpha$.

---

441. Сумма 252 ге барабар болушу үчүн 5 тен баштап канча удаалаш так натуралдык санды кошуу керек?

442. Эгерде арифметикалык прогрессияда:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;

3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$ болсо, a_n жана d ны тап.

443. Геометриялык прогрессияда:

1) эгерде $b_1 = 4$ жана $q = -1$ болсо, b_9 ду эсепте;

2) эгерде $b_1 = 1$ жана $q = \sqrt{3}$ болсо, b_7 ни эсепте.

444. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;

3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$

болсо, анын бешинчи мүчөсүн тап.

445. 4 жана 9 сандарынын ортосуна бир оң санды кой, натыйжада геометриялык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү алынсын.

446. Эгерде удаалаштык n- мүчөсүнүн:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

формуласы менен берилген болсо, ал чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия боло алабы?

447. Эгерде геометриялык прогрессияда:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$

болсо, ал чексиз кемүүчү экендигин көрсөт.

448. Эс алуучу врачтын сунушуна баш ийип, биринчи күнү Күндүн нурунда 5 минут кактанды, андан кийин болсо күн сайын кактанууну 5 минуттан көбөйтүп отурду. Эгерде ал кактанууну шаршемби күнүнөн баштаган болсо, жуманын кайсы күнү анын Күндө кактануусу 40 минутка барабар болот?

449. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ жана $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ болсо, анын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тап.

450. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ жана $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ болсо, анын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тап.

451. Саат 1 де саат 1 жолу, 2 де 2 жолу, ..., 12 де 12 жолу заң урат. Сааттын жебеси кезектеги ар сааттын жарымын көрсөткөндө болсо, бир жолу заң урат. Бул саат бир суткада канча жолу заң урат?

IV глава боюнча сыноо (тест) көнүгүүлөрү

1. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101} ди тап.

A) –9797; B) –9798; C) –7979; D) –2009.

2. Арифметикалык прогрессияда $d = 4$, $S_{50} = 5000$ болсо, a_1 ди тап.

A) –2; B) 2; C) 100; D) 1250.

3. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ болсо, d ны тап.

A) 4; B) 2; C) 3; D) 3,5.

4. Арифметикалык прогрессияда $a_2 + a_9 = 20$ болсо, S_{10} ду тап.

A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.

5. 8 ге болгондо 7 калдык калтырган удаалаштыктын 5- мүчөсүн белгиле.

A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.

6. 701 саны 1, 8, 15, 22, ... прогрессиянын канчанчы номерлүү мүчөсү?

A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.

7. 1002, 999, 996, ... прогрессиянын канчанчы номерлүү мүчөсүнөн баштап, анын мүчөлөрү терс сандар болот?

A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.

8. Арифметикалык прогрессияда $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ болсо, a_{100} дү тап.

A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.

9. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$ болсо, n ди тап.

A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.

10. Арифметикалык прогрессия $a_{12} + a_{15} = 20$ болсо, S_{26} ны тап.

A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.

11. 1 жана 11 сандарынын ортосунда 99 санды жайлаштырганыңда, алар ушул сандар менен чогуу арифметикалык прогрессияны түзсүн. Ошол прогрессия үчүн S_{50} нү тап.

A) $172\frac{1}{2}$; B) 495; C) 300; D) 178.

12. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = -20{,}7$, $d = 1{,}8$ болсо, кайсы номерлүү мүчөдөн баштап прогрессиянын бардык мүчөлөрү оң болот?

A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.

13. 7 ге эселүү баштапкы канча натуралдык санды кошкондо 385 алынат?

A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.

14. Геометриялык прогрессияда $b_1 = 2$, $q = 3$ болсо, S_6 ны тап.

A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.

15. Геометриялык прогрессияда $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$ болсо, b_1 ди тап.

A) $242\frac{2}{3}$; B) 81; C) $121\frac{1}{3}$; D) 240.

16. Геометриялык прогрессияда $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ болсо, q ну тап:

A) 4; B) 2; C) 8; D) $\frac{1}{2}$.

17. Геометриялык прогрессияда 6 мүчө бар. Баштапкы 3 мүчөсүнүн суммасы 26 га, кийинки 3 мүчөсүнүн суммасы болсо 702 ге барабар. Прогрессиянын бөлүмүн тап.

A) 4; B) 3; C) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$.

18. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ болсо, q ну тап.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{64}{65}$; C) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$.

19. Геометриялык прогрессияда $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2-\sqrt{3}$ болсо, S ти тап.

A) $2+\sqrt{3}$; B) 3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

1-маселе. Эркин түшүп жаткан тело биринчи секундда 4,9 м, ар бир кийинки секундда болсо мурдагысына караганда 9,8 м ге көбүрөөк түшүп отурат. Тело 4 410 метр бийиктиктен канча убакытта жерге түшөт.

△ Маселенин шарты боюнча, тело биринчи секундда $a_1=4{,}9$, экинчи секундда $a_2=4{,}9+9{,}8$, үчүнчү секундда $a_3=a_2+9{,}8=a_1+2\cdot 9{,}8$ жана у. с. n-секундда $a_n=a_{n-1}+9{,}8=a_1+(n-1)9{,}8$ метрге төмөн түшөт, б. а. секунд сайын түшүп жаткан аралыктар арифметикалык прогрессияны түзөт. Демек, тело n секундда жерге түшөт десек, арифметикалык прогрессиянын n мүчөсүнүн суммасынын формуласына негизденип

$$4\,410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mathrm{n}} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2\cdot 4{,}9 + (n-1)\cdot 9{,}8}{2}\cdot n.$$

Мындан $4{,}9n^2=4\,410$, $n^2=900$, $n=30$ ду алабыз.

Жообу: Тело 30 секундда жерге түшөт. ▲

2- маселе. Сактоочу b сум акчасын банкка жылына p % дан койду жана n жыл өткөндөн кийин бардык акчаны кайтарып алды. Эгерде $b=4\,000\,000$, $p=8$ болсо, сактоочу эки жылдан кийин канча акча алган?

$\triangle$ Баштапкы коюлган акчасы b сум болсо, бир жылдан кийин сактоочунун акчасы $b_1=b\cdot(1+\frac{p}{100})$ сум болот. Кийинки жылдар үчүн төмөнкү варианттардан бири болушу мүмкүн:

1) Кийинки ар жылы пайыз баштап коюлган акча b сумдан эсептелет. Мында экинчи жылдан кийин $b_2=b+1+\frac{bp}{100}+\frac{bp}{100}=b\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ сум жана у. с. n-жылдан кийин $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сум болот. Пайызды эсептөөнүн бул усулуна *жөнөкөй пайыз* дейилет. Мында, эгерде $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ болсо, анда $b_2=4\,000\,000\cdot1{,}16=4\,640\,000$.

2) Кийинки ар жылы пайыз мурдагы жыл чогулган акчадан эсептелет. Эки жылдан кийин $b_2=b_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ сум жана у. с. n жылдан кийин $b_n=b_{n\text{-}1}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ болот. Пайызды эсептөөнүн бул усулуна *татаал пайыз* дейилет. Мында эгерде $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ болсо, анда $b_2=4\ 000\ 000\cdot1{,}08^2=4\ 665\ 600$ сум.

Жообу: жөнөкөй пайыз учурунда $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сум; 4 640 000,

татаал пайыз учурунда $b_n=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ сум; 4 665 600 сум. $\blacktriangle$

Маселелер

1. Эркин түшкөн тело биринчи секундда 4,9 м жол басат, кийинки ар бир секундда болсо мурдагысынан 9,8 м ге көп жол басат. Түшүп жаткан тело бешинчи секундда канча аралыкты басып өтөт?

2. Цирктин секторлорунан биринде ар бир кийинки катарда мурдагысына караганда бирден отургуч көбүрөөк. Эгерде
1) биринчи катарда 8 отургуч, катарлар болсо 22;
2) биринчи катарда 10 отургуч, катарлар болсо 21 болсо, ошол сектордо канча орун бар?

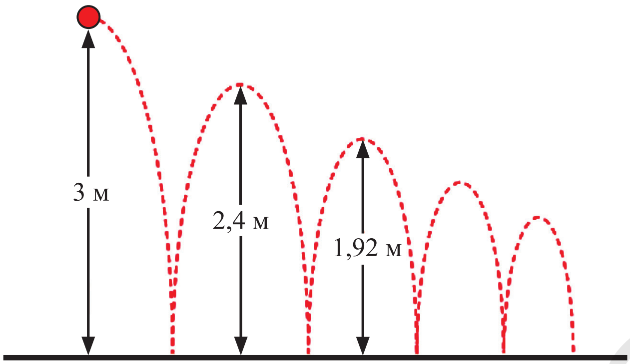
3. Саякатчылар дарыяны бойлой 140 км жүрүүнү пландаштырышты. Биринчи күнү 5 км, ар бир кийинки күнү болсо, андан мурдагы күнгө салыштырмалуу 2 км ге көбүрөөк жүрүшчү болсо, алар саякатта канча күн болушат?

4. Ачыткынын клеткалары ар бир клетканын экиге бөлүнүшү аркылуу көбөйөт. Эгерде баштапкы учурда 6 клетка болсо, 10 жолу бөлүнгөндөн кийин клеткалардын саны канча болот?

5. Календарь жылы бою завод жумушчусунунн айлык маянасын ай сайын бирдей санга чоңойтуп отурду. Июнь, июль, августта алган айлык маяналарынын жалпы саны 9 900 000 сум, сентябрь, октябрь, ноябрь үчүн алынган маяналарынын суммасы болсо 10 350 000 сум болду. Жумушчунун жыл бою алган жалпы маянасын тап.

6. Аба ваннасын кабыл алуу жолу менен дабаланууда биринчи күнү дабалануу 15 мин ка созулду, кийинки ар бир күндө аны 10 мин ка созуп барылат. Ваннаны кабыл алуу көп дегенде 1 саат 45 мин ка созулушу үчүн көрсөтүлгөн тартипте аба ваннасын кабыл алуу канча күнгө созулат?

7. Атылган серпилгич топ жерге урунуп, кайра дагы жогоруга чыкканда ар жолу мурдагы бийиктигинин 80 % ына көтөрүлсө, анда 3 метрден ташталган топтун ылдыйга жана жогоруга басып өткөн жалпы вертикалдуу аралыктарынын суммасын тап (88-сүрөт).



88-сүрөт.

Тарыхый маселелер

1. *Берунийдин маселеси.* Эгерде мүчөлөрү оң геометриялык прогрессиянын: мүчөлөрүнүн саны так болсо, анда $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$; мүчөлөрүнүн саны жуп болсо, $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ болушун далилде.
2. *Ахмес папирусунан алынган маселе (б. з. ч. 2000-жылдар).* 10 өлчөм данды 10 адамдын ортосунда бөлүштүр, бул адамдардын бири менен андан кийинкиси (же мурдагысы) алган дандын айырмасы $\frac{1}{8}$ өлчөмгө барабар болсун.

Тарыхый маалыматтар

„Байыркы элдерден калган эстеликтер" аттуу чыгармасында Абу Райхан Беруний шахматтын ачылышы жөнүндөгү уламыш менен байланышкан биринчи мүчөсү $b_1 = 1$ жана бөлүмү $q = 2$ болгон геометриялык прогрессиянын биринчи 64 мүчөсүнүн суммасын эсептейт; шахмат тактайындагы k-чакмакка туура келген сандан 1 саны кемитилсе, айырма k-чакмактан мурдагы бардык чакмактарга тиешелүү сандардын суммасына барабар болушун көрсөтөт, башкача айтканда

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}$$

экенин далилдейт.

V ГЛАВА. ЫКТЫМАЛДАР ТЕОРИЯСЫ ЖАНА МАТЕМАТИКАЛЫК СТАТИСТИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

34-§. ОКУЯЛАР

Ыктымалдар теориясы жана математикалык статистика кокус окуялардын ортосундагы байланыштарды, мыйзам ченемдүүлүктөрдү үйрөнүүгө жана алардан келип чыккан корутундуларды практикалык маселелерди чыгарууда колдонууга эсептелген илим саналат.

1. Мүмкүн эмес, шексиз жана кокус окуялар.

Турмушта окуя деп боло турган же болбой турган каалагандай жараянга айтылат. Андан тышкары адамдар тарабынан ишке ашырылчу тажрыйбалар же сыноолор, байкоолор жана өлчөө иштеринин натыйжалары да окуялар саналат. Бардык окуяларды мүмкүн эмес, шексиз жана кокус окуяларга ажыратууга болот.

Мүмкүн эмес окуя деп, берилген шарттарда болушу мүмкүн эмес окуяга айтылат. Мүмкүн эмес окуяларга мисалдар келтирели:

1) көлдүн суусу $+30$ °C та муздайт;

2) жактары 1 ден 6 га чейин цифралар менен белгиленген оюн кубиги ташталганда 8 цифрасынын пайда болушу.

Шексиз окуя деп, берилген шарттарда сөзсүз болушу анык болгон окуяга айтылат. Маселен:1) кыштан кийин жаз келди; 2) оюн кубигин таштаганда алтыдан чоң болбогон (0 дөн айырмалуу) цифра түштү.

Кокус окуя деп берилген шарттарда болушу да, болбостугу да мүмкүн болгон окуяга айтылат. Төмөнкү окуялар кокус окуяларга мисал боло алат: 1) 1 ден 50 ге чейинки натуралдык сандардын арасынан кокусунан тандалган сан 7 ге бөлүнөт; 2) ыргытылган тыйын герб жагы менен түштү.

2. Биргеликте болушу мүмкүн жана биргеликте болбогон окуялар.

Берилген шарттарда бир мезгилде болушу мүмкүн болгон эки окуяга биргеликте болушу мүмкүн дейилет, бир мезгилдин өзүндө боло албаган окуяларга болсо биргеликте болбогон окуялар дейилет. Мисалы, „күн чыкты“ жана „күн суук“ биргеликте болушу мүмкүн окуялар, „күн отурду“ жана „күн чыкты“ окуялары болсо биргеликте болбогон окуялар болот. Оюн кубиги менен байланыштуу төмөнкү окуяларды көрөлү: 1) 3 очко түштү; 2) 4 очко түштү; 3) 3 очкодон көбүрөөк түштү; 4) үчкө эселүү очко түштү. Бул окуялардын ичинде төмөнкү үч жуптук биргеликте болушу мүмкүн окуялар: 1- жана 4- (3 саны үчкө эселүү болгондуктан); 2- жана 3- (4 очко 3 очкодон чоң болгондуктан); 3- жана 4- (мисалы, 6 очко). Төмөнкүлөр болсо биргеликте болбогон окуялар: 1- жана 2- (бир мезгилдин өзүндө эки түрдүү сан түшүшү мүмкүн эмес); 1- жана 3- (3 очкодон жогору, б. а. 4, 5, 6 очколору 3 очко менен бир мезгилде түшө албайт); 2- жана 4- (4 саны 3 кө эселүү эмес).

3. Тең мүмкүнчүлүктүү окуялар.

Төмөнкүдөй окуяларга мисалдарды көрөлү:

Герб жагы

Цифралуу жагы

89-сүрөт.

1) тыйынды бир жолу таштаганда „цифралуу жагынын түшүшү“ жана „гербдүү жагынын түшүшү“(89-сүрөт);

2) оюн кубигин бир жолу таштаганда „1 очконун түшүшү“ „2 очконун түшүшү“,..., „6 очконун түшүшү“;

3) бир жагы көк, калган жактары кызылга боёлгон кубик ташталганда „көк жагы жогоруда болуп түшүшү“ жана „кызыл жагы жогоруда болуп түшүшү“;

4) ичинде 10 ак жана бир кара шар болгон кутудан бир шар алынганда анын „ак шар чыгышы“ жана „кара шар чыгышы“.

1- жана 2- мисалдарда окуялардан кайсы биринин болушу үчүн окуялардан биринде башкасына салыштырмалуу кандайдыр үстөмдүк бар деп болбойт (тыйын жана кубиктер туура болсо албетте). Мындай окуялар ***тең мүмкүнчүлүктүү окуялар*** деп аталат.

3- жана 4- мисалдарда тең мүмкүнчүлүктүү болбогон окуяларга мисалдар көрсөтүлгөн. Чындыгында да, боёлгон кубиктин 5 жагы кызыл, бир жагы болсо кара жана, демек, кызыл жагы түшүшү үчүн мүмкүнчүлүктөр кара жагы түшүшүнө караганда көбүрөөк. Ошол сыяктуу, ак шарлардын чыгуу мүмкүнчүлүктөрү кара шардын чыгуу мүмкүнчүлүгүнөн көбүрөөк.

Көнүгүүлөр

Көнүгүүлөрдө шарттар жана бул шарттарда болуп жаткан окуялар сүрөттөлгөн. Ар бир окуя үчүн (оозеки) анын мүмкүн эмес же шексиз, же кокус экендигин аныкта **(452–456):**

452. Мектептеги окуучулардан: 1) экөөсүнүн аты бирдей; 2) бардыгынын бою бирдей.

453. Алгебра китеби кокус ачылып, оң бетиндеги үчүнчү сөз табылды. Бул сөз: 1) „ыктымалдык“ сөзү; 2) „!“ белгисинен башталат.

454. IX класс (анда кыздар да эркек балдар да бар) журналындагы тизмеден кокус бир окуучу тандап алынды: 1) ал кыз бала; 2) тандалган окуучунун жашы 16 да; 3) тандалган окуучу 15 айлык; 4) бул окуучунун жашы 3 төн улуу.

455. Бүгүн Самаркандда барометр нормалдуу атмосфера басымын көрсөтүүдө. Мында: 1) Самаркандда жашаган аялдын казанындагы суу $t = 70°C$ та кайнайт; 2) абанын температурасы $-5°C$ ка төмөндөгөндө, көлмөдөгү суу тоңот.

456. Эки оюн кубиги ташталууда: 1) биринчи кубикте 4 очко, экинчисинде болсо 6 очко түштү; 2) эки кубикте түшкөн очколордун суммасы 1 ге барабар; 3) эки кубикте түшкөн очколордун суммасы

14 кө барабар; 4) эки кубиктин ар биринде 5 очкодон түштү; 5) эки кубикте түшкөн очколордун суммасы 12 ден чоң эмес.

Берилген окуялар жуптуктарынын кайсылары биргеликте болушун, кайсылары болсо биргеликте болбостугун көрсөт(**457–459**):

457. Саадат жана Шухрат ойногон шашка оюнунда: 1) Саадат жеңди; Шухрат жеңилди; 2) Саадат жеңилди; Шухрат жеңилди.

458. Оюн кубиги ташталды. Анын жогору жагы: 1) 5 очкону; 3 очкону; 2) 1 очкону; так очкону көрсөттү.

459. Домино жыйнагынан бир домино ташы алынды, анда: 1) сандарынан бири 4 төн чоң, экинчиси 6 га барабар; 2) бир сан 5 тен кичине эмес, экинчиси 5 тен чоң эмес; 3) сандардан бири 5, эки сандын суммасы 12 ге барабар; 4) эки сан 4 төн чоң, сандардын суммасы 9 дан чоң эмес.

460. Төмөнкү: 1) „кар жаап жатат“; 2) „асманда эч кандай булут жок“; 3) „абанын температурасы +37°C“ окуяларынан мүмкүн болгон бардык жуптуктарды түзүп, алардын арасынан биргеликте болушу мүмкүн жана биргеликте болушу мүмкүн болбогон окуялар жуптуктарын аныкта.

461. Төмөнкү окуялар: 1) „жаз келди“; 2) „жадыбал боюнча бүгүн 6 сабак болот“; 3) „бүгүн 1-январь“; 4) „Ташкентте абанын температурасы +40 °C“ дан мүмкүн болгон бардык жуптуктарды түзүп, алардын арасында биргеликте болушу мүмкүн жана биргеликте болушу мүмкүн болбогон окуялар жуптуктарын аныкта.

462. Төрт күкүрт кутусунан биринин ичи бош, калгандарында күкүрт чийлери бар. Кокус түрдө тандалган кутулардан бири ачылды. „Күкүрт кутусунун ичи бош чыкты“ жана „күкүрт кутусунун ичи бош эмес“ окуялары тең мүмкүнчүлүктүү болобу?

463. Оюн кубигинин: 1) 1 жагы; 2) 2 жагы жашылга, калган жактары болсо кызылга боёлду. „Жашыл жагы түштү“ жана „кызыл жагы түштү“ окуялары тең мүмкүнчүлүктүү болобу?

464. Бирден алтыга чейин номерленген 6 ак, 6 кызыл, 6 көк, 6 сары шарлар бир баштыкчага салынды жана аралаштырылды. Баштыкчадан тобокелинен бир шар алынды. Төмөнкү окуялар тең мүмкүнчүлүктүү болобу: 1) „тандалган шар ак“ жана „тандалган шар көк“; 2) „тандалган шардын номери 5“ жана „тандалган шардын номери 4“; 3) „тандалган шар кызыл жана номери 2“ жана „тандалган шар сары жана номери 6“; 4) „тандалган шар кызыл“ жана „тандалган шар кызыл эмес“; 5) „тандалган шардын номери 2 ден чоң эмес“ жана „тандалган шардын номери 2 ден чоң“?

35-§. ОКУЯНЫН ЫКТЫМАЛДУУЛУГУ

Турмушта түрдүү окуялар менен кагылышканда, көбүнесе бул окуялардын болушунун ишеничтүүлүк даражасына баа беребиз. Кээде окуялар жөнүндө „мындай болушу мүмкүн эмес“ деп айтсак, башка бир окуялар жөнүндө „бул сөзсүз болот“ же „бул окуянын болушуна ишенич чоң“ же „бул окуянын болушуна ишенич аз“ деп айтабыз. Окуялар болушунун ишеничтүүлүк даражасын баалоо ыктымалдык түшүнүгү менен байланыштуу.

XVII кылым француз окумуштуулары Блез Паскаль (1623 – 1662) менен Пьер Ферманын (1601 – 1665) ортосунда бир топ математикалык маселелер боюнча жазышкан каттарында биринчи жолу ыктымалдык менен байланышкан маселелерди чыгарууга алгачкы жолу жалпы мамиле калыптанды. Блез Паскаль 1654-жылы 28-октябрда Пьер Фермага жазган катында төмөнкүдөй ой жүгүртөт:

„Оюнчу кубикти таштаганда кандай сан түшүшүн билбейт. Бирок ал 1, 2, 3, 4, 5 жана 6 сандары тең мүмкүнчүлүктүү түрдө түшүшүн билет. Мындан тышкары, оюнчу тажрыйба (кубик таштоо) натыйжасында көрсөтүлгөн сандардан кандайдыр биринин түшүшү бул шексиз окуя экендигин да билет. Эгерде биз шексиз окуянын болуу мүмкүнчүлүгүн 1 деп кабыл алсак, анда ошол сандардан биринин, мисалы, 6 (куду ушундай башка сандардын да) нын чыгышы 6 эсе кичине, б. а. $\frac{1}{6}$ ге барабар болот“.

Тигил же бул окуянын ийгиликтүү болуу мүмкүнчүлүгүн математиктер ***окуянын ыктымалдуулугу*** деп аташты жана латинче *probabilitas* – ыктымалдык сөзүнүн биринчи тамгасы боюнча P аркылуу белгилешти.

Эгерде A аркылуу оюндун кубиги бир жолу ташталганда „5 очко түштү“ окуясы белгиленсе, анда A окуянын ыктымалдуулугу $P(A)$ аркылуу белгиленет, $P(A)=\frac{1}{6}$ көрүнүштө жазылат жана окуянын ыктымалдуулугу $\frac{1}{6}$ деп окулат.

1-маселе. Бирдей карточкаларга 1 ден 20 га чейин сандар жазылды (ар бир карточкага бирден сан жазылды). Карточкалар столго тескериси менен коюлду жана аралаштырылды. Кокусунан алынган карточкадагы сандын 7 болушу ыктымалдуулугун тап.

△ Карточкалардын саны 20 жана ар бир карточкага 1 ден 20 га чейинки сандар бир жолудан жазылгандыктан, тандоонун натыйжасында 20 тең мүмкүнчүлүктүү окуялар болушу мүмкүн (тажрыйбанын натыйжалары): 1) 1 саны чыкты; 2) 2 саны чыкты; ….; 20) 20 саны чыкты.

Мында „кандайдыр сан чыкты" окуясы болсо шексиз окуя. Бул шексиз окуянын ыктымалдуулугу 1 ге барабар жана A – „7 саны чыкты" окуясынын ыктымалдуулугу болсо 20 эсе кичине, б. а. $P(A) = \frac{1}{20}$.

Жообу: $\frac{1}{20}$ ▲.

Жогоруда каралган ***элементардык окуялардан*** тышкары татаалыраак окуяларды да үйрөнүүгө болот. Мисалы, 1-маселедеги тандалган карточкадагы сандын жөнөкөй сан болушунун ыктымалдуулугун табуу керек болсун. A – „20 дан чоң болбогон жөнөкөй сандын чыгышы" окуясын көрөлү. Бул окуя 8 учурда (натыйжада) болот – б. а. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 жөнөкөй сандарынан бири чыкканда. Бул натыйжалар A окуя үчүн *шарт түзүүчү мүмкүнчүлүктөр* деп аталат. Мүмкүн болгон бардык натыйжалардын (алар 20) ичинде 8 и шарт түзүүчү мүмкүнчүлүктөр болот, ошол себептүү A окуянын ыктымалдуулугу:

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

! **Эгерде кандайдыр тажрыйбада n тең мүмкүнчүлүктүү, өз ара жупташ биргеликте болбогон натыйжа болуп, алардан m и A окуя үчүн шарт түзүүчү мүмкүнчүлүктөр болсо, анда $\frac{m}{n}$ катышына *A окуя болушунун ыктымалдуулугу* дейилет жана төмөнкүдөй жазылат:**

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

2-маселе. Оюн кубигин бир жолу таштаганда так сандуу очко чыгышынын ыктымалдуулугун тап.

△ A – „так сандуу очко чыгышы“ окуясына шарт түзүүчү 3 натыйжа (1 дин чыгышы, 3 түн чыгышы жана 5 очконун чыгышы) бар, б. а. $m = 3$. Тең мүмкүнчүлүктүү бардык натыйжалардын саны болсо $n = 6$, ошол себептүү

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Жообу: $\frac{1}{2}$. ▲

3-маселе. Кутуда 6 кызыл жана 4 көк шар бар. Алардан бири кокусунан тандалып, кутудан алынды. Алынган шардын кызыл болушунун ыктымалдуулугун тап.

△ Тажрыйбанын 10 тең мүмкүнчүлүктүү натыйжалары бар: 1- шар алынды, 2- шар алынды, …, 10- шар алынды, б. а. $n = 10$. Шарт түзүүчү натыйжалардын саны болсо $m = 6$. Ошол себептүү

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Жообу: $\frac{3}{5}$. ▲

Шексиз, мүмкүн эмес жана кокус окуялардын ыктымалдуулуктары жөнүндө (1) формулага негизденип төмөнкүлөрдү айтууга болот:

Эгерде A окуя шексиз боло турган окуя болсо, анда бардык натыйжалар ага шарт түзүүчү болот, б. а. $m = n$. Анда $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Эгерде A окуя болушу мүмкүн эмес окуя болсо, анда ага шарт түзүүчү натыйжалар жок, б. а. $m = 0$. Демек, анда $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Эгерде A окуя кокус окуя болсо, анда ага шарт түзүүчү натыйжалар үчүн $0 < m < n$ шарты аткарылат. Ошол себептүү, мындай учурларда $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Көнүгүүлөр

465. Төмөндө келтирилген учурларда болушу мүмкүн болгон бардык элементардык тең мүмкүнчүлүктүү окуяларды эсепте: 1) тыйын таштоо; 2) оюн кубигин таштоо; 3) капталдарынын түсү ак, кызыл, сары жана көк болгон тетраэдрди таштоо; 4) бети A, B, C, D, E жана F аркылуу белгиленген 6 секторго бөлүнгөн рулетканын жебесин айландыруу.

466. Домино оюнунун толук комплектинен бир ташы кокусунан алынды. Бул ташта:
1) 6 жана 5 сандары; 2) 0 жана 1 сандары; 3) бирдей сандар; 4) түрдүү сандар чыгышынын ыктымалдуулугун тап.

467. Кутуда 4 кызыл жана 5 көк шар бар. Кокусунан бир шар алынды. Алынган шардын:
1) кызыл; 2) көк; 3) жашыл; 4) кызыл же көк болушунун ыктымалдуулугу кандай?

468. Кутуда 3 көк, 4 сары, 5 кызыл шар бар. Кокусунан бир шар алынды. Алынган шардын:
1) көк; 2) сары; 3) кызыл; 4) көк эмес; 5) сары эмес; 6) кызыл эместигинин ыктымалдуулугу кандай?

469. Бирдей карточкаларга 1 ден 12 ге чейинки сандар жазылды (ар бир карточкага бирден сан жазылды). Карточкалар столго тескериси менен коюлду жана аралаштырылды. Кокусунан алынган карточканын:
1) 5; 2) жуп; 3) 3 кө эселүү; 4) 4 кө эселүү; 5) 5 ке бөлүнүүчү; 6) жөнөкөй сан болушунун ыктымалдуулугу кандай?

470. Нигара жолдошунун телефон номеринин акыркы эки цифрасын эстен чыгарып койду жана аны кокусунан терди. Нигаранын жолдошунун телефонуна түшүү ыктымалдуулугу кандай?

471. Лотереяда 1000 чыпта болуп, андан 30 у утуштуу. Бир чыпта сатып алынды. Сатып алынган чыптанын:
1) утуштуу; 2) утушсуз болушунун ыктымалдуулугу кандай?

472. Студент экзаменге даярдануу жараянында анда берилчү 30 билеттин бирине даярданууга үлгүрбөдү. Экзаменде студентке билген билети түшүүнүн ыктымалдуулугу кандай?

473. Тыйын 6 жолу удаалаш ташталганда ар жолу герб жагы менен түштү. Тыйын дагы бир жолу ташталса, герб жагы менен түшүү ыктымалдуулугу кандай?

474. 52 лүү карта жыйнагынан бир карта кокус түрдө алынды. Ошол картанын 1) алты кыштын; 2) сегиз; 3) кызыл түстөгү валет; 4) сандуу карга түстүү; 5) так сандуу кыштын түстүү болушунун ыктымалдуулугу кандай?

36-§. КОКУС ОКУЯНЫН САЛЫШТЫРМА ЖЫШТЫГЫ

Ыктымалдыктын мурда берилген аныктамасына *ыктымалдыктын классикалык аныктамасы* дейилет. Классикалык аныктама сыноо же тажрыйбанын сөзсүз өткөрүлүшүн талап кылбайт: окуянын бардык тең мүмкүнчүлүктүү жана шарт түзүүчү натыйжалары теориялык жактан аныкталат.

Мындай аныктама боюнча тажрыйбанын элементардык тең мүмкүнчүлүктүү натыйжаларынын саны чектүү жана белгилүү сан менен туюнтулат. Практикада, б. а. табият таануу, экономика, медицина, өндүрүш жана башка тармактардагы кокус жараяндар үйрөнүлгөндө мүмкүн болгон натыйжалардын санын камтып алуунун мүмкүнчүлүгү аябай аз болгон сыноо же тажрыйбалар көп кездешет. Башка бир топ учурларда тажрыйбаларды иш жөзөндө жасамайынча натыйжалардын тең мүмкүнчүлүктүү болушун аныктоо кыйын же мүмкүн эмес. Мисалы, фирма өндүргөн лампочкаларды текшерип көрмөйүнчө, „жарактуу“ же „жараксыздыгын“ тең мүмкүнчүлүктүү болушу же болбостугун элестетүү кыйын. Ошол себептүү, классикалык аныктама менен бир катарда, практикада *ыктымалдыктын статистикалык аныктамасы*нан да пайдаланышат. Бул аныктама менен таанышуу үчүн *салыштырма жыштык* түшүнүгүн киргизүү зарыл.

! **Берилген тажрыйбалардын катарында *A окуянын салыштырма жыштыгы* деп, ошол окуя болгон тажрыйбалардын саны *M* дин өткөрүлгөн бардык тажрыйбалардын саны *N* ге катышына айтылат. Мында *M* саны *A* окуянын *жыштыгы* деп аталат.**

A окуянын салыштырма жыштыгы $W(A)$ аркылуу белгиленет. Анда аныктама боюнча

$$W(A)=\frac{M}{N}. \qquad (1)$$

1-маселе. Класста 30 окуучу бар. Өткөрүлгөн текшерүү ишинен 6 окуучу 5 баа алды. Класста өткөрүлгөн текшерүү ишинен алынган мыкты баалардын салыштырма жыштыгын тап.

△ A – „5 баа алынды“ окуясы болсо, бул окуя 6 жолу болду, б. а. $M=6$. Жалпы тажрыйбалардын саны $N=30$, ошол себептүү

$$W(A)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}.$$

Жообу: $\frac{1}{5}$. ▲

Француз изилдөөчүсү Бюффон (1707–1788) тыйынды 4 040 жолу көкөлөтүп таштап көргөн, ошондон 2048 учурда тыйын герб жагы менен түшкөн. Демек, анда ошол тажрыйбалар катарында герб түшүшүнүн салыштырма жыштыгы $W(A)=\frac{2\,048}{4\,040}\approx 0,5069$ ге барабар. Англис математиги Карл Пирсан болсо тыйынды 24 000 жолу таштаганда герб жагы 12 012 жолу түшкөн. Демек,тыйын таштоонун бул тажрыйбаларында герб жагы түшүшүнүн салыштырма жыштыгы $W(A)=\frac{12\,012}{24\,000}=0,5005$ ке барабар.

Бул эки учурдагы натыйжаны салыштырсак, салыштырма жыштыктардын мааниси, жалпысынан алганда, белгилүү тажрыйбаларга жана алардын санына карай өзгөрүшү мүмкүндүгүн көрүүгө болот.

Бирок кокус окуянын салыштырма жыштыгынын негизги өзгөчөлүгү, тажрыйбалардын саны чоңоюп барган сайын салыштырма жыштык туруктуулашып, кандайдыр сандын айланасында термелип турат экен. Ошол сан кокус окуянын *статистикалык ыктымалдуулугу* иретинде кабыл алынат. Мисалы,тыйын таштоодо бул сан 0,5, б. а. Бюффондун тажрыйбасында да, Пирсандын тажрыйбасында да алынган салыштырма жыштыктар 0,5 ке өтө жакын сандар. Демек, тыйын ташталганда анын статистикалык ыктымалдуулугу 0,5 ке барабар.

Тыйын таштоого окшош түрдүү жараяндарды үйрөнүү боюнча чоң сандагы тажрыйбалар түрдүү изилдөөчүлөр тарабынан жасалган жана алардын натыйжалары негизинде швед математик окумуштуусу Якоб Бернулли (1654–1705) *чоң сандардын мыйзам*ын негиздеп берди:

Тажрыйбалардын саны чоң болгондо окуянын салыштырма жыштыгы $W(A)$ ошол окуянын ыктымалдуулугу $P(A)$ дан практикалык жактан айырмаланбастыгын, б. а. чоң сандуу тажрыйбаларда $P(A) = W(A)$ экендиги жөнүндөгү далилди шексиз деп эсептөөгө болот.

2- маселе. Бир мамлекетте чет өлкөдөн келген саякатчылар жана ошол мамлекеттин ичинде саякат жасаган мамлекет жарандары (ички саякатчылар) жөнүндө төмөнкү маалыматтар берилген болсун:

Жылдар	Саякатчылардын жалпы саны	
	Чет өлкөлүк саякатчылар саны	Ички саякатчылар
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Каралып жаткан жылдарда мамлекеттин ичинде саякат жасаган мамлекеттин жарандары санынын салыштырма жыштыгын тап.

Мамлекеттин ичинде саякат жасаган жарандардын саны:

$M = 403\,989 + 348\,953 + 316\,897 + 346\,103 + 351\,028 = 1\,766\,970$,

чет өлкөлүк саякатчылардын саны болсо: $610\,623 + 746\,224 + 822\,558 + 774\,262 + 811\,314 = 3\,764\,981$.

Жалпы саякатчылардын саны: $N = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5\,531\,951$.

Анда,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

Жообу: $W \approx 0,3194$.

Көнүгүүлөр

475. Жадыбалдын акыркы мамычасын толтур:

Тартип номери	Тажрыйба	Тажрыйбалар саны (N)	A окуя	A окуянын жыштыгы	A окуянын салыштырма жыштыгы $\left(W(A)=\frac{M}{N}\right)$
1	Тыйын таштоо	150	Цифралуу жак-тын түшүшү	78	
2	Спортчу жаадан бутага атууда	200	Бутага тийиши	182	
3	Оюн кубиги ташталууда	400	4 түшүшү	67	

476. Бир шаарда 920 адамдан жумушка кандайча жетип барышын сурашканда алардын: 350 сү машинада, 420 сы коомдук транспортто, 80 и велосипедде, 70 и жөө барышы белгилүү болсо, 1) машинада; 2) коомдук транспортто; 3) велосипедде; 4) жөө баргандар санынын салыштырма жыштыгын тап.

477. Даярдалган 5 000 катуу дисктен 70 и жараксыз чыкты. Жараксыз катуу диск чыгышынын салыштырма жыштыгын таап, аны пайыздарда туюнт.

478. Жаш баскетболчулар тобу топту торго түшүрүү көнүгүүлөрүн өткөрүштү. Натыйжалар төмөнкү жадыбалда берилген:

Торго ыргытылган топтордун саны (N)	10	50	100	250	500
Торго түшкөн топтордун жыштыгы (M)	6	32	68	155	320
Торго түшкөн топтордун салыштырма жыштыгы (W)					

Жадыбалдын акыркы сабын толтур. Топтордун торго түшүүсүнүн ыктымалдуулугу P нын мааниси жөнүндө эмне дегенге болот (ондон бирге чейин тактыкта)?

37-§. КОКУС САНДАР

Статистика түрдүү кокус сандар жөнүндөгү маалыматтарды жыйноо, топтоштуруу, маалыматтарды жадыбалдар, диаграммалар, графиктер жана башка көрүнүштөрдө көргөзмөлүү сүрөттөө жана бул маалыматтардын анализи менен алектенген илим болуп саналат.

Кокус сан **деп, байкоолорду же тажрыйбаларды жүргүзүү учурунда түрдүү маанилерди кокус түрдө кабыл алышы мүмкүн болгон чоңдукка айтылат. Мындай сандар жөнүндө алардын маанилери кокустукка байланыштуу деп айтканга болот.**

Мисалы, космостон мектептин короосуна түшүп жаткан космостук бөлүкчөлөрдүн саны, телефон станциясына келип түшүп жаткан коңгуроолордун саны, пиаладагы чай молекулаларынын ылдамдыгы, оюн кубигин таштаганда кандай цифра чыгышы жана башкалар кокус сандарга мисал боло алат.

1-маселе. Эки оюн кубиги ташталды. Эки кубиктен түшкөн кандай очколордун суммасы эң чоң ыктымалдык менен болушун аныктоого болобу?

Ар бир сумманын пайда болуу ыктымалдуулугун табабыз. Жалпы натыйжалардын саны бул эки кубиктин түшүшүнөн алынган бардык суммалардын саны $6 \cdot 6 = 36$ га барабар. Сумма очколор жадыбалын түзөбүз:

1- кубик	2- кубик					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Жадыбал жардамында ар бир белгилүү сумма үчүн шарт түзүүчү натыйжалардын саны *m* ди аныктайбыз:

$$m_2 = m_{12}=1,\ \ м_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Эки кубикти таштаганда тигил же бул сумманын пайда болуу ыктымалдуулугун төмөнкү жадыбал көрүнүшүндө туюнтууга болот:

Очколордун суммасы	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ыктымалдуулук $\left(p = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Жадыбалдан очколордун суммасы 7 болушунун эң чоң ыктымалдыгы $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ге ээ болушу көрүнүп турат.

Жообу: эң чоң ыктымалдыкка ээ болгон очколордун суммасы 7. ▲

1- маселеде эки кубикти таштагандагы очколордун суммасы – *кокус сан*. Аны X аркылуу белгилейли. Анда $X_1 = 2,\ X_2 = 3, ...,\ X_{10} = 11,\ X_{11} = 12$ сандары X кокус сандын маанилери болот. X тин ар бир маанисине дал келген $P_1,\ P_2,...,\ P_{10},\ P_{11}$ ыктымалдуулуктардын мааниси төмөнкү жадыбалда көрсөтүлгөн:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Бул жадыбалдын жардамында, мисалы, X саны бирдей ыктымалдык менен кандай маанилерди кабыл алат; X санынын кандай мааниси көбүрөөк ыктымалдык менен пайда болот жана у. с. суроолорго жоопту оңойлук менен табууга болот. Бул жадыбалга эки кубикти таштагандагы очколордун суммасынан турган кокус сан X тин ыктымалдуулуктар боюнча *бөлүштүрүү жадыбалы* дейилет.

Кокус сан *X* тин маанилерин жана ар бир маанини кабыл алуу ыктымалдуулугун туюнткан жадыбалга *кокус сандын ыктымалдуулуктары боюнча бөлүштүрүү жадыбалы* дейилет.

Ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалдары, ыктымалдуулуктарды теориялык жактан эсептөнун натыйжалары негизинде түзүлөт.

Практикада, реалдуу тажрыйбалар өткөрүлгөндөн кийин, кокус сандар маанилеринин *жыштыктар же салыштырма жыштыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалдары* түзүлөт. Андан кийин, анык болушу үчүн, бөлүштүрүүлөр жадыбалдары *диаграмма* же *жыштыктар полигону* көрүнүшүндө сүрөттөлөт. Маалыматтарды диаграмма жана жыштыктар полигону аркылуу сүрөттөө менен 8-класс Алгебра курсунда таанышкансың.

2- маселе. Компанияларда иштеген жумушчулар санын үйрөнүү максатында 36 компаниядан аларда иштегендердин саны боюнча маалымат алынды жана алар төмөнкү жадыбалга киргизилди:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Бул маалыматтарды 1) жыштыктар (M) жана салыштырма жыштыктар (W) боюнча бөлүштүрүүлөр жадыбалы; 2) жыштыктар полигону жардамында сүрөттө.

△ 1) Жадыбалдан көрүнүп тургандай, жумушчулар санын X аркылуу белгилесек, ал кокус сан болот. Жадыбалды үйрөнүп, бул кокус сандын маанилери 23 төн 33 кө чейин маанилерди кабыл алышын көрөбүз жана ошол сандарды жадыбалда канча жолу катышуусун эсептеп, жыштыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын түзөбүз:

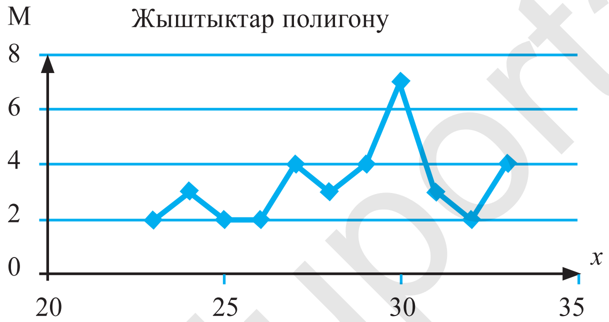
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Жыштыктардын ар бирин компаниялардын саны $N = 36$ га бөлүп, салыштырма жыштыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын алабыз:

	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Мында бардык жыштыктардын суммасы $N = 36$ жана бардык салыштырма жыштыктардын суммасы 1 ге барабар экендигин эскерте кетебиз.

2) Компаниялар жумушчулары санынын жыштыктар полигонун 90-сүрөттөн көрүүгө болот:



90- сүрөт.

Кандайдыр сандын бардык маанилеринин суммасын тапмакчы болсок, Л. Эйлер тарабынан киргизилген $\sum$ белгисинен пайдаланабыз. Мисалы, эгерде M жыштыгы $M_1, M_2, \ldots, M_k$ маанилерди кабыл алса, анда төмөнкүдөй белгилөөдөн пайдаланабыз:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Кокус сандын бардык жыштыктарынын суммасы тажрыйбалардын саны N ге барабар:

$$\sum M = N.$$

Ар кандай кокус сан үчүн анын салыштырма жыштыктарынын суммасы 1 ге барабар.

$$\sum W = \sum\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} =$$
$$= \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Ушул параграфта каралган кокус сандар бири-биринен ажыраган маанилерди кабыл алат. Мындай сандар *дискреттүү* (латин тилиндеги *diskretus* – ажыратылган, үзүлүштүү сөзүнөн) *сандар* деп аталат.

Эгерде кокус сан кандайдыр аралыктагы бардык маанилерди кабыл алышы мүмкүн болсо, анда мындай сан *үзгүлтүксүз кокус сан* деп аталат. Үзгүлтүксүз кокус сандарга мисал иретинде аба температурасынын өзгөрүшүн, үйдөн мектепке барууга кеткен убакытты, өсүп жаткан теректин боюн, бекетте күтүтлүп жаткан автобустун келүү убакытын жана у. с. келтирүүгө болот.

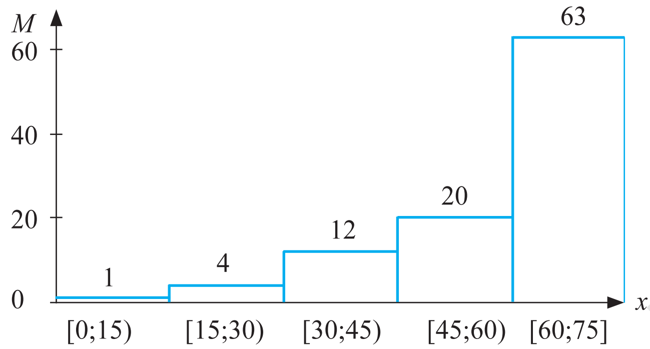
Үзгүлтүксүз кокус сандар чексиз көп маанилерди кабыл алса да, алардын бөлүштүрүлүшүн берүүгө болот. Ал үчүн, үзгүлтүксүз сан маанилеринин өзгөрүү аралыгы бөлүктөргө ажыратылат жана кокус чоңдуктун ар бир бөлүккө түшүшүнүн жыштыктары (же ыктымалдуулуктары) эсептелет.

Мисалы, окуучу 100 күн спорт залында болгонун жана ар жолу көнүгүүлөргө 1 саат 15 минуттан көп болбогон убакыт сарптаганын жазып жүргөн болсун. Анда сарпталган убакыттардын минуттарда [0;75] аралыгында болушун этибар алып, бул аралыкты, мисалы, тең 5 убакыт аралыктарына бөлүп, көнүгүүлөргө сарпталган убакыттардын жыштыктар жадыбалына киргизүүгө болот:

T (минут)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Жыштыктардын суммасын эсептеп, $\sum M = N = 100$ экендигин көрүүгө болот.

Ушул жадыбалдагы маалыматтарды *жыштыктар гистограммасы* –тепкич сымал фигура көрүнүшүндө сүрөттөөгө болот (91-сүрөт). Мында ар бир тепкичтин негизи h узундукка ээ болсо, анда мамычанын бийиктигин $\frac{M}{h}$, бул жерде M бул X кокус чоңдуктун тиешелүү аралыктагы жыштыгы. Анда мындай мамычанын аянты $\frac{M}{h} \cdot h = M$ ге, гистограмманын астындагы фигуранын аянты болсо $\sum M = N$ ге барабар болот.

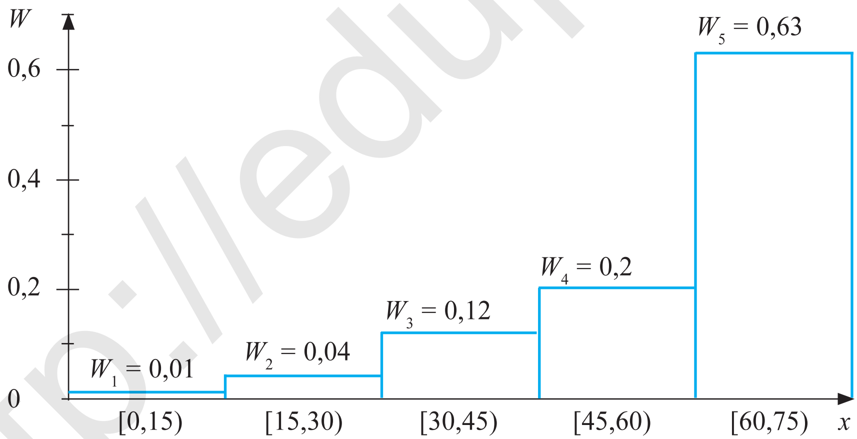


91-сүрөт.

Эгерде жыштыктар жардамында салыштырма жыштыктар аныкталса:

T (минут)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W = \frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

анда алар жардамында чийилген тепкич сымал фигурага (92-сүрөт) кокус чоңдуктун *салыштырма жыштыктар боюнча гистограммасы* дейилет.



92-сүрөт.

Салыштырма жыштыктар гистограммасынын ар бир мамычасы астындагы аянт W нун тиешелүү маанисине барабар болот. Анда гистограмма астындагы фигуранын аянты бирге барабар болот ($\sum W = 1$).

Көнүгүүлөр

479. 1) Жөнөкөй оюн кубиги; 2) эки жагында 1 очко, эки жагында 2 очко, эки жагында 3 очко белгиленген кубик; 3) үч жагында 1 очко, эки жагында 2 очко, бир жагында 3 очко белгиленген кубик; 4) эки жагында 1 очко, үч жагында 2 очко, бир жагында 3 очко белгиленген кубик ташталганда түшкөн „очколор саны“ – X кокус сан маанилеринин P ыктымалдыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын түз.

480. Столго эки тыйын ташталууда. „Герб жагы“ түшсө, шарттуу түрдө 0 сандуу маани, „цифралуу жагы“ түшсө, 1 саны маанисин беребиз. Тыйындар түшкөндө берилген сандуу маанилердин суммасы – X кокус сандын P ыктымалдыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын түз.

481. Жактары 1,2,3,4 сандары менен белгиленген эки тетраэдр бир мезгилде столго ташталууда, мында тетраэдрлердин столго тийип турган капталындагы очко эсепке алынат. Эки тетраэдрден түшкөн кандай очколор: 1) суммасынын; 2) көбөйтүндүсүнүн эң чоң ыктымалдык менен болушун аныктоого болобу?

482. Эки оюн кубиги ташталды. Эки кубиктен түшкөн очколор көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын түз.

483. Кафенин ээси түшкү тамак учурунда тамактануучуларга өз убагында кызмат көрсөтүү, ошол убакытта кызмат көрсөткөндөрдүн санын туура белгилөө жана даярдалган тамактарга сарпталган каражаттарды туура пландаштыруу максатында кафеге келгендердин санын 50 күн бою жадыбалга жазып жүрдү:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Бул жадыбал жардамында кафеде түшкү тамактангандар саны – X кокус санынын; 1) жыштыктар (M) жана салыштырма жыштыктар (W) боюнча бөлүштүрүү жадыбалын; 2) жыштыктар полигонун түз.

484. Туюк суу бассейнине сүзүүгө келген эркек жана кыз балдардын саны беш ай бою катталып, төмөнкү жадыбал түзүлдү:

Ай	Суу бассейнине келген балдар	
	Кыз балдар	Эркек балдар
Апрель	311	357
Май	284	404
Июнь	278	417
Июль	340	412
Август	322	406

Бассейнге келген эркек балдардын саны – X кокус санынын жыштыгын, салыштырма жыштыгын тап, жыштыктар гистограммасын түз.

485. Маанилери төмөнкү телефон номерлеринда катышкан цифралар болгон X кокус санынын жыштыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалын түз:

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

486. Бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген X кокус санынын жыштыктар полигонун жана салыштырма жыштыктар полигонун түз:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. Жадыбалда 9-класстын эркек балдарынын бут кийимдеринин өлчөмдөрү жазылган:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

9-класс эркек балдарынын бут кийиминин өлчөмү – X кокус санынын жыштыктар боюнча жана салыштырма жыштыктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалдарын түз.

38- §. КОКУС САНДАРДЫН САНДУУ МҮНӨЗДӨМӨЛӨРҮ

Сен 8-класс „Алгебра“ курсунун маалыматтар анализине арналган IV главасында башкы жыйнак, тандалма, орточо маани, мода, медиана сыяктуу түшүнүктөр менен таанышкансың. Куду ушундай түшүнүктөрдү кокус сандар үчүн да киргизүүгө болот.

Статистикада маалыматтар жыйнагы иретинде кокус сандардын сандуу маанилери, алардын жыштыктарын этибар алган түрдө, каралат. Мында кокус сандардын бардык маанилери *башкы жыйнак* деп аталат, алардын тандап алынган кандайдыр бөлүгү болсо *тандалма* деп аталат. Эгерде анда кокус сандын башкы жыйнактагы жана андагы маанилери гана катышса жана андагы маанилер жыштыктарынын катышы башкы жыйнактагы сыяктуу болсо *репрезентативдүү тандалма* дейилет.

Мисал. X кокус санынын M жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкүдөй берилген болсун:

X	– 3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

жана бул кокус сандын бардык маанилери (көңүл бур, алардын саны 17000) башкы жыйнак деп кабыл алынган болсун. Төмөнкүдөй үч тандалманы көрөлү:

1-жадыбал

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

2-жадыбал

X	–3	9	11
M	5	7	3

3-жадыбал

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

Бөлүштүрүлүшү 1-жадыбалда берилген тандалма репрезентативдүү тандалма, анткени анда да –3, 5, 9, 11 маанилер жана ошол маанилер гана катышып жатат, башкы жыйнакта да бул тандалмада да жыштыктардын катышы бирдей: 5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5 :2:7:3.

Бөлүштүрүлүшү 2-жадыбалда берилген тандалма репрезентативдүү тандалма эмес, анткени анда X кокус санынын 5 ке барабар мааниси катышпайт.

Бөлүштүрүлүшү 3-жадыбалда берилген тандалма да репрезентативдүү тандалма эмес, анткени анда жыштыктардын катышы сакталбаган: 5 000: 2 000:7 000:3 000$\neq$5:6:7:3.

Берилген маалыматтарды, алсак, кокус сандардын маанилерин кээде бир сан менен сүрөттөөгө же баалоого болот. Бул санга берилген маалыматтардын курамындагы сандар же кокус сандар маанилери *борбордук тенденциясынын өлчөмү* да дейилет. Борбордук тенденция өлчөмдөрүнө мисал иретинде мода, медиана жана орточо маани сыяктууларды келтирүүгө болот.

Кокус сандын каралып жаткан тандалмадагы жыштыгы эң чоң болгон мааниси *мода* деп аталат жана M_0 деп белгиленет.

Мисалы, тандалма 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3 төн турган болсо, анда анын модасы 8 ге барабар. 5, 6, 11, 3, 3, 5 тандалманын модасы болсо эки – M_2= 3, M_2= 5. Эгерде 1, 3, 7, 20, 6, 11 тандалманы карасак, анын модасы жок.

Эгерде тандалманын маанилерин өсүп баруу тартибинде жазып алсак, анда тандалманы берилгендердин саны боюнча барабар экиге бөлүүчү сандык маани *медиана* деп аталат жана M_e сыяктуу белгиленет. Эгерде иреттелген тандалмада берилгендердин саны так болсо, анда медиана алардын ортосунда турган санга барабар. Эгерде иреттелген тандалмада берилгендердин саны жуп болсо, анда медиана ортодо турган эки сандын орто арифметикалыгына барабар.

1-маселе. Кокус сан маанилери тандалмасынын медианасын тап:
1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Тандалманын элементтерин өсүп баруу тартибинде жайлаштырабыз: – 5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Берилгендердин саны так. 5 санынан солдо жана оңдо үчтөн сан бар, б. а. 5 тандалманын орто саны, ошол себептүү M_e=5.

2) Берилген 8, 5, 3, 4, 7, 2 тандалма элементтерин өсүп баруу тартибинде жазабыз 2, 3, 4, 5, 7, 8. Берилгендердин саны жуп. Тандалманын ортосунда турган сандар: 4 жана 5, ошол себептүү $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5.$

Жообу: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Тандалмаларды үйрөнүүдө маанилүү болгон дагы бир түшүнүк – тандалманын кеңдиги түшүнүгү менен 8- класстан таанышсың. *Тандалманын* *кеңдиги* деп, кокус сандын эң чоң мааниси менен эң кичине маанисинин айырмасына айтылат жана ал R аркылуу белгиленет.

Тандаманын кеңдиги кокус сан маанилеринин канчалык чачыранды экендигин билдирет.

Мисал. 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 жана 190, 187, 198, 189, 195, 190 тандалмалардын кеңдигин салыштыр.

1-тандалманын эң чоң мааниси 27, эң кичине мааниси болсо 8. Демек, 1-тандалманын кеңдиги $R_1=27–8=19$.

2- тандалманын эң чоң мааниси 198, эң кичине мааниси болсо 186. Натыйжада, 2-тандалманын кеңдиги $R_2=198–186=12$.

Демек, биринчи тандалманын маанилери экинчи тандалмадагыга караганда чачырап жайлашкан.

Кокус сан маанилеринин *орточо мааниси (же орто арифметикалыгы)* деп, тандалмадагы бардык сандар суммасынын алардын санына катышына айтылышын эскерте кетели. X кокус санынын бардык маанилеринин орточосу $\overline{X}$ аркылуу белгиленет.

2- маселе. Жыштыктары боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген кокус сан тандалмасынын орточосун тап:

4-жадыбал

	3	4	5	7	10
	3	1	2	1	3

$$\overline{X}=\frac{3\cdot3+4\cdot1+5\cdot2+7\cdot1+3\cdot10}{3+1+2+1+3}=\frac{9+4+10+7+30}{10}=6.$$

Жообу: 6.

Ыктымалдуулугу боюнча бөлүштүрүлүшү белгилүү болгон кокус сандын тандалмасын мүнөздөгөн түшүнүктөрдөн дагы бири бул *математикалык күтүү* түшүнүгү саналат.

Эгерде X кокус санынын X_1, X_2, ..., X_n маанилерди кабыл алуу ыктымалдуулуктары, тиешелүү түрдө, P_1, P_1, ...P_n болсо, анда

$$E=X_1P_1+X_2P_2+\ldots+X_nP_n \qquad (1)$$

саны X кокус санынын *математикалык күтүүсү* деп аталат.

Мисалы, X кокус санынын ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкүдөй берилген болсун:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Анда бул кокус сандын математикалык күтүүсү:

$$E = 6\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Кокус сандын мааниси менен тандалманын орточосу ортосундагы айырма *орточодон четтөө* деп аталат.

Мисалы, кокус сандын мааниси $X_1 = 35$, орточонун мааниси болсо $\overline{X} = 32$ болсо, анда X_2 нин орточодон четтөөсү $X_1 - \overline{X} = 35 - 32 = 3$.

Тандалманын бардык маанилеринин орточодон четтөөлөрүнүн суммасы нөлгө барабар болушун көрсөтүү оңой:

$$(X_1-\overline{X})+(X_2-\overline{X})+...+(X_n-\overline{X})=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\overline{X} =$$
$$=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} = 0.$$

Ошол себептүү, кокус сандын маанилерин мүнөздөө үчүн орточо четтөөлөр суммасынын ордуна орточо четтөөлөр квадраттарынын орто арифметикалыгынан пайдаланылат. Мындай чоңдук *дисперсия* (латинчеден *dispersion* – чачылуу, жайылуу) деп аталат.

Эгерде X кокус саны N түрдүү маанилерди кабыл алса жана анын орточосу $\overline{X}$ болсо, анда анын дисперсиясы төмөнкү формула жардамында табылат:

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_\mathrm{n}-\bar{X})^2}{N}. \qquad (2)$$

Демек, дисперсия – кокус сан маанилеринин орточодон четтөөлөрү квадраттарынын орто арифметикалыгына барабар.

Эгерде X кокус санынын $X_1, X_2,..., X_k$ маанилери тиешелүү түрдө, M_1, $M_2,..., M_k$ жыштыктар менен кайталанса, анда анын дисперсиясын

$$D=\frac{(X_1-\bar{X})^2M_1+(X_2-\bar{X})^2M_2+...+(X_k-\bar{X})^2Mk}{M_1+M_2+...+Mk}. \qquad (3)$$

формуласынын жардамында эсептөөгө болот, мында

$$\bar{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+...+X_kM_k}{M_1+M_2+...+Mk}.$$

Мисалы, 4-жадыбалдагы кокус сандын орточосу $\overline{X}=6$ экендигин аныктаган элек. Эми ошол сандын дисперсиясын эсептейли:

$$D=\frac{(X_1-\bar{X})^2M_1+(X_2-\bar{X})^2M_2+...+(Xk-\bar{X})^2M_k}{M_1+M_2+...+Mk}=$$

$$=\frac{(3-6)^2\cdot3+(4-6)^2\cdot1+(5-6)^2\cdot2+(7-6)^2\cdot1+(10-6)^2\cdot3}{3+1+2+1+3}=$$

$$=\frac{27+4+2+1+48}{10}=\frac{82}{10}=8,2.$$

Эгерде кокус сан кандайдыр өлчөмгө (мисалы, сантиметр) ээ болсо, анда анын орточосу $\overline{X}$ жана орточодон четтөөсү $X-\overline{X}$ да X саны менен бирдей өлчөмгө (сантиметр) ээ. Четтөөнүн квадраты жана дисперсия болсо X саны өлчөмү квадратынын (квадрат сантиметр) өлчөмүнө ээ. Орточодон четтөөнү баалоо үчүн X кокус саны менен бирдей өлчөмгө ээ болгон чоңдуктан пайдаланган оң. Ошол себептүү, дисперсиядан алынган квадрат тамыр, б. а. $\sqrt{D}$ нын маанилеринен пайдаланылат.

Дисперсиядан алынган квадрат тамырга *орточо квадраттык четтөө* дейилет жана σ аркылуу белгиленет, б. а. $\sigma=\sqrt{D}$.

Мисалы, 4-жадыбалдагы кокус сандын дисперсиясы $D=8,2$ экендигин эсептегенбиз. Эми дисперсиянын ошол маанисинен калькулятор жардамында квадрат тамыр чыгарсак, орточо квадраттык четтөөнү алабыз:

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{8,2}\approx2,86.$$

Дисперсия менен орточо квадраттык четтөөгө статистикада кокус сан маанилеринин орто маанинин айланасындагы жайылышынын өлчөмдөрү деп да айтышат.

Көнүгүүлөр

488. Кокус сан X тин маанилеринин башкы жыйнактагы бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда келтирилген:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Берилген башкы жыйнак үчүн төмөнкүлөрдөн кайсылары репрезентативдүү тандалма болот:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Тандалманын модасын тап:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Тандалманын медианасын тап:
1) 18, 13, 35, 19, 7;
2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11;
4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Тандалманын кеңдигин тап:

1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Тандалманын орточосун тап:
1) 34, –10, 23, –18;
2) –3, 6, –19, –12, 1;
3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0,7, 0,6, 0,4;
4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Тандалманын модасын, медианасын жана орточосун тап:
1) 4, –3, 2, 0, 3, –2; 2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Жыштыктары боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген *X* кокус саны маанилери тандалмасынын орто арифметикалыгын тап:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Ыктымалдуулуктары боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген *X* кокус саны маанилеринин математикалык күтүүсүн тап:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Тандалманын дисперсиясын тап
1) 9 см, 11 см, 8 см, 10 cm; 2) 18 кг, 16 кг, 15 кг, 19 кг;
3) 8 с, 11 с, 8 с, 9 с, 9с; 4) 1 м, 9 м, 4 м, 8 м, 8 m.

497. Жыштыктары боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген *X* кокус саны маанилери жыйнагынын дисперсиясын тап.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Тандалма элементтеринин орто мааниден орто квадраттык четтөөсүн эсепте:
1) 4 г, 5 г, 8 г, 3 г, 5 г;
2) 9 см, 12 см, 7 см, 10 см, 12 см.

499. Жыштыктары боюнча бөлүштүрүлүшү берилген *X* кокус санынын орто квадраттык четтөөсүн тап:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

V глава боюнча көнүгүүлөр

500. (Оозеки). Төмөнкү тажрыйбада болушу мүмкүн болгон бардык элементардык окуяларды айт: 1) кокус түрдө жылдагы айлардын аты айтылат; 2) эки тыйын ташталып, түшүп жаткан жактарына байкоо жүргүзүлөт; 3) кандайдыр 50 дөн кичине жөнөкөй сан айтылат; 4) кокус түрдө эки орундуу 3 кө эселүү сан айтылат.

501. Кутуда 4 кара, 5 кызыл, 6 көк шар бар. Кокус түрдө кутудан бир шар алынды. Алынган шар: 1) кара; 2) кызыл; 3) көк; 4) кара эмес; 5) кызыл эмес; 6) көк эмес; 7) жашыл; 8) же кара, же кызыл, же көк болушу ыктымалдуулугун тап.

502. Тобокелине 1 ден 50 гө чейин болгон натуралдык сан айтылды. Бул сандын: 1) 7; 2) 7 эмес; 3) 7 ге эселүү; 4) 10 го эселүү; 5) жөнөкөй сан эмес; 6) 30 дан чоң эмес экендигинин ыктымалдуулугун аныкта.

503. Столго оюн кубиги менен тыйын ташталууда. Мында 1) кубикте 5, тыйын цифралуу жагы менен; 2) кубикте чыккан сан жөнөкөй, тыйын герб жагы менен түшүшү ыктымалдуулугун тап.

Тандалманын кеңдигин, модасын, медианасын жана орточосун тап (**504–507**):

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Тандалманын дисперсиясы жана орто квадраттык четтөөсүн аныкта:
1) 6, 11, 8, 9;
2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4;
4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4;
6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү менен берилген Z кокус санынын дисперсиясы жана орто квадраттык четтөөсүн тап:

1)

Z	–1	0	2	4
	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
	1	2	3	1

510. Тандалмалардын дисперсияларын салыштыр:
1) 4, 5, 7, 5, 9 жана 6, 9, 7, 8; 2) –2, 2, 3 жана –3, –1, 1, 3, 4.

511. Ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалы:

1)

	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

менен берилген X кокус санынын математикалык күтүүсүн тап.

V глава боюнча сыноо (тест) көнүгүүлөрү

1. Бирдей карточкаларга 1 ден 15 ке чейин сандар жазылды (ар бир карточкага бирден сан жазылды). Карточкалар столго тескериси менен коюлду жана аралаштырылды. Кокусунан алынган карточкадагы сандын жөнөкөй сан болушу ыктымалдуулугун тап.

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{3}{5}$.

2. Кутуда 3 ак жана 7 кара шар бар. Алардан бири кокусунан тандалып кутудан алынды. Алынган шардын ак болушу ыктымалдуулугун тап.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

3. Класстагы 27 окуучудан 15 и эркек бала. Класска бир эркек бала жана эки кыз бала келип кошулду. Мында эркек балдардын саны – X кокус санынын салыштырма жыштыгы канчага өзгөрдү?

A) $\frac{1}{45}$ ге чоңойду; B) $\frac{1}{45}$ ге чоңойду;

C) $\frac{2}{45}$ ге чоңойду; D) $\frac{2}{45}$ ге чоңойду.

4. Кокус сан маанилери тандалмасынын модасы менен медианасынын суммасын тап: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

A) 14; B) 17; C) 16; D) 13 .

5. Кокус сан маанилери тандалмасынын модасы менен медианасынын көбөйтүндүсүн тап: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.

6. Жыштыктары боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген X кокус саны тандалмасынын орточосун тап:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

A) $1\frac{5}{9}$; B) $1\frac{4}{9}$; C) $1\frac{1}{9}$; D) 1.

7. X кокус санынын ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүлүшү боюнча математикалык күтүүсүн тап:

X	–1	2	3	5	7
M	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

A) $\frac{25}{9}$; B) $\frac{26}{9}$; C) $\frac{29}{9}$; D) $\frac{30}{9}$.

8. X кокус санынын жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү боюнча орто квадраттык четтөөсүн тап:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.

9. X кокус санынын ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүлүшү боюнча дисперсиясын тап:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

1-маселе. 5000 а. б. (акча бирдиги)нде автомобиль, ар бири 250 а. б. нде 4 телевизор, ар бири 200 а. б. нде 5 кол телефону утуштуу лотереяда ойнолуп жатат. Бардыгы болуп, 7 а. б. нде 1000 чыпта сатылууда. Бир чыпта сатып алган лотерея катышуучусунун таза утушунун бөлүштүрүү жадыбалын түз жана математикалык күтүүсүн эсепте.

△ X– бир чыптага түшкөн таза утуш болсо, анда анын мааниси:

бир да утуш чыкмаса, $0 - 7 = -7$;

кол телефону утулган болсо, $200 - 7 = 193$;

телевизор утулган болсо, $250 - 7 = 243$;

автомобиль утулган болсо, $5\,000 - 7 = 4\,993$

акча бирдигинде болот. 1000 чыптадан 990 уна утуш чыкпастыгын жана утуштар саны $5 + 4 + 1 = 10$ экендигин эсепке алып, ыктымалдыктын классикалык аныктамасы боюнча алабыз:

X– кокус сан

-7 маанини кабыл алуу ыктымалдуулугу $\frac{990}{1\,000} = 0{,}990$;

193 маанини кабыл алуу ыктымалдуулугу болсо $\frac{4}{1\,000} = 0{,}004$;

243 маанини кабыл алуу ыктымалдуулугу $\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$.

4 993 маанини кабыл алуу ыктымалдуулугу $\frac{5}{1\,000} = 0{,}005$;

Демек, X – кокус санынын ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалы төмөнкүдөй болот:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Бөлүштүрүү жадыбалы негизинде математикалык күтүүнү эсептөөгө болот:

$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0,$

б. а. орточо утуш нөлгө барабар. Алынган натыйжа лотерея билеттерин сатуудан түшкөн бардык акча утуштарга кетишин билдирет.

Жообу: бөлүштүрүү жадыбалы:

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

жана математикалык күтүү $E = 0$.▲

2- маселе. Бир фирмага котормочулук ишине эки талапкер урунуп жатат. Аларга бирдей сыноо мөөнөтү белгиленди жана 125 беттен турган бирдей текст котормого берилди. Алардын күн сайын канча бет текст которгону төмөнкү жадыбалда берилген:

Жуманын күндөрү	Бир күндө которулган бет саны	
	1- талапкер (X)	2- талапкер (Y)
Дүйшөнбү	24	25
Шейшемби	26	31
Шаршемби	25	27
Бейшемби	23	22
Жума	27	20

Иш берүүчү жадыбалдагы маалыматтарды анализдеген түрдө, талапкерлердин кайсы бирин ишке кабыл алууну макул көрөт?

△ Талапкерлердин ар бири 5 күндө 125 беттен которушту, демек, эки талапкердин да орточо эмгек өнүмдүүлүгү бирдей:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (бет/күн)}.$$

Эки кокус сан X жана Y тин да модасы жок, медианалары болсо бирдей (25 жана 25). Талапкерлердин кайсы бирин ишке кабыл алуу максатка ылайыктуу? Аны талапкерлердин эмгек өнүмдүүлүктөрүнүн *туруктуулугун* салыштыруу аркылуу табууга болот. Муну болсо четтөөлөр квадраттарынын суммаларын же дисперсияларды салыштыруу аркылуу ишке ашырса болот:

Жуманын күндөрү	Кокус сандын мааниси		Орточодон четтөө $\overline{X} = \overline{Y} = 25$		Четтөөлөрдүн квадраттары	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Дүйшөнбү	24	25	–1	0	1	0
Шейшемби	26	31	1	6	1	36
Шаршемби	25	27	0	2	0	4
Бейшемби	23	22	–2	–3	4	9
Жума	27	20	2	–5	4	25
Бардыгы	125	125	0	0	10	74

Көрүнүп тургандай, четтөөлөр квадраттарынын суммасы X үчүн 10, Y үчүн болсо 74, же дисперсияларды эсептесек:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Демек, X кокус санынын дисперсиясы Y кокус санынын дисперсиясынан кичине. Бул натыйжа экинчи талапкердин эмгек өнүмдүүлүгү туруктуу эместигин көрсөтөт: кээ күндөрү ал мүмкүнчүлүктөрүнөн толук пайдаланбастан иштеди, башка күндөрү болсо мүмкүнчүлүк деңгээлинен көбүрөөк иштегенге аракеттенди, бул болсо, турган сөз, аткарылып жаткан иштин сапатына терс таасирин тийгизиши мүмкүн. Натыйжада иш берүүчү биринчи талапкерди ишке кабыл алууну макул табат.

Жообу: иш берүүчү биринчи талапкерди ишке кабыл алууну макул табат. ▲

3- маселе. Эки жаачы бутага жаанын жебесинен атканда чогулткан очколору – X жана Y кокус сандарынын ыктымалдуулуктар боюнча бөлүштүрүү жадыбалы белгилүү:

1-жаачы үчүн

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

жана 2- жаачы үчүн

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Жаачылардан кайсы бири жаадан бутага жакшыраак атат?

△ Көрүнүп тургандай, жаачылардан кайсы биринин бутага тийген орточо очкосу көбүрөөк болсо, ошонусуна жакшы мээлей алат деп айтууга болот. Ошол себептүү, X жана Y кокус сандарынын математикалык күтүүсүн эсептейбиз:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \dots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \dots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

б. а., эки жаачынын да бутага тийген очколору орточо бирдей.

Эми X жана Y тердин дисперсия жана орто квадраттык четтөөлөрүн эсептеп көрөлү:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Ошентип, бутага тийген очколордун орто маанилери барабар $E(X) = E(Y)$ болсо да, экинчи жаачы үчүн дисперсия биринчи жаачыга караганда кичигирээк: $D(Y) < D(X)$, б. а. экинчи жаачынын бутага тийген очколорунун „борбор“ ($E(Y) = 5{,}36$) дун айланасында жайлашуу таркактыгы биринчи жаачыга салыштырмалуу кичигирээк. Башкача айтканда, анын натыйжалары биринчи жаачынын натыйжаларына караганда 5,36 тан алысыраакка кетип калбаган. Демек, ал биринчи жаачыга караганда жогорураак натыйжа алуу үчүн бутага жакшыраак мээлеп, $E(Y)$ ти оңураакка (жогорураакка) жылдырууга тийиш.

Жообу: жаачылардан биринчиси бутага жакшыраак атат. ▲

4-маселе. Мелдеш учурунда футбол командасынын оюнчулары тарабынан атаандаштарынын дарбазасына киргизген топторуну саны X тин жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү берилген:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

Бардык киргизилген топтордун санынын орточо мааниден орто квадраттык четтөөсүн эсепте.

△ Адегенде орточону эсептейбиз:

$$\bar{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \dots + X_5M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 1 + 1} = \frac{0 + 3 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Кийинки эсептөөнүн натыйжалары төмөнкү жадыбалда келтирилген:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X-\bar{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X-\bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X-\bar{X})^2 \cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Анда, дисперсия жана орто квадраттык четтөө төмөнкүдөй эсептелет:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_5 - \bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{5,88 + 0,48 + 0,72 + 2,56 + 6,76}{10} = \frac{16,4}{10} = 1,64,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$$

Жообу: $\sigma \approx 128.$ ▲

Көнүгүүлөр

1. Көп жылдык статистикалык маалыматтардын негизинде 4 балалуу үй-бүлөлөрдөгү эркек балдардын саны – X кокус санынын бөлүштүрүү мыйзамы төмөнкү жадыбалда берилген болсо, анын математикалык күтүүсүн жана дисперсиясын эсепте.

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Эки гимнасттын спорт мелдешиндеги чыгышына 9 калыс 10 баллдык системада койгон баллдары төмөнкү жадыбалда берилген:

Гимнасттын номери	Калыстын номери жана койгон баллдары								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Ар бир гимнаст алган баллдар, тиешелүү түрдө, X жана Y кокус сандары деп каралса, алардын математикалык күтүүсүн, дисперсиясын жана орто квадраттык четтөөлөрүн эсепте жана салыштыр.

3. Кардарлардын бут кийимдерге болгон талабын үйрөнүп жаткан студент эки дүкөндө ар күнү сатылган бут кийимдердин санын 25 күн бою жазып жүрдү. Эгерде X_1 биринчи дүкөндө, X_2 экинчи дүкөндө сатылган бут кийимдер саны болсо, анда төмөнкү жадыбалдарда келтирилген маалыматтарга негизденип, X_1 жана X_2 кокус сандарынын математикалык күтүүсүн жана орто квадраттык четтөөсүн эсепте. Алынган натыйжаларды салыштырып, дүкөндөрдөгү бут кийимдин сатылышын салыштыр.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

4. Цилиндр көрүнүшүндөгү болоттон жасалган куймалар партиясынан алынган жыйырма куйманын негиздеринин d диаметрлери эки түрдүү өлчөө аспаптары жардамында өлчөндү. Биринчи өлчөө аспабы жардамында (1 мм ге чейин тактыкта) алынган натыйжалар солдогу, экинчисинде алынган натыйжалар болсо оңдогу жадыбалда келтирилген:

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

d_1 жана d_2 кокус сандарынын дисперсияларын салыштыр.

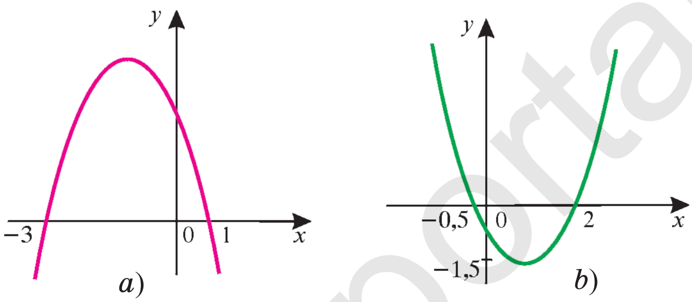
IX КЛАСС „АЛГЕБРА“ КУРСУН КАЙТАЛОО ҮЧҮН КӨНҮГҮҮЛӨР

512. Функциянын графигин түз:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Оозеки.) $y = ax^2 + bx + c$ функциясы графигинен пайдаланып (93-сүрөт), анын касиеттерин аныкта.



93-сүрөт.

514. Функциянын графигин түз жана касиеттерин аныкта:

1) $y=-2x^2-8x-8$; 2) $y=3x^2+12x+16$;

3) $y=2x^2-12x+19$; 4) $y=3+2x-x^2$.

515. Функциянын графигин бир координата тегиздигинде түз:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ жана $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y=3x^2$ жана $y=3x^2-2$.

Барабарсыздыкты чыгар (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3)>0$; 2) $(x+15)(x+4)<0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \leq 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \leq 0$; 6) $x^2 - 7 \geq 0$.

518. 1) $x^2-8x+7>0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0{,}5x - 1 > 0$; 4) $5x^2+9{,}5x-1<0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\le 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\ge 0$.

Барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгар (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\le 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\ge 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\le 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\ge 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\ge 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\le 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Трапециянын аянты 19,22 см^2 ден чоң. Анын орто сызыгы бийиктигинен эки эсе чоң. Трапециянын орто сызыгын жана бийиктигин тап.

524. Параллелограммдын жагы ошол жакка түшүрүлгөн бийиктиктен 2 см ге чоң. Эгерде параллелограммдыng аянты 15 см^2 ден чоң болсо, ошолжактын узундугун тап.

525. Барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгар:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\ge 2$.

526. Эгерде x^2+px+q квадраттык үч мүчө $x=0$ болгондо -14 кө барабар маанини, $x=-2$ болгондо болсо -20 га барабар маанини кабыл алса, ошол квадраттык үч мүчөнүн p жана q коэффициенттерин тап.

527. Эгерде $y=x^2+px+q$ парабола:

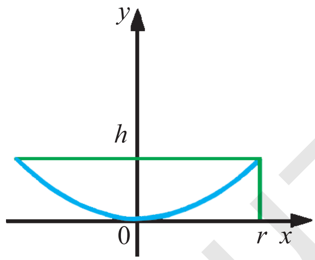
1) абсциссалар огун $x=-\frac{1}{2}$ va $x=\frac{2}{3}$ чекиттерде кессе;

2) абсциссалар огу менен $x=-7$ чекитте жанса;

3) абсциссалар огун $x=2$ жана ординаталар огун $y=-1$ чекитте кесип өтсө, $p-q$ ну тап.

528. Эгерде парабола абсциссалар огун 5 чекитте кессе жана анын чокусу $\left(2\frac{3}{4};10\frac{1}{8}\right)$ чекит болсо, ошол параболанын теңдемесин жаз.

529. Телескоптунg (рефлектордун) чагылдыруучу күзгүсү огунун кесилиши боюнча парабола формасына ээ (94-сүрөт). Ошол параболанын теңдемесин жаз.



94-сүрөт.

530. Эгерде $y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциясынын графиги:

1) $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ жана $C(0;\ -6)$ чекиттеринен өтсө;

2) $K(-2;0)$, $L(1;0)$, $M(0;\ 2)$ чекиттеринен өтсө, анын коэффициенттерин тап.

531. Каалагандай терс эмес a жана b сандар үчүн

1) $a^2+b^2 \leq (a+b)^2$; 2) $a^3+b^3 \leq (a+b)^3$

барабарсыздыгынын туура болушун далилде.

532. Функциянын графигин түз:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=|x-1|$;

3) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$; 4) $y=\sqrt{x^2+4x+4}$.

533. Теңдеменин чыныгы тамырларын тап:

1) $x^2-|x|-2=0$; 2) $x^2-4|x|+3=0$; 3) $|x^2-x|=2$;
4) $|x^2+x|=1$; 5) $|x^2-2|=2$; 6) $|x^2-26|=10$.

534. Тамыр чыгар:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}, a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}, y>0$.

535. Жөнөкөйлөштүр:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

536. Туюнтмалардын маанилерин салыштыр:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ жана $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ жана $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Тамыр белгиси астынан көбөйтүүчүнү чыгар:

1) $\sqrt{9a^2b}$, мында $a<0, b>0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, мында $a>0, b>0$;

539. Көбөйтүүчүнү тамыр белгисинин астына киргиз:

1) $x\sqrt{5}$, мында $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, мында $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, мында $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, мында $a<0$.

540. $y=-\dfrac{25}{x}$ функциясынын графигине:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1; 250)$

чекит тиешелүү болуу же болбостугун аныкта.

541. $y=\sqrt{1-2x}$ функциясынын графигине: 1) $C\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$;

$E\,(-4; 3)$ чекит тиешелүү болуу же болбостугун аныкта.

542. Функциянын графигин түз:

1) $y=x^2+6x+10$; 2) $y=-x^2-7x-6$.

543. $P(1;\ 0)$ чекитти: 1) $A(0;\ 1)$; 2) $B)\ (0;\ -1)$; 3) $C(-1;\ 0)$; 4) $D(1;\ 0)$ чекитине жүргүзүлгөн бир нече буруу бурчтарын көрсөт.

544. Эсепте: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Сандын оң же терс экендигин аныкта:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

546. Берилген: $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-0{,}28$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Эсепте: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) $\sin2\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha-\sin2\alpha$; 4) $1-\sin2\alpha-\cos^2\alpha$.

548. Эгерде 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$ жана $\sin\frac{\alpha}{2}<0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$ жана $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ болсо $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ны эсепте.

549. Эгерде

1) $a_1=10$, $d=6$, $n=23$; 2) $a_1=42$, $d=\frac{1}{2}$, $n=12$;

3) $a_1=0$, $d=-2$, $n=7$; 4) $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{2}{3}$, $n=18$

болсо, арифметикалык прогрессиянын n- мүчөсүн жана баштапкы n мүчөсүнүн суммасын эсепте.

550. Эгерде $a_1=2$, $a_n=120$, $n=20$ болсо, арифметикалык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

551. n- мүчөсү $a_n=\frac{1-2n}{3}$ формула менен берилген удаалаштык арифметикалык прогрессия болушун далилде.

552. Эгерде геометриялык прогрессия үчүн
1) $b_1=5$ жана $q=-10$ болсо, b_4 тү тап;
2) $b_4=-5000$ жана $q=-10$ болсо, b_1 ди тап.

553. Эгерде:

1) $b_1=3$, $q=2$, $n=5$; 2) $b_1=1$, $q=5$, $n=4$ болсо, геометриялык прогрессиянын n- мүчөсүн, баштапкы n мүчөсү суммасын эсепте.

554. Эгерде: 1) $b_1=\frac{1}{4}$, $q=2$, $n=6$**;** 2) $b_1=\frac{1}{5}$, $q=-5$, $n=5$ болсо, геометриялык прогрессиянын баштапкы n мүчөсүнүн суммасын тап.

555. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап.

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots$; 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots$; 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$.

556. Тамыр белгиси астынан көбөйтүүчүнү чыгар:

1) $\sqrt{20a^4b}$, мында $a<0$, $b>0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, мында $a<1$;

557. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, мында $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, мында $b>a$.

558. Бөлүмдөгү иррационалдуулукту жогот:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$.

559. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \dfrac{a^2+4}{a^2-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Теңдемени чыгар:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Теңдемени чыгар:

1) $1-\cos x-2\sin\dfrac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Окшоштукту далилде:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha$.

564. Окшоштукту далилде:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

565. Арифметикалык прогрессияда $a_1+a_5=\dfrac{5}{3}$; $a_3a_4=\dfrac{65}{72}$. Прогрессиянын баштапкы он жети мүчөсүнүн суммасын тап.

566. Геометриялык прогрессияда $q=3$, $S_6=1\,820$ болсо, b_1 жана b_5 ти тап.

567. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы $\dfrac{8}{5}$ ге барабар, экинчи мүчөсү $-\dfrac{1}{2}$ ге барабар. Үчүнчү мүчөсүн тап.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

568. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

569. Эгерде: 1) $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{12}{13}$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ ны эсепте.

ЖООПТОР

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 4) x тин берилген функциясынын мааниси –5 ке барабар болгон чыныгы маанилери жок. **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$. $x_2 = -1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2) нөлдөрү жок; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) нөлдөрү жок. **6.** 2) $p=3$, $q=-4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$. **9.** B жана C. **12.** 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) (0; 0), (2; 4); 6) (1; 1). **13.** 2) На. **14.** 2) Ооба; 4) жок; **16.** 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \le x \le 5$; 3) $x \le -4$, $x \ge 4$; 4) $-6 < x < 6$. **20.** 2) (–3; –4,5), (2; –2). **21.** 2) Ооба; 4) жок. **22.** 1) Өсүүчү; 2) кемүүчү; 3) өсүүчү; 4) өсүүчү да, кемүүчү да болбойт. **23.** 3 м/с^2. **26.** 2) (0; –5); 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2) Жок; 4) жок. **29.** 2) (1; 0), (0,5; 0), (0; –1); 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **30.** $y = x^2 - -2x + 3$. **32.** 2) $k = -10$. **34.** 1) $y = 2(x-3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x+2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x-1{,}5)^2 + 3{,}5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) (1;0), (–5; 0), (0; 10); 4) (0; 14). **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 жана 5. **42.** Капталга параллель жак 6 м; калган жактары 3 м ден. **43.** Yo‘q. **44.** 2) $x=1$ де $y=-5$ эң кичине маани; 4) $x=1$ da $y=-2$ эң кичине маани. **45.** 1) $a>0, b>0, c>0$; 2) $a<0, b>0, c<0$. **46.** 1) 5 с дан кийин эң чоң бийиктик 130 м ге барабар; 2) $(5+\sqrt{26})$s . **48.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **50.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7, x > -1$. **51.** 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **52.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **53.** 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. **56.** Оң маанилер $x < -3, x > 2$ аралыктарда, терс маанилер $-3 < x < 2$ интервалда. **58.** 2) $x \le -1$, $x \ge 4$; 4) $-1 < x < 4$. **59.** 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \le -0{,}25$; $x \ge 1$. **60.** 2) $x = 7$; 4) чыгарылыштары жок. **61.** 2) Чыгарылыштары жок; 4) чыгарылыштары жок; 6) x – каалагандай чыныгы сан. **62.** 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$; $x > 0$. **64.** 2) $x < -\frac{5}{3}$ $x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x – каалагандай чыныгы сан. **65.** 2) x – каалагандай чыныгы сан; 4) $x \ne \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \le x \le 0$. **66.** 2)Чыгарылыштары жок; 4) $-0{,}5 < x < 3$. **67. 2)** $x = 1$;

4) x – каалагандай чыныгы сан. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5,\ x > 2\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0$, $x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x < < 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \le x < 7$; 6) $-2 \le x < -1$, $x \ge 3$. **76.** 2) $x < 0{,}5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \le x \le -1$, $4 \le x \le 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \le x < 2$, $x \ge 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5$, $x > 2$; 3) $-1 < x \le -\frac{2}{5}$. **81.** 2) $x = 2$ де $y = 1$; $x = 0$ жана $x = 4$ тө $y = 5$; $x = -1$ жана $x = 5$ те $y = 10$; $x = -2$ жана $x = 6$ да $y = 17$. **82.** 1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -11$, $y(3) = 4$; 2) $x = -\frac{1}{2}$ де $y = -3$; $x = -1$ де $y = -2$; $x = \frac{3}{2}$ тө $y = 13$; $x = \frac{4}{3}$ тө $y = 19$. **84.** 2) $x \le 2$, $x \ge 5$; 4) $-2 \le x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = 1$; 2) $x = 2$ де $y = -2$; $x = 0$ жана $x = 4$ тө $y = 0$; $x = -2$ жана $x = 6$ да $y = 2$; $x = -4$ жана $x = 8$ де $y = 4$. **86.** 2) $x \ne -1$; 5) $-1 \le x \le 1$, $x \ge 4$; 6) $-5 \le x \le 1$, $x > 2$. **87.** 2) Ооба; 4 ооба. **93.** 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2) так; 4) жуп да, так да болбойт. **99.** 2) так; 4) так. **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110**. 2) $x \le 3$; 4) $y < < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2) Кубдун кыры 7 дм ден чоң. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **117.** $x = \frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2 =$ 3. **121.** 2) $x = 2{,}25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x = 4$. **124.** 2) $2 \le x \le 3$; 4) $1 < x \le 2$; 6) $x \ge 1$. **125.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; 4) x тин мындай мааниси жок. **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 м жана 150 м. **131.** 2) $p = 1$, $q = 0$. **132.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2$, $x > 4$; 4) $x < 3$, $x > 4$. **134.** 2) $x < -6$, $x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}$, $x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) Чыгарылыштары жок; 4) чыгарылыштары жок; 6) чыгарылыштары жок. **137.** 2) $x < -1$, $1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4 < x \le 7$; 6) $x \ge 2$, $-\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** 12 км/саат тан аз эмес. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$.

143. 2) (–1; –1); (1; 1). **144**. 2) $x > 2$; 4) $x \le -2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2) x – каалагандай сан; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < -7$, $-3 \le x < -1$, $x \ge 3$. **148.** 2) азаят; 4) азаят. **149.** 2) так; 4) жуп да, так да болбойт. **150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1$, $x > 9$; 2) $-1 < x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154**. 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 жана 13. **160.** 4 жана 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 м, 200 м.

165. 2) (4; 5) жана (5; 4). **166.** 2) (1; –2) жана (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) жана (5; 2); 4) (1; 3) жана (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) жана (–20; –4); 4) (3; 6) жана (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) жана (9; 1). **176.** 2) система чыгарылышка ээ эмес. **177.** 2) $-9 \le x \le 3$; 4) $-6 \le x \le 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ жана $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \le -2$ жана $1 \le x \le 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) жана (4; 4); 2) (2; –2) жана (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) жана (6; –5); 4) (–1; 10) жана (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) жана (2; 3); 4) (2; 6) жана (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) жана (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) va(1; 5). **200.** 2) (–2; 1) va (2; 1); 4) (–1; 4) жана (24; 0,6). **201.** 2) (4; $\sqrt{3}$) жана (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) жана (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ жана $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Bo‘yi 1,2 см жана туурасы 0,8 см. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$.

214. 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{o}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{o}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 m. **219.** 2 рад. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ см². **221.** 2 рад.

222. 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) экинчи чейрек; 4) төртүнчү чейрек; 6) экинчи чейрек. **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4)

$\frac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,-1,-2,\ldots$. **227.** 2) экинчи чейрек; 4) төртүнчү чейрек. **228.** 2) $x=1{,}8\pi$, $k=4$; 4) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 6) $x=\frac{5}{3}\pi$ $k=2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **231.** 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k=0, \pm1$, $\pm2, \ldots$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) –1; 6) –1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) –1; 4) –1; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) –1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0$, $\pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **241.** 2) $x=2\pi k-1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=k\pi-1$, $k=0$, $\pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3}+1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **242.** 2) экинчи чейрек; 4) экинчи чейрек; 6) экинчи чейрек. **243**. 2) оң; 4) оң; 6) оң. **244.** 2) терс; 4) терс; 6) оң. **245.** 2) оң, оң; 4) терс, терс; 6) терс, терс; 8) оң, оң. **246.** 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{ctg}\alpha>0$. **247.** 2) $\sin3>0$, $\cos3<0$, $\mathrm{tg}3<0$; 4) $\sin(-1{,}3)<0$, $\cos(-1{,}3)>0$, $\mathrm{tg}(-1{,}3)<0$. **248.** 2) терс; 4) оң; 6) оң; 8) терс. **249.** Эгерде $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ же $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ сандарынын белгилери дал түшөт; эгерде $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ же $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ сандары карама-каршы белгилерге ээ. **250.** 2) терс; 4) оң. **251.** 2) $\cos1{,}3>\cos2{,}3$. **252.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **253.** 2) экинчиси чейрек. **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) аткарылат; 4) аткарылбайт. **257.** 2) аткарылбайт. **258.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$,

$k=0, \pm1, \pm2, ...$ **266.** 1) 0; 4) $1 + \sin\alpha$. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x = \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **276.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) $-2\cos\alpha$. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) $\cos3\beta$; 4) -1. **284.** $-\sin\alpha - \sin\beta$. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) $-\sin\alpha - \cos\beta$; 4) $\sin\alpha - \cos\beta$. **288.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta) = \frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta$. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) $2\mathrm{ctg}\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) $\cos6\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311**. 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **312.** 2) $\cos2\alpha$. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos-}$. **317.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **318.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin2\alpha$. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320**. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2) $2\sin\alpha$. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha - 1)$; 4) $(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **328.** 2) үчүнчү чейрек; 4) экинчи чейрек; 6) экинчи чейрек. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **330.** 2) 2; 4) -1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) $\sin2\alpha$; 4) $\mathrm{tg}2\alpha$. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) $\cos0 > \sin5$. **340.** 2) оң; 4) терс. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$.

343. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin 2 = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$. **344.** 2) tgα.

345. 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) cos4α. **350**. 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) Болот; 4) болот. **354.** 2) $n = 9$. **360.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) −42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.** На, $n = 11$. **366.** $n = 11$, жок. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) −13. **369.** 2) −100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) −192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$ $d = \frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78 to‘sin. **388.** 44. **389.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **392.** 2) −3, 12, −48, 192, −768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. **400.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ же $b_5 = -6$, $\beta_1 = -30\frac{3}{8}$.. **401.** 659100 сум. **402.** 0,25 см². **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) −400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = = 4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ же $q = -6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ же $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ же $S_5 = 521$. **415.** 2) ооба; 4) ооба. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. **417.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) жок; 4) ооба. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6 + 4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** $2a$. **423.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot R_1$.. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **427.** $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) −1080. **429.** 143. **430.** 2) −22. **431.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **432.** 2) $b_n = -0{,}5\cdot$

$(-2)^{n-1}$. **433.** 2) $b_n = \frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$. **437.** $24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. **441.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$; 4) $x_2 = -4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) -27; 4) $-\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) Жок; 4) ооба. **450.** Шаршемби күнү. **451.** $a_1 = 8$ $d = -3$ же $a_1 = 2$, $d = 3$. **452.** $a_1 = 5$, $d = -5$ же $a_1 = -5$, $d = 5$. **453.** 180 жолу. **453.** 2) Мүмкүн эмес. **454.** 2) Кокус; 4) шексиз. **457.** 2) Биргеликте болбогон. **462.** Тең мүмкүнчүлүктүү эмес. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$; **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4 %. **482.** 2) Мүмкүн, 4 очко. **488.** 3 тандалма. **489.** 2) 11; 4) 5 жана 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 kg², 4) 6m². **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 жана 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15 < x < 2$; 4) $x \le 12$, $x \ge 12$. **517.** 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$. **518.** 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0{,}1$; 6) $x \le \frac{1}{8}$, $x \ge 2$. **519.** 2) $x = -12$; 4) x – каалагандай чыныгы сан; 6) чыгарылыштары жок. **520.** 2) $-0{,}7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \le x \le 1$. **521.** 2) $x \le -2$, $x = 1$; 4) $x \le -\frac{1}{3}$, $0 \le x \le 2$. **522.** 2) $-0{,}5 \le x < 2$. **523.** Бийиктик 3,1 см ден чоң, орто сызык 6,2 см ден чоң. **524.** 5 см ге чоң. **525.** 2) $x < -7$, $-1 \le x \le 2$; 4) $-1 \le x < \frac{1}{3}$., $x > \frac{1}{3}$. **526**. $p = 5$, $q = -14$. **527.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **528.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **529.** $y = \frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. **531.** *Көрсөтмө.* 1) $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ сыяктуу белгилеп жана $ABC = 1$ барабардыкты эсепке алып, берилген барабарсыздыгын $A^3 + B^3 + C^3 \ge 3ABC$ көрүнүштө жаз, аны $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \ge 0$ көрүнүштө алмаштыр. ($A^2 + B^2 + C^2 \ge AB + AC + BC$ барабарсыздык ушул $A^2 + B^2 \ge 2AB$, $A^2 + C^2 \ge 2AC$, $B^2 + C^2 \ge 2BC$ барабарсыздыктарды кошуу менен алынат; 2) орто арифметикалык жана орто геометриялык сандарга тиешелүү барабарсыздыктарды кош: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c$, $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a$, $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b$; 3) барабарсыздыгынын сол бөлүгүнөн оң бөлүгүн кемит жана алынган бөлчөктүн алымын мындай көрүнүштө жаз: $(a+b)(a-b)^2+(b+\tilde{n})(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2$; 1) $x_{1,2}=\pm 2$; 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 3) $x_{3,4}=\pm 3$; 3) $x_1=-1$, $x_2=2$; 4) $x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$; 6) $x_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm 6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}<(2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) Yo‘q. **541.** 2) Yo‘q. **544.** –1. **545.** 2) Терс. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha=\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12}=47{,}5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1=5$. **553.** 2) $b_4=125$, $S_4=156$; 4) $b_4=81$, $S_5=61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0{,}1(5-\sqrt{5})5+\sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **560.** 2) $x=61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x=\frac{}{2}+\pi n$, $x=n+2n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1=5$, $b_5=405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 же 20, 13, 6. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$.

«Өзүңдү текшерип көр» тапшырмаларына жооптор

I глава. **1.** $x_1=0$, $x_2=2$. **2.** $-1<x<1$ болгондо $y>0$; $x<-1$ болгондо $y<0$; $x>1$. **3.** 1) $x>0$ болгондо функциясы өсөт; $x<0$ болгондо функциясы азаят. **4**. 1) $x\geq 1$; $-2\leq x\leq 0$. **5.** 1) $x\neq 1$; 2) $-3\leq x\leq 3$. **6.** 1) $x=28$; 2) $x=1$.

III глава. **1.** 1) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

IV глава. 1. 1) $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **2.** 1) $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q=\frac{1}{3}$, $S=1{,}5$.

Практикалык жана предметтер аралык маселелерда жооптор

I глава. 1. Ылдамдык 60,01 км/саат тан ашпоого тийиш. **2.** $n\le30$. **3.** 2 млн. 10 м. **4.** 125. **5.** 1) 135; 2) 17739; 3) ≈ 4,9 айда.

II глава. 1. 2) 20 катар. **2.** Биринчи бригадада 8, экинчисинде 12 жумушчу. **3.** 2) 16 %. **4.** 2) 4 л жана 12 л. **5.** Шамалсыз аба-ырайында.

III глава. 1. 4) ≈335,42 км; 5) ≈2243,3 км. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 м. **4.** ≈12,8 м.

IV глава. 1. 420. **2.** 10 км. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 сум. **5.** 27 метр.

V глава. 1. $E(X)=26$, $D(X)=0{,}9964$. 2. $E(X)\approx 8{,}94$, $E(Y)\approx 8{,}93$, $D(X)\approx 0{,}07$, $D(Y)\approx 0{,}03$, $G(X)\approx 0{,}071$, $\sigma(Y)\approx 0{,}76$. 3. $E(X_1)=E(X_2)=3{,}36$, $\sigma(X_1)\approx 1{,}47$, $\sigma(X_2)\approx 1{,}41$. 4. $E(d_1)=60$, $D(d_1)=1{,}2$, $E(d_2)=60{,}02$, $D(d_2)=0{,}76$.

МАЗМУНУ

Алимов Ш. А.

А 39 Алгебра: Жалпы орто билим берүүчү мектептердин 9-классы үчүн окуу китеби / Ш. А. Алимов, А. Р. Халмухамедов, М. А. Мирахмедов. 4-басылышы. – Ташкент: «O'qituvchi» БПЧҮ, 2019. – 240.

УЎК: 512(075.3)=512.154

ISBN 978-9943-5750-6-6 **КБК 22.14я72**

Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov, Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Qirg'iz tilida)

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
9-sinfi uchun darslik
Qayta ishlangan 4-nashri

«O'qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket «Davr nashriyoti» MCHJ da tayyorlandi.

Котормочу *А. Зулпихаров*
Редактору *А. Зулпихаров*
Мукабанын сүрөтчүсү *Р. Запаров*
Корректору *Ш. Зулпихарова*
Компьютерде даярдаган *Х. Сафаралиев*
Текстти терген *С. Ниязова*

Басма үйүнүн лицензиясы AI № 012.20.07.2018.
Оригинал-макеттен басууга уруксат берилди 26.07.2019. Форматы $70 \times 90^{1}/_{16}$.
Times гарнитурасы. Офсеттик басма усулда басылды. Шарттуу б. т. 17,55. Эсеп-басма т. 16,6.
Нускасы 817. Буюртма № 19-194

Өзбекстан Республикасы Президенти Администрациясынын алдындагы Маалымат жана массалык коммуникациялар агенттигинин «O'qituvchi» басма-полиграфиялык чыгармачылык үйү.
Ташкент – 206. Юнусабад району, Янгишахар көчөсү, 1-үй. Келишим № 76-19.

Оригинал-макеттен Өзбекстан Республикасы Президенти Администрациясынын алдындагы Маалымат жана массалык коммуникациялар агенттигинин «O'zbekiston» басма-полиграфиялык чыгармачылык үйүнүн басмаканасында басылды.
Ташкент шаары, Наваий көчөсү, 30-үй.

Ижарага берилген окуу китебинин абалын көрсөткөн жадыбал

№	Окуучунун аты жана фамилиясы	Окуу жылы	Окуу китебинин алынгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу	Окуу китебинин тапшырылгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Окуу китеби ижарага берилип, окуу жылынын аягында кайтарып алынганда жогорудагы жадыбал класс жетекчиси тарабынан төмөнкү баалоо критейлеринин негизинде толтурулат:

Жаңы	Окуу китебинин биринчи жолу пайдаланууга берилгендеги абалы.
Жакшы	Мукабасы бүтүн, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн ажырабаган. Бардык барактары бар, жыртылбаган, айрылбаган, беттеринде жазуу жана чийүүлөр жок.
Канааттандырарлуу	Мукабасы эзилген, бир аз чийилип, четтери тытылган, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн ажыраган түрү бар, пайдалануучу тарабынан канааттандырарлуу калыбына келтирилген. Көчкөн барактары кайра калыбына келтирилген, айрым беттерине чийилген.
Канааттандырарлуу эмес	Мукабасына чийилген, жыртылган, негизги бөлүгүнөн ажыраган же таптакыр жок, канааттандырарлуу эмес калыбына келтирилген. Беттери жыртылган, барактары жетишпейт, чийип, боёп салынган. Окуу китебин калыбына келтирүүгө болбойт.