**Ш. А. АЛИМОВ, О. Р. ХОЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗААХМЕДОВ**

А Л Г Е Б Р А

ЖАЛПЫ ОРТА БІЛІМ БЕРЕТІН МЕКТЕПТЕРДІҢ
9-СЫНЫБЫНА АРНАЛҒАН ОҚУЛЫҚ

Қайта өңделген 4-басылымы

*Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі
басуға ұсынған*

„O‘QITUVCHI“ БАСПА-ПОЛИГРАФИЯ ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ ҮЙІ
ТАШКЕНТ – 2019

УЎК: 512(075.3)=512.122
КБК 22.14я72
А 39

Пікір жазғандар:

Ф. С. Рахимова – Әл-Хорезми атындағы ТАТУ- дың математика пәні оқытушысы;
Г. А. Фозилова – Ташкент қаласы, Юнусабад ауданынындағы № 274 мектептің математика пәні оқытушысы;
Д. Ш. Абраев – Ташкент қаласы, Алмазар ауданынындағы № 326 мектептің математика пәні оқытушысы.

Оқулықтағы шартты белгілер:

– Білу өте маңызды және есте сақтау қажет (жаттап алу шарт емес) мәтін;

– есеп шешімінің басталуы;

– есеп шешімінің соңы;

– математикалық тұжырымды негіздеудің немесе формуланы дәлелдеудің басталуы;

– негіздеудің немесе формуланы дәлелдеудің соңы;

– шешілуі тиіс есептерді бөліп тұратын белгі;

33,34... – күрделі есептер;

– негізгі материалды бөлу;

Өзіңді тексеріп көр! – негізгі материал бойынша білімді тексеруге арналған өзіндік жұмыс;

– іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері;

– тарихи есептер;

– тарихи мағлұматтар.

Республикалық мақсатты кітап қорының қаржысы есебінен басылды.

ISBN 978-9943-5750-5-9

8-СЫНЫПТА ӨТКЕН ТАҚЫРЫПТАРДЫ ҚАЙТАЛАУ

Қымбатты оқушылар! 8-сыныпта „Алгебрадан“ үйренген білімдеріңді тағы да еске салу мақсатында Сендерге бірнеше жаттығулар ұсынып отырмыз.

1. 1) $y=2x+3$; 2) $y=-3x+4$; 3) $y=4x-1$; 4) $y=-2x-5$ функцияның графигін салыңдар. График қай ширектерде жатады? Графиктің Ox және Oy осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын айтыңдар.

2. $y=kx+b$ функцияның графигі $A(0;\ -7)$, $B(2;\ 3)$ нүктелерден өтеді. k және b-ны табыңдар.

3. Түзу сызық $A(0;\ 5)$, $B\ (1;\ 2)$ нүктелерден өтеді.Осы түзу сызықтың теңдеуін жазыңдар.

4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. 3 ат және 4 сиырға бір күнде 27 кг жем беріледі. Бір күнде 9 атқа берілген жем 5 сиырға берілген жемнен 30 кг көп. Бір атқа және бір сиырға 1 күнде қанша жем беріледі?

6. Кітап пен дәптердің біргеліктегі бағасы 5800 сум. Кітап бағасының 10%-ы дәптер бағасының 35%-ынан 220 сум қымбат. Кітап пен дәптер жеке-жеке неше сум тұрады?

7. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\le 3$; 3) $|3x-4|\ge 2$.

8. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$ теңсіздіктің ең кіші бүтін шешімін табыңдар.

10. Есептеңдер:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Ықшамдаңдар:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Теңдеуді шешіңдер (**12–14**):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. 240 км қашықтықты бір автомобиль екіншісінен 1 сағат жылдам жүріп өтті. Егер бірінші автомобильдің жылдамдығы екіншісінің жылдамдығынан 20 км/сағат артық болса, әрбір автомобильдің жылдамдығын анықтаңдар.

16. 1) Екі санның айырмасы 2,5- ке, ал квадраттарының айырмасы 10- ға тең. Осы сандарды табыңдар.

2) Қосындысы 1,4- ке, квадраттарының қосындысы 1- ге тең екі санды табыңдар.

17. $x^2-8x+3=0$ теңдеудің түбірлері x_1 және x_2 болса, 1) $x_1^2+x_2^2$;
2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$ -ні табыңдар.

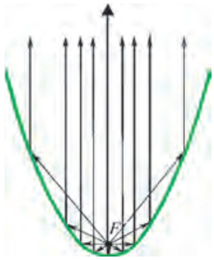
18. Санды жүзден бірге дейін дөңгелектеңдер. Дөңгелектеудің салыстырмалы қателігін анықтаңдар:

1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Санды стандарт түрінде жазыңдар:

1) 437,105; 2) 91,352; 3) 0,000 000 85; 4) 0,000 079.

I ТАРАУ. КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТТЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР



1-§. КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

Сендер 8- сыныпта $y=kx+b$ сызықтық функция және оның графигімен таныстыңдар.

Ғылым мен техниканың түрлі салаларында *квадраттық функциялар* деп аталатын функциялар жиі кездеседі. Мысалдар келтірейік.

1) қабырғасының ұзындығы x болатын квадраттың ауданы $y = x^2$ формуламен өрнектеледі.

2) Егер дене жоғарыға v жылдамдықпен лақтырылған болса, онда t уақытта оның жер бетінен қашықтығы $s=-\frac{gt^2}{2}+vt+s_0$ формуласымен анықталады, мұндағы s_0 – уақытты $t=0$ бастапқы уақыттағы дененің жер бетіне дейінгі қашықтығы.

Бұл мысалдарда $y=ax^2+bx+c$ түріндегі функциялар қарастырылған. Бірінші мысалда $a=1$, $b=c=0$, ал айнымалылар x пен y. Екінші мысалда $a=-\frac{g}{2}$, $b=v$, $c=s_0$, айнымалылар t және s әріптері арқылы белгіленген.

Анықтама. ***$y=a^2+bx+c$ функцияны квадраттық функция деп атаймыз, мұндағы a, b және c – берілген нақты сандар, $a\neq 0$, x – нақты айнымалы.***

Мысалы, мынадай функциялар квадраттық функциялар:

$y=x^2$, $y=-2x^2$, $y=x^2-x$,

$y=x^2-5x+6$, $y=-3x^2+\frac{1}{2}x$.

1 - есеп. $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$ болғанда

$$y(x) = x^2 - 5x + 6$$

функцияның мәнін табыңдар.

△ $y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20;$

$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6;$

$y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0.$ ▲

2 - есеп. x- тің қандай мәндерінде $y = x^2 + 4x - 5$ квадраттық функция: 1) 7 -ге; 2) –9 -ға; 3) –8 -ге; 4) 0 -ге тең мәнді қабылдайды?

△ 1) Есептің шарты бойынша $x^2 + 4x - 5 = 7$. Бұл теңдеуді шешейік:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$x_{1,2} = 2 - \sqrt{4+12} = -2 - 4, \ x_1 = 2, \ x_2 = -6.$$

Демек, $y(2) = 7$ және $y(-6) = 7$.

2) Шарт бойынша $x^2 + 4x - 5 = -9$, бұдан

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \ (x+2)^2 = 0, \ x = -2.$$

3) Шарт бойынша $x^2 + 4x - 5 = -8$, бұдан $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Бұл теңдеуді шешейік: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

4) Шарт бойынша $x^2 + 4x - 5 = 0$, бұдан $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. ▲

Соңғы жағдайда x -тің $y = x^2 + 4x - 5$ функциясы 0 -ге тең, яғни $y(1) = 0$ және $y(-5) = 0$ болған мәндері табылды. x -тің мұндай мәндері *квадраттық функцияның нөлдері* деп аталады.

3-есеп. $y = x^2 - 3x$ функцияның нөлдерін табайық.

△ $x^2 - 3x = 0$ теңдеуін шешейік, онда $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ екендігі табылады. ▲

Жаттығулар

1. (Ауызша.) Мына функциялардың қайсысы квадраттық функция:

1) $y = 2x^2 + x + 3$; 2) $y = 3x^2 - 1$; 3) $y = 5x + 1$;
4) $y = x^3 + 7x - 1$; 5) $y = 4x^2$; 6) $y = -3x^2 + 2x$?

2. x- тің қандай нақты мәндерінде $y = x^2 - x - 3$ квадраттық функция:

1) –1 -ге; 2) –3 -ке; 3) $-\frac{13}{4}$ -ке; 4) –5 -ке тең мәндерді қабылдайды?

3. x- тің қандай нақты мәндерінде $y = -4x^2 + 3x - 1$ квадраттық функция: 1) –2- ге; 2) –8- ге; 3) –0,5- ке; 4) –1- ге тең мәндерді қабылдайды?

4. –2; 0; 1; $\sqrt{3}$ сандарының қайсысы мынадай квадраттық функцияның нөлдері болады:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Квадраттық функцияның нөлдерін табыңдар:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Егер $y = x^2 + px + q$ квадраттық функцияның x_1 және x_2 нөлдері белгілі болса, p және q коэффициенттерін табыңдар:

1) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4, x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1,\ x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5,\ x_2 = -3$.

7. x- тің $y = x^2 + 2x - 3$ және $y = 2x + 1$ функцияларының мәндері тең болатындай мәндерді табыңдар.

2- §. $y = x^2$ ФУНКЦИЯСЫ

$y = x^2$ функцияны, яғни $a = 1$, $b = c = 0$ болғандағы $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функцияны қарастырайық. Бұл функцияның графигін салу үшін оның мәндерінің кестесін құрамыз:

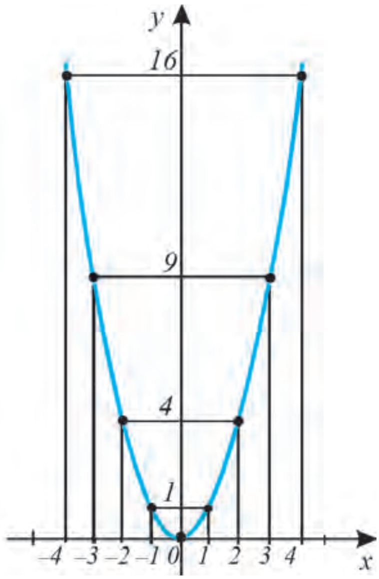
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y=x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Кестедегі нүктелерді белгілеп және оларды тұйық қисық сызықпен қоссақ, $y = x^2$ функцияның графигі келіп шығады (1- сурет).

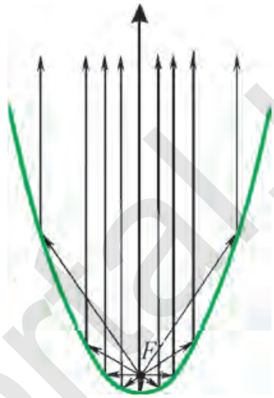
! $y = x^2$ функцияның графигі болатын қисық сызық *парабола* деп аталады.

$y = x^2$ *функциясының қасиеттерін* қарастырайық.

1) $y = x^2$ функциясының мәні $x \neq 0$ болғанда *оң* және $x = 0$ болғанда *нөлге* тең. Демек, $y = x^2$ парабола координаталар бас нүктесінен өтеді, параболаның қалған нүктелері абсциссалар осінен жоғарыда орналасады. $y = x^2$ *парабола абсциссалар осімен* (0; 0) *нүктеде жанасады,* делінеді.



1- сурет.



2- сурет.

2) $y = x^2$ функцияның графигі *ординаталар осіне қарағанда симметриялы,* өйткені $(-x)^2 = x^2$. Мысалы, $y(-3) = y(3) = 9$ (1- сурет). Сонымен, ординаталар осі *параболаның симметрия осі* болады. Параболаның өзінің симметрия *осімен* қиылысу нүктесі *параболаның төбесі* делінеді. $y = x^2$ парабола үшін координаталар бас нүктесі оның төбесі деп аталады.

3) $x \geq 0$ болғанда x- тің үлкен мәніне y -тің үлкен мәні сәйкес келеді. Мысалы, $y(3) > y(2)$. $y = x^2$ функция $x \geq 0$ *аралығында өспелі,* делінеді (1- сурет).

$x \leq 0$ болғанда x- тің үлкен мәніне y- тің кіші мәні сәйкес келеді. Мысалы, $y(-2) < y(-4)$. $y = x^2$ функция $x \leq 0$ *аралығында кемімелі* делінеді (1- сурет).

Есеп. $y = x^2$ парабола мен $y = x + 6$ түзуінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табайық.

△ Қиылысу нүктелері $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$

жүйенің шешімдері болады.

Бұл жүйеден $x^2 = x + 6$, яғни $x^2 - x - 6 = 0$ теңдеуін табамыз, бұдан $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. x_1 және x_2 мәндерін жүйенің тендеулерінің біреуіне қойсақ, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$ болатынын көреміз.

Жауабы: (3; 9), (–2; 4).

Параболаның техникада кең қолданылатын көптеген тамаша қасиеттері бар. Мысалы, параболаның симметрия осінде *параболаның фокусы* деп аталатын F нүкте бар (2-сурет). Егер бұл нүктеде жарық көзі орналасқан болса, онда параболадан шағылған барлық сәулелер параллель тарайды. Бұл қасиеттер прожекторлар, локаторлар және басқа құралдарды дайындауда пайдаланылады.

$y = x^2$ параболаның фокусы $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ нүктесі болады.

Жаттығулар

8. $y = x^2$ функцияның графигін миллиметрлік қағазға салыңдар. График бойынша:

1) $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = 1,9$; $x = -2,3$; $x = -1,5$ болғанда y -тің мәнін;

2) егер $y = 2$; $y = 3$; $y = 4,5$; $y = 6,5$ болса, x -тің мәнін жуықтап табыңдар.

9. $y = x^2$ функцияның графигін салмай-ақ: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$ нүктелерінің қайсысы параболаға тиісті болатынын анықтаңдар.

10. (Ауызша.) Ординаталар осіне қарағанда $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ нүктелерге симметриялы нүктелерді табыңдар. Бұл нүктелер $y = x^2$ функцияның графигіне тиісті бола ма?

11. (Ауызша.) $y=x^2$ функцияның мәндерін

1) $x = 2,5$ және $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0,4$ және $x = 0,3$;

3) $x = -0,2$ және $x = -0,1$; 4) $x = 4,1$ және $x = -5,2$

болғанда салыстырыңдар.

12. $y = x^2$ параболаның:

1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;

4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$

түзуімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар.

13. A нүктесі $y = x^2$ параболасы мен

1) $y = -x - 6$, $A(-3; 9)$; 2) $y = 5x-6$, $A(2; 4)$

берілген түзудің қиылысу нүктесі бола ала ма?

14. Ұйғарым дұрыс па: $y = x^2$ функциясы:

1) $[1; 4]$ кесіндісінде; 2) $(2; 5)$ аралықта;

3) $x > 3$ аралықта; 4) $[-3; 4]$ кесіндіде өсетін бола ма?

15. Бір координаталық жазықтықта $y=x^2$ параболасы мен $y=3$ түзуін салыңдар. x- тің қандай мәндерінде параболаның нүктелері түзуден жоғарыда орналасады; төменде орналасады?

16. x- тің қандай мәндерінде $y = x^2$ функциясының мәні:

1) 9- дан артық; 2) 25- тен артық емес; 3) 16- дан кем емес;

4) 36- дан кем болады?

3- §. $y = ax^2$ ФУНКЦИЯСЫ

1- есеп. $y = 2x^2$ функциясының графигін салайық.

△ $y = 2x^2$ функциясы мәндерінің кестесін құрайық:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

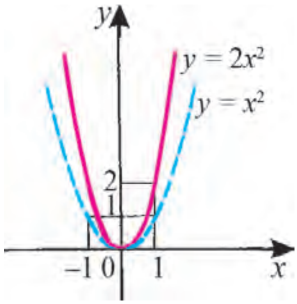
Табылған нүктелерді белгілеп және олар арқылы тұйық қисық сызық жүргіземіз (3-сурет). ▲

$y=2x^2$ және $y=x^2$ функцияларының графиктерін салыстырамыз (3- сурет). x- тің бірдей мәнінде $y=2x^2$ функциясының мәні $y=x^2$ функциясының мәнінен 2 есе артық. Бұл $y=2x^2$ функция графигінің әрбір нүктесі $y=x^2$ функция графигінің дәл сондай абсцисса нүктелерінің ординатасын 2 есе арттырудан келіп шығатынын білдіреді.

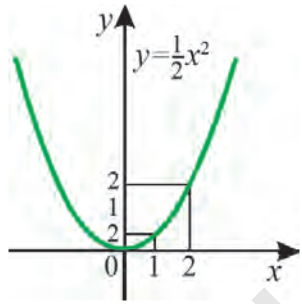
$y=2x^2$ функция графигін $y=x^2$ *функцияның графигін Ox* осінен *Oy* осі бойымен 2 есе *созу* арқылы шығарып алуға болады.

2- есеп. $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясының графигін салайық.

△ $y=\frac{1}{2}x^2$ функцияның мәндерінің кестесін құрайық:



3- сурет.



4- сурет.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Табылған нүктелерді белгілеп және олар арқылы тұйық қисық сызық жүргіземіз (4- сурет). ▲

$y=\frac{1}{2}x^2$ және $y=x^2$ функцияларының графиктерін салыстырайық.

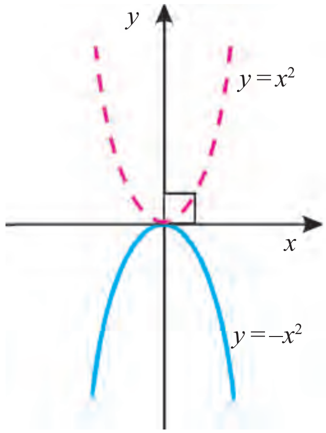
$y=\frac{1}{2}x^2$ функциясы графигінің әрбір нүктесін $y=x^2$ функциясы графигінің дәл сондай абсцисса нүктелерінің ординатасын 2 есе азайту арқылы алуға болады.

$y=\frac{1}{2}x^2$ функцияның графигі $y=x^2$ *функция графигін* Ox осіне Oy осі бойымен 2 есе *сығу* жолымен шығарып алуға болады деп айтамыз.

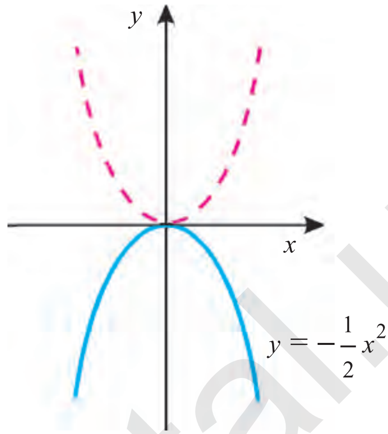
3- есеп. $y=-x^2$ функциясының графигін салайық.

△ $y=-x^2$ және $y=x^2$ функцияларын салыстырамыз. x -тің бірдей мәндері бұл функциялардың мәндерінің модульдері бойынша тең және таңбалары қарама-қарсы. Демек, $y=-x^2$ функциясының графигін салу үшін $y=x^2$ функциясының графигін Ox осіне қарағанда симметриялы көшіру керек (5- сурет). ▲

Сол сияқты, $y=-\frac{1}{2}x^2$ функцияның графигі Ox осіне қарағанда $y=\frac{1}{2}x^2$ функция графигіне симметриялы (6-сурет).



5- сурет.



6- сурет.

$y = ax^2$ функцияның графигі, мұнда $a \neq 0$, *парабола* деп аталады. $a > 0$ болғанда параболаның тармақтары *жоғары, ал* $a < 0$ болғанда *төмен* бағытталады.

$y = ax^2$ параболаның фокусы $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ нүктесінде орналасқан.

$y = ax^2$ *функцияның негізгі қасиеттерін* келтірейік, мұнда $a \neq 0$:

1) егер $a > 0$ болса, онда $y = ax^2$ функция $x \neq 0$ болғанда оң мәндерді қабылдайды;

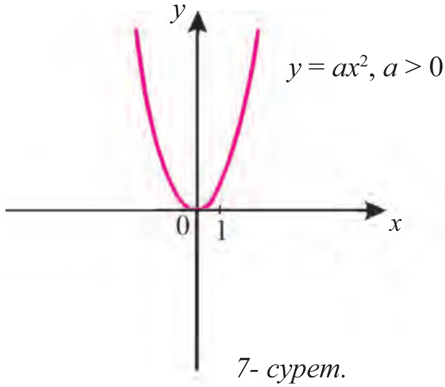
егер $a < 0$ болса, онда $y = ax^2$ функция $x \neq 0$ болғанда теріс мәндерді қабылдайды;

$y = ax^2$ *функцияның мәндері тек* $x = 0$ болғанда ғана 0 -ге тең болады;

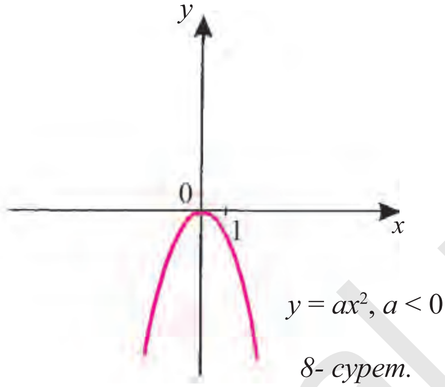
2) $y = ax^2$ парабола ординаталар осіне қарағанда симметриялы болады;

3) егер $a > 0$ болса, онда $y = ax^2$ функция $x \geq 0$ болғанда өседі және $x \leq 0$ болғанда кемиди ;

егер $a < 0$ болса, онда $y = ax^2$ функция $x \geq 0$ болғанда кемиди және $x \leq 0$ болғанда өседі.



7- сурет.



8- сурет.

Бұл қасиеттердің барлығын графиктік кескіннен байқауға болады (7- және 8-суреттер).

Жаттығулар

17. Миллиметрлік қағазға $y = 3x^2$ функциясының графигін салыңдар. Графигі бойынша:

1) $x = -2{,}8; -1{,}2; 1{,}5; 2{,}5$ болғандағы y- тің мәнін табыңдар;

2) егер $y = 9;$ 6; 2; 8; 1,3 болса, x- тің мәнін жуықтап табыңдар.

18. (Ауызша.) Парабола тармақтарының бағытын анықтаңдар:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Мына функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар:

1) $y = x^2$ және $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ және $y = -3x^2$;

3) $y = 3x^2$ және $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ және $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Графиктердің кескіні бойынша, бұл функциялардың қайсысы $x \geq 0$ аралықта өсетінін анықтаңдар.

20. Мына функциялар графиктерінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = 2x^2$ және $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ және $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Функция $x \leq 0$ аралықта кемімелі бола ма:

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. $y = -2x^2$ функция:

1) $[-4; -2]$ кесіндісінде; 3) $(3; 5)$ аралығында;
2) $[-5; 0]$ кесіндісінде; 4) $(-3; 2)$ аралығында

өспелі немесе кемімелі болатынын анықтаңдар.

23. Бір қалыпты үдемелі қозғалыстағы дене жүріп өткен жол $s = \frac{at^2}{2}$ формуласымен есептеледі, мұндағы s – жол, метр есебімен; a – үдеу, м/с^2; t – уақыт, секунд есебімен. Егер дене 8 с секундта 96 м жол жүріп өткен болса, a үдеуін табыңдар.

4-§. $y = ax^2 + bx + c$ ФУНКЦИЯСЫ

1-есеп. $y=x^2 - 2x + 3$ функцияның графигін салайық және оны $y = x^2$ функция графигімен салыстырайық.

△ $y = x^2 - 2x + 3$ функция мәндерінің кестесін құрамыз:

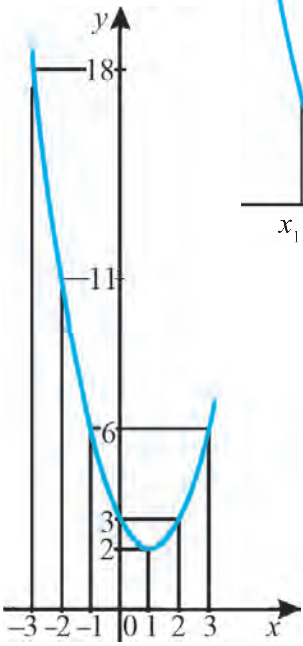
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

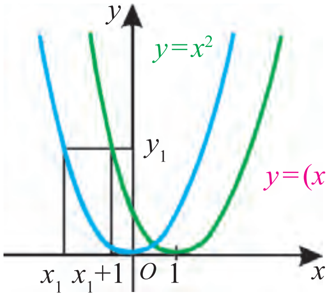
Табылған нүктелерді белгілейміз және олар арқылы тұйық қисық сызық жүргіземіз (9- сурет).

Графиктерін салыстыру үшін толық квадратты бөлу тәсілін қолданып, $y = x^2 - 2x + 3$ формуласын түрлендіреміз:

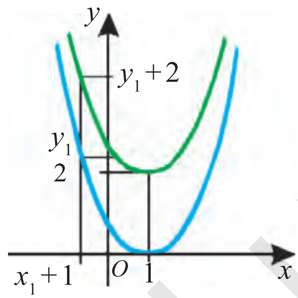
$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Алдымен $y = x^2$ және $y = (x - 1)^2$ функцияларының графиктерін салыстырамыз. Егер $(x_1; y_1)$ нүкте $y = x^2$ параболасының нүктесі, яғни $y_1 = x_1^2$ болса, онда $(x_1 + 1; y_1)$ нүкте $y = (x-1)^2$ функцияның графигіне тиісті болады, өйткені $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$. Демек, $y = (x - 1)^2$ функцияның графигі $y = x^2$ параболасынан оңға бір бірлік *жылжыту* (параллель көшіру) нәтижесінде табылған парабола болады (10-сурет).

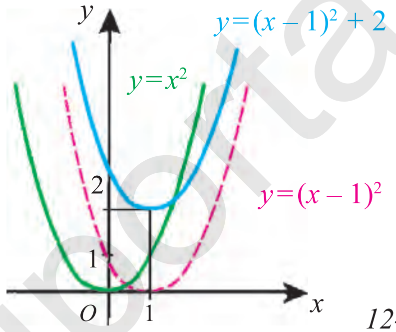




10- сурет.



11- сурет.



9- сурет.

12- сурет.

Енді $y=(x-1)^2$ және $y=(x-1)^2+2$ функцияларының графиктерін салыстырайық. x- тің әрбір мәнінде $y=(x-1)^2+2$ функцияның мәні $y=(x-1)^2$ функцияның сәйкес мәнінен 2-ге артық. Демек, $y=(x-1)^2+2$ функцияның графигі $y=(x-1)^2$ параболасын екі бірлік жоғарыға жылжыту нәтижесінде табылған парабола (11- сурет).

Сонымен, $y = x^2 - 2x + 3$ функцияның графигі $y = x^2$ параболасын бір бірлік оңға және екі бірлік жоғарыға жылжыту нәтижесінде табылған парабола болады (12-сурет). $y = x^2 - 2x + 3$ параболаның симметрия осі ординаталар осіне параллель және параболаның төбесі (1;2) нүктеден өтетін түзу болады. ▲

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ функцияның графигі $y = ax^2$ параболасын:

егер $x_0 > 0$ болса, абсциссалар осі бойымен оңға x_0- ге, егер $x_0 < 0$ болса, солға $|x_0|$- ге жылжыту;

егер $y_0 > 0$ болса, ординаталар осі бойымен жоғарыға y_0- ге, егер $y_0 < 0$ болса, төменге $|y_0|$- ге жылжыту әдісімен табылатын парабола болатындығы осы сияқты дәлелденеді.

Кез келген $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функцияны одан толымды квадратты айыру жолымен

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

яғни $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ түрінде жазуға болады, мұндағы

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = y(x_0) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Сонымен, $y = ax^2 + bx + c$ функцияның графигі $y = ax^2$ параболасын координаталар осьтері бойымен жылжытудың нәтижесінде пайда болатын парабола екен. $y = ax^2 + bx + c$ теңдігі параболаның теңдеуі делінеді. $y = ax^2 + bx + c$ парабола төбесінің $(x_0;\ y_0)$ координаталарын мына формула бойынша табуға болады:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

$y = ax^2 + bx + c$ параболаның симметрия осі ординаталар осіне параллель және параболаның төбесінен өтетін түзу болады.

$y = ax^2 + bx + c$ параболаның тармақтары, егер $a > 0$ болса, жоғары бағытталған, егер $a < 0$ болса, төмен бағытталған болады.

2 - есеп. $y = 2x^2 - x - 3$ парабола төбесінің координаталарын табайық.

△ Парабола төбесінің абсциссасы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Парабола төбесінің ординатасы:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8}.$$

Жауабы: $\left(\frac{1}{4};\ -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

3- есеп. Егер параболаның (–2; 5) нүкте арқылы өтетіні, ал оның төбесі (–1; 2) нүктесінде жататыны белгілі болса, параболаның теңдеуін жазыңдар.

△ Параболаның төбесі (–1; 2) нүктесінде болғандықтан параболаның теңдеуін мынадай жазуға болады:

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Есептің шарты бойынша (–2; 5) нүктесі параболаға тиісті, демек

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

бұдан $a = 3$.

Сонымен, парабола

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{немесе} \quad y = 3x^2 + 6x + 5$$

теңдеуімен анықталады. ▲

Жаттығулар

Парабола төбесінің координаталарын табыңдар **(24–26):**

24. (Ауызша.)

1) $y = (x - 3)^2 - 2$; 2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$; 4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$; 2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$; 4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = -x^2 - 5$; 3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$; 5) $y = -3x^2 + x$; 6) $y = 2x^2 - x$.

27. Параболаның симметрия осінен өтетін, Ox осіндегі нүктені табыңдар:

1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$; 4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. $y=x^2-10x$ параболаның симметрия осі мына нүктелерден өте ме:
1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1)?

29. Параболаның координаталар осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$; 4) $y = 3x^2 - 4x$.

---

30. Егер параболаның (–1; 6) нүктесі арқылы өтетіндігі және оның төбесі (1; 2) нүктесі екені белгілі болса, параболаның теңдеуін жазыңдар.

31. (Ауызша.) (1; –6) нүктесі $y = -3x^2 + 4x - 7$ параболаға тиісті бола ма? (–1; 8) нүктесі ше?

32. Егер (–1; 2) нүкте: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$ параболасына тиісті болса, k -ның мәнін табыңдар.

33. $y=x^2$ парабола кескінімен мына функциялардың графиктерін салыңдар:

1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;
4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

34. $y=2x^2$ параболасын:

1) Ox осі бойымен 3 бірлік оңға;
2) Oy осі бойымен 4 бірлік жоғарыға;
3) Ox осі бойымен 2 бірлік солға, содан кейін Oy осі бойымен бір бірлік төмен;
4) Ox осі бойымен 1,5 бірлік оңға, содан кейін Oy осі бойымен 3,5 бірлік жоғары жылжытудың нәтижесінде пайда болған параболаның теңдеулерін жазыңдар.

5-§. КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІН САЛУ

1-есеп. $y=x^2-4x+3$ функцияның графигін салайық.

△ 1. Парабола төбесінің координаталарын есептейміз:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$
$$y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

(2; –1) нүктені саламыз.

2. (2; –1) нүктесі арқылы ординаталар осіне параллель түзу, яғни параболаның симметрия осін жүргіземіз (13- а сурет).

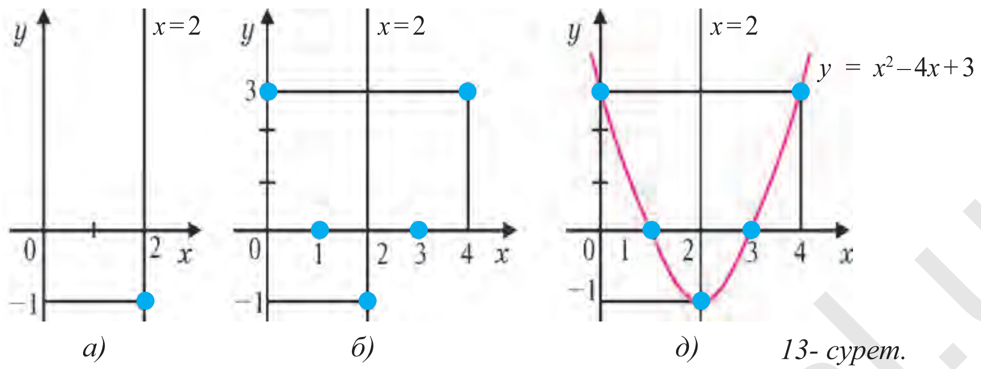
3. Мына

$$x^2-4x+3=0$$

теңдеуін шешіп, функцияның нөлдерін табамыз: $x_1=1$, $x_2=3$. (1; 0) және (3; 0) нүктелерін саламыз (13- *б* сурет).

4. Ox осінде $x=2$ нүктемен салыстырғанда симметриялық болған екі нүктені, мысалы, $x=0$ және $x=4$ нүктелерін аламыз. Функцияның бұл нүктелердегі мәндерін есептейміз: $y(0)=y(4)=3$.

(0; 3) және (4; 3) нүктелерін саламыз (13- *б* сурет).



13- сурет.

5. Белгіленген нүктелер арқылы парабола жүргіземіз (13-*д* сурет). ▲

Осы ретпен *кез келген* $y = ax^2 + bx + c$ *квадраттық функцияның графигін салуға болады:*

1. x_0, y_0- дерді $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ формулалары бойынша есептеп, параболаның (x_0; $ó_0$) төбесін саламыз.

2. Параболаның төбесінен ординаталар осіне параллель түзу – параболаның симметрия осі жүргізіледі.

3. Функцияның нөлдері (егер бар болса) табылады және абсциссалар осінде параболаның сәйкес нүктесі алынады.

4. Параболаның, оның осіне қарағанда өзара симметриялы болатын екі нүкте салынады. Ол үшін Ox осіне x_0 ($x_0 \neq 0$) нүктеге қарағанда симметриялы болатын екі нүктені кескіндеп және ол нүктелерден функцияның сәйкес мәндерін (бұл мәндері бірдей) есептеу керек. Мысалы, параболаның абсциссалары $x = 0$ және $x = 2x_0$ болатын нүктелерді (бұл нүктелердің ординаталары c- ға тең) салуға болады.

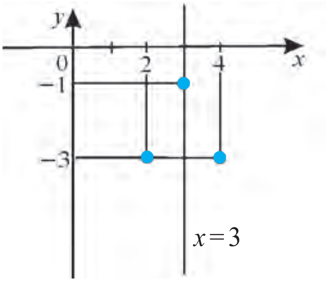
5. Салынған нүктелер арқылы парабола жүргізіледі. Графигін дәлірек салу үшін параболаның тағы бірнеше нүктелері табылады.

2- есеп. $y = -2x^2 + 12x - 19$ функцияның графигін салайық.

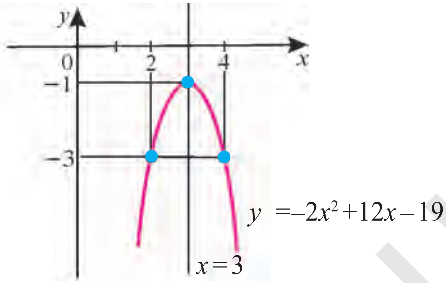
△ 1. Парабола төбесінің координаталарын есептейміз:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3,\ y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1 \cdot$$

(3; –1) нүктесін – параболаның төбесі ретінде белгілейміз (14- сурет).



14- сурет.



15- сурет.

2. (3; –1) нүктесінен параболаның симметрия осін жүргіземіз (14- сурет).

3. $-2x^2 + 12x - 19 = 0$ теңдеуін шешіп, нақты түбірлерінің болмайтынына және сондықтан парабола Ox осін қимайтындығына көз жеткіземіз.

4. Ox осінен $x = 3$ нүктесіне қарағанда симметриялы болатын екі нүкте, мысалы, $x = 2$ және $x = 4$ нүктелерін кескіндейміз. Функцияның бұл нүктелердегі мәндерін есептейміз:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

(2; –3) және (4; –3) нүктелерін кескіндейміз (14- сурет).

5. Салынған нүктелер арқылы парабола жүргіземіз (15- сурет). ▲

3- есеп. $y = -x^2 + x + 6$ функцияның графигін салайық және ол функцияның қандай қасиеттері бар екенін анықтайық.

△ Функцияның графигін салу үшін оның нөлдерін табамыз: $-x^2 + x + 6 = 0$, бұдан $x_1 = -2$, $x_1 = 3$. Парабола төбесінің координаталарын былай табуға болады:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

$a = -1 < 0$ болғандықтан параболаның тармақтары төмен бағытталған.

Параболаның тағы да бірнеше нүктелерін табамыз: $y(-1) = 4$, $y(0) = 6$, $y(1) = 6$, $y(2) = 4$. Параболаны саламыз (16- сурет).

Графиктің жәрдемімен $y = -x^2 + x + 6$ *функцияның* мына төмендегі *қасиеттерін* анықтаймыз:

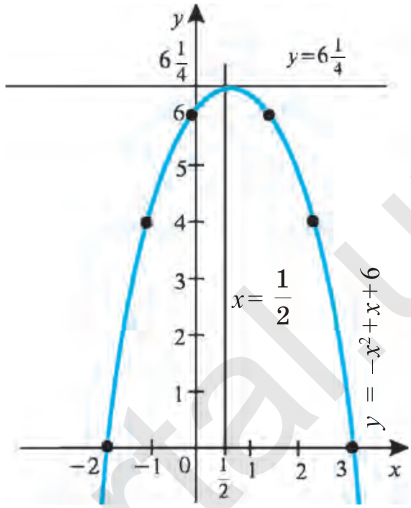
1) x- тің кез келген мәндерінде функцияның мәндері $6\frac{1}{4}$- ге тең немесе одан кіші;

2) $-2<x<3$ аралығында функцияның мәндері оң, $x<-2$ және $x>3$- те теріс, ал $x=-2$ және $x=3$ - те нөлге тең;

3) функция $x\le\frac{1}{2}$ аралығында өседі, $x\ge\frac{1}{2}$ аралығында кемиді;

4) $x=\frac{1}{2}$ болғанда функция $6\frac{1}{4}$- ге тең болған ең үлкен мәнін қабылдайды;

5) функция графигі $x=\frac{1}{2}$ түзуіне қарағанда симметриялы. ▲



16- сурет.

$y=ax^2+bx+c$ функция $x_0=-\frac{b}{2a}$ нүктеде *ең кіші* немесе *ең үлкен мәндерді* қабылдайды; бұл x_0 нүкте парабола төбесінің абсциссасы.

Функцияның x_0 нүктедегі мәнін $y_0=y(x_0)$ формуласы бойынша табуға болады. *Егер $a>0$ болса, онда функция ең кіші мәнін қабылдайды, ал егер $a<0$ болса, онда функция ең үлкен мәнін қабылдайды.*

Мысалы, $y=x^2-4x+3$ функция $x=2$ болғанда -1- ге тең болатын ең кіші мәнін қабылдайды (13- *д* сурет); $y=-2x^2+12x-9$ функция $x=3$ болғанда -1- ге тең үлкен мәнін қабылдайды (15- сурет).

4 - есеп. Екі оң санның қосындысы 6. Егер олардың квадраттарының қосындысы ең кіші болса, онда сол сандарды табыңдар. Ол сандардың квадраттары қосындысының ең кіші мәні қандай болады?

△ Бірінші санды x әрпімен белгілейміз, онда екінші сан $6-x$, олардың квадраттарының қосындысы $x^2+(6-x)^2$ болады. Бұл өрнекті түрлендіреміз:

$$x^2+(6-x)^2=x^2+36-12x+x^2=2x^2-12x+36.$$

Есеп $y = 2x^2 - 12x + 36$ функцияның ең кіші мәнін табуға келтіріледі. Осы парабола төбесінің координатасын табайық:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3,\; y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Демек, х = 3 болғанда функцияның мәні 18- ге тең ең кіші мәнін қабылдайды.

Сонымен, бірінші сан 3- ке, ал екінші сан 6 – 3 = 3- ке тең. Бұл сандардың квадраттарының қосындысының мәні 18- ге тең.

Жаттығулар

35. Парабола төбесінің координаталарын табыңдар:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;   2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2\tilde{o} + 5$;   4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Параболаның координата осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = x^2 - 3x + 5$;   2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$;   4) $y = 7x^2 + 14$.

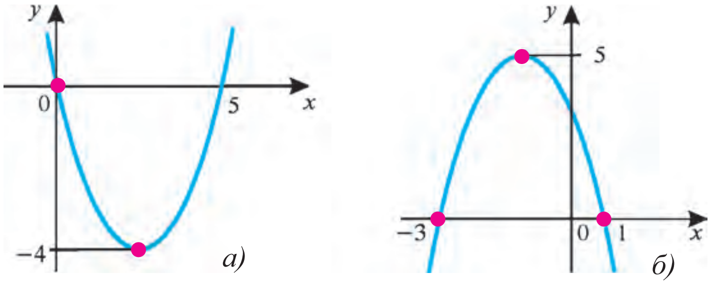
Функцияның графигін салыңдар және графигі бойынша:
1) x- тің функциясының мәндері оң; теріс болатын мәндерін табыңдар;
2) функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар;
3) x- тің қандай мәндерінде функция ең үлкен немесе ең кіші мәндерін қабылдайтынын анықтап, оларды табыңдар **(37–38):**

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$;   2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$;   4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$;   2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$;   4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Квадрат функцияның берілген графигі (17- сурет) бойынша оның қасиеттерін анықтаңдар.

40. 15 санын екі санның қосындысы түрінде сондай өрнектеңдер, бұл сандардың көбейтіндісінің мәні ең үлкен болсын.



17- сурет.

41. Екі санның қосындысы 10. Бұл сандардың кубтарының қосындысы ең кіші болатын сандарды табыңдар.

42. Үй қабырғаларына жанасқан тік төртбұрыш пішініндегі аланды үш жағынан 12 м тормен қоршау керек болсын. Оның ауданы ең кіші болатын алаңның өлшемдерін табыңдар?

43. Үшбұрыштың табаны мен сол табанына жүргізілген биіктігінің қосындысы 14 см. Осындай үшбұрыштың ауданы 25 см^2 болуы мүмкін бе?

44. Графигін сызбастан, x- тің қандай мәнінде функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні болатынын анықтаңдар; мәндерін табыңдар:

1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;

3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Егер:

1) параболаның тармақтары жоғары бағытталған, оның төбесінің абсциссасы теріс, ал ординатасы оң болса;

2) параболаның тармақтары төмен бағытталған, оның төбесінің абсциссасы мен ординатасы теріс болса, $y = ax^2 + bx + c$ парабола теңдеуінің коэффициенттерін анықтаңдар.

46. 5 м биіктіктен садақтан 50 м/с жылдамдықпен жоғарыға вертикаль бағытта жебе атылды. Жебенің t секундтан соң көтерілген биіктігі метрмен $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$ формула арқылы есептеледі, мұндағы $g \approx 10$ м/с^2. Жебе неше секундтан кейін: 1) ең үлкен биіктікке көтеріледі және ол қандай биіктік болады? 2) жерге түседі?

6-§. КВАДРАТ ТЕҢСІЗДІК ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕШІМІ

1 - есеп. Тік төртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары 2 дм және 3 дм. Оның әрбір қабырғасының ұзындығын бірдей санды дециметрлерге арттырғанда, нәтижеде тік төртбұрыштың ауданы 12 дм^2- ге артты. Әрбір қабырғасы қалай өзгерген?

△ Тік төртбұрыштың әрбір қабырғасы x дециметрге арттырылсын. Онда жаңа төртбұрыштың қабырғалары $(2 + x)$ және $(3+x)$ дециметрге, ал оның ауданы $(2+x)(3+x)$ квадрат дециметрге теңболады. Есептің шарты бойынша $(2+x)(3+x)>12$, бұдан $x^2+5x+6 > 12$ немесе $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Бұл теңсіздіктің сол бөлігін көбейткіштерге жіктейміз:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Есептің шарты бойынша, $x > 0$ болғандықтан $x + 6 > 0$.

Теңсіздіктің екі бөлігін оң $x + 6$ санына бөлсек, $x-1 >0$, яғни $x > 1$- ді пайда етеміз.

Жауабы: Тік төртбұрыштың әрбір қабырғасының ұзындығы 1 дм- ден көбірекке арттырылған. ▲

$x^2 + 5x - 6 > 0$ теңсіздігінде x- пен белгісіз сан берілген. Бұл квадрат теңсіздіктің мысалы.

! ***Егер теңсіздіктің сол жағында квадрат функция, ал оң жағында нөл тұрса, мұндай теңсіздік квадрат теңсіздік дейіледі.***

Мысалы,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \qquad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

теңсіздіктері квадрат теңсіздіктер.

Бір белгісізі бар теңсіздіктің шешімі деп, белгісіздің сол теңсіздікті дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын барлық мәндерін айтатыны бізге белгілі.

Теңсіздікті шешу — оның барлық шешімдерін табу немесе шешімдерінің болмайтынын көрсету.

2- есеп. Теңсіздікті шешіңдер:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ $x^2-5x+6=0$ квадрат теңдеуінің $x_1=2$, $x_2=3$ әр түрлі екі түбірі бар. Демек, x^2-5x+6 квадрат үшмүше көбейткіштерге жіктеледі:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Сондықтан берілген теңсіздікті мынадай түрде жазуға болады:

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Егер екі көбейткіш бірдей таңбалы болса, олардың көбейтіндісі оң болады.

1) Екі көбейткіш те оң, яғни $x-2>0$ және $x-3>0$ болған жағдайды қарастырамыз.

Бұл екі теңсіздік төмендегі жүйені құрайды:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0. \end{cases}$$

Жүйені шешсек, $\begin{cases} x>2, \\ x>3 \end{cases}$ болады, бұдан $x>3$.

Демек, барлық $x>3$ сандары $(x-2)(x-3)>0$ теңсіздігінің шешімдері болады.

2) Енді екі көбейткіш теріс, яғни $x-2<0$ және $x-3<0$ болған жағдайды қарастырайық.

Бұл екі теңсіздік төмендегі жүйені құрайды:

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Жүйені шешсек, $\begin{cases} x<2, \\ x<3 \end{cases}$ болады, бұдан $x<2$.

Демек, барлық $x<2$ сандары да $(x-2)(x-3)>0$ теңсіздігінің шешімдері болады.

Сонымен, $(x-2)(x-3)>0$ теңсіздігінің, демек, берілген $x^2-5x+6>0$ теңсіздіктің шешімдері $x<2$, сондай-ақ, $x>3$ сандары да болады.

Жауабы: $x<2$, $x>3$. ▲

Жалпы алғанда, егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеудің әр түрлі екі түбірі болса, онда $ax^2+bx+c>0$ және $ax^2+bx+c<0$ квадрат теңсіздіктерін шешуді, квадрат теңсіздіктің сол бөлігін көбейткіштерге жіктеп, бірінші дәрежелі теңсіздіктер жүйесін шешуге келтіруге болады.

3- есеп. $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ теңсіздікті шешіңдер.

△ Есептеуге ыңғайлы болу үшін, берілген теңсіздіктің бірінші коэффициенті оң болатын квадрат теңсіздік түрінде жазамыз. Ол үшін оның екі бөлігін де -1- ге көбейтеміз:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

$3x^2+5x-2=0$ теңдеуінің түбірлерін табамыз:

$$x_{1,2} = \frac{-5-\sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5-7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктесек, теңсіздік мынадай түрге келеді:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2) < 0.$$

Бұдан екі жүйе келіп шығады:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3} > 0, \\ x+2 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3} < 0, \\ x+2 > 0. \end{cases}$$

Бірінші жүйені мынадай жазуға болады:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -2, \end{cases}$$

бұл, жүйе шешімдерінің болмайтындығы көрініп тұр.

Екінші жүйені шешіп, төмендегіні табамыз:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3}, \\ x > -2, \end{cases}$$

бұдан $-2 < x < \frac{1}{3}$.

Демек, $3(x - \frac{1}{3})(x + 2) < 0$ теңсіздігінің, яғни $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ теңсіздігінің шешімдері $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$ интервалдағы барлық сандар болады.

Жауабы: $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

Жаттығулар

47. (Ауызша.) Төмендегі теңсіздіктердің қайсысы квадрат теңсіздік екенін көрсетіңдер:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \le 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \le 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Төмендегі теңсіздікті квадрат теңсіздікке келтіріңдер:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Ауызша.) 0; –1; 2 сандарының қайсысы

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \ge 0$;
3) $x^2 - x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

теңсіздіктің шешімі болады?

Теңсіздікті шешіңдер (**50–52**):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$;
3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

---

53. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \le 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Функцияның графигін салыңдар. График бойынша функция оң мәндер; теріс мәндер; нөлге тең мән қабылдайтын x- тің барлық мәндерін табыңдар:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. x_1 және x_2 сандары (мұнда $x_1 < x_2$) $y = ax^2 + bx + c$ функциясының нөлдері екені белгілі. x_0 саны x_1 және x_2 арасында жатса, яғни $x_1 < x_0 < x_2$ болса, онда $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ теңсіздігінің орындалауын дәлелдеңдер.

7-§. КВАДРАТ ТЕҢСІЗДІКТІ КВАДРАТ ФУНКЦИЯ ГРАФИГІ ЖӘРДЕМІМЕН ШЕШУ

Квадрат функция $y = ax^2 + bx + c$ (мұндағы $a \neq 0$) формуласымен берілетіні белгілі. Сондықтан квадрат теңсіздікті шешу, квадрат функцияның нөлдерін және квадрат функция оң немесе теріс мәндер қабылдайтын аралықтарды іздеуге келтіріледі.

1- есеп. Теңсіздікті график жәрдемімен шешіңдер:

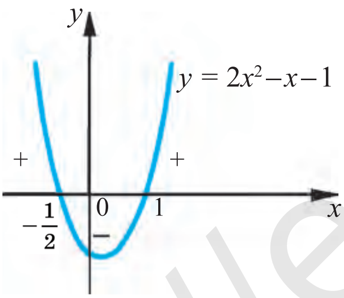
$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

△ $y = 2x^2 - x - 1$ квадрат функциясының графигі — тармақтары жоғарыға бағытталған парабола.

Бұл параболаның Ox осімен қиылысу нүктелерін табамыз. Ол үшін $2x^2 - x - 1 = 0$ квадрат теңдеуін шешеміз. Бұл теңдеудің түбірлері:

$$x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1-3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Демек, парабола Ox осін $x = -\frac{1}{2}$ және $x = 1$ нүктелерінде қияды (18- сурет).



18- сурет.

$2x^2 - x - 1 \leq 0$ теңсіздігін функция нөлге тең немесе функцияның мәндері теріс болатын x -тің мәндері қанағаттандырады, яғни параболаның Ox осінде немесе сол осьтен төменде жатқан x- тің мәндері. Бұл мәндер $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ кесіндісінің барлық сандары болатындығы 18- суреттен көрініп тұр.

Жауабы: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

Бұл функцияның графигін берілген теңсіздіктен айырмашылығы таңбасында ғана болатын теңсіздіктерді шешуде пайдалануға болады. 18- суреттен көрініп тұрғандай:

1) $2x^2 - x - 1 < 0$ теңсіздігінің шешімдері $-\frac{1}{2} < x < 1$, яғни $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ аралықтарындағы барлық сандар болады;

2) $2x^2 - x - 1 > 0$ теңсіздігінің шешімдері $x < -\frac{1}{2}$ және $x > 1$ аралықтарындағы барлық сандар болады;

3) $2x^2 - x - 1 \geq 0$ теңсіздігінің шешімдері $x \leq -\frac{1}{2}$ және $x \geq 1$ аралықтарындағы барлық сандар болады.

2- есеп. Теңсіздікті шешіңдер:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

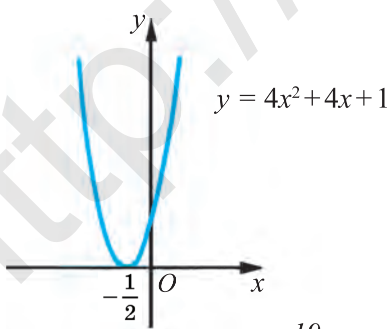
△ $y = 4x^2 + 4x + 1$ функциясы графигінің эскизін сызамыз. Бұл параболаның тармақтары жоғарыға бағытталған. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ теңдеуінің бір $x = -\frac{1}{2}$ түбірі бар, сондықтан парабола Ox осіне $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ нүктесінде жанасады. Бұл функцияның графигі 19- суретте кескінделген. Берілген теңсіздікті шешу үшін х- тің қандай мәндерінде функцияның мәндері оң болатынын анықтау керек.

Сонымен, $4x^2 + 4x + 1 > 0$ теңсіздігін параболаның Ox осінен жоғары жатқан нүктелеріне сәйкес x- тің мәндері қанағаттандырады. 19-суреттен бұндай мәндер $x = -0{,}5$- тен басқа барлық нақты сандар болатыны көрініп тұр.

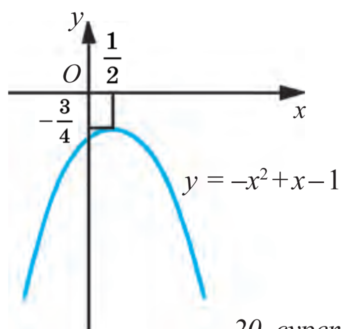
Жауабы: $x \neq -0{,}5$. ▲

19- суреттен көрініп тұрғандай:

1) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ теңсіздігінің шешімі барлық нақты сандар болады;



19- сурет.



20- сурет.

2) $4x^2 + 4x + 1 \le 0$ теңсіздігінің бір $x = -\frac{1}{2}$ шешімі бар;

3) $4x^2 + 4x + 1 < 0$ теңсіздігінің шешімі жоқ.

Егер $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ екендігі бірден байқалса, бұл теңсіздікті ауызша шешуге болады.

3- есеп. $-x^2 + x - 1 < 0$ теңсіздікті шешіңдер.

△ $y = -x^2 + x - 1$ функция графигінің эскизін сызамыз. Бұл параболаның тармақтары төмен бағытталған. $-x^2 + x - 1 = 0$ теңдеуінің нақты түбірлері жоқ, сондықтан парабола Ox осін қиып өтпейді. Демек, бұл парабола Ox осінен төмен орналасқан (20- сурет). Бұл x- тің барлық мәндерінде квадрат функцияның мәндері теріс, яғни $-x^2 + x - 1 < 0$ теңсіздігі x- тің барлық нақты мәндерінде орындалатынын білдіреді. ▲

20- суреттен $-x^2 + x - 1 \le 0$ теңсіздігінің шешімдері x- тің барлық нақты мәндері болып, ал $-x^2 + x - 1 > 0$ және $-x^2 + x - 1 \ge 0$ теңсіздіктерінің шешімі болмайтындығы көрініп тұр.

Сонымен, *квадрат теңсіздікті графиктің жәрдемімен шешу үшін:*

1) квадрат функцияның бірінші коэффициентінің таңбасы бойынша парабола тармақтарының бағыты анықталады;

2) тиісті квадрат теңдеудің нақты түбірлері табылады немесе нақты түбірлерінің болмайтындығы анықталады;

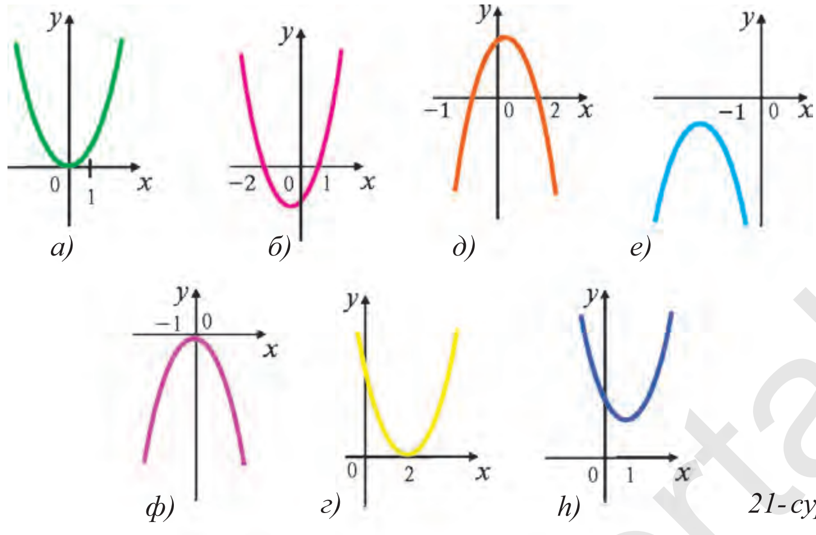
3) квадрат функцияның Ох осімен қиылысу нүктелерін (егер олар бар болса) немесе жанасуды пайдаланып, квадрат функция графигінің эскизі салынады;

4) график бойынша керекті функцияның қажетті мәндер қабылдайтын аралықтары анықталады.

Жаттығулар

56. $y = x^2 + x - 6$ функцияның графигін сал. График бойынша x- тің функция оң мәндер; теріс мәндер қабылдайтын мәндерін табыңдар.

57. (Ауызша.) $y = ax^2 + bx + c$ функция графигін пайдаланып (21- сурет), x - тің қандай мәндерінде бұл функция оң мәндер; теріс мәндер; нөлге тең мән қабылдайтынын көрсетіңдер.



21-сурет.

Квадрат теңсіздікті шешіңдер (**58–62**):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Ауызша.) Теңсіздікті шешіңдер:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

Квадрат теңсіздікті шешіңдер (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$; 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \geq 0$; 6) $3x^2 + x \leq 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. x- тің функция нөлден артық емес мәндер қабылдайтын барлық мәндерін табыңдар:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) $x^2 - 2x + q > 0$ теңсіздігінің $q > 1$ болғандағы шешімдері x- тің барлық нақты мәндері болатынын көрсетіңдер;
2) $x^2 + 2x + q \leq 0$ теңсіздігінің $q > 1$ болғанда нақты шешімдері болмайтынын көрсетіңдер.

69. r- дың $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$ теңсіздігі x- тің барлық нақты мәндерінде орындалатындай барлық мәндерін табыңдар.

8- §. ИНТЕРВАЛДАР ӘДІСІ

Теңсіздіктерді шешкенде интервалдар жиі қолданылады. Бұл әдісті мысалдар арқылы түсіндіреміз.

1- есеп. x- тің қандай мәндерінде $x^2 - 4x + 3$ квадрат үшмүше оң мәндер, ал қандай мәндерінде теріс мәндер қабылдайтынын анықта.

△ $x^2 - 4x + 3 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табамыз:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Сондықтан $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$x = 1$ және $x = 3$ нүктелері (22- сурет) сан осін үш аралыққа бөледі:

22- сурет.

$$x < 1;\ 1 < x < 3;\ x > 3.$$

$1 < x < 3$ аралық сияқты $x < 1$, $x > 3$ аралықтары да *интервалдар* делінеді.

Сан осінің бойымен оңнан солға қозғалсақ, $x > 3$ интервалында $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ үшмүше оң мәндер қабылдайтынын көреміз, өйткені бұл жағдайда $x - 1$ және $x - 3$ көбейткіштерінің екеуі де оң.

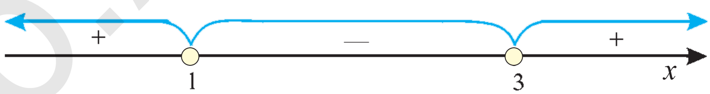
Кейінгі $1 < x < 3$ интервалында ол үшмүше теріс мәндер қабылдайды және осылайша $x = 3$ нүктесінен өткенде функция таңбасын өзгертеді. Мұның себебі, $(x-1)(x-3)$ көбейтіндісі $x = 3$ нүктесі арқылы өткенде бірінші көбейткіші $x - 1$ таңбасын өзгертпейді, ал екінші көбейткіші $x-3$ таңбасын өзгертеді.

$x = 1$ нүктесі арқылы өткен үшмүше тағы таңбасын өзгертеді, өйткені $(x-1)(x-3)$ көбейтіндісінің бірінші көбейткіші $x-1$ таңбасын өзгертеді, ал екінші $x-3$ көбейткіш таңбасын өзгертпейді.

Демек, сан осі бойымен оңнан солға қарай қозғалғанда бір интервалдан көршілес интервалға өткенде $(x-1)(x-3)$ көбейтіндінің таңбалары алмасып өзгеріп тұрады.

Сонымен, $x^2 - 4x + 3$ квадрат үшмүшенің таңбасын төмендегідей жолмен анықтауға болады.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ теңдеуінің түбірлерін сан осінде белгілейміз: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Олар сан осін үш интервалға бөледі (22- сурет). $x > 3$ интервалында $x^2 - 4x + 3$ үшмүшенің оң болатынын анықтап, кейін қалған интервалдардағы таңбаларды оңнан солға қарай кезекпен өзгертіп белгілейміз (23- сурет). 23- суреттен $x < 1$ және $x > 3$ болғанда $x^2 - 4x + 3 > 0$, ал $1 < x < 3$ болғанда $x^2 - 4x + 3 < 0$ болатынын көреміз. ▲



23- сурет.

Қарастырылған әдіс *интервалдар әдісі* деп аталады. Бұл әдіс квадрат теңсіздіктерді және кейбір басқа да теңсіздіктерді шешуде қолданылады.

Мысалы, 1- есепті шығарған кезде біз негізінде $x^2 - 4x + 3 > 0$ және $x^2 - 4x + 3 < 0$ теңсіздіктерін интервалдар әдісімен шештік.

2- есеп. $x^3 - x < 0$ теңсіздігін шеш.

△ $x^3 - x$ көпмүшені көбейткіштерге жіктейміз:

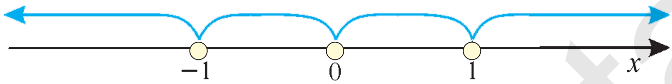
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Демек, теңсіздікті мынадай түрде жазуға болады:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

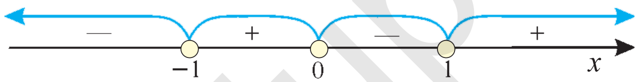
Сан осінде –1, 0 және 1 нүктелерін белгілейміз. Бұл нүктелер сан осін төрт интервалға бөледі (24- сурет):

$$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1.$$



24- сурет.

$x > 1$ болғанда $(x + 1)x(x - 1)$ көбейтіндінің барлық көбейткіштері оң, сондықтан $x > 1$ интервалында $(x+1)x(x-1) > 0$ болады. Көрші интервалға өткенде көбейтінді таңбасының өзгеретінін ескеріп әрбір интервалдағы $(x+1)x(x-1)$ көбейтіндінің таңбасын анықтаймыз (25-сурет).



25- сурет.

Сонымен, теңсіздіктің шешімдері x- тің $x < -1$ және $0 < x < 1$ интервалындағы барлық мәндері болады.

Жауабы: $x < -1,\ 0 < x < 1$. ▲

3- есеп. $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ теңсіздігін шеш.

△ Берілген теңсіздікті мынадай түрде жазуға болады:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Барлық $x \neq -3$ мәнінде $(x + 3)^2 > 0$ болғандықтан $x \neq -3$ болса (1) теңсіздік шешімдерінің жиыны

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

теңсіздік шешімдерінің жиынымен беттесе түседі.

$x = -3$ мәні (1) теңсіздіктің шешімі болмайды, себебі $x = -3$ болғанда теңсіздіктің сол бөлігі 0- ге тең.

(2) теңсіздікті интервалдар әдісімен шешсек, оның шешімдері, $x < 2$, $x > 3$ болады (26- сурет).

26- сурет.

$x = –3$ берілген теңсіздіктің шешімі болмайтынын ескеріп, соңғы нәтижені былай жазамыз:

$$x < –3,\ \ –3 < x < 2,\ \ x > 3.$$ ▲

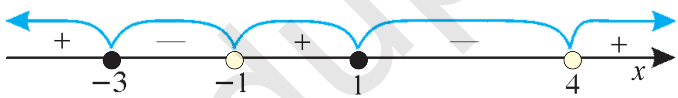
4- есеп. Мына теңсіздікті шешіңдер:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

△ Бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктесек, төмендегі пайда болады:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \qquad (3)$$

Сан осінде бөлшектің алымы және бөлімі нөлге тең болатын –3; –1; 1; 4 нүктелерін белгілейміз. Бұл нүктелер сан түзуін бес интервалға бөледі (27- сурет). $x > 4$ болғанда бөлшектің алымы мен бөліміндегі барлық көбейткіштер оң және сондықтан бөлшек оң.



27- сурет.

Бір интервалдан кейінгісіне өткенде бөлшек таңбасын өзгертеді, сондықтан әр интервалдағы бөлшектің таңбасы 27- суреттегідей етіп қойылады. $x = –3$ және $x = 1$ мәндер (3) теңсіздікті қанағаттандырады, $x=–1$ және $x = 4$ болғанда бөлшектің мағынасы болмайды. Сонымен, берілген теңсіздіктің шешімдері мынадай:

$$x \leq –3,\ \ –1 < x \leq 1,\ \ x > 4.$$ ▲

Жаттығулар

70. (Ауызша.) $x = 5$ мәні теңсіздіктің шешімі болатынын көрсетіңдер:

1) $(x – 1)(x – 3) > 0$; 2) $(x + 2)(x + 5) > 0$;
3) $(x – 7)(x – 10) > 0$; 4) $(x + 1)(x – 4) > 0$.

Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;

3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;
4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;
3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;
3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geq 0$;

4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;
3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Теңсіздікті шешіңдер (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;

4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x\ \ 6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$.

9- §. ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ АЙМАҒЫ

Сендер 7-сыныпта функция ұғымымен таныскансыңдар. Осы ұғымды естеріңе қайта салайық.

Егер сандардың кез келген жиынынан алынған *x*- тің әрбір мәніне *y* саны сәйкес келтірілсе, бұл жиында *y(x)* *функциясы* берілген делінеді. Мұнда *x* *тәуелсіз айнымалы* немесе *аргумент* деп, *y* *тәуелді айнымалы* немесе *функция* деп аталады.

Сендер $y=kx+b$ сызықтық функция және $y=ax^2+bx+c$ квадрат функциямен таныссыңдар.

Бұл функциялар үшін аргументтің мәні кез келген нақты сан болуы мүмкін.

Енді әрбір теріс x санға $\sqrt{x}$ санды сәйкес қоятын функцияны, яғни $y=\sqrt{x}$ функциясын қарастырайық. Аргумент бұл функция үшін теріс емес мәндерді ғана қабылдай алады: $x \geq 0$. Бұл жағдайда функция теріс емес сандар жиынында анықталған делінеді және бұл жиын $y=\sqrt{x}$ функцияның *анықталу аймағы* деп аталады.

Демек, функция аргументі қабылдай алатын барлық мәндердің жиынын *функцияның анықталу аймағы* деп атайды.

Мысалы, $y=\frac{1}{x}$ формуласымен берілген функция $x \neq 0$- де анықталған, яғни бұл функцияның анықталу аймағы — нөлден өзгеше барлық нақты сандар жиыны.

Егер функция формуламен берілген болса, онда функцияны аргументтің берілген формула мағыналы болатын (яғни формуланың оң жағындағы өрнекте көрсетілген барлық амалдар орындалатын) барлық мәндерінде анықталған деп есептеу қабылданған.

Формуламен берілген функцияның анықталу аймағын табу — формуланың мағынасы болатын аргументтің мәндерін табу керек дегені.

1 - есеп. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y(x)=2x^2+3x+5x$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\dfrac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

△ 1) $2x^2+3x+5$ өрнегі x- тің кез келген мәндерінде мағыналы болғандықтан, функция барлық x- терде анықталған.

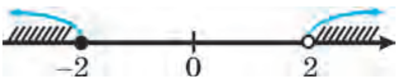
Жауабы: x – кез келген сан.

2) $\sqrt{x-1}$ өрнегі $x-1\geq 0$ болғанда мағыналы, яғни функция $x\geq 1$ болғанда анықталған.

Жауабы: $x\geq 1$.

3) $\dfrac{1}{x+2}$ өрнегі $x+2\neq 0$ болғанда мағыналы, яғни функция $x\neq -2$ болғанда анықталған.

Жауабы: $x\neq -2$.

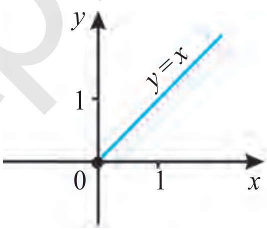


28- сурет.

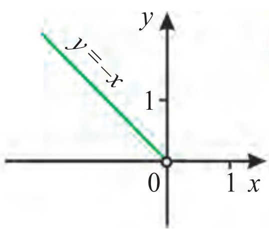
4) $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$ өрнегі $\dfrac{x+2}{x-2}\geq 0$ болғанда мағыналы. Бұл теңсіздікті шешкенде (28-сурет) $x\leq -2$ және $x>2$ шығады, яғни функция $x\leq -2$ және $x>2$ болғанда анықталған.

Жауабы: $x\leq -2$, $x>2$. ▲

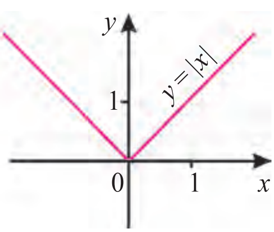
Функцияның графигі деп координаталар жазықтығының абсциссалары сол функцияның анықталу аймағынан алынған тәуелсіз айнымалының мәндерін, ал ординаталары деп функцияның сәйкес мәндеріне тең болатын нүктелер жиынын айтады.



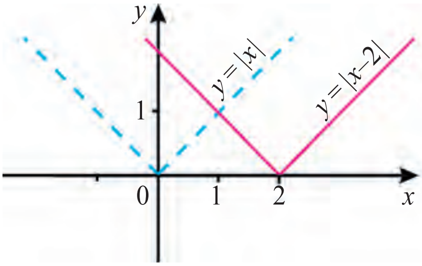
29- сурет.



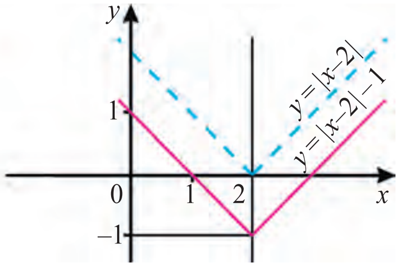
30- сурет.



31- сурет.



32- сурет.



33- сурет.

2 - есеп. $y = |x|$ функцияның анықталу аймағын табыңдар және оның графигін сызыңдар

△ Естеріңе саламыз:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{agar } x^3 \geq 0 \text{ bo lsa,} \\ -x, \text{agar } x < 0 \text{ bo lsa.} \end{cases}$$

Сонымен, $|x|$ өрнегі кез келген нақты x- те мағыналы, яғни $y = |x|$ функциясының анықталу аймағы барлық нақты сандар жиынынан құралады.

Егер $x \geq 0$ болса, онда $|x| = x$ болады, сондықтан, $x \geq 0$ болғанда $y = |x|$ функциясының графигі бірінші координата бұрышының биссектрисасы болады (29- сурет).

Егер $x < 0$ болса, онда $|x| = -x$ болады. Демек, теріс x- тер үшін $y = |x|$ функциясының графигі екінші координата бұрышының биссектрисасы болады (30- сурет).

$y = |x|$ функциясының графигі 31-суретте бейнеленген. ▲

Кез келген x үшін $|-x| = |x|$. Сондықтан $y = |x|$ функциясының графигі ординаталар осіне симметриялы орналасады.

3 - есеп. $y = |x-2|-1$ функциясының графигін салыңдар.

△ $y = |x-2|$ функцияның графигі $y = |x|$ фукнциясының графигін Ox осі бойынша 2 бірлік оңға қарай жылжыту арқылы салынады (32-сурет).

$y = |x-2|-1$ функцияның графигін салу үшін $y = |x-2|$ функциясының графигін бір бірлік төменге жылжыту жеткілікті (33-сурет). ▲

Жаттығулар

81. Функция $y(x) = x^2 - 4x + 5$ формуламен берілген:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$- ні табыңдар;

2) егер $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$ болса, x- тің мәнін табыңдар.

82. Функция $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$ формуламен берілген:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$- ті табыңдар;

2) егер $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$ болса, x- тің мәнін табыңдар.

Функцияның анықталу аймағын табыңдар (**83–84**):

83. (Ауызша).

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$;
2) $y = 2 - x - 3x^2$;
3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y = \frac{3}{5 - x^2}$;
5) $y = \sqrt[4]{6 - x}$;
6) $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$;
2) $y = \sqrt[6]{x^2 - 7x + 10}$;

3) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 5}$;
4) $y = \sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$;
5) $y = \sqrt{\frac{3x-2}{4\ \ x}}$.

85. Функция $y(x) = |2 - x| - 2$ формуламен берілген:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$- ті табыңдар;

2) егер $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$ болса, x- тің мәнін табыңдар.

86. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$;
2) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

3) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$;
4) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

5) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;
6) $y = \sqrt[8]{\frac{x^2 + 4x\ \ 5}{x-2}}$.

87. (−2; 1) нүктесі функция графигіне тиісті ме:

1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;

3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Функция графигін салыңдар:

1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;

4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. $y=ax^2+bx+c$ функция A (0; 1), B (1; 2), C ($\frac{5}{6}$; 1) нүктелерінен өтеді. 1) a, b, c- ларды табыңдар; 2) x- тің қандай мәндерінде $y = 0$ болады? 3) функцияның графигін салыңдар.

10- §. ФУНКЦИЯНЫҢ ӨСУІ ЖӘНЕ КЕМУІ

Сендер $y = x$ va $y = x^2$ функцияларымен таныссыңдар. Бұл функциялар — *дәрежелік функцияның*, яғни

$$y=x^r \qquad (1)$$

(мұндағы r – берілген сан) функциясының дербес түрлері.

r – натурал сан болсын, $r = n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ делік. Бұл жағдайды натурал көрсеткішті дәрежелік функция $y = x^n$ келіп шығады.

Бұл функция барлық нақты сандар жиынында, яғни сан осінің бойында анықталған. Әдетте барлық нақты сандар жиыны $\boldsymbol{R}$ әрпімен белгіленеді. Сонымен, натурал көрсеткішті дәрежелік функция $y = x^n$, $x\in\boldsymbol{R}$ үшін анықталған. Егер (1)- де $r = -2k$, $k\in\boldsymbol{N}$ болса, онда $y=x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$ функция түрінде жазуға болады. Бұл функция x- тің нөлден өзгеше мәндерінде анықталған Oy оське қатысты алғанда симметриялы. $r = -(2k-1)$, $k\in\boldsymbol{N}$ болса, онда $y=x^{-(2k-1)}=\frac{1}{x^{2k-1}}$ функция түрінде жазуға болады. Бұл функцияның қасиеттері $y=\frac{1}{x}$ функцияның қасиеттері сияқты болады.

p және q – натурал сандар және $r=\frac{p}{q}$ – қысқармайтын бөлшек болсын. $y=\sqrt[q]{x^p}$ функцияның анықталу аймағы p және q сандарының жұп немесе тақ болуына қарай түрліше болады. Мәселен, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ функциялар кез келген $x \in \boldsymbol{R}$ де анықталған. Ал $y=\sqrt[4]{x^3}$ функциясы болса x- тің теріс емес мәндерінде, яғни $x \geq 0$ мәндерінде анықталған.

8- сыныпқа арналған „Алгебра" курсынан белгілі, әрбір иррационал санды шекті ондық бөлшек арқылы, яғни рационал санмен жуықтап алуға болады. Практикада иррационал сандармен амалдар орындау олардың рационал сандарға жуық мәндерін алу арқылы орындалады. Бұл амалдар енгізілгенде амалдардың, теңдік және теңсіздіктердің рационал сандар үшін қассиеттері иррационал сандар үшін де толық сақталады.

$r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ рационал сандар r иррационал санның рационал жуық мәндері болсын. Онда x оң сан болғанда, x- тің рационал дәрежесі, яғни $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_k}, \ldots$ сандар x^r дәрежесінің жуық мәндері болады. Мұндай анықталған дәреже *иррационал көрсеткішті дәреже* делінеді. Демек, $x>0$ үшін дәреже көрсеткішті кез келген r болған $y=x^r$ функцияны анықтауға болады.

Дәрежелі функция x- тің (1) формуланы қанағаттандыратын мәндері үшін анықталған. Мәселен, $y=x$ және $y=x^2$ ($r=1$ және $r=2$) функцияларының анықталу аймағы барлық нақты сандар жиыны болады; $y=\dfrac{1}{x}$ ($r=1$) функциясының анықталу аймағы нөлден өзгеше нақты сандар жиыны; $y=\sqrt{x}$ ($r=\dfrac{1}{2}$) функциясының анықталу аймағы барлық теріс емес сандар жиыны болады.

! **Егер аргументтің қалаған аралықтан алынған үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес болса, яғни аралықтан алынған кез келген x_1, x_2 үшін $x_2>x_1$ теңсіздігінен $y(x_2)>y(x_1)$ теңсіздігі келіп шықса, $y(x)$ функциясы берілген аралықта *өсетін* фунция деп аталады.**

! **Егер бірер аралыққа тиісті кез келген x_1, x_2 үшін $x_2>x_1$ теңсіздігінен $y(x_2)<y(x_1)$ келіп шықса, $y(x)$ функциясы сол аралықта *кемитін* функция деп аталады.**

Мысалы, $y=x$ функциясы сандар осінде өспелі болып табылады. $y=x^2$ функциясы $x \geq 0$ аралықта өседі, $x \leq 0$ аралықта кемиді.

$y = x^r$ дәрежелі функцияның өспелі немесе кемімелі болуы дәреже көрсеткішінің таңбасына байланысты.

Егер $r>0$ болса, онда $y=x^r$ дәрежелі функциясы $x\geq 0$ аралықта *өседі.*

$x_2>x_1\geq 0$ болсын. $x_2>x_1$ теңсіздігін оң r дәрежеге көтерсек, $x_2^r > x_1^r$, яғни $y(x_2) > y(x_1)$ келіп шығады.

Мысалы, $y=\sqrt{x}$ және $y=x^{\frac{3}{2}}$ функциялар $x\geq 0$ аралықта өседі. Бұл функциялардың графиктері 34-суретте бейнеленген. Сол суреттен $y=\sqrt{x}$ функциясының графигі $0<x<1$ аралықта $y = x$ функцияның графигінен жоғарыда, ал $x > 1$ аралықта $y = x$ функциясының графигінен төменде орналасқанын айқын көруге болады.

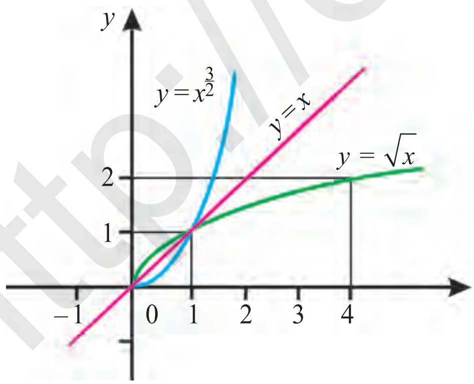
Егер $0<r<1$ болса, $y = x^r$ функциясының графигі де дәл сондай қасиеті болады.

$y=x^{\frac{3}{2}}$ функциясының графигі $0<x<1$ аралықта $y=x$ функциясының графигінен төменде, $x > 1$ аралықта $y = x$ функциясының графигінен жоғарыда орналасады.

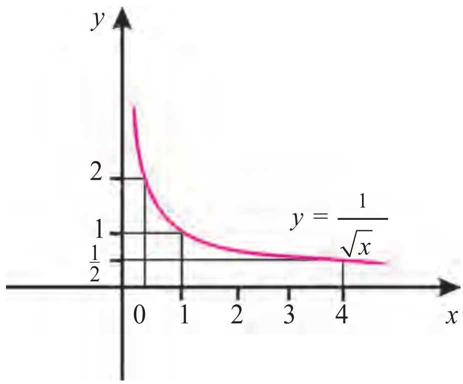
$r>1$ болса, $y-x^r$ функциясының графигі осындай қасиетке ие болады.

Енді $r>1$ жағдайын қарастырайық.

Егер $r < 0$ болса, онда $y=x^r$ дәрежелі функция $x > 0$ аралықта *кемиді.*



34- сурет.



35- сурет.

○ $x_2 > x_1 > 0$ болсын. $x_2 > x_1$ теңсіздігін теріс r дәрежеге көтерсек екі бөлігі де оң болған теңсіздіктердің қасиеті бойынша $x_2^r > x_1^r$, яғни $y(x_2) < y(x_1)$ теңсіздігі келіп шығады. ●

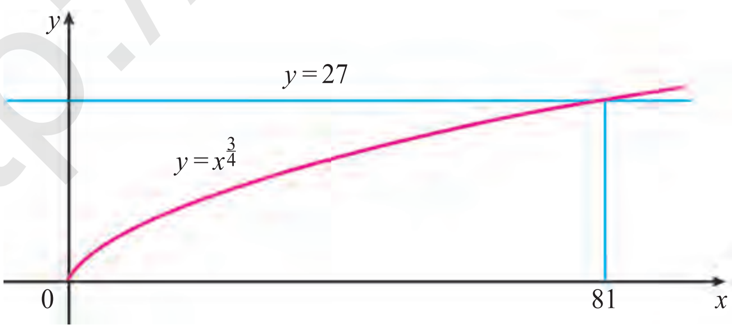
Мысалы, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, яғни $y = x^{-\frac{1}{2}}$ функциясы $x > 0$ аралықта кемиді. Бұл функцияның графигі 35- суретте бейнеленген.

1- есеп. $x^{\frac{3}{4}} = 27$ теңдеуін шешіңдер.

△ $y = x^{\frac{3}{4}}$ функциясы $x \geq 0$- де анықталған. Сондықтан берілген теңдеудің теріс емес түбірлері бар болуы мүмкін. Мұндай түбірлердің бірі: $x = 27^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{3^3})^4 = 3^4 = 81$. Теңдеудің басқа түбірлері жоқ, себебі $y = x^{\frac{3}{4}}$ функциясы $x \geq 0$ болғанда өседі, сондықтан, егер $x > 81$ болса, онда $x^{\frac{3}{4}} > 27$, егер $x < 81$ болса, онда $x^{\frac{3}{4}} < 27$ болады (36-сурет). ▲

$x^r = b$ (мұндағы $r \neq 0$, $b > 0$) теңдеуінің әрқашан оң $x = b^{\frac{1}{r}}$ түбірі бар, сонымен бірге бұл түбірдің жалғыз екендігі жоғарыдағыдай дәлелденеді. Демек, $y = x^r$ (мұндағы $r > 0$) функциясы $x > 0$ болғанда *барлық оң мәндерді қабылдайды.*

Ал бұл, мысалы, $y = x^{\frac{3}{4}}$ (36- сурет) функциясының баяу өсуіне қарамастан, оның графигі Ox осінен кез келгенінше алыстайтынын және



36- сурет.

$y = b$ түзуін, b- нің кез келген оң сан болғанына қарамастан қиып өтетінін білдіреді.

2 - есеп. $y = x + \frac{1}{x}$ функциясының $x > 1$ аралықта өспелі екендігін дәлелдеңдер.

△ $x_2 > x_1 > 1$ болсын. $y(x_2) > y(x_1)$ екендігін көрсетеміз.
$y(x_2) - y(x_1)$ айырмасын қарастырамыз:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ болғандықтан $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$, $x_1 x_2 > 0$. Сондықтан $y(x_2) - y(x_1) > 0$, яғни $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Жаттығулар

90. Функцияның графигін салып, өсу және кему аралықтарын табыңдар:
1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 3 - x^2$; 5) $y = (1 - x)^2$; 6) $y = (2 + x)^2$.

91. (Ауызша). Функция $x > 0$ аралықта өсе ме, әлде кеми ме:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

92. $x > 0$ болғанда функция графигінің эскизін салыңдар:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

93. Теңдеудің оң түбірін табыңдар:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$;
5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; 7) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$; 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$.

94. Миллиметрлік қағазға $y = \sqrt[4]{x}$ функциясының графигін салыңдар. График бойынша:
1) $y = 0,5$; 1; 4; 2,5 болғандағы x- тің мәндерін табыңдар;
2) $\sqrt[4]{1,5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2,5}$; $\sqrt[4]{3}$ мәндерін жуықтап есептеңдер.

95. Функциялар графиктерінің қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ және $y = 625$; 2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ және $y = 64$;

3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ және $y = 216$; 4) $y = x^{\frac{7}{3}}$ және $y = 128$.

96. 1) $y = x + \frac{1}{x}$ функциясының $0 < x < 1$ аралыкта кемитінін дәлелдеңдер;

2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ функциясының $x \geq 0$ аралыкта кемитінін және $x \leq 0$ аралықта өсетінін дәлелдеңдер;

3) $y = x^3 - 3x$ функциясының $x \geq -1$ және $x \geq 1$ аралықта өсетінін және $-1 \leq x \leq 1$ кесіндіде кемитінін дәлелдеңдер;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ функциясының $x \geq 1$ аралықта өсетінін және $0 \leq x \leq 1$ кесіндіде кемитінін дәлелдеңдер.

97. Функцияның графигін салыңдар, оның өсу және кемею аралықтарын табыңдар:

1) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ егер } x \leq -1 \text{ болса,} \\ x^2, \text{ егер } x > -1 \text{ болса;} \end{cases}$

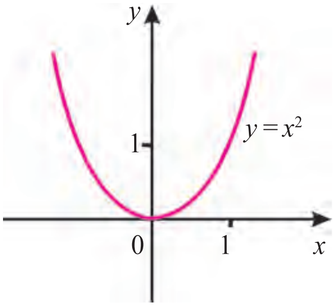
2) $y = \begin{cases} x^2, \text{ егер } x \leq 1 \text{ болса,} \\ 2 - x^2, \text{ егер } x > 1 \text{ болса;} \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -x - 1, \text{ егер } x < -1 \text{ болса,} \\ -x^2 + 1, \text{ егер } x \geq -1 \text{ болса;} \end{cases}$

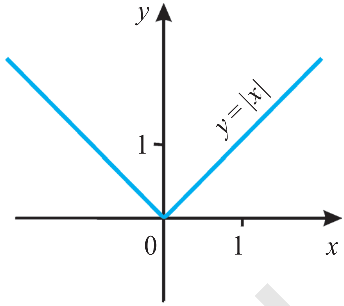
4) $y = \begin{cases} x^3, \text{ егер } x \leq 1 \text{ болса,} \\ -x^2 + 2x, \text{ егер } x \geq 1 \text{ болса.} \end{cases}$

11-§. ЖҰП ЖӘНЕ ТАҚ ФУНКЦИЯЛАР

Сендер $y = x^2$ және $y = |x|$ функцияларының графиктері ординаталар осіне қатысты симметриялы (37- және 38- суреттер) екенін білесіңдер. Мұндай функциялар *жұп функциялар* деп аталады.



37- сурет.



38- сурет.

Егер $y(x)$ функциясының анықталу аймағынан алынған кез келген x үшін $y(-x)=y(x)$ болса, бұл функция *жұп функция* деп аталады.

Мысалы, $y=x^4$ және $y=\frac{1}{x^2}$ функциялар жұп функциялар, себебі кез келген x үшін $(-x)^4=x^4$ және кез келге $x\neq 0$ үшін $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$.

1 - есеп. $y=x^3$ функциясының графигі координаталар басына қарағанда симметриялы екендігін дәлелдеңдер және графигін салыңдар.

△ 1) $y = x^3$ функциясының анықталу аймағы – барлық нақты сандар жиыны.

2) $y=x^3$ функциясының мәндері $x>0$ болғанда оң, $x<0$ болғанда теріс, $x=0$ болғанда нөлге тең.

○ Айталық, $(x_0;\ y_0)$ нүктесі $y = x^3$ функциясының графигіне тиісті, яғни $y_0=x_0^3$ болсын. $(x_0;\ y_0)$ нүктесіне координаталар басына қатысты симметриялы болған нүктенің координаталары $(-x_0;\ -y_0)$ болады. Бұл нүкте де $y = x^3$ функциясының графигіне тиісті, себебі $y_0=x_0^3$ дұрыс теңдігінің екі жағын да –1- ге көбейтсек: $-y_0=-x_0^3$ немесе $-y_0=(-x_0)^3$. ●

Бұл қасиеті бойынша $y = x^3$ функцияның графигін салуға болады: график ең алдымен $x\geq 0$ үшін сызылады, содан кейін оның координаталар басына қатысты симметриялы бейнесі салынады.

3) $y=x^3$ функциясы анықталу аймағының барлық жерінде өседі. Бұл оң көрсеткішті дәрежелі функцияның $x\geq 0$ болғанда өспелі қасиетінен және

графигінің координаталар басына қарағанда симметриялы екендігінен келіп шығады.

4) $x \geq 0$- дің кейбір мәндері (мәселен, $x = 0, 1, 2, 3$) үшін $y=x^3$ функциясы мәндерінің кестесін құрамыз, $x \geq 0$ болғандағы графигінің бір бөлігін саламыз, содан кейін симметрияның көмегімен графиктің x -тің теріс мәндеріне сәйкес келетін бөлігін сызамыз (39- сурет). ▲

Графиктері координаталар басына қатысты симметриялы функциялар *тақ* функциялар деп аталады, $y=x^3$ – тақ функция.

Егер $y(x)$ функциясының анықталу аймағынан алынған кез келген x үшін

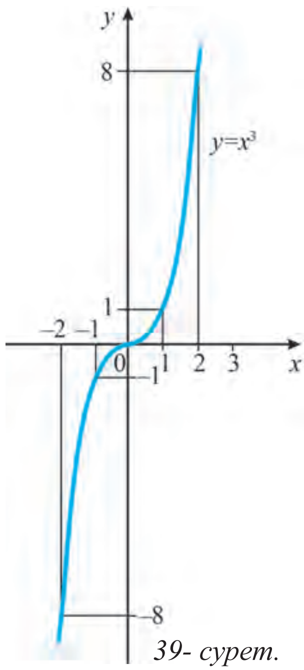
$$y(-x) = -y(x)$$

болса, бұл функция *тақ функция* деп аталады.

Мысалы, $y=x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ функциялар тақ функциялар. Себебі кез келген x үшін $(-x)^5 = -x^5$ және кез келген $x \neq 0$ үшін $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$.

Жұп және тақ функциялардың *анықталу аймағы координата басына қатысты симметриялы* болады.

Жұп немесе так касиеттерге ие емес функциялар бар. Мысалы, $y = 2x + 1$ функциясының не жұп емес, не тақ емес екенін көрсетейік. Егер бұл функция жұп болғанда, онда барлық x -тер үшін $2(-x) + 1 = 2x + 1$ теңдігі орындалған болар еді, бірақ, $x = 1$ болғанда бұл теңдік орынды емес: $-1 \neq 3$. Егер бұл функция тақ болғанда, онда барлық x- тер үшін $2(-x) + 1 = -(2x - 1)$ теңдігі орындалу керек еді; бірақ, $x=2$ болғанда бұл теңдік дұрыс емес: $-3 \neq -5$.



39- сурет.

2- есеп. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясының графигін салыңдар.

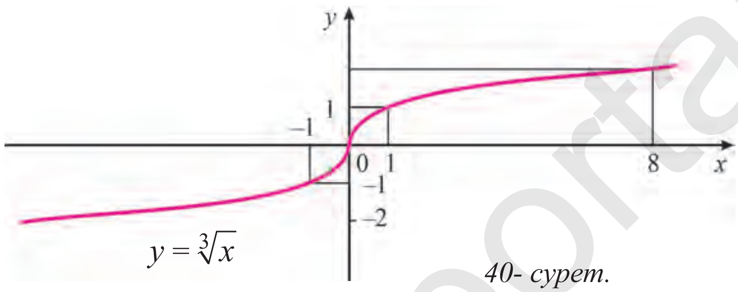
△ 1) Анықталу аймағы – барлық нақты сандар;

2) функция – тақ, себебі кез келген x үшін $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) $x \geq 0$ болғанда функция оң көрсеткішті дәрежелі функцияның қасиеті бойынша өседі, себебі $x \geq 0$ болғанда $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) $x > 0$ болғанда функцияның мәні де оң болады; $y(0) = 0$;

5) графикке қатысты бірнеше, мысалы, (0; 0), (1; 1), (8; 2) нүктелерді табамыз, $x \geq 0$-дің мәндері үшін графиктің бір бөлігін сызамыз, содан кейін симметрияның көмегімен $x < 0$ үшін графиктің екінші бөлігін сызамыз (40-сурет). ▲



40- сурет.

$y = \sqrt[3]{x}$ функциясы барлық x- тер үшін, $y = x^{\frac{1}{3}}$ функциясы тек $x \geq 0$ үшін ғана анықталғанын ескертеміз.

Жаттығулар

Функцияның тақ немесе жұп екенін анықтаңдар **(98–99)**:

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Функция графигінің эскизін сызыңдар:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. Функцияның не жұп, не тақ емес екенін көрсетіңдер:

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Симметрияны пайдаланып, жұп функцияның графигін салыңдар:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

104. Симметрияны пайдаланып, тақ функцияның графигін салыңдар:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Функцияның қасиеттерін анықтап, оның графигін салыңдар:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$.

106. Функция графигін салыңдар:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{егер } x \geq 0 \text{ болса}, \\ x^3, \text{егер } x < 0 \text{ болса}; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x^3, \text{егер } x \text{ болса lsa}, \\ x^2, \text{егер } x \text{ болса lsa}; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{егер } x \leq 0 \text{ болса}, \\ -x^2, \text{егер } x \geq 0 \text{ болса}; \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} x^4, \text{егер x} \leq 1 \text{ болса}, \\ -x^2+2x, \text{егер x} \geq 1 \text{ болса}. \end{cases}$

Аргументтің қандай мәндерінде функцияның мәндері оң болатынын анықтаңдар. Өсу және кему аралықтарын көрсетіңдер.

107. y функциясы берілген:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

$x>0$ болғандағы y функциясының графигін салыңдар. $x<0$ үшін осы функциялардың әрқайсысының графигі сондай сызылсын, нәтижеде: а) жұп функцияның; б) тақ функцияның графигі болсын.

Пайда болған әрбір функцияны бір формуламен өрнектеңдер.

108. Функция графигінің симметриялық осінің теңдеуін жазыңдар:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Функция графигінің симметриялық центрінің координаталарын көрсетіңдер:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

12-§. ДӘРЕЖЕ ҚАТЫСҚАН ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Дәрежелі функцияның қасиеттерін пайдаланып, түрлі теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуге болады.

1 - есеп. $x^5 > 32$ теңсіздігін шешіңдер.

△ $y = x^5$ функциясы x- тің барлық нақты мәндерінде анықталған және өспелі. $y(2) = 32$ болғандықтан $x > 2$ болғанда $y(x) > 32$ және $x > 2$ болғанда $y(x) > 32$.

Жауабы: $x > 2$. ▲

2 - есеп. $x^4 \leq 81$ теңсіздігін шешіңдер.

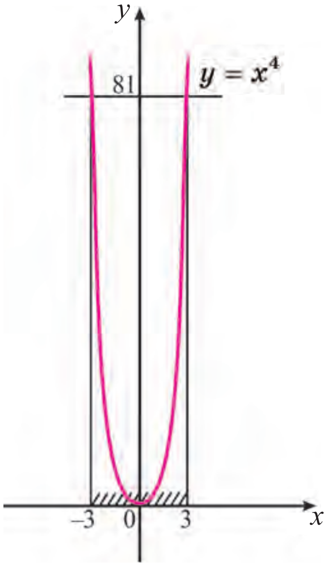
△ $y = x^4$ функциясы $x \leq 0$ болғанда кемиді және $x \geq 0$ болғанда өседі. $x^4 = 81$ теңдеудің екі нақты түбірі бар: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Сондықтан $x^4 \leq 81$ теңсіздігі $x \leq 0$ болғанда шешімі $-3 \leq x \leq 0$ және $x \geq 0$ болғанда шешімі $0 \leq x \leq 3$ болады (41- сурет).

Жауабы: $-3 \leq x \leq 3$. ▲

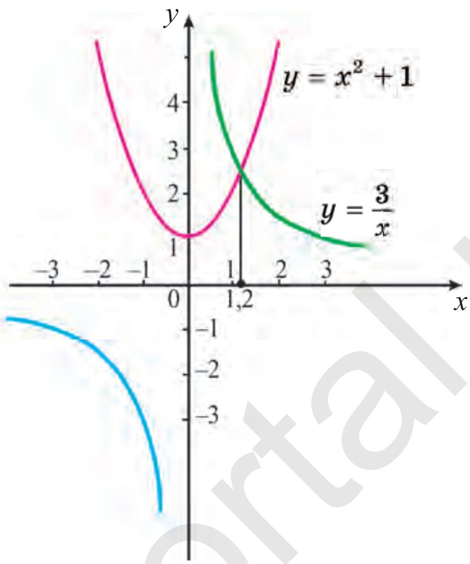
3 - есеп. Функциялардың графиктері арқылы $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ теңдеуін шешіңдер.

Бір координаталар жазықтығында $y = \frac{3}{x}$ және $y = x^2 + 1$ функция-ларының графиктерін саламыз (42- сурет).

△ $x < 0$ болғанда $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ теңдеудің түбірлері жоқ, себебі $\frac{3}{x} < 0$, бірақ $x^2 + 1 > 0$. $x > 0$ болғанда бұл теңдеудің бұл функциялар қиылысу нүктесінің абсциссасына тең бір түбірі бар. 42- суреттен көрініп тұрғандай, $x_1 \approx 1{,}2$. Теңдеудің бұдан басқа оң түбірлері жоқ, себебі $x > x_1$ болғанда $y = \frac{3}{x}$ функциясы кемиді, ал $y = x_2 + 1$ функциясы өседі. Демек, функциялардың



41-rasm.



42-rasm.

графиктері $x > x_1$ болғанда қиылыспайды. Дәл сол себепке орай олар $0 < x < x_1$ болғанда да қиылыспайды.

Жауабы: $x_1 \approx 1{,}2$. ▲

4 - есеп. Теңдеуді шешіңдер:

$$\sqrt{2 - x^2} = x\,. \qquad (1)$$

△ Айталық, x – берілген теңдеудің түбірі болсын, яғни ол (1) теңдеуді дұрыс теңдікке айналдыратын сан. Теңдеудің екі жағын да квадрат дәрежеге шығарамыз:

$$2 - x^2 = x^2. \qquad (2)$$

Бұдан $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Демек, (1) теңдеудің түбірлері бар деп ұйғарып, біз бұл түбірлер тек 1 және –1 сандары болуы мүмкін екенін біліп алдық, енді бұл сандар (1) теңдеудің түбірі болатынын немесе болмайтынын тексеріп көрелік. $x = 1$ болғанда (1) теңдеу дұрыс теңдікке айналады: $\sqrt{2 - 1^2} = 1$. Сондықтан да $x = 1$ (1) теңдеудің түбірі.

$x=-1$ болғанда (1) теңдеудің сол жақ бөлігі $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$- ге тең, ал оң жақ бөлігі -1- ге тең, демек $x=-1$ (1) теңдеудің түбірі бола алмайды.

Жауабы: $x=1$. ▲

Қаралған мысалда (1) теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттау арқылы шештік. Бұдан (2) теңдеу келіп шықты.

(1) теңдеудің бір ғана түбірі бар: $x=1$, ал (2) теңдеудің екі түбірі бар: $x_{1,2}=\pm 1$, яғни (1) теңдеудің (2) теңдеуге өту кезінде *бөгде түбірлер* деп аталатын түбірлер пайда болды. Бұның себебі мынадай, $x=-1$ болғанда (1) теңдеу $1=-1$ болатын қате теңдікке айналады, бұл қате теңдіктің екі жағын да квадрат дәрежеге шығарғанда $1^2=(-1)^2$ болатын дұрыс теңдік келіп шықты.

! **Теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттағанда бөгде түбірлер пайда болуы мүмкін.**

Теңдеуді оның екі жақ бөлігін де квадраттап шешкенде тексеру қажет.

(1) теңдеу – *иррационал теңдеуге* мысал.

Иррационал теңдеуге тағы да мысал келтірейік:

$$\sqrt{3-2x}=1-x;\ \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}\,.$$

Бірнеше иррационал теңдеудің шешімдерін табайық.

5- есеп. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттасақ:

$$5-2x=x^2-2x+1$$

немесе $x^2=4$, бұдан $x_1=2$, $x_2=-2$. Табылған түбірлерді теңдеуге қойып тексереміз:

$x=2$ болғанда, теңдеудің сол жағы $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$- ге тең, оң жағы $1-2=-1$- ге тең. $1\neq -1$ болғандықтан $x=2$ берілген теңдеудің түбірі болмайды.

$x=-2$ болғанда, теңдеудің сол жағы $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=3$- ке тең, оң жағы $1-(-2)=3$- ке тең. Демек, $x=-2$ берілген теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x=-2$. ▲

6- есеп. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Бұл теңдеуді $\sqrt{x-2}=-3$ түрінде жазайық.

Арифметикалық түбір теріс болуы мүмкін емес, сондықтан бұл теңдеудің түбірлері жоқ.

Жауабы: Түбірлері жоқ. ▲

7-есеп. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△ Теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттасақ:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Ұқсас мүшелерін ықшамдап, теңдеуді былай жазамыз:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ немесе } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттасақ:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ немесе } x^2-12x+20=0,$$

бұдан $x_1=2$, $x_2=10$. Тексергенде 2 және 10 сандарының әрқайсысы берілген теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

8- есеп. Теңсіздікті шешіңдер: $\sqrt{5-x}\le 7+x$.

△ Теңсіздік x- тің $-7\le x\le 5$ мәндерінде мағыналы болады. Егер теңсіздіктің шешімі болса, шешім осы $[-7;5]$ кесіндіге тиісті болады. Теңсіздіктің екі жағын да квадраттасақ және ықшамдағаннан соң $x^2+15x+44\ge 0$ теңсіздікті аламыз. Оның шешімі $x\le -11$, $x\ge -4$ екені айқын. Бұл аралықтардың $[-7;5]$ кесіндімен ортақ бөлігі $-4\le x\le 5$, яғни $[-4;5]$ кесінді болады.

Жауабы: $-4\le x\le 5$. ▲

Жаттығулар

110. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\le 27$; 3) $y^3\ge 64$; 4) $y^3<125$;
5) $x^4\le 16$; 6) $x^4>625$; 7) $x^5\le 243$; 8) $x^6\ge 64$.

111. 1) Егер квадраттың ауданы 361 см^2- ден үлкен екені белгілі болса, онда оның қабырғасының ұзындығы қандай болады?
2) Егер кубтың көлемі 343 дм^3- ден үлкен екені белгілі болса, онда оның қыры қандай болуы мүмкін?

112. (Ауызша.) 7 саны теңдеудің түбірі болатынын дәлелдеңдер:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Ауызша.) Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Теңдеуді шешіңдер (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;

4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;

3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;

4) $\sqrt{0,4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

---

118. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;

4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Берілген теңдеудің түбірлері неліктен жоқ екендігін түсіндіріңдер:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;

4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Теңдеуді шешіңдер (**120–122**):

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. x- тің қандай мәндерінде функциялар бірдей мәндерді қабылдайды:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\le 1$; 3) $\sqrt{2-x}\ge x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\le x+1$.

I тарауға арналған жаттығулар

125. $y = 2x^2 - 5x + 3$ квадрат функция x- тің қандай мәнінде: 1) 0- ге; 2) 1- ге; 3) 10- ға; 4) –1- ге тең мәндерді қабылдай алады.

126. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $x^2 \le 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \ge 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Параболаның координата осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар:
1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Парабола төбесінің координаталарын табыңдар:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Функцияның графигін салыңдар және график бойынша оның қасиеттерін анықтаңдар:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Тік төртбұрыштың периметрі 600 м. Тік төртбұрыштың ауданы ең үлкен болуы үшін оның табаны мен биіктігі қандай болуы керек?

131. Егер $y = x^2 + px + q$ квадрат функция:

1) $x = 0$ болғанда 2- ге тең мәнді, ал $x = 1$ болғанда 3- ке тең мәнді қабылдайтын болса, p және q коэффициенттерін табыңдар;
2) $x = 0$ болғанда 0- ге тең мәнді, ал $x = 2$ болғанда 6- ға тең мәнді қабылдайтын болса, p және q коэффициенттерін табыңдар.

132. x- тің қандай мәндерінде функциялардың мәні тең болады:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ және $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ және $y = |3x - 3|$?

Теңсіздікті шешіңдер (**133–137**):

133. 1) $(x - 5,7)(x - 7,2) > 0$; 2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2,5)(3 - x) < 0$; 4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 > 36$; 3) $4 > x^2$; 4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$; 2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$.

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$; 2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$; 4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$; 6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$; 2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;

3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;

6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$; 8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Теңсіздікті шешіңдер (**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\geq 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\leq(x+1)^2$;

3) $x(1-x)>1{,}5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\geq x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2}<0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1}\leq 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geq 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2}\leq 0$.

140. Катер 4 сағаттан аспайтын уақыт ішінде өзен ағысымен 22,5 км жүзуі және кері қайтуы керек. Егер өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, катер суға қарағанда қандай жылдамдықпен жүзуі керек?

141. Функциялардың графиктерін бір координата жүйесінде салыңдар және x- тің қандай мәндерінде бір функцияның мәні екіншісінен үлкен (кіші) болатынын анықта, нәтижесін, сәйкес теңсіздікті шешіп, тексеріңдер:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$.

Функциялар графиктерінің қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар (**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$; 3) $y=3x$, $y=\frac{3}{x}$.

143. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

144. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^4\leq 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\leq -32$.

Теңдеуді шешіңдер (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

147. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; | 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; | 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; | 5) $y=\sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x+7}}$; | 6) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Функцияның көрсетілген аралықта өсуін немесе кемуін анықтаңдар:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}, x>3$ аралықта; 2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}, x<2$ аралықта;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}, x\geq 0$ аралықта; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x<-1$ аралықта.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. $y=-x^2+2x+3$ функция графигінің көмегімен, функцияның мәні 3- ке тең болатын x- тің мәнін табыңдар.

2. $y=1-x^2$ функция графигі бойынша функция оң мәндер; теріс мәндер қабылдайтын x- тің мәндерін табыңдар.

3. 1) $y=2x^2$; 2) $y=-3x^2$ функция қандай аралықта өседі? Кемиді? Осы функцияның графигін салыңдар.

4. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$;

3) $y=\dfrac{1}{(x\quad 2)^2}+1$; 4) $y=x^7+x^5+1$.

150. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\leq 32$; 3) $(x^2-5x)^5>216$.

151. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}$.

152. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 2) $\sqrt{x^2-3x}<2$; 3) $\sqrt{3x-2}>x-2$;

4) $\sqrt{2x+1}\leq x-1$; 5) $\sqrt{3-x}>1-x$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>4-x$.

I тарауға арналған сынақ (тест) жаттығулары

Сынақ жаттығуларының әрқайсысында 4-еуден „жауап“ берілген. 4 „жауаптың“ тек қана біреуі дұрыс, қалғандары дұрыс емес. Оқушылардан сынақ жаттығуларын орындап немесе басқа тұжырымдаумен сол дұрыс жауапты табу (оны белгілеу) талап етіледі.

1. $y=ax^2$ парабола мен $y=5x+1$ түзудің қиылысу нүктелерінің бірінің абсциссасы $x=1$ болатын a -ның мәнін табыңдар.

A) $a=6$; B) $a=-6$; C) $a=4$; D) $a=-4$.

Параболаның координаталық осьтермен қиылысу нүктелерінің координаталарын табыңдар (**2–3**):

2. $y=x^2-2x+4$.

A) $(-1; 3)$; B) $(3; 1)$; C) $(1; 3)$; D) $(0; 4)$.

3. $y=6x^2-5x+1$.

A) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(\frac{1}{2}; 0)$, $(0; 1)$; B) $(-\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(1; 0)$;

C) $(0; \frac{1}{3})$, $(0; \frac{1}{2})$, $(0; 1)$; D) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; -1)$.

Парабола төбесінің координаталарын табыңдар (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; –4); D) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) (–3; –4); B) (–5; –1); C) (–1; –5); D) (3; 4).

6. Абсциссалар осін $x = 1$ және $x = 2$ нүктелерде, ордината осін $y = \frac{1}{2}$ нүктеде қиып өтетін параболаның теңдеуін жазыңдар.

A) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; B) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$;

C) $y = x^2 - 3x + 2$; D) дұрыс жауабы берілмеген.

Парабола қандай ширектерде орналасқан (**7–8**)?

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, III, IV; D) I, II, III, IV.

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, II.

9. Екі оң сандардың қосындысы 160. Осы сандар кубтарының қосындысы ең кіші болатын сандарды табыңдар:

A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80.

10. $y = x^2 - 4x + 3$ функцияның ең кіші мәнін табыңдар:

A) –1; B) 1; C) 7; D) –8.

Теңсіздікті шешіңдер (**11–15**):

11. $2x^2 - 8 \le 0$.

A) $-2 \le x \le 2$; B) $-2 \le x$; C) $x \ge 2$; D) $0 \le x \le 4$.

12. $3x^2 - 9 \ge 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$; D) $x \ge 3$.

13. $6x^2 + 5x - 6 > 0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; B) $x < \frac{3}{2}$; C) $x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-3x\quad 10} \le 0.$

A) $-2<x\le 2$; B) $-2<x<5$; C) $x\neq -2,\ x\neq 5$; D) $-2<x<0$.

15. $\dfrac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \ge 0.$

A) $-2<x<3$; B) $x<-2;\ -1\le x\le 1,\ x>3$;

C) $-1\le x<3$; D) $x\neq -2,\quad x\neq 3$.

16. $x^2+6x+5<0$ теңсіздігінің барлық бүтін шешімдерінің қосындысын табыңдар:

A) 10; B) 9; C) –9; D) –10.

17. a- ның қандай мәндерінде $ax^2+4x+9a<0$ теңсіздігі x- тің барлық мәндерінде орынды болады?

A) $a<-\dfrac{2}{3}$; B) $a>\dfrac{2}{3}$; C) $a<-1$; D) $a>1$.

18. a- ның қандай мәндерінде $ax^2-8x-2<0$ теңсіздігі x- тің барлық мәндерінде орынды болады?

A) $-8<a<8$; B) $a\ge 8$; C) $a<8$; D) $a<-8$.

19. $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ функцияның анықталу аймағын табыңдар:

A) $1\le x\le 2$; B) $1<x<2$; C) $x\ge 2,\ x\le 1$; D) $-2\le x\le -1$.

20. Функциялардың қайсылары жұп функция?

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y-x^2+|x|$; 3) $y=\ \ 3+\dfrac{5}{x^4}$; 4) $y=x^2-\dfrac{3}{x}$.

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.

21. Функциялардың қайсылары тақ функция?

1) $y=6x$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=4x+7$; 4) $y=2x^3-10$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

1-есеп. Жеңіл автомобиль тұрақты v жылдамдықпен қозғалуда. Стоп сызығына дейін 50 метр қалғанда бағдаршамның жасыл шырағы өшіп-жана бастады. Осыдан жарты секунд өткеннен соң жүргізуші тежелуді бастады және стоп сызығына жетпей тоқтады. Жол қозғалысы ережелерінен бізге белгілі болғанындай, $v_0 = 50$ км/сағ жылдамдықпен қозғалған автомобильдің тежелу жолы $S_0 = 23{,}5$ м, мұндағы тежелу жолы деп тежелу басталғаннан аяқталғанға дейінгі автомобиль жүріп өткен жолға айтылады. Автомобильдің бағдаршам өшіп-жануы басталған кездегі v жылдамдығын бағалаңдар.

△ Бағдаршамның өшіп-жануы басталғанынан тежелу басталғанға дейін автомобиль 0,5 v метр қашықтықты, ал кейін физика курсынан белгілі болған kv^2 тежелу жолын жүріп өтеді, мұнда:

$$k = \frac{s_0}{\upsilon_0^2} = \frac{23{,}5}{13{,}88^2} \approx 0{,}12.$$

Демек, жалпы жүріп өтілген қашықтық, 50 км/сағ жылдамдықтың метр секундтарда 13,88 м/с екенін ескерсек, 50 метрден аспауы керек екендігінен

$$0{,}5v + 0{,}12v^2 \leq 50,$$

яғни

$$0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 \leq 0. \qquad (1)$$

△ Бұл теңсіздікті шешу үшін алдымен $0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50$ үшмүшенің түбірлерін табамыз:

$$0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 = 0,$$

бұдан

$$12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Теңдеуді шешеміз:

$$\upsilon_{1,2} = \frac{-50 - \sqrt{50^2 - 4 \cdot 12(-5000)}}{2 \cdot 12} = \frac{-25(1 - \sqrt{97})}{12},$$

бұдан $\upsilon_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ және $\upsilon_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Онда, (1) теңсіздіктің шешімі $\upsilon_1 \leq \upsilon \leq \upsilon_2$ аралықтағы сандардан құралған. Бірақ есептің мазмұнына орай, $\upsilon > 0$, демек, бағаланып жатқан υ жылдамдық $0 < \upsilon \leq \upsilon_2$ аралықтан сыртқа шығып кетпеуі тиіс, яғни $\upsilon \leq \frac{-25(1 \pm \sqrt{97} - 1)}{12} \approx 18,43$ м/с немесе 66,35 *км/сағ*- тан аспауы керек.

Жауабы: жылдамдық 66,35 *км/сағ*- тан аспауы керек. ▲

2- есеп. Базарда белгілі бір түрдегі тауарлардың *n* данасы бар және олардың данасы *p* ақша бірлігіне сатылатын болсын. Мониторинг мынаны көрсетуде, бұл тауарға болған сұраныс артқанда оның бағасы артады және әкелінетін осындай тауарлардың саны $n = 40p$ формула бойынша өседі. Екінші жағынан, базарға кіріп келіп, сатып алушыларға ұсынылатын тауарлардың саны *n* өсе бастауымен оның бағасы кері пропорционал түрде түсе бастайтыны белгілі:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Базарға кіріп келетін тауарлар санына қойылатын шартты анықтаңдар.

△ Есепте айтылған шартты анықтау үшін ұсынылған баға $\frac{150}{n-40}$ сұраныс пен байланысты баға $\frac{n}{40}$- дан кем болмайтындығы шартын пайдаланамыз:

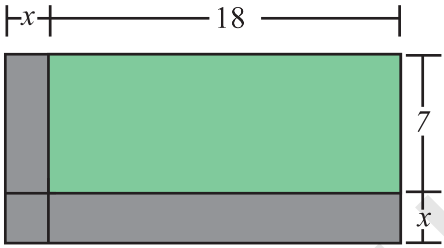
$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

Бұдан

$$n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

теңсіздігі шығады. Оның шешімдері $-60 \leq n \leq 100$. Есептің мазмұнына орай базарға кіріп келетін тауарлар саны *n* натурал сан және ол 100- ден артпауы керек.

Жауабы: $n \leq 100$. ▲



43-*сурет.*

3-есеп. Сен 7 метрге 18 метрлік баққа екі жағына тас жолақ жатқызбақшысың (43-сурет). Бірақ сен ол үшін 54 квадрат метрден артық болмаған орынды қаптауға жететін қаржы бөле аласың. Мұндай жолақтың ені ең көбі қандай болуы керек?

△ Көрініп тұрғанындай, есептің шешімін табу үшін жалпы аудан $(x + 18) \cdot (x + 7)$ кв.м- ден бақтың ауданы болған $18 \cdot 7 = 126$ кв.м- ді айырып, нәтиже жолақтың ауданы 54 кв.м- ден артпайтынын ескеруіміз қажет:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \le 54. \qquad (1)$$

Бұдан

$$x^2 + 25x - 54 \le 0 \qquad (2)$$

квадрат теңсіздікті шығарамыз. $x^2+25x-54$ квадрат үшмүшенің түбірлері $x_1 = -27$ және $x_2 = 2$ болғандықтан (2) теңсіздіктің шешімдері $-27 \le x \le 2$ аралықтағы сандардан құралады. Бірақ есептің мазмұнына орай жолақтың ені x теріс саны немесе нөл бола алмайды. Сондықтан жолақтың ені $0 < x \le 2$ теңсіздікті қанағаттандыратын сан болады. Демек, жолақтың ені 2 метрден артпауы керек.

Жауабы: жолақтың ені 2 метрден артпауы керек. ▲

Есептер

1. Жүк машинасы v тұрақты жылдамдықпен қозғалуда. Стоп сызығына дейін 50 метр қалғанда бағдаршамның жасыл шырағы өшіп-жана бастады. Осыдан жарты секунд өткеннен соң жүргізуші тежелуді бастады және стоп сызығына жетпей тоқтады. Жол қозғалысы ережелерінен белгілі болғанындай, $v_0 = 50$ км/сағ жылдамдықпен қозғалған жүк машинасының тежелу жолы $S_0 = 28{,}9$ м. Жүк машинасының бағдаршам өшіп-жануы басталған кездегі v жылдамдығын 0,01 дәлдікпен бағалаңдар.

2. Базарда белгілі бір түрдегі тауарлардың n данасы бар және олардың данасы p ақша бірлігіне сатылатын болсын. Мониторинг мынаны көрсетуде, бұл тауарға болған сұраныс артқанда оның бағасы артады және әкелінетін осындай тауарлардың саны $n = 60p$ формула бойынша өседі. Екінші жағынан, базарға кіріп келіп, сатып алушыларға ұсынылатын тауарлардың саны n өсе бастауымен оның бағасы кері пропорционал түрде түсе бастайтыны белгілі:

$$p = \frac{60}{n - 40}.$$

Базарға кіріп келетін тауарлар санына қойылатын шартты анықтаңдар.

3. Компания жарнамаға жалпы x (100 мыңдарда) сум жұмсаған және соның нәтижесінде P пайда көрген болсын, мұндағы $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Жарнамаға қанша ақша жұмсалса, нәтижеде ең көп пайда алынады?

4. Өнім шығаратын шағын кәсіпорынның айлық пайдасы $P = 250n - n^2$ (мың сумда) модельмен өрнектелген болсын, мұндағы n – өндірілген және сатылған өнім саны. Ең көп пайда алу үшін шағын кәсіпорын айына неше өнім шығаруы және сатуы керек?

5. Оңтүстік Американың жаңбырлы ормандарының бірінде сирек кездесетін түрдегі жәндік табылды және қоршаған ортаны зерттейтін маман жәндіктерді қорғалатын аумаққа өткізді. Өткізілгеннен соң жәндіктердің саны t айда

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t)$$

заңдылықпен артып барған болса:

1) $t = 0$- де жәндіктердің саны қанша болған?

2) 10 жылдан соң олардың саны қанша болады?

3) Қашан олардың саны 549 болады?

Әбу Райхан Беруни
(973–1048)

„Функция“ сөзі латын тіліндегі „*functio*“ сөзінен алынған, ол „пайда болу“, „орындау“ деген мағынаны білдіреді. Функцияның алғашқы анықтамалары **Г. Лейбниц** (1646–1716), **И.Бернулли** (1667–1748), **Н.И.Лобачевскийлердің** (1792–1856) шығармаларында айтылған.

Функцияның қазіргі анықтамасын білмесе де, ежелгі ғалымдар айнымалы шамалар арасында функционалдық тәуелділік болу қажеттігін түсінген.

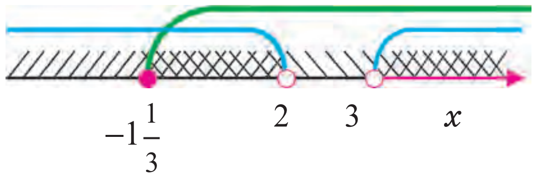
Төрт мың жыл бұрын Вавилон ғалымдары радиусы r дөңгелектің ауданын — қателігі өте аз болған – $S=3r^2$ формуламен анықталатынын дәлелдеген.

Санның дәрежесі туралы ең алғашқы мәліметтер ежелгі Вавилон ойшылдарынан бізге дейін жетіп келген жазбаларда бар. Оларда натурал сандардың квадраттарының, кубтарының кестелері берілген.

Сандардың квадраттарының, кубтарының кестесі, логарифмдер кестесі, тригонометриялық кестелер, квадрат түбірлер кестесі шамалар арасындағы тәуелділіктің кесте тәсілінде берілгенін анық байқау қиын емес.

Ұлы энциклопедист ғалым **Әбу Райхан Беруни** өзінің шығармаларында функция ұғымын, оның қасиеттерін пайдаланған. Әбу Райхан Беруни өзінің әйгілі „Маъсуди Заңы“ шығармасының 6- мақаласында аргумент және функцияның өзгеру аралықтарын, функцияның таңбалары және ең үлкен, ең кіші мәндерінің анықтамасын келтірген.

II ТАРАУ. ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕЛЕРІ



13-§. ЕКІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ ТЕҢДЕУ ҚАТЫСҚАН ЕҢ ЖАЙ ЖҮЙЕЛЕРДІ ШЕШУ

1- есеп. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $\sqrt{13}$ см-ге тең, ал оның ауданы 3 см^2. Үшбұрыштың катеттерін тап.

△ Үшбұрыштың катеттері x және y сантиметрге тең болсын. Пифагор теоремасы және тік бұрышты үшбұрыштың ауданы формуласын пайдаланып, есеп шартын былай жазамыз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Жүйенің бірінші теңдеуіне 4- ке көбейтілген екінші теңдеуін қосып, төмендегіні аламыз:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

бұдан $(x + y)^2 = 25$ немесе $x + y = \pm 5$. x және y- тер оң сандар болғаны үшін $x + y = 5$ болады. Бұл теңдеуде y- ті x арқылы өрнектейміз және (1) жүйе теңдеулерінің біріне, мысалы, екінші теңдеуге жазамыз:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Пайда болған теңдеуді шешеміз:

$$5x - x^2 = 6, \ \ x^2 - 5x + 6 = 0, \ \ x_1 = 2, \ x_2 = 3.$$

Бұл мәндерді $y = 5 - x$ формулаға қойып, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$- ні табамыз. Екі жағдайда да катеттердің бірі 2 см, екіншісі 3 см.

Жауабы: 2 см, 3 см. ▲

2- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ Виет теоремасына кері теорема бойынша, x және y сандар

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

квадрат теңдеулердің түбірлері болады. Бұл теңдеуді шешіп төмендегіні аламыз: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Демек, жүйенің шешімдері төмендегі сандар жұбы болады: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ және $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Жауабы: (5; –2), (–2; 5). ▲

3- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

△ Бұл жүйені орнына қою тәсілімен шешеміз:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Бұл теңдеуді ықшамдап, төмендегіні пайда етеміз: $5x^2 - -48x + 43 = 0$, бұдан $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. x- тің мәнін $y = 3x - 6$ формулаға қойып, $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$ екенін табамыз.

Жауабы: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

4- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Жүйенің бірінші теңдеуін былай жазамыз:

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Бұған $x-y=2$- ні қойып, $x+y=8$- ді аламыз. Сөйтіп,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Бұл жүйені қосу тәсілімен шешіп, $x=5$, $y=3$ екенін табамыз.
Жауабы: (5; 3). ▲

Жаттығулар

153. Екі белгісізі бар бірінші дәрежелі теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = -11, \\ xy = 18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 - y^2 = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x + y = 7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = 7. \end{cases}$

159. Екі санның қосындысы 18- ге, ал олардың көбейтіндісі 65- ке тең. Сол сандарды табыңдар.

160. Екі санның орташа арифметикалығы 20- ға, ал олардың орташа геометриялығы 12- ге тең. Сол сандарды табыңдар.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**161–163**):

161. 1) $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

164. Тік төртбұрыш пішінді аланды 1 км ұзындықтағы қабырғамен қоршау керек. Егер аланның ауданы 6 hа болса, оның ұзындығы мен ені қандай болу керек?

14-§. ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУДІҢ ТҮРЛІ ТӘСІЛДЕРІ

1-есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Жүйе теңдеулерін мүшелеп қосып, пайда етеміз: $2x+2y=8$, бұдан $y=4-x$. Бұл өрнекті жүйенің кез келген, мысалы, екінші теңдеуіне қоямыз:

$$x + 4 - x - 2x(4-x) = -2,$$
$$4-8x+2x^2=-2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

$y=4-x$ екендігінен $y_1=3$, $y_2=1$.

Жауабы. (1; 3), (3; 1). ▲

2-есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Жүйенің бірінші теңдеуінен $y^2=x-3$. Бұл өрнекті жүйенің екінші теңдеуіне қоямыз:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0.$$

Бұдан $x_1=7$, $x_2=-4$.

$y^2=x-3$ екендігінен y- тің мәнін табамыз:

1) Егер $x=7$ болса, онда $y^2 = 7 - 3$, $y^2=4$, бұдан $y=2$ немесе $y=-2$;

2) Егер $x=-4$ болса, онда $y^2 = -4 - 3 < 0$, демек, нағыз түбірі жоқ.

Жауабы: (7; 2), (7; –2). ▲

Мынаны айта кету қажет, егер де бірінші теңдеуде x- ті y арқылы өрнектеп, екінші теңдеуге қойылса, биквадрат теңдеуді шешуге әкелетін еді.

3- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Егер $(x; y)$ – жүйенің шешімі болса, онда $x \neq 0$ және $y \neq 0$. Жүйенің екінші теңдеуін былай жазамыз: $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{8}$.

Нәтижеде пайда болған теңдеуге $x + y = 12$ мәнін қоямыз: $\dfrac{12}{xy} = \dfrac{3}{8}$, бұдан $xy = 32$.

Берілген жүйені шешу төмендегі жүйені шешуге келтірілді:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Виет теоремасына кері теоремаға сәйкес аламыз: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Жауабы: (4; 8), (8; 4). ▲

4- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Жүйенің екінші теңдеуін $xy(x - y) = 2$ түрінде жазып аламыз. Көрініп тұрғандай, $x \neq 0$, $y \neq 0$ va $x - y \neq 0$, олай болса жүйенің бірінші теңдеуін екінші теңдеуге бөліп, пайда етеміз:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x - y)} = \frac{7}{2};$$

$$2(x^2+xy+y^2)=7xy,$$
$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Пайда болған теңдеуді x- қа қатысты квадрат теңдеу ретінде қарап, түбірлерді табамыз:

$$x_{1,2}=\frac{5y-\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y-3y}{4}.$$

Бұдан $x_1=2y$ немесе $x_2=\frac{y}{2}$.

Жүйенің екінші теңдеуіне x- тің y арқылы табылған өрнектерді қойып, пайда етеміз:

1) егер де $x=2y$ болса, онда $4y^3-2y^3=2$, бұдан $y^3=1$ және $x=2$;

2) егер де $x=\frac{y}{2}$ болса, онда $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, бұдан $y^3=-8$, $y=-2$ және $x=-1$.

Жауабы: (2; 1), (–1; –2).

5- есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x^3+8y^3=35. \end{cases}$$

Кубтар қосындысы формуласын қолданып, жүйенің екінші теңдеуін төмендегі көріністе жазамыз:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Бұл теңдеуді жүйенің бірінші теңдеуіне бөліп, нәтижеде: $x+2y=5$- ті табамыз.

Бұл теңдеудегі $2y$- ті x арқылы өрнектейміз: $2y=5-x$ және жүйенің екінші теңдеуіне қоямыз:

$$x^3 + (5 - x)^3 = 35,$$
$$x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35,$$
$$15x^2 - 75x + 90 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$x_1 = 3,\ \ x_2 = 2.$$

Сәйкесінше, y- тің мәндерін табамыз:

1) $2y=5-3$, бұдан $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, бұдан $y_2 = \frac{3}{2}$.

Жауабы: $(3;\ 1)$, $(2;\ \frac{3}{2})$.

6-есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ деп белгілесек, $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$ болады. Олай болса жүйенің екінші теңдеуі $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$ көрініске келеді. Бұл теңдеудің екі жағын да t- ға көбейтеміз:

$$t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0.$$

Бұдан $t_{1,2} = \frac{5}{12} - \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} - \frac{13}{12}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$.

$t > 0$ болғаны үшін $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$ немесе $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$, бұдан $x = \frac{9}{4}y$. x үшін бұл өрнекті жүйенің бірінші теңдеуіне қойып, мынаны пайда етеміз: $\frac{9}{4}y - y = 5$, $\frac{5}{4}y = 5$, $y=4$, сол себепті $x=9$.

Жауабы: $(9;\ 4)$.

Жаттығулар

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**165–175**):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

15-§. ЕКІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ БІР БЕЛГІСІЗІ БАР ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕЛЕРІ

1-есеп. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Бұл теңсіздіктердің біріншісі квадрат теңсіздік, ал екіншісі сызықты теңсіздік. Бірінші теңсіздіктің шешімдері 6-параграфтағы 2-есепте көрсетілгендей $x<2$ және $x>3$ аралықтардағы барлық сандардан құралған. Екінші теңсіздіктің шешімдері $x \geq -1\frac{1}{3}$ аралықтағы сандар. Бір сандар осінде бірінші және екінші теңсіздіктердің шешімдерінің жиынтығын бейнелейік. Көрініп тұрғандай, жүйенің екі теңсіздігін бір уақыттың өзінде қанағаттандыратын сандар $-1\frac{1}{3} \le x < 2$ және $x < 3$ аралықтардан құралған (44- сурет).

44- сурет.

Жауабы: $-1\frac{1}{3} \le x < 2, x > 3.$ ▲

2- есеп. Теңсіздікті шешіңдер:

$$|x^2-x-1|<1.$$

△ $|x^2-x-1|<1$ теңсіздік екі жақтама теңсіздікке тең күшті екенін білеміз:

$$-1<x^2-x-1<1.$$

Бұл екі теңсіздіктен құралған жүйеге тең күшті:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1 \end{cases}$$

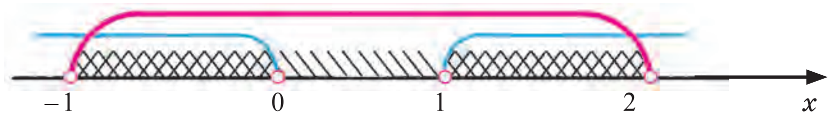
немесе

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Алдымен бірінші теңсіздікті шешеміз: $D=(-1)^2-4(-2)=9>0$, демек, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$ Бұдан бірінші теңсіздікті қанағаттандыратын сандар $-1<x<2$ аралық екені келіп шығады.

Екінші теңсіздікті шешеміз: $x^2-x=x(x-1)>0$. Демек, бұл теңсіздіктің шешімі $x<0$ және $x>1$ 1аралықтардағы барлық сандар.

Екі теңсіздіктің де шешімдерін бір сандар осінде бейнелейміз (45-сурет).



45- сурет.

Бұдан жүйенің шешімі $-1<x<0$ және $1<x<2$ аралықтарда жатқан барлық сандардан құралатыны келіп шығады.

Жауабы: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

3-есеп. Функцияның анықталу аймағын тап:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

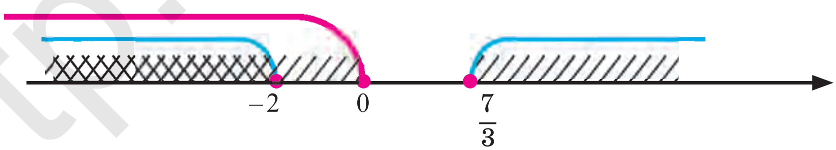
△ Квадрат түбір астындағы сандар теріс болмауы шарт болғандықтан берілген функцияның анықталу аймағы төмендегі теңсіздіктер жүйесінің шешімінен құралады:

$$\begin{cases}3x^2-x-14\geq 0,\\ -x\geq 0.\end{cases}$$

Бірінші теңсіздікті шешеміз. $3x^2-x-14$ квадрат үш мүшенің дискриминанты $D=(-1)^2-4\cdot 3(-14)=169$, демек, $x_1=\frac{1-13}{6}=-2$, $x_2=\frac{1+13}{6}=\frac{7}{3}$. Сол себепті және квадрат үш мүшенің тармақтары жоғарыға бағытталғандықтан бірінші теңсіздіктің шешімдері $x\leq -2$ және $x\geq\frac{7}{3}$ аралықтардан тұрады.

Көрініп тұрғандай, екінші теңсіздікті –1-ге көбейтіп, анық шешімдері $x\leq 0$ аралықтан алынған барша сандардан құралған.

Бірінші және екінші теңсіздіктердің шешімдерін бір сандар осінде өрнектейміз (46- сурет).



46- сурет.

Бұдан жүйенің шешімі $x\leq -2$ екені келіп шығады.

Жауабы. $x\leq -2$. ▲

Жаттығулар

176. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ 4x + 9 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \le 0, \\ 2x + 7 < 0. \end{cases}$

177. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $|x^2 - 6x| < 27$; 2) $|x^2 + 6x| \le 27$;

3) $|x^2 + 4x| < 12$; 4) $|x^2 - 4x| \le 12$.

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер (**178–181**):

178. 1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 \le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + x + 6 > 0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ x^2 - 7x + 12 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ x^2 + x - 2 \ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x - x^2 > 0, \\ 36 - x^2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x + x^2 < 0, \\ 49 - x^2 > 0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2 + x + 20 \le 0, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 4x < 0, \\ -x^2 + x + 2 \ge 0. \end{cases}$

182. Функцияның анықталу аймағын табыңдар:

1) $y = \sqrt{-x^2 - 6x - 8} + \sqrt{\frac{1}{3}x + 2}$, 2) $y = \sqrt{x - x^2} - \sqrt{-x^2 + 12x - 35}$.

16-§. ЖАЙ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ДӘЛЕЛДЕУ

Теңсіздіктерді дәлелдеудің түрлі тәсілдері бар. Олардың кейбіреулерінің қолданылуын қарастырайық.

1-есеп. Екі оң a және b санның орташа арифметикалығы осы сандардың орташа геометриялығынан кіші еместігін дәлелде:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Теңсіздікті *тікелей сипаттама негізінде* дәлелдейміз, мұнда $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ екенін дәлелдеу талап етіледі.

Бұл теңсіздіктің сол жақ бөлігін түрлендіріп, нәтижеде төмендегіні аламыз:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

(1) қатынаста теңдік белгісі тек $a=b$ болғанда ғана дұрыс болатынын айтпақшымыз. ▲

2-есеп. Екі оң a және b санның орташа геометриялығы осы сандардың орташа гармониялығынан кіші еместігін дәлелде:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Бұл теңсіздікті *бұрын дәлелденген* (1) *теңсіздікті* және алымы өзгермей, бөлімі кішірейгенде оң бөлшек үлкейетінін пайдаланып дәлелдейміз:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \ ▲$$

3-есеп. Кез келген оң a сан үшін теңсіздікті дәлелде:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3)$$

△ Бұл теңсіздікті *керісінше тұжырымдау тәсілімен* дәлелдейміз. Бұнда (3) теңсіздік a- ның бірде-бір оң мәнінде орындалмасын деп тұжырымдаймыз, яғни

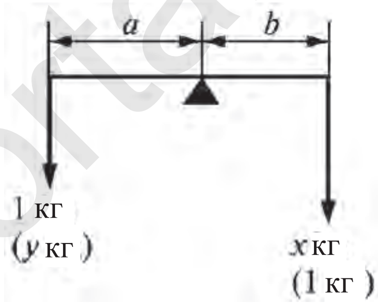
$$a + \frac{1}{a} < 2$$

теңсіздік орынды болсын. Теңсіздіктің екі бөлігін a- ға көбейтеміз:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

яғни $a^2 + 1 - 2a < 0$ немесе $(a - 1)^2 < 0$, бұл бұрыс теңсіздік, себебі кез келген шынайы санның квадраты (атап айтсақ, $(a - 1)^2$ де) теріс емес. Пайда болған қарама-қарсылықтан (3) теңсіздік кез келген оң a- да дұрыс теңсіздік екені келіп шығады. ▲

4- есеп. Сатушы алмаларды иінді таразыда тартты. Сатып алушы 1 кг алма алды, сосын сатушыдан алмалар мен тастардың орындарын алмастырып тартуын өтініп, тағы да 1 кг алма алды Егер таразы дұрыс болмаса кім зиян көреді?



47- сурет.

△ Айталық, таразының иіндері a және b- ға тең болсын (47- сурет). Суреттен көрініп тұрғанындай, $a \neq b$. Бірінші рет тартқанда сатып алушы x килограмм алма алды. Физика курсынан белгілі, $x \cdot b = 1 \cdot a$, бұдан $x = \frac{a}{b}$. Екінші рет тартқанда сатып алушы y килограмм алма алды. Тепе-теңдік шартынан $y \cdot a = 1 \cdot b$, бұдан $y = \frac{b}{a}$. Сөйтіп, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ килограмм алма сатып алынған.

$\frac{a}{b}$ және $\frac{b}{a}$ сандардың орташа арифметикалығы және орташа геометриялығы үшін теңсіздікті пайдаланып, төмендегі аламыз:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

бұдан $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Жауабы: сатушы зиян көреді. ▲

Жаттығулар

183. Кез келген $a, \ b, \ x$ - тарда теңсіздіктердің орынды екенін дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{a^2+1}{2} \geq a$; 2) $\dfrac{b^2+16}{4} \geq b$; 3) $\dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1$; 4) $\dfrac{2x}{4x^2+9} \leq \dfrac{1}{6}$.

184. Егер $ab > 0$ болса, теңсіздікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$; 2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$.

185. Егер $a \geq -1, \ a \neq 0$ болса, теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$\frac{4a^2+a+1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

186. $a \geq 0, \ b \geq 0$ және $a \neq b$ болса, онда $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ және $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ - лардың қайсысы үлкен?

187. Теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6) > 96a^2,$$

бұдан $a > 0$.

188. Егер $a > 0$ болса, теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$\frac{a+4}{2} + \frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}.$$

189. Егер a, b, c, d- лар оң сандар болса, онда

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

теңсіздікті дәлелдеңдер.

190. Егер $a \geq 0, \ \ b \geq 0$ және $c > 0$ болса, онда $\dfrac{ac^2+b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ болатынын дәлелдеңдер.

191. Егер $a > 0$, $b > 0$ болса, онда $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ теңсіздік орынды болатынын дәлелдеңдер.

192. Егер $a > 0$, $b > 0$ және $c > 0$ болса, онда

$$\left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ac}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$$

теңсіздік орынды болатынын дәлелдеңдер.

II тарауға арналған жаттығулар

193. Берілген өрнекті бір айнымалы бойынша квадрат үшмүше көрінісінде жаз:

1) $2y^2 - xy + 3$, егер $y = 3x + 1$;
2) $2xy + 3x^2 - 7$, егер $x = 2y + 1$.

194. Теңдеулер жүйесін орнына қою тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Виет теоремасына кері теореманы қолданып, теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Екі таңбалы сан өзінің цифрларының қосындысынан үш есе үлкен. Ал цифрлары қосындысының квадраты берілген саннан үш есе үлкен. Сол санды табыңдар.

2) Екі таңбалы сан өзінің цифрларының қосындысынан 4 есе үлкен. Ал цифрлары қосындысының квадраты берлген санның $\frac{3}{2}$ бөлігін құрайды. Сол санды табыңдар.

206. 1) Екі квадрат қебырғаларының қатынасы 5:4. Егер әрбір квадраттың қабырғалары 2 см-ге кемейтілсе, онда пайда болған квадраттар ауданының айырмасы 2,8 см^2- ге тең болады. Берілген квадраттардың қабырғаларын табыңдар.

2) Тік төртбұрыш ұзындығының еніне қатынасы 3:2 сияқты. Егер оларды 1 см-ден үлкейтсек, жаңа пайда болған тік төртбұрыштың ауданы бірінші тік төртбұрыштың ауданынан 3 см^2- ге үлкен болады. Бірінші тік төртбұрыштың ұзындығы мен енін тап.

207. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

208. 1) Егер $xy = 9$ және $x > 0$ екені белгілі болса, $x + y$- тің ең кіші мәнін табыңдар.

2) Егер $ab = 8$ және $b > 0$ болса, онда $2a+b$- нің ең кіші мәнін табыңдар.

209. Өрнектердің ең кіші мәнін табыңдар:

1) $4x + \frac{81}{25x}$, $(x > 0)$; 2) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$, $x > 0$;

3) $\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}$, $(y > 0)$; 4) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}$.

210. Егер $x + y = 10$ және $x > 0$, $y > 0$ болса, онда xy- тің ең үлкен мәнін табыңдар.

211. Егер $2x + y = 6$ және $x > 0$, $y > 0$ болса, онда xy- тің ең үлкен мәнін табыңдар.

212. Теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

II тарауға арналған сынақ (тест) жаттығулары

1. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

A) $x = -4$, $y = -1$; B) $x = 1$, $y = -4$;
C) $x = 4$, $y = -1$; D) (1; 4) va (4; 1).

2. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

A) $x = 3$, $y = 1$; B) $x = 5$, $y = -1$;
C) $x = 4$, $y = 0$; D) $x = 1$, $y = 3$.

3. Екі санның айырмасы 3- ке, олардың көбейтіндісі 28- ге тең. Сол сандарды табыңдар.

A) 7 және 4; B) 5 және 2; C) 14 және 2; D) 11 және 8.

4. Тік төртбұрыштың периметрі 30 м- ге, ал ауданы 56 м^2- ге тең. Оның ұзындығы енінен неше метр ұзын?

A) 1,2 м; B) 1 м; C) 2 м; D) 2,5 м.

5. 60 км қашықтықты бір велосипедші екіншісіне қарағанда 1 сағат кешірек басып өтті. Егер бірінші велосипедшінің жылдамдығы екіншісінің жылдамдығынан 5 км/сағ кем болса, әрбір велосипедшінің жылдамдығын табыңдар:

A) 20 км/сағ, 25 км/сағ; B) 10 км/сағ, 15 км/сағ;
C) 15 км/сағ, 20 км/сағ; D) 12 км/сағ, 17 км/сағ.

6. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x+20y+10xy=40, \\ x+20y-10xy=-8. \end{cases}$

A) (0,6; 4) және (12; 0,2); B) (0,4; 6) және (0,12; 2);
C) (4; 0,6) және (12; 0,2); D) (4; 0,2) және (12; 0,6).

7. Теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x-y^2=-3, \\ xy^2=54. \end{cases}$

A) (6; 4) және (4; 3); B) (–3; 6) және (6; –3);
C) (6; 3) және (3; –6); D) (6; 3) және (6; –3).

8. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x-5y=-20, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}=2. \end{cases}$$

A) (–10; 5) және (2; 5); B) (–10; 2) және (5; 5);
C) (5; –10) және (–10; 2); D) (5; 5) және (–2; 10).

9. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x^3-64y^3=56, \\ x^2y-4xy^2=4. \end{cases}$$

A) (4; $\frac{1}{2}$) және (–2; –1); B) (–2; $\frac{1}{2}$) және (4; –1);
C) (4; 1) және (–4; –2); D) (–2; –1) және (2; 1).

10. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

A) (–1;12); B) (12;–1); C) (–1;11); D) (11;–1).

11. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

A) $-4 < y < \frac{2}{3}$; B) $-4,5 < y < \frac{2}{3}$; C) $x > -4,5$; D) $x < \frac{2}{3}$.

12. Теңсіздікті шешіңдер: $|x^2 + x - 1| \le 1$.

A) $-2 \le x \le 1,\ 2 < x \le 3$; B) $-2 \le x \le -1,\ 0 \le x \le 1$;

C) $-1 \le x \le 0,\ 1 < x \le 2$; D) $x \le -2,\ x \ge 1$.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

Есеп. Екі жүк машинасы бірге істеп, жүкті 6 сағатта тасуы керек еді. Екінші машина жұмысты бастауға кеш қалғандықтан, ол келгенше бірінші машина бүкіл жүктің $\frac{3}{5}$ бөлігін тасып болды. Жүктің қалған бөлігін тек екінші машина тасыды, сөйтіп жүкті тасуға 12 сағат уақыт кетті. Жүкті әр машинаның жалғыз өзі қанша уақытта тасыған болар еді?

△ Жүк машиналары тасуы керек болған жүкті бір деп қабылдайық. Бүкіл жүкті жеке өзі тасу үшін бірінші машина жұмсайтын уақытты x сағат, екінші машина жұмсайтын уақытты y сағатпен белгілейік. Олай болса бір сағатта бірінші машина жүктің $\frac{1}{x}$ бөлігін, екінші машина $\frac{1}{y}$ бөлігін тасыған болар еді.

Бірге істеп олар бір сағатта бүкіл жүктің $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ бөлігін тасыған болар еді және есептің шарты бойынша жүкті 6 сағатта тасыған болар еді. Сол себепті, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1.$

Бірақ бірінші машина жүктің $\frac{3}{5}$ бөлігін тасуға өз уақытының $\frac{3}{5}$ бөлігін жұмсады, жүктің қалғанын екінші машина тасыды және оған өз уақытының $\frac{2}{5}$ бөлігін сарыптады. Олай болса бүкіл жүкті тасуға 12 сағат кеткенін ескерсек, екінші теңдеуді аламыз:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Есеп төмендегі теңдеулер жүйесін шешуге келтірілді:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1,\\ \frac{3}{5}\text{x}+\frac{2}{5}\text{y}=12.\end{cases}$$

Алдымен жүйені ықшамдап, сосын оны орнына қою тәсілімен шешеміз:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x=60-2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

бұдан $y^2-27y+180=0$,

$$y_{1,2}=\frac{27}{2}-\sqrt{\frac{729}{4}-180}=\frac{27}{2}-\frac{3}{2},\ y_1=15,\ y_2=12.$$

$x = -20 - \frac{2}{3}y$ формуланы пайдаланып, туындатамыз

$$x_1 = 10, \; x_2 = 12.$$

Жауабы: 10 сағат және 15 сағат – егер машиналардың жүк көтеру мүмкіндіктері әртүрлі болса;

12 сағат және 12 сағат – егер машиналардың жүк көтеру мүмкіндіктері бірдей болса. ▲

Есептер

1. 1) Бірінші тамаша залында 420, ал екінші залда 480 орындық бар. Екінші залда біріншіге қарағанда 5 қатар кем, бірақ әр қатарда бірінші залдағы әр қатардан 10 орындық көбірек. Бірінші залдағы әр қатарда неше орындық бар?

2) Қызыл залда 320, көк залда 360 орындық бар. Қызыл залда көк залдағыға қарағанда 2 қатар көп, бірақ әр қатарында көк залдың әр қатарындағыға қарағанда 4-еуден орындық кем. Қызыл залда неше орындық бар?

2. 1) Екі насос бірге 80 $м^3$ көлемдегі бассейнді біраз уақытта толтырады. Егерде жұмыс өнімділігін $1\frac{1}{3}$ есе арттырған бірінші насостың тек өзі істегенде бассейнді толтыруға 2 сағаттан көбірек уақыт қажет болар еді. Егер тек екінші насос өз жұмыс өнімділігін сағатына 1 $м^3$- ге кемейтіп істегенде бассейнді толтыруға кететін уақыт $3\frac{1}{3}$ есе көбірек болар еді (екі насос бірге істегендегі уақытқа қарағанда). Әрбір насостың жұмыс өнімділігі қандай?

2) Разряды бірдей түрлі сандағы жұмысшылардан құралған екі бригада детальдар даярлайды, мұнда әр жұмысшы жұмыс күні барысында 2 деталь даярлайды. Алдын тек бірінші бригада істеп 32 деталь даярлады. Кейін екінші бригаданың өзі істеп тағы 48 деталь даярлады. Бұл істің барлығына 4 күн уақыт кетті. Содан кейін бірге 6 күн істеп, 240 деталь даярлады. Әр бригадада нешеуден жұмысшы бар?

3. 1) Өнімнің жартысы 10% пайдамен, екінші жартысының жартысы 20% пайдамен сатылды. Егер барлық өнімді сатудан түскен жалпы пайда 12%- ды құраған болса, өнімнің қалған ширегі неше пайыз пайдамен сатылған?

2) Сауда фирмасы дүкендерге тауарды қосымша бағамен жеткізіп береді: тауардың $\frac{3}{5}$ бөлігіне 5 % үстеме ақы қойып, қалған тауарлардың жартысына 4% үстеме ақы қойып сатылды. Егер барлық тауарға қойылған үстеме ақы 7%- ды құраған болса, қалған тауарлардың екінші жартысына пайыз есебінде қандай үстеме ақы қойылған?

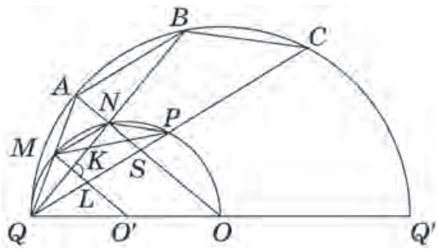
4. 1) Екі заттың қоспасы бар. Егерде осы қоспаға екінші заттан 3 кг қосылса, онда оның қоспадағы мөлшері пайыздарда екі есе көбейеді, егер бастапқы қоспаға бірінші заттан 3 кг қосылса, онда екінші заттың мөлшері пайыз есебінде екі есе кемейеді. Әр заттың бастапқы қоспадағы массасын табыңдар.

2) Екі сұйықтықтың араласпасы бар. Егер осы араласпаға бірінші сұйықтықтан 8 литр құйылса, онда оның араласпадағы концентрациясы екі есе артады, егер бастапқы араласпаға екінші сұйықтықтан 8 литр құйылса, онда бірінші сұйықтықтың концентрациясы бір жарым есе кемейеді. Әр сұйықтықтың араласпадағы мөлшерін табыңдар.

5. Ұшақ A- дан B- ға дейін жел бағытында және B- дан A- ға дейін желге қарсы ұшты, мұнда желдің жылдамдығы өзгермеді. Басқа кезде ұшақ осы маршрут бойынша рейсті желсіз күні жүзеге асырды. Екі жағдайда да самолеттің моторлары бірдей қуатпен істеді. Қай жағдайда жалпы ұшуға аз уақыт кетеді?

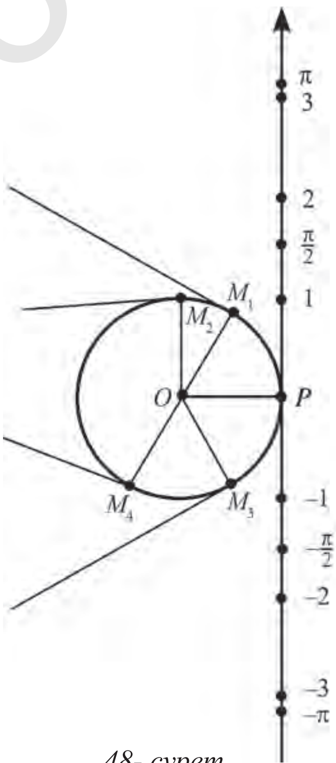
6. Екі тракторшы жер алаңын p күнде жырта алады. Егер бірінші тракторшы алаңның жартысын жыртса, соң екінші тракторшы қалған бөлігін жыртса, онда q күн қажет болар еді. $q \geq 2p$ екенін дәлелдеңдер.

III ТАРАУ. ТРИГОНОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТТЕРІ



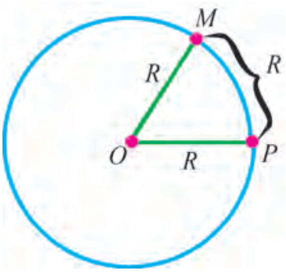
17-§. БҰРЫШТЫҢ РАДИАНДЫҚ ӨЛШЕМІ

Вертикаль түзу сызық ортасы O нүктеде жататын және радиусы 1- ге тең шеңберге P нүктеде жанасатын болсын (48- сурет). Бұл түзу сызықты басы P нүктедегі сан осі деп, ал жоғары бағытты түзу сызықтың оң бағыты деп санаймыз. Сан осіндегі шеңбердің радиусын ұзындық бірлігі етіп аламыз. Түзу сызықта бірнеше нүкте белгілейік: $\pm 1,\ \pm\frac{\pi}{2},\ \pm 3,\ \pm\pi$ (π – жуықтап алғанда 3,14- ке тең иррационал сан екенін ескертеміз). Бұл түзу сызықты шеңбердегі P нүктеге бекітілген созылмайтын жіп деп алып, оны ойша шеңберге орай бастаймыз. Бұнда сан (осінің) түзу сызығының, мәселен, 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2 координаталы нүктелері шеңбердің, сәйкес түрде нақ сондай M_1, M_2, M_3, M_4 нүктелеріне өтеді, PM_1 доғасының ұзындығы 1- ге тең, PM_2 доғасының ұзындығы $\frac{\pi}{2}$ - ге тең және тағы сол сияқтылар болады.



48- сурет.

Осылайша, *түзу сызықтың әрбір нүктесіне шеңбердің бір нүктесі сәйкес қойылады.*



49- сурет.

Түзу сызықтың координатасы 1 -ге тең нүктесіне M_1 нүкте сәйкес қойылғандықтан, POM_1 бұрышын бірлік бұрыш деп есептеуге және осы бұрыштың өлшемі арқылы басқа бұрыштарды да өлшеуге болады. Мәселен , POM_2 бұрышын $\frac{\pi}{2}$- ге тең, POM_3 бұрышын –1- ге тең , POM_4 бұрышын –2- ге тең деп есептеу қажет. Бұрыштарды өлшеудің бұндай тәсілі математика мен физикада көп қолданылады. Бұл жағдайда бұрыштар *радиандық өлшеммен өлшенеді* делінді, ал POM_1 бұрышы 1 радианға (1 рад) тең бұрыш деп атайды. Шеңбердің PM_1 доғасының ұзындығы радиусқа тең болады (48-сурет).

Енді кез келген R радиусты шеңберді қарастырамыз және одан ұзындығы R- ге тең болған PM доғасын және POM бұрышын белгілейміз (49-сурет).

Ұзындығы шеңбер радиусына тең доғаға тірелген центрлік бұрыш 1 *радиан бұрыш* деп аталады.

Бұл жағдайда 1 радиан бұрыш ұзындығы R- ге тең доғаны керіп тұрады дейміз.

1 рад бұрыштың градустық өлшемін табайық. 180°- тық центрлік бұрыш ұзындығы πR (жарты шеңбер) доғаны керіп тұрған үшін ұзындығы R- ге тең доғаны π есе кіші бұрыш керіп тұрады, яғни

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}.$$

$\pi \approx 3{,}14$ болғандықтан 1 рад ≈ 57,3° болады.

Егер бұрыш α радиандық болса, онда оның градустық өлшемі мынадай болады:

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} a\right)^{\circ}}. \qquad (1)$$

1- есеп. 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад-ға тең бұрыштың градустық өлшемін табыңдар.

△ (1) формула бойынша табамыз:

1) π рад $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90$; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)^{\circ} = 135$. ▲

1°- ты бұрыштың радиандық өлшемін табайық. 180°- ты бұрыш π рад-қа тең болғандықтан

$$\boxed{1 \;=\; \frac{\pi}{180}\text{ рад}}$$

болады.

Егер бұрыш α градусқа тең болса, онда оның радиандық өлшемі

$$\boxed{\alpha^{o} = \frac{\pi}{180}\alpha\text{ рад}}\text{ - ға} \qquad (2)$$

тең болады.

2- есеп. 1) 45°- қа тең бұрыштың; 2) 15°- қа тең бұрыштың радиандық өлшемін табыңдар.

△ (2) формула бойынша табамыз:

1) $45^{o} = \frac{\pi}{180} \cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад; 2) $15^{o} = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ▲

Көбірек кездесетін бұрыштардың градустық және радиандық өлшемдерін келтіреміз:

Градус	0	30	45	60	90	180
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Әдетте, бұрыштың өлшемі радианмен берілсе, „рад“ атауы жазылмайды.

Бұрыштың радиандық өлшемі шеңбер доғаларының ұзындығын есептеуге қолайлы. 1 радиан бұрыш ұзындығы R радиусқа тең доғаны керіп тұрғандықтан α радиан бұрыш ұзындығы

$$l = \alpha R \qquad (3)$$

доғаны керіп тұрады.

3- есеп. Қала куранттары минуттық тілінің ұшы радиусы $R \approx 0{,}8$ м -ге тең шеңбер бойымен қозғалады. Ол 15 минутта қанша жол жүреді?

△ Сағат тілі 15 минутта $\frac{\pi}{2}$ радианға тең бұрышқа бұрылады. (3) формула бойынша $\alpha = \frac{\pi}{2}$ болғанда табамыз:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8 \text{ м} \approx 1{,}3 \text{ м}.$$

Жауабы: 1,3 м. ▲

(3) формула шеңбер радиусы $R = 1$ болғанда қарапайым түрде болады. Бұл жағдайда доғаның ұзындығы сол доғаны керіп тұрған центрлік бұрыштың шамасына тең, яғни $l = \alpha$ болады. Радиандық өлшемді математикада, физикада, механикада және басқа да ғылымда қолдану қолайлы болуының себебі осында.

4- есеп. Радиусы R дөңгелек сектор α рад бұрышпен өлшенеді. Сектордың ауданы

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha$$

-ға тең екенін дәлелдеңдер, мұнда $0 < \alpha < \pi$.

△ π рад дөңгелек сектордың (жарты шеңбер) ауданы $\frac{\pi R^2}{2}$ - ге тең. Сондықтан 1 рад сектордың ауданы π есе кіші, яғни $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Демек, α рад сектордың ауданы $\frac{R^2}{2}\alpha$ - ға тең. ▲

Жаттығулар

213. Градуспен өрнектелген бұрыштың радиандық өлшемін табыңдар:
1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Радианмен өрнектелген бұрыштың градустық өлшемін табыңдар:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;
6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Сандарды 0,01- ге дейінгі дәлдікпен жазыңдар:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$.

216. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\frac{\pi}{2}$ және 2; 2) 2π және 6,7; 3) π және $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ және $4{,}8$; 5) $-\frac{\pi}{2}$ және $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ және $-\sqrt{10}$.

217. (Ауызша.) а) Тең қабырғалы үшбұрыш; ә) тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш; б) квадрат; в) дұрыс алтыбұрыштардың градустық және радиандық өлшемдерін анықтаңдар.

218. Егер шеңбердің ұзындығы 0,36 м доғасын 0,9 рад центрлі бұрыш керіп тұрса, шеңбердің радиусы қандай болатынын есептеңдер.

219. Егер шеңбердің радиусы 1,5 см- ге тең болса, шеңбердің ұзындығы 3 см доғасы керіп тұрған бұрыштың радиандық өлшемі қандай болатынын табыңдар.

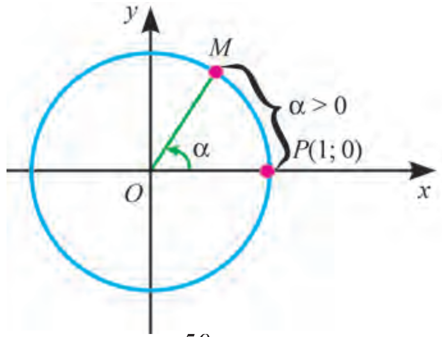
220. Дөңгелек сектордың доғасын $\frac{3\pi}{4}$ рад бұрыш керіп тұрады. Егер дөңгелектің радиусы 1 см -ге тең болса, сектордың ауданы қандай болатынын табыңдар.

221. Дөңгелектің радиусы 2,5 см -ге, ал дөңгелек сектордың ауданы 6,25 см^2- ге тең болса, сектордың ауданы қандай болатынын табыңдар.

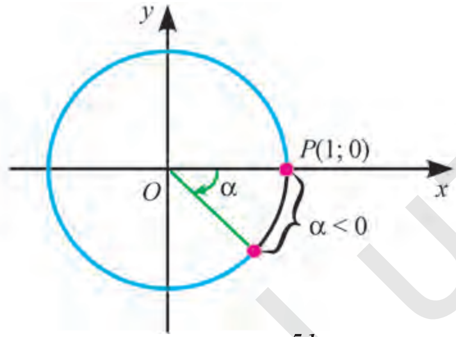
18-§. НҮКТЕНІ КООРДИНАТАЛАР БАСЫНЫҢ ТӨҢІРЕГІНДЕ БҰРУ

Алдыңғы параграфта санның түзу сызықтағы нүктелері мен шеңбердің нүктелері арасындағы сәйкестік көрсетілді. Енді нақты сандар мен шеңбердің нүктелері арасында шеңбер нүктелерін бұру арқылы қалайша сәйкестік орнатуға болатынын көрсетеміз.

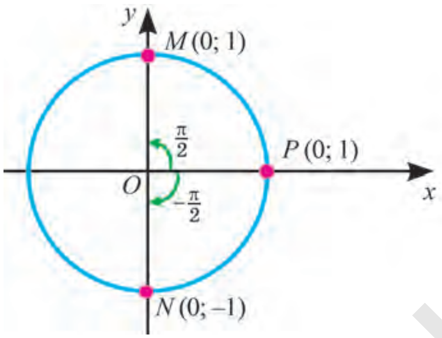
Координата жазықтығында радиусы 1- ге тең центрі координата басында болған шеңберді қарастырамыз. Ол *бірлік шеңбер* деп аталады. Бірлік шеңбердің нүктелерін координатаның бас нүктесі арқылы а радиандық бұрышқа *бұру ұғымын* енгіземіз (мұндағы α– кез келген нақты сан).



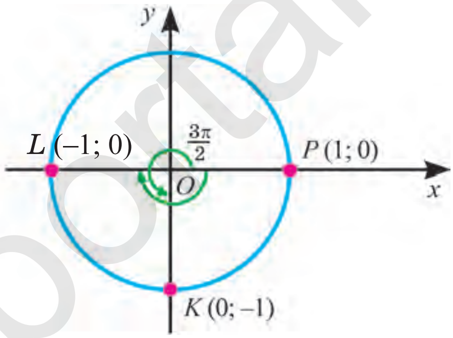
50- сурет.



51- сурет.



52- сурет.



53- сурет.

1. Айталық, $\alpha > 0$ болсын. Нүкте бірлік шеңбер бойымен P нүктеден сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бағытта қозғалып, α ұзындықтағы қашықтықты жүріп өтсін (50-сурет). Қашықтықтың соңғы нүктесін M-мен белгілейміз.

Бұл жағдайда M нүкте P нүктені координатаның бас нүктесі айналасында α радиандық бұрышқа бұру арқылы табылды деп айтамыз.

2. Айталық, $\alpha < 0$ болсын. Бұл жағдайда α радиан бұрышқа бұру қозғалысы сағат тілі бағытында болатынын және нүкте $|\alpha|$ ұзындықтағы арақашықтықты басып өткенін білдіреді (51- сурет).

0 радиан бұрышқа бұру нүктенің өз орнында қалғанын білдіреді.

Мысалдар:

1) $P(1;\ 0)$ нүктені $\frac{\pi}{2}$ радиандық бұрышқа бұрғанда, координатасы (0; 1) болатын M нүктеге орналасады (52- сурет).

2) $P(1;\ 0)$ нүктені $-\frac{\pi}{2}$ радиандық бұрышқа бұрғанда, координатасы $N(0;\ -1)$ нүктеге орналасады (52- сурет).

3) $P(1;\ 0)$ нүктені $\frac{3\pi}{2}$ радиандық бұрышқа бұрғанда, координатасы $K(0;\ -1)$ нүктеге орналасады (53- сурет).

4) $P(1;\ 0)$ нүктені $-\pi$ радиандық бұрышқа бұрғанда, координатасы $L(-1;\ 0)$ нүктеге орналасады (53- сурет).

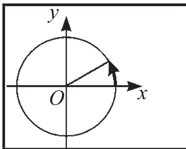
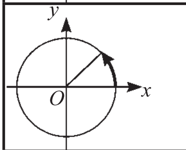
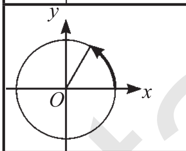
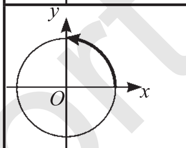
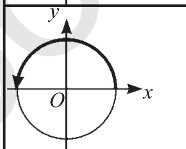
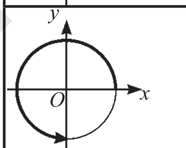
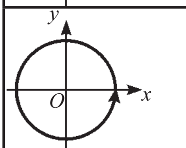
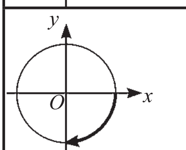
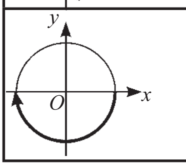
Геометрия курсында 0°- тан 180°- қа дейінгі бұрыштар қарастырылған. Бірлік шеңбердің нүктесін координаталар басы төңірегінде бұру арқылы, 180°- тан үлкен бұрыштарды, сондай-ақ теріс бұрыштарды да қарастыруға болады. Бұру бұрышын градустармен де, радиандармен де жазуға болады.

Мәселен, $P\ (1;\ 0)$ нүктесін $\frac{3\pi}{2}$ бұрышқа бұру, оны 270°- қа бұруды білдіреді; $-\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұруды –90°- қа бұру деп түсінеміз.

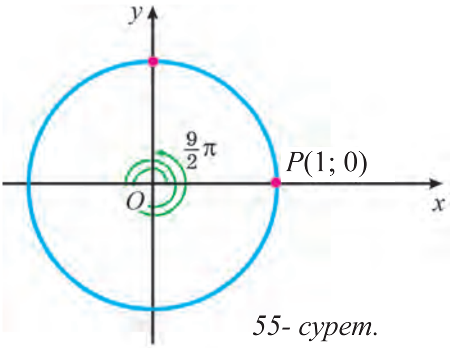
Кейбір бұрыштарды бұрудың радиандық және градустық өлшемдері кестесін келтіреміз (54- сурет).

$P(1;\ 0)$ нүктені 2π- ге, яғни 360°- қа бұрғанда нүкте алғашқы орнына қайтып келетінін естеріңе саламыз (кестеге қараңдар). Осы нүктені -2π- ге, яғни –360°- қа бұрғанда, ол тағы да бастапқы орнына қайтады.

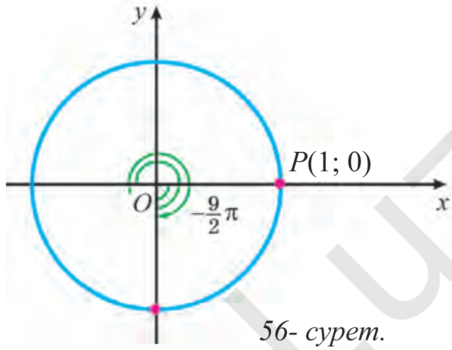
Нүктені 2π- ден үлкен бұрышқа және -2π- ден кіші бұрышқа бұруға мысалдар келтірейік. Мәселен, $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	–90°
	$-\pi$	–180°

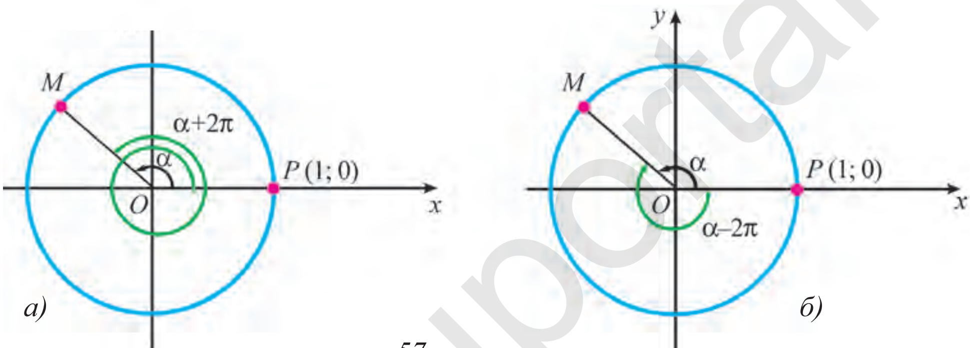
54- сурет.



55- сурет.



56- сурет.



57- сурет.

бұрышқа бұрғанда нүкте сағат тілі бағытына қарама-қарсы бағытта екі рет толық айналып келіп, тағы да $\frac{\pi}{2}$ жолды жүріп өтеді (55- сурет).

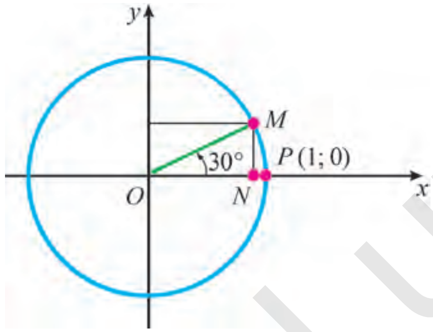
$-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда нүкте сағат тілі бағытымен екі рет толық айналып, тағы да сол бағытпен $\frac{\pi}{2}$ жолды жүріп өтеді (56- сурет).

$P(1;\ 0)$ нүктені $\frac{9\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғандағыдай нүктені кескіндейтінімізді естеріңе салайық (55- сурет). $-\frac{9\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда $-\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғандағыдай нүктенің өзі кескінделеді (56- сурет).

Жалпы алғанда, егер $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ (мұндағы k – бүтін сан) болса, онда α бұрышқа бұрған кезде α_0 бұрышқа бұрғандағы нүктенің дәл өзі кескінделеді.

Сонда кез келген нақты α санға бірлік шеңбердің (1; 0) нүктесі α рад бұрышқа бұру арқылы жасалатын бірақ нүкте сәйкес келеді екен.

Бірақ, бірлік шеңбердің жалғыз M нүктесіне (P(1; 0) нүктені бұрғанда M нүкте кескінделетін) шексіз көп $\alpha+2\pi k$ нақты сандар сәйкес келеді, мұндағы k – бүтін сан (57-сурет).



58- сурет.

1- есеп. P (1; 0) нүктені: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда пайда болған нүктенің координаталарын табыңдар.

△ 1) $7\pi=\pi+2\pi\cdot 3$ болғандықтан 7π- ге бұру дегеніміз π бұрышқа бұрғандағы нүктенің өзі, яғни (–1; 0) координаталы нүкте болады.

2) $-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-2\pi$ болғандықтан $-\frac{5\pi}{2}$- ге бұру дегеніміз $-\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғандағы нүктенің өзі, яғни (0; –1) координаталы нүкте болады. ▲

2- есеп. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нүктені табу үшін (1; 0) нүктені бұру керек барлық бұрыштарды жазыңдар.

△ NOM тік бұрышты үшбұрыштан (58- сурет) NOM бұрышының $\frac{\pi}{6}$ -ға теңдігі келіп шығады, яғни мүмкін болған бұру бұрыштардың біреуі $\frac{\pi}{6}$ - ға тең. Сондықтан $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нүктені кескіндеу үшін (1; 0) нүктені бұру керек болатын барлық бұрыштар мынадай өрнектеледі: $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, мұндағы k – кез келген бүтін сан, яғни $k=0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ ▲

Жаттығулар

222. Бірлік шеңбердің $P(1;\ 0)$ нүктесін:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π

бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған нүктелердің координаталарын табыңдар.

223. Бірлік шеңбердің $P(1;\ 0)$ нүктесін:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$

бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған нүктені белгілеңдер.

224. $P(1;\ 0)$ нүктесін:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$

бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған нүкте орналасқан координаталар ширегін анықтаңдар.

225. $P(1;\ 0)$ нүктесін:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) $540°$; 6) $810°$; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) $450°$

бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған нүктенің координаталарын табыңдар.

226. 1) $(-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$ нүктелерін табу үшін $P\ (1;\ 0)$ нүктесін бұру керек болған барлық бұрыштарды жазыңдар.

227. $P\ (1;\ 0)$ нүктесін:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8

бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болған нүкте орналасқан координаталар ширегін анықтаңдар.

228. Егер:

1) $a = 6{,}7\pi$; 2) $a = 9{,}8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$

болса, $a = x + 2\pi k$ теңдігі орындалатын x санды (мұндағы $0 \le x \le 2\pi$) және k натурал санды табыңдар.

229. Бірлік шеңбердегі $P(1; 0)$ нүктесін:

1) $\frac{\pi}{4}-2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}-2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}-6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4}-8\pi$;

5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π

бұрышқа бұрудан пайда болған нүктені кескіндеңдер.

230. $P(1; 0)$ нүктесін:

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$

бұрышқа (мұндағы k – бүтін сан) бұрғанда пайда болған нүктенің координаталарын табыңдар.

231. (1; 0) нүктесін:

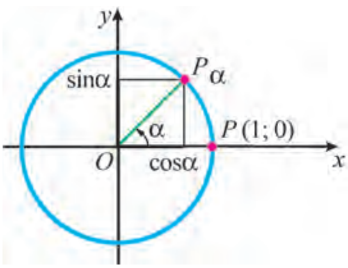
1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

координаталы нүктеге бұру қажет барлық бұрыштарды жазыңдар.

19-§. БҰРЫШТЫҢ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІНІҢ АНЫҚТАМАЛАРЫ

Геометрия курсында градустармен өрнектелген бұрыштың синусы, косинусы және тангенсі енгізілген еді. Бұл бұрыш 0 ° -тан 180°-қа дейінгі аралықта қарастырылған. Кез келген бұрыштың синусы және косинусы мына төмендегідей сипатталады:

1- анықтама. ***α бұрыштың косинусы деп (1; 0) нүктені координаталар басының айналасында α бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болатын нүктенің ординатасын айтады*** **(ол sinα деп белгіленеді).**



2- анықтама. ***α бұрыштың косинусы деп (1; 0) нүктені координаталар басының айналасында α бұрышқа бұру нәтижесінде пайда болатын нүктенің абсциссасын айтады (ол*** **cosα деп белгіленеді).**

Бұл анықтамаларда α бұрыш градустармен де, радиандармен де өрнектелуі мүмкін.

Мәселен, (1; 0) нүктені $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа, яғни 90°-қа бұрғанда (0; 1) нүктесі пайда болады. (0; 1) нүктесінің ординатасы 1 -ге тең, сондықтан

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

бұл нүктенің абсциссасы 0 -ге тең, сондықтан

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Бұрыш 0°-тан 180°-қа дейінгі аралықтағы, синус және косинустардың анықтамасы геометрия курсынан белгілі синус пен косинустардың анықтамаларына сәйкес келетінін атап айтқанымыз жөн.

Мәселен,

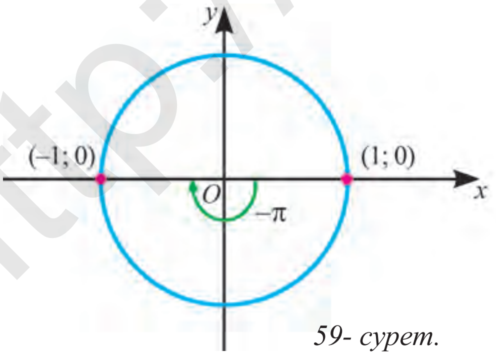
$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos\pi = \cos 180^\circ = -1.$$

1- есеп. sin(–π) және cos(–π)- ді табыңдар.

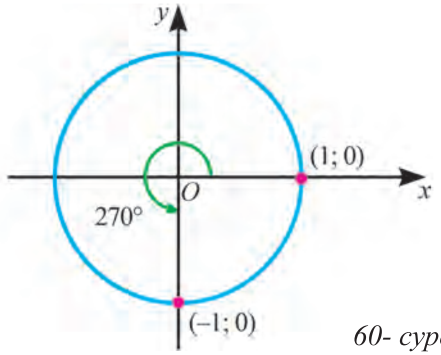
△ (1; 0) нүктесін –π бұрышқа бұрғанда, ол (–1; 0) нүктесіне өтеді (59-сурет). Сондықтан sin (–π)= 0, cos (–π) = –1. ▲

2- есеп. sin 270° және cos 270°- ты табыңдар.

△ (1; 0) нүктесін 270° бұрышқа бұрғанда, ол (0; –1) нүктесіне өтеді (60- сурет). Сондықтан cos 270° = 0, sin 270° = –1. ▲



59- сурет.



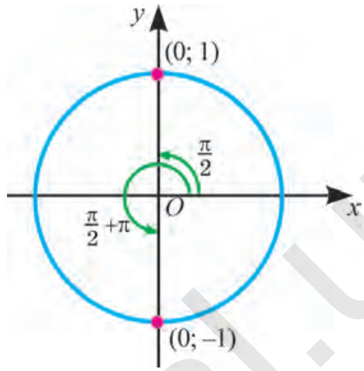
60- сурет.

3- есеп. $\sin t = 0$ теңдеуін шешіңдер.

△ $\sin t = 0$ теңдеуін шешу дегеніміз – синусы нөлге тең барлық бұрыштарды табу.

Бірлік шеңберде ординатасы нөлге тең екі нүкте бар: (1; 0) және (–1; 0) (59- сурет). Бұл нүктелер (1; 0) нүктесін 0, π, 2π, 3π т. б. сондай-ақ, –π, –2π, –3π т. б. бұрыштарға бұру арқылы табылады.

Демек, $t = k\pi$ болғанда (мұндағы k – кез келген бүтін сан) $\sin t = 0$ болады. ▲



61- сурет.

Бүтін сандар жиыны $\boldsymbol{Z}$ әрпімен белгіленеді. k саны $\boldsymbol{Z}$- ке тиісті екенін белгілеу үшін $k \in \boldsymbol{Z}$ жазуы пайдаланылады („k саны Z- ке тиісті“ деп оқылады). Сондықтан 3- есептің жауабын былайша жазуға болады:

$$t = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4- есеп. $\cos t = 0$ теңдеуін шешіңдер.

△ Бірлік шеңберде абсциссасы нөлге тең екі нүкте бар: (0; 1) және (0; –1) (61-сурет).

Бұл нүктелер (1; 0) нүктесі $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi$ т. б. сондай-ақ, $\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi$ т. б. бұрыштарға, яғни $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (мұндағы $k \in \boldsymbol{Z}$) бұрыштарға бұру арқылы табылады.

Жауабы: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

5-есеп. теңдеуін шешіңдер: 1) $\sin t = 1$; 2) $\cos t = 1$.

△ 1) Бірлік шеңбердің (0; 1) нүктесінің бірге тең ординатасы бар. Бұл нүкте (1; 0) нүктесін $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ бұрышқа бұру арқылы табылады.

2) (1; 0) нүктесін $2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$ бұрышқа бұру арқылы табылған нүктенің абсциссасы бірге тең болады.

Жауабы: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ болғанда $\sin t = 1$,

$t = 2\pi k$ болғанда $\cos t = 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

3- анықтама. ***α бұрыштың тангенсі деп α бұрыш синусының оның косинусына қатынасы айтылады (ол*** **tgα** ***деп белгіленеді).***

Сонымен, $\mathrm{tg}a = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Мысалы, $\mathrm{tg}0^{\circ} = \dfrac{\sin 0^{\circ}}{\cos 0^{\circ}} = \dfrac{0}{1} = 0, \quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Кейде α *бұрыштың котангенсі* пайдаланылады (ол ctgα деп белгіленеді). Ол $\mathrm{ctg}a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ формуласымен анықталады.

Мысалы, $\mathrm{ctg}270^{\circ} = \dfrac{\cos 270^{\circ}}{\sin 270^{\circ}} = \dfrac{0}{-1} = 0, \quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

sinα және cosα- лар кез келген бұрыш үшін анықталмағанын, олардың мәндерінің –1- ден 1- ге дейінгі аралықта екенін ескертеміз; $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ тек қана $\cos\alpha \neq 0$ бұрыштар үшін, яғни $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$- тен басқа кез келген бұрыштар үшін анықталған.

Синус, косинус, тангенс және котангенстердің жиі кездесетін мәндерінің кестесін келтірейік.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Жоқ	0	Жоқ	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	Жоқ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Жоқ	0	Жоқ

6- есеп. Есептеңдер:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

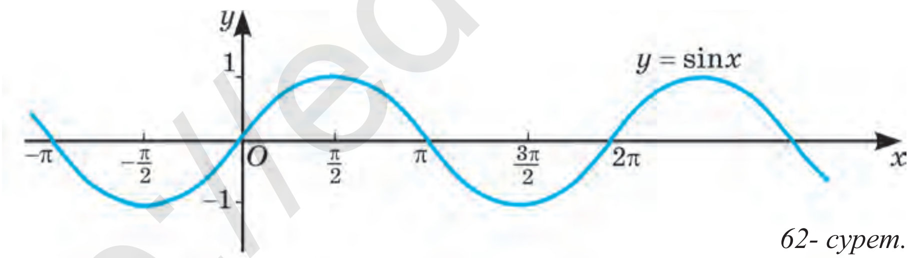
△ Кестені пайдаланып, мәндерін қойсақ:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2,5.\ ▲$$

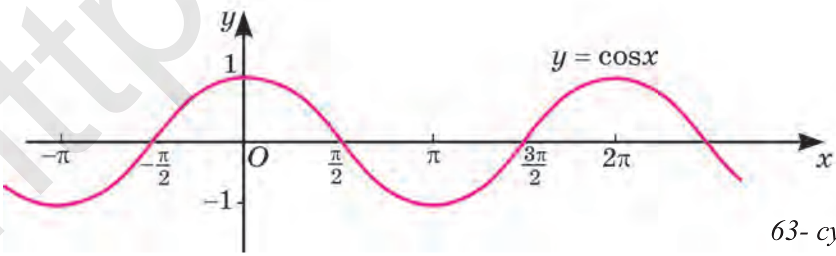
Синус, косинус, тангенс және котангенстердің бұл кестеге енбеген бұрыштарының мәндерін В.М.Брадистың төрт таңбалы математикалық кестесінен, сондай-ақ микрокалькуляторды пайдаланып табуға болады.

Егер кез келген нақты x санға $\sin x$ саны сәйкес қойылса, онда нақты сандар жиынында $y=\sin x$ функциясы берілген делінеді. $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ және $y=\operatorname{ctg}x$ функциялар осыған ұқсас анықталады. $y=\cos x$ функция барлық $x\in\boldsymbol{R}$- да анықталған, $y=\operatorname{tg}x$ *функция* $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, ал $y=\operatorname{ctg}x$ болса $x\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ болғанда анықталған. $y=\sin x$ және $y=\cos x$ функциялардың графигі 62-және 63-суреттерде көрсетілген.

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ функциялар *тригонометриялық функциялар* деп аталады.



62- сурет.



63- сурет.

Жаттығулар

232. Есептеңдер:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Егер:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0,6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

болса, бірлік шеңберде α бұрышқа сәйкес нүктені белгілеп, көрсет.

Есептеңдер (**234–236**):

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin0-\cos2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin1,5\pi$; 6) $\cos0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}0°-\mathrm{tg}180°$; 3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Ауызша.) $\sin\alpha$ немесе $\cos\alpha$:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$

-ге тең болуы мүмкін бе?

239. α- ның берілген мәніндегі өрнектің мәнін табыңдар:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, мұнда $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $0,5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, мұнда $\alpha=60°$;

3) $\sin3\alpha-\cos2\alpha$, мұнда $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, мұнда $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;

4) $\cos 0,5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin(x+\pi) = -1$; 2) $\sin \frac{1}{2}(x-1) - 0$; 3) $\cos(x+\pi) = -1$;

4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x-2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

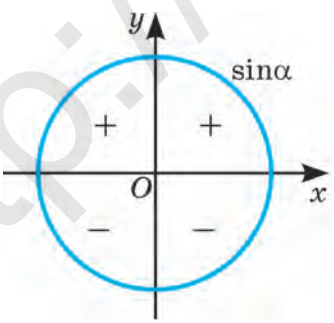
20-§. СИНУСТЫҢ, КОСИНУСТЫҢ ЖӘНЕ ТАНГЕНСТІҢ ТАҢБАЛАРЫ

1. Синус пен косинустың таңбалары

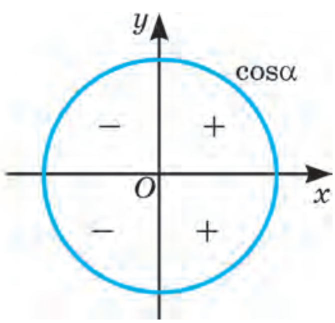
Айталық, (1; 0) нүктесі бірлік шеңбер бойынша сағат тілінің қозғаласына қарама-қарсы бағытталған. Бірінші ширекте (квадратта) орналасқан нүктелерінің абсциссалары мен ординаталары оң. Сондықтан, егер $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha > 0$ және $\cos\alpha > 0$ болады (64, 65-суреттер).

Екінші ширекте орналасқан нүктелердің ординаталары оң, ал абсциссалары теріс. Сондықтан, егер $\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ болса, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ болады (64, 65-суреттер). Дәл сол сияқты үшінші ширектегі $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, ал төртінші ширектегі $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (64, 65- суреттер). Нүктенің шеңбер бойымен бұдан кейінгі қозғалысында синустар мен косинустардың таңбалары нүктенің қайсы ширекте тұрғанына байланысты анықталады.

Синустың таңбалары 64-суретте, косинустың таңбалары 65-суретте көрсетілген.



64- сурет.



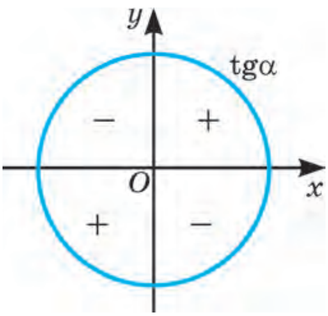
65- сурет.

Егер (1; 0) нүктесі сағат тілінің бағыты бойынша қозғалса, *онда синус пен косинустың таңбалары да нүктенің қайсы ширекте орналасқанына қарап анықталады;* мұны 64, 65- суреттерден көруге болады.

1- есеп. Бұрыштың синустары мен косинустарының таңбаларын анықтаңдар: 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) $\frac{3\pi}{4}$ бұрышқа бірлік шеңбердің екінші ширегінде орналасқан нүкте сәйкес келеді. Сондықтан $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) $745° = 2 \cdot 360° + 25°$ болғандықтан (1; 0) нүктені 745°- қа бұрғанда, оған бірінші ширекте орналасқан нүкте сәйкес келеді. Сондықтан $\sin745° > 0$, $\cos745° > 0$.



66- сурет.

3) $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ болғандықтан (1; 0) нүктені $-\frac{5\pi}{7}$ бұрышқа бұрған кезде екінші ширекте орналасқан нүкте пайда болады. Сондықтан $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

2. Тангенстің таңбалары

Сипаттамаға сәйкес $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Сондықтан, егер $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ бірдей таңбалы, ал $\mathrm{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ қарама-қарсы таңбалы болса, $\mathrm{tg}\alpha < 0$ болады. Тангенстің таңбалары 66- суретте бейнеленген.

ctgα- ның таңбалары tgα- ның таңбаларымен бірдей.

2- есеп. Бұрыш тангенсінің таңбаларын анықтаңдар:

1) 260°; 2) 3.

△ 1) $180° < 260° < 270°$ болғандықтан $\mathrm{tg}260° > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ болғандықтан $\mathrm{tg}3 < 0$. ▲

Жаттығулар

242. Егер:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;

5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$

болса, (1; 0) нүктені α бұрышқа бұрғанда пайда болатын нүктенің қайсы ширекте жататынын анықтаңдар.

243. Егер:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;

5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$

болса, sinα- ның таңбасы қандай болатынын анықтаңдар.

244. Егер:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;

5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$

болса, cosα санының таңбасын анықтаңдар.

245. Егер:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;

5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$

болса, tgα және ctgα сандарының таңбасын анықтаңдар.

246. Егер:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;

4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\le1{,}8\pi$

болса, sinα, cosα, tgα, ctgα сандарының таңбасын анықтаңдар.

247. Егер:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$

болса, sinα, cosα, tgα сандарының таңбасын анықтаңдар.

248. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ болсын. Санның таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 4) $\sin(\pi-\alpha)$;

5) $\cos(\alpha-\pi)$; 6) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$; 7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

249. Синустары мен косинустарының таңбалары бірдей (әр түрлі) болатын α санының 0- ден 2π- ге дейінгі аралықта орналасқан барлық мәндерін табыңдар.

250. Санның таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\sin 0,7$ және $\sin 4$; 2) $\cos 1,3$ және $\cos 2,3$.

252. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

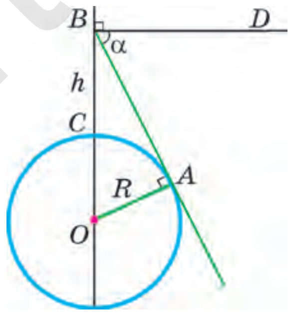
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. Егер:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1,4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1,4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1,4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1,2$

болса, α санға сәйкес келетін нүкте қайсы ширекте орналасады?

254. (*Берунидің есебі.*) Таудың биіктігі $h=BC$ және $\alpha=\angle ABD$ бұрышы белгілі болса, Жердің радиусы R- ді табыңдар (67-сурет).



67- сурет.

21-§. БІР БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ ЖӘНЕ ТАНГЕНСІ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Синус пен косинустың арасындағы қатынасты анықтайық.

Айталық бірлік шеңбердің $M(x;\ y)$ нүктесі (1; 0) нүктені α бұрышқа бұрудың нәтижесінде жасалған болсын (68-сурет). Онда синус пен косинустың сипаттамалары бойынша,

$$x=\cos\alpha,\quad y=\sin\alpha$$

болады.

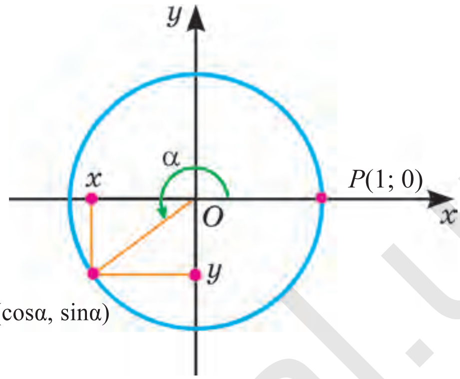
M нүктесі бірлік шеңберге тиісті, сондықтан оның $(x;\ y)$ координаталары $x^2+y^2=1$ теңдеуін қанағаттандырады.

Демек,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

(1) теңдік α- ның кез келген мәнінде орындалады және ол *негізгі тригонометриялық тепе-теңдік* деп аталады.

(1) теңдіктен sinα- ны cosα арқылы және керісінше, cosα- ны sinα арқылы өрнектеуге болады:



68- сурет.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,. \qquad (3)$$

Бұл формулалардағы түбір алдындағы таңба формуланың сол жақ бөлігінде тұрған өрнектің таңбасымен анықталады.

1-есеп. Егер $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, sinα- ны табыңдар.

△ (2) формуланы қолданамыз. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болғандықтан $\sin\alpha < 0$. Сондықтан (2) формуладағы түбірдің алдына „–“ таңбасын қою керек:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ ▲$$

2-есеп. Егер $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ және $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ болса, cosα- ны табыңдар.

△ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ болғандықтан $\cos\alpha > 0$ болады, сондықтан (3) формуладағы түбірдің алдына „+“ таңбасын қою керек:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Енді *тангенс пен котангенстің арасындағы байланысты* анықтаймыз. Тангенс пен котангенстің сипаттамасы бойынша:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Бұл теңдіктерді көбейтсек,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1} \qquad (4)$$

теңдігі шығады. (4) теңдіктен tgα- ны ctgα арқылы, керісінше, ctgα- ны tgα арқылы өрнектеуге болады:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

(4)–(6) теңдіктер $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \boldsymbol{Z}$ болғанда орынды болады.

3- есеп. Егер tgα = 13 болса, ctgα- ны есептеңдер.

△ (6) формула бойынша табамыз: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

4-есеп. Егер $\sin\alpha = 0{,}8$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, tgα- ны есептеңдер.

△ (3) формула бойынша cosα- ны табамыз. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болғандықтан cosα < 0 болады. Сондықтан

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Демек, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктің және тангенстің сипаттамасын пайдаланып, *тангенс пен косинустың арасындағы қатынасты* табамыз.

△ cosα ≠ 0 деп ұйғарсақ, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ теңдеуінің екі жақ бөлігін де $\cos^2\alpha$- ға бөлеміз: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, бұдан

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}. \quad ▲ \qquad (7)$$

Егер $\cos\alpha \neq 0$ болса, яғни $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ болса, онда (7) формула дұрыс болады.

(7) формуладан тангенсті косинус және косинусты тангенс арқылы өрнектеуге болады.

5- есеп. Егер $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болса, tgα- ны есептеңдер.

△ (7) формуладан:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенстің таңбасы екінші ширекте теріс, сондықтан $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ▲

6- есеп. Егер $\mathrm{tg}\alpha=3$ және $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, cosα- ны есептеңдер.

△ (7) формуладан:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болғандықтан $\cos\alpha<0$ және сондықтан $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$.▲

Жаттығулар

255. Егер:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ және $\frac{3p}{2}<\alpha<2\pi$ болса, sinα және tgα- ны;
2) $\sin\alpha=0,8$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болса, cosα және tgα- ны;
3) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болса, sinα, tgα және ctgα- ны;
4) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ және $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болса, cosα, tgα және ctgα- ны;
5) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ және $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болса, sinα және cosα- ны;
6) $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ және $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болса, sinα және cosα- ны есептеңдер.

256. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктің көмегімен теңдіктердің бір уақытта орындалатынын немесе орындалмайтынын анықтандар:

1) $\sin\alpha = 1$ және $\cos\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$ және $\cos\alpha = -1$;

3) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ және $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ және $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

257. Теңдіктер бір уақытта орындалуы мүмкін бе:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ және $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ және $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$?

258. Айталық, α тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы болсын. Егер $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$ болса, cosα мен tgα- ны табыңдар.

259. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышының тангенсі $2\sqrt{2}$ 22-ге тең. Сол бұрыштың косинусын табыңдар.

260. Егер $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{8}$ болса, cosα- ны табыңдар.

261. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ болса, cosα- ны табыңдар;

2) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ болса, sinα- ны табыңдар.

262. $\mathrm{tg}\alpha = 2$ екені белгілі. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

263. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ екені белгілі. 1) $\sin\alpha \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ өрнектерінің мәндерін табыңдар.

264. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$; 2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$; 4) $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

22-§. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР

1- есеп. $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ болғандағы

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (1)$$

теңдігінің орынды екенін дәлелдеңдер.

△ Котангенстің сипаттамасы бойынша $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ және сондықтан

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Түрлендірулер дұрыс, өйткені $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ болғанда $\sin\alpha \neq 0$. ▲

(1) теңдік α -ның барлық қабылдайтын (қажетті) мәндері үшін орынды, яғни оның сол және оң жақтарының анықталған барлық мәндері үшін дұрыс болады. Бұндай теңдіктер тепе-теңдіктер дейіледі, бұндай теңдіктерді дәлелдеуге арналған тепе-теңдіктерді дәлелдеуге арналған есептер деп атайды.

Алдағы уақытта тепе-теңдіктерді дәлелдегенде, егер есептің шартында көрсетілмесе, бұрыштардың қажетті мәндерін іздеп отырмаймыз.

2- есеп. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

△ $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. ▲

3- есеп. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△ Бұл тепе-теңдікті дәлелдеу үшін оның сол және оң жақтарының айырмасы нөлге тең екендігін көрсетеміз:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0.$$ ▲

1–3- есептерді шешуде *тепе-теңдіктерді дәлелдеудің мынадай тәсілдері* қолданылды: оң бөлігін түрлендіріп, оның сол бөлігіндегі өрнекке тең екендігін көрсету; оң және сол бөлігінің айырмасы нөлге тең екендігін көрсету. Кейбір тепе-теңдіктерді дәлелдеуде оның оң жақ және сол жақ бөліктерін түрлендіріп бірдей өрнекке келтірген ыңғайлы.

4- есеп. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

$$\triangle\ \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тепе-теңдік дәлелденді, өйткені оң және сол бөліктері $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$- ге тең. ▲

5- есеп. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.\ \blacktriangle$$

Тригонометриялық өрнектерді ықшамдауға арналған есептерді шешкенде, егер есептің шартында талап етілмесе, бұрыштардың қабылдауы мүмкін болған барлық қажетті мәндерін таппаймыз.

Жаттығулар

265. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$;
5) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

266. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$;
5) $\frac{\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Өрнекті ықшамдаңдар және оның сандық мәнін табыңдар:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

268. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

---

269. α-ның барлық қажетті мәндерінде төмендегі өрнектің бірдей түрлі мәнді қабылдайтынын, яғни α- ға байланысты еместігін дәлелдеңдер:

1) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha$.

270. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^22\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Өрнекті ықшамдаңдар және оның сандық мәнін табыңдар:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, мұндағы $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

272. Егер $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$ болса, $\sin\alpha\cos\alpha$- ның мәнін табыңдар.

273. Егер $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$ болса, $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$- ның мәнін табыңдар.

274. Теңдеуді шешіңдер:

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$;

2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

23- §. α ЖӘНЕ –α БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ, ТАНГЕНСІ ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІ

Айталық бірлік шеңбердің M_1 және M_2 нүктелері $P(1;\ 0)$ нүктені сәйкесінше, α және –α бұрыштарға бұрудың нәтижесінде пайда болған дейік (69- сурет). Онда Ox осі M_1OM_2 бұрышын тең екіге бөледі, сондықтан M_1 және M_2 нүктелері Ox осіне симметриялы болады. Бұл нүктелердің абсциссалары беттесіп түседі, ал ординаталарының таңбаларында айырмашылық болады. M_1 нүктесінің координаталары (cosα; sinα), ал M_2 нүктесінің координаталары (cos(–α); sin(–α)).

Сондықтан

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Тангенстің сипаттамасын пайдалана отырып, төмендегіні табамыз:

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha}.$$

Демек,

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.} \qquad (2)$$

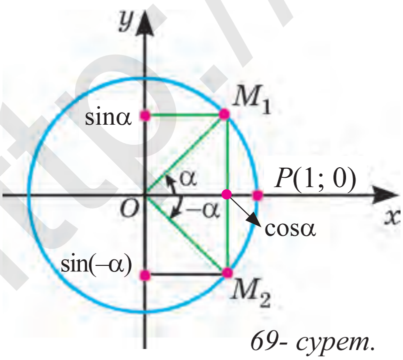
Осы сияқты,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

(1) формула α- ның кез келген мәнінде орынды, ал (2) формула болса $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ болғанда орынды болады.

Егер $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ болса, онда ctg(–α) = –ctgα екенін көрсетуге болады.

(1)–(2) формулалар теріс бұрыштарға арналған синустың, косинустың және тангенстің мәндерін табуға мүмкіндік береді.



69- сурет.

Мәселен:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Жаттығулар

275. Есептеңдер:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\frac{1+\mathrm{tg}^2(-30^{\circ})}{1+\mathrm{ctg}^2(-30^{\circ})}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

277. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\mathrm{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Есептеңдер:

1) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7,5\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

24-§. ҚОСУ ФОРМУЛАЛАРЫ

$\cos(\alpha\pm\beta)$ және $\sin(\alpha\pm\beta)$- ларды α және β бұрыштардың синус, косинустары арқылы өрнектейтін формулаларды *қосу формулалары* деп атайды.

Теорема. ***Кез келген α және β үшін мынадай теңдік орынды болады:***

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

○ M_0 (1; 0) нүктені координаталар басы айналасында α, –β, α + β радиандық бұрыштарға бұру нәтижесінде сәйкесінше, M_α, $M_{-\beta}$ және $M_{\alpha+\beta}$ нүктелері қойылған болсын дейік (70-сурет).

Синус және косинустың сипаттамасы бойынша, бұл нүктелер мына төмендегідей координаталарға ие болады:

$$M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

$\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$ болғандықтан $M_0OM_{\alpha+\beta}$ және $M_{-\beta}OM_\alpha$ тең бүйірлі үшбұрыштары өзара тең болады, демек, олардың $M_0M_{\alpha+\beta}$ және $M_{-\beta}M_\alpha$ табандары да тең. Сондықтан

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

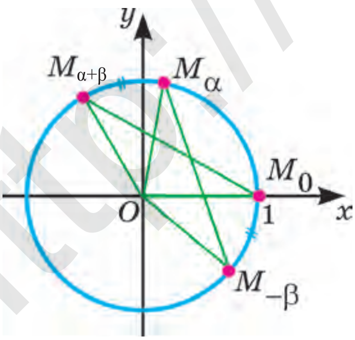
Геометрия курсынан белгілі, екі нүкте арасындағы арақашықтық формуласы бойынша:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

23-§-тағы (1) формуланы пайдаланып, бұл өрнекті түрлендіреміз:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік бойынша:



70-сурет.

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

бұдан $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●

1- есеп. $\cos75°$- ты есептеңдер.

△ (1) формула бойынша табамыз:

$$\cos75°=\cos(45°+30°)=$$
$$=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\ ▲$$

(1) формуладағы β- ны –β- мен алмастырамыз:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

бұдан

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad \mathbf{(2)}$$

2- есеп. cos15°- ты есепте.

△ (2) формула арқылы есептейміз:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

3- есеп. Мынадай формулаларды дәлелдеңдер:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin –, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

△ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ болғанда (2) формула бойынша:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta,$$

яғни

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Бұл формуладан β- ны α- ға ауыстырсақ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

(4) формулада $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ деп ұйғарсақ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \ ▲$$

(1)–(4) формулаларды пайдаланып, *синусқа арналған қосу формуласын* шығарамыз:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin –\cos\beta + \cos –\sin\beta.$$

Сонымен,

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad \mathbf{(5)}$$

(5) формуладағы β- ны –β- ға ауыстырсақ:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

бұдан

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad \mathbf{(6)}$$

4- есеп. sin210°- ты есептеп табыңдар.

$$\triangle\ \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$= \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \blacktriangle$$

5- есеп. Есептеңдер:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle\ \sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0. \blacktriangle$$

6- есеп. Теңдікті дәлелдеңдер:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}. \qquad (7)$$

$$\triangle\ \mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Бұл бөлшектің алымы мен бөлімін cosαcosβ- ға бөлсек, (7) формула келіп шығады. $\blacktriangle$

Есептеулер кезінде (7) формуланы пайдалану ыңғайлы.

Мәселен, осы формула бойынша есептесек:

$$\mathrm{tg}225^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\mathrm{tg}180^\circ + \mathrm{tg}45^\circ}{1 - \mathrm{tg}180^\circ\,\mathrm{tg}45^\circ} = 1.$$

Жаттығулар

Қосу формулаларының көмегімен есептеңдер (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) cos57°30'cos27°30' + sin57°30'sin27°30';

2) cos19°30'cos25°30' – sin19°30'sin25°30';

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, мұндағы $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ және $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, мұндағы $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Өрнекті ықшамдаңдар (**283–284**):

283. 1) cos3αcosα – sinαsin3α; 2) cos5βcos2β + sin5βsin2β;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)$.

Қосу формулалары арқылы есептеңдер (**285–286**):

285. 1) sin73°cos17° + cos73°sin17°;

2) sin73°cos13° – cos73°sin13°;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, мұндағы $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ және $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, мұндағы $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

287. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Егер $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ және $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ болса, $\cos(\alpha+\beta)$ va $\cos(\alpha-\beta)$- ны есептеңдер.

289. Егер $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ және $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ болса, $\sin(\alpha-\beta)$- ны есептеңдер.

290. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha$.

292. Өрнекті ықшамдаңдар:1) $\frac{\mathrm{tg}29^\circ+\mathrm{tg}31^\circ}{1-\mathrm{tg}29^\circ\,\mathrm{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi-\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi\,\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

25-§. ҚОС БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ ЖӘНЕ КОСИНУСЫ

Қосу формулаларын пайдалана отырып, *қос бұрыштың синусы мен косинусының формулаларын* шығарамыз.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Сонымен,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

1- есеп. Егер $\sin\alpha = -0{,}6$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\sin 2\alpha$- ны есептеңдер.

△ (1) формула бойынша есептейміз:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot \cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болғандықтан $\cos\alpha < 0$ болады және сондықтан:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Демек, $\sin 2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Сонымен,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

2- есеп. Егер $\cos\alpha = 0{,}3$ болса, $\cos 2\alpha$- ны есептеңдер.

△ (2) формула және негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді пайдаланып, төмендегіні шығарамыз:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \text{ ▲}$$

3- есеп. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$\text{△ } \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha. \text{ ▲}$$

4- есеп. Егер $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ болса, $\operatorname{tg} 2\alpha$- ны есептеңдер.

$$\text{△ } \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

формуладағы $\beta = \alpha$ деп ұйғарсақ (24-§- қа қараңдар):

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\,t\,. \qquad (3)$$

Егер $tg\alpha = \frac{1}{2}$ болса, онда (3) формула бойынша есептейміз:

$$tg2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\,.$$ ▲

Жаттығулар

Есептеңдер (**293–294**):

293. 1) $2\sin15°\cos15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $(\cos75° - \sin75°)^2$; 4) $(\cos15° + \sin15°)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Егер:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

болса, $\sin2\alpha$- ны есептеңдер.

296. Егер:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ болса, $\cos2\alpha$- ны есептеңдер.

Өрнекті ықшамдаңдар (**297–298**):

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos2\alpha+1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$.

299. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$; 2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

300. Егер:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{4}$

болса, $\sin 2\alpha$- ны есептеңдер.

301. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

302. Есептеңдер:

1) $2\cos^2 15°-1$; 2) $1-2\sin^2 22{,}5°$;
3) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 4) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1-2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha-1$; 3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;
4) $\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1+\cos 4\alpha$; 6) $1-2\cos^2 5\alpha$.

304. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha-1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\mathrm{ctg}\,\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$.

305. Егер $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}6$ болса, $\mathrm{tg}\,2\alpha$- ны есептеңдер.

306. Есептеңдер: 1) $\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{6\mathrm{tg}15^o}{1-\mathrm{tg}^2 15^o}$; 3) $\dfrac{4\mathrm{tg}75^o}{1-\mathrm{tg}^2 75^o}$.

26-§. КЕЛТІРУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Синус, косинус, тангенс және котангенс мәндерінің кестелері 0° -тан 90° -қа (немесе 0- ден $\frac{\pi}{2}$ - ге дейінгі) бұрыштар үшін түзіледі. Бұл жағдай олардың басқа бұрыштар үшін мәндерін сүйір бұрышқа келтіру арқылы түсіндіріледі.

1 - есеп. sin870° және cos870°- тың мәндерін есептеңдер.

△ 870° = 2•360° + 150°. Сондықтан *P*(1; 0) нүктені координаталар басы айналасында 870° -қа бұрғанда нүкте екі рет толық айналады және 150° бұрышқа бұрылады, яғни 150° -қа бұрғандағы *M* нүктесінің өзімен бетпе-бет түседі (71- сурет).

Сондықтан sin870° = sin150° cos870° = cos150°.

M нүктеге *Oy* осіне қарағанда симметриялы болған M_1 нүктені салайық (72- сурет). *M* және M_1 нүктелердің ординаталары бірдей, ал абсциссаларының таңбаларында ғана айырмашылығы бар. Сондықтан

$$\sin 150^{\circ} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2};\ \cos 150^{\circ} = -\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Жауабы: $\sin 870^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\cos 870^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

1-есепті шешкенде

$$\sin(2\cdot 360^{\circ}+150^{\circ})=\sin 150^{\circ},\ \cos(2\cdot 360^{\circ}+150^{\circ})=\cos 150^{\circ}, \quad (1)$$

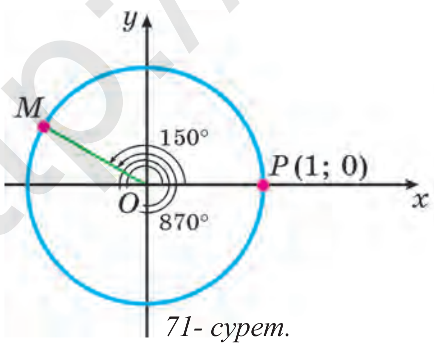
$$\sin(180^{\circ}-30^{\circ})=\sin 30^{\circ},\ \cos(180^{\circ}-30^{\circ})=-\cos 30^{\circ} \quad (2)$$

теңдіктері пайдаланылды.

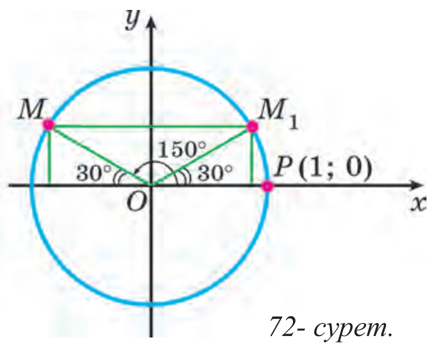
(1) теңдік – дұрыс теңдік, себебі *P*(1; 0) нүктені $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ бұрышқа бұрғанда оны α бұрышқа бұрғандағы нүктенің өзі пайда болады.

Сондықтан мынадай формулалар дұрыс деп саналады:

! **$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z.$ (3)**



71- сурет.



72- сурет.

Дербес жағдайда, $k = 1$ болғанда:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

тепе-теңдіктер орынды.

(2) теңдік

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (4)$$

формуланың дербес жағдайы болып саналады.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ формуласын дәлелдейік.

Синус үшін қосу формуласын қолданып, формуланы жазамыз:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

(4) формуланың екіншісі де осылайша дәлелденеді. (4) формулалар *келтіру формулалары* деп аталады. (3) және (4) формулалардың көмегімен кез келген бұрыштың синусы мен косинусын есептеуде олардың сүйір бұрыш үшін мәндерін есептеуге келтіруге болады.

2 - есеп. $\sin 930°$- тың мәнін есептеңдер.

(3) формуланы пайдаланып жазамыз:

$$\sin 930° = \sin(3 \cdot 360° - 150°) = \sin(-150°).$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ формуласы бойынша $\sin(-150°) = -\sin 150°$- ты шығарамыз.

(4) формула бойынша табамыз:

$$-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Жауабы: $\sin 930° = -\frac{1}{2}$.

3- есеп. $\cos\frac{15\pi}{4}$ - ді есептеңдер.

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Енді кез келген бұрыштың тангенсін есептеуді, сүйір бұрыштың тангенсін есептеуге қалай келтіруге болатынын көрсетейік.

(3) формуладан және тангенстің сипаттамасынан

$$\mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

теңдігі келіп шығады.

Бұл теңдікті және (4) формуланы пайдаланып жазамыз:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \mathrm{tg}(\alpha - \pi) = -\mathrm{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\ \ -\alpha)}{\cos(\ \ -\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Сондықтан мынадай формула орынды болады:

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\pi k}) = \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{k \in Z}. \qquad \mathbf{(5)}$$

4- есеп. Есептеңдер: 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{13}{4}$.

△ 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3} = \mathrm{tg}(4\ \ -\frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4} = \mathrm{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

24- §- тағы (3- есеп)

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos -,\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

формулалары дәлелденген еді, бұл формулаларды *келтіру формулалары* деп атайды. Бұл формулалар арқылы, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ өрнектерінің дұрыс екені дәлелденеді.

x- тің кез келген мәні үшін $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ тепе-теңдіктер орынды болатыны белгілі.

Бұл тепе-теңдіктер бойынша, аргумент 2π- ге өзгергенде синустың және косинустың мәндері периодты қайталанады. Мұндай функциялар *периоды* 2π *болатын периодты функциялар* деп аталады.

Егер осындай $T \neq 0$ саны бар болып, $y = f(x)$ функцияның анықталу аймағында кез келген x үшін

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

теңдік орындалса, онда $f(x)$ *периодты функция деп аталады.* T саны $f(x)$ функцияның *периоды деп аталады.*

Бұл анықтама бойынша, егер x саны $f(x)$ функцияның анықталу аймағына тиісті болса, онда $x + T$, $x - T$ сандар және жалпы алғанда, $x + Tn$, $n \in \mathbf{Z}$ сандар да осы периодты функцияның анықталу аймағына тиісті және $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \mathbf{Z}$ болады.

2π саны $y = \cos x$ функцияның *ең кіші оң периоды* болатынын көрсетеміз.

$T > 0$ косинустың периоды болсын, яғни кез келген x үшін $\cos(x + T) = \cos x$ теңдік орындалады. $x = 0$ деп, алсақ, $\cos T = 1$- ге тең болады. Бұдан $T = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $T > 0$ болғандықтан T төмендегі 2π, 4π, 6π, ... мәндерін қабылдай алады және сондықтан T- ның мәні 2π- ден кіші болуы мүмкін емес.

$y = \sin x$ *функциясының ең кіші оң периоды да* 2π- *ге тең* екендігін дәлелдеуге болады.

Жаттығулар

Есептеңдер (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;

5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\,570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\,960°$;

5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\,585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Өрнектің сан мәнін табыңдар:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Есептеңдер:

1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 2) $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$;

3) $2\sin 6{,}5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4{,}25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\frac{\sin(-6{,}5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16{,}25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^\circ)+\sin 480^\circ}{\operatorname{tg} 405^\circ-\operatorname{ctg} 330^\circ}$.

314. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

315. Үшбұрыштың екі ішкі бұрыштары қосындысының синусы, үшінші бұрышының синусына тең болатынын дәлелдеңдер.

316. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$;   2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$;   4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$;   2) $\sin(\pi-x)=1$;   3) $\cos(x-\pi)=0$;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;   5) $\cos(\pi-2x)=1$;   6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

27-§. СИНУСТАРДЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРМАСЫ. КОСИНУСТАРДЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ МЕН АЙЫРМАСЫ

1 - есеп. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Қосу формуласы және қос бұрыштың синусы формулалары бойынша, мынадай теңдік келіп шығады:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ▲

Егер *синустар қосындысының формуласы*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (1)$$

қолданылса, бұл мәселені шешу оңай. Демек, осы формуланың көмегімен шешсек:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,.$$

Енді (1) формуланы дәлелдейік.

○ $\frac{\alpha+\beta}{2}=x,\ \frac{\alpha-\beta}{2}=y$ деп белгілеп аламыз. Онда $x+y=\alpha,\quad x-y=\beta$ және сондықтан $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ $+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

(1) формуламен бірге төмендегі *синустар айырмасы, косинустар қосындысы* мен *айырмасының формулалары* да пайдаланылады:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,. \qquad (4)$$

(3) және (4) формулалар да (1) формуланы дәлелдеген сияқты дәлелденеді; (2) формуладағы β- ны –β- мен ауыстырсақ (1) формуладан келіп шығады (*мұны өздерің дәлелдеңдер*).

2-есеп. $\sin75^\circ+\cos75^\circ$ өрнегінің мәнін есептеңдер.

△ $\sin75^\circ+\cos75^\circ=\sin75^\circ+\sin15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ\ \ 15^\circ}{2}=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\,.$$ ▲

3- есеп. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

△ $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

4- есеп. sinα + cosα өрнегінің ең кіші мәні $\sqrt{2}$ - ге, ал ең үлкен мәні $\sqrt{2}$ - ге тең болатынын дәлелдеңдер.

△ Берілген өрнекті көбейткішке түрлендіреміз:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Косинустың ең кіші мәні –1, ал ең үлкен мәні 1 болғандықтан берілген өрнектің ең кіші мәні $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$ - ге, ал ең үлкен мәні $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ - ге тең. ▲

Жаттығулар

318. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$;
2) $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$;
3) $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$;
4) $\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{4})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

319. Есептеңдер:

1) $\cos105°+\cos75°$;
2) $\sin105°-\sin75°$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin105°+\sin165°$.

320. Көбейткішке түрлендіріңдер:

1) 1 + 2sinα;
2) 1 – 2sinα;
3) 1 + 2cosα;
4) 1 + sinα;
5) 1 – cosα;
6) 1 + cosα.

321. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\mathrm{tg}2\alpha$;
2) $\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos4\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

322. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}$;
2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2}{3} - \alpha\right) = 0$.

324. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

325. Көбейтінді түрінде жазыңдар:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}$.

326. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ тепе-теңдікті дәлелдеңдер және есептеңдер:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg} 99^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

327. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

III тарауға арналған жаттығулар

328. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсын. $P(1; 0)$ нүктені:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; | 2) $\alpha - \pi$; | 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; | 4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; | 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; | 6) $\pi - \alpha$

бұрышқа бұру нәтижесінде бейнеленген нүкте қайсы ширекте болатынын анықтаңдар.

329. Бұрыштың синусы мен косинусының мәнін табыңдар:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 7) $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Есептеңдер:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k + \cos 2k\pi$, мұндағы k – бүтін сан;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, мұндағы k – бүтін сан.

331. Табыңдар:

1) егер $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, $\cos\alpha$- ны;

2) егер $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\operatorname{tg}\alpha$- ны;

3) егер $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ және $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha$- ны;

4) егер $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ және $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha$- ны.

332. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $5\sin^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $(1-\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{tg}(\pi+\alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1+\operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Өрнекті ықшамдаңдар және оның сан мәнін табыңдар:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, мұндағы $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, мұндағы $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Есептеңдер:

1) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;   2) $\sin 15^\circ$;   3) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;
4) $\sin 75^\circ$;   5) $\cos 75^\circ$;   6) $\sin 135^\circ$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. Егер: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$- ны,

2) $\cos\alpha = -0,6$ va $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\cos 2\alpha$- ны

есептеңдер.

2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos 150^\circ$;   3) $\sin\frac{8\pi}{3}$;   4) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}$;   5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (*Ғиясиддин Жамшид әл-Каши есебі.*)
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ екендігін дәлелдеңдер.

4. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$;   2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$;   2) $\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;   2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;   4) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Есептеңдер (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\mathrm{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos3660°+\sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°)+\mathrm{tg}1035°$.

339. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sin3$ және $\cos4$; 2) $\cos0$ және $\sin5$; 3) $\sin1$ және $\cos1$.

340. Санның таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin3{,}5\,\mathrm{tg}3{,}5$; 2) $\cos5{,}01\sin0{,}73$; 3) $\frac{\mathrm{tg}13}{\cos15}$;

4) $\sin1\cos2\,\mathrm{tg}3$; 5) $\sin2\cos2$; 6) $\mathrm{tg}1\cos1$.

341. Есептеңдер :

1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin165°$; 3) $\sin105°$;

4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2 195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(1+\mathrm{tg}(-\alpha))(1-\mathrm{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\mathrm{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. Берілгені: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$ -лардың мәндерін табыңдар.

Өрнекті ықшамдаңдар (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha+\sin4\alpha}$;

3) $\frac{\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha-\cos2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;

3) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos(3\quad-x)$.

347. 1) Егер $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ және $\mathrm{tg}\beta = 2{,}4$ болса, $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$- ны;

2) егер $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ және $\mathrm{ctg}\beta = -1$ болса, $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$- ны есептеңдер.

348. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$;   2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

III тарауға арналған сынақ (тест) жаттығулары

1. 153°- тың радиандық өлшеуін табыңдар:

A) $\frac{17\pi}{20}$;   B) $\frac{19\pi}{20}$;   C) 17π;   D) $\frac{2\pi}{9}$.

2. $0{,}65\pi$- дің градустық өлшеуін табыңдар:

A) 11,7°;   B) 117°;   C) 116°;   D) 118°.

3. Қайсы көбейтінділердің таңбасы теріс?

A) cos314°sin147°;   B) tg200°ctg201°;
C) cos163°cos295°;   D) sin170°ctg250°.

4. Қайсы көбейтінділердің таңбасы оң?

A) sin2cos2sin1sin1°;   B) $\mathrm{tg}8°\mathrm{ctg}8\mathrm{ctg}10°\,\mathrm{ctg}\sqrt{10}$;
C) sin9°sin9cos9°cos9;   D) $\cos10°\cos10\cos11°\cos\sqrt{11}$.

5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нүктеге түсу үшін (1; 0) нүктені бұру керек болған бұрыштарды табыңдар?

A) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;   B) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

C) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;   D) $2\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. (1; 0) нүктені $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ бұрышқа бұрудан пайда болатын нүктенің координаталарын табыңдар:

A) (0; 1);   B) (0; –1);   C) (1; 0);   D) (–1; 0).

7. Сандарды өсу тәртібімен жазыңдар:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

A) $a < c < b$; B) $b < c < a$; C) $c < a < b$; D) $b < a < c$.

8. Сандарды кему тәртібімен жазыңдар:

$$a = \cos 2; \quad b = \cos 2°; \quad c = \sin 2; \quad d = \sin 2°.$$

A) $a > c > d > b$; B) $d > c > b > a$;
C) $b > c > d > a$; D) $c > d > b > a$.

9. Есептеңдер: $\dfrac{\sin 136° \cdot \cos 46° - \sin 46° \cdot \cos 224°}{\sin 110° \cdot \cos 40° - \sin 20° \cdot \cos 50°}$.

A) $\cos 40°$; B) 0,5; C) $\sin 44°$; D) 2.

10. Есептеңдер: $\dfrac{\sin 10° \cdot \sin 130° - \sin 100° \cdot \sin 220°}{\sin 27° \cdot \cos 23° - \sin 157° \cdot \cos 153°}$.

A) 1; B) –1; C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Есептеңдер: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

A) 1; B) –1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin\alpha = 0{,}6$ болса, $\mathrm{tg}2\alpha$- ны табыңдар $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$:

A) 3,42; B) $3\dfrac{3}{7}$; C) $\dfrac{7}{24}$; D) $-\dfrac{7}{24}$.

13. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{5}$ болса, $\sin 2\alpha$- ны табыңдар:

A) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$.

14. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ болса, $\cos 2\alpha$- ны табыңдар:

A) $\dfrac{4}{3}$; B) $-\dfrac{4}{3}$; C) $\dfrac{3}{4}$; D) $-\dfrac{3}{4}$.

15. Ықшамдаңдар: $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) -1; B) 1; C) 0,5; D) $-\frac{1}{2}$.

16. Ықшамдаңдар: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$; B) $\frac{1}{3}\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}$ болса, $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$ - ны есептеңдер:

A) 0,59; B) 0,49; C) –0,49; D) 0,2.

18. $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$ болса, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$- ны табыңдар:

A) $\frac{81}{49}$; B) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; C) $\frac{49}{81}$; D) $-1\frac{32}{49}$.

19. Есептеңдер: $\sin 100°\cdot\cos 440°+\sin 800°\cdot\cos 460°$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) –1; D) 0.

20. Ықшамдаңдар: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$; B) $-2\sin 4\alpha$; C) $\sin 4\alpha$; D) $2\cos 2\alpha$.

21. $8x^2-6x+1=0$ теңдеудің түбірлері $\sin\alpha$ және $\sin\beta$ болып, α, β бұрыштар – I ширекте болса, $\sin(\alpha+\beta)$- ның мәнін табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; C) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; D) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. $6x^2-5x+1=0$ теңдеудің түбірлері $\cos\alpha$ және $\cos\beta$ болып, α, β бұрыштар – I ширекте болса, $\cos(\alpha+\beta)$- ның мәнін табыңдар:

A) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$; B) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. x- ті табыңдар: $2(x+\sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$.

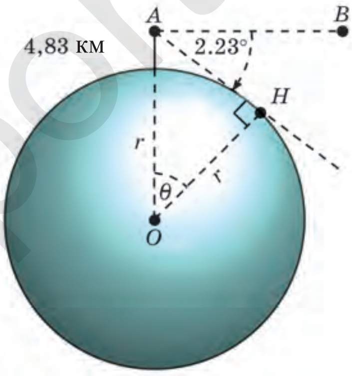
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; Ñ) $\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$.

24. $x^2 - 7x + 12 = 0$ теңдеудің түбірлері $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{tg}\beta$ болса, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$-ны табыңдар:

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

Есеп. (Беруни есебі.) Бақылаушы теңіз деңгейінен 4,83 км биіктіктегі таудың шыңында тұрып, мұхит горизонтына көлбеу бұрышы 2,23° екенін өлшеді. Жердің радиусын табыңдар.



73-сурет.

Орта ғасырлардың ұлы энциклопедист ғалымы Әбу Райхан Мұхаммед ибн Ахмед Беруни (973-1048 ж.) Жер шарының радиуысын үлкен дәлдікпен өлшеген. Есептің төменде келтірілген шешу тәсілі де соған тиісті.

△ Жерді шар деп көз алдымызға келтіреміз. r арқылы Жердің радиусын, A арқылы таудың шыңын және H арқылы A нүктеден шыққан түзу сызықта жататын горизонт нүктесін 73- суретте көрсетілгеніндей етіп белгілейміз. Сондай-ақ O нүктесі Жердің центрі және B нүктесі A нүктеден шығатын және $\overline{OA}$ - ға перпендикуляр болған горизонтал сызықтың нүктесі болсын. Ал $\angle AOH$ бұрышты θ арқылы белгілеп аламыз.

A нүктесі теңіз деңгейінен 4,83 км биіктікте болғандықтан $OA = r + 4{,}83$. Бұдан тыс, $OH = r$. $\overline{AB}$ сызығы $\overline{OA}$ - ға перпендикуляр болғандықтан $\angle OAB = 90°$ және сол үшін $\angle OAH = 90° — 2{,}23° = 87{,}77°$. Жер деңгейін суреттегідей шеңбер түрінде қарастырсақ, $\overline{AH}$ бұл шеңберге жанама, демек, $\overline{AH}$ және $\overline{OH}$ өзара перпендикуляр болады, нәтижеде $\Delta OHA = 90°$. $\angle OAH$

бұрыштарының қосындысы 180° екендігінен $\theta = 180° - 90° - 87,77° = 2,23°$.

Демек, $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r+4,83}$, бұдан $\frac{r}{r+4,83} = \cos 2,23^{\circ}$.

Бұл теңдеуді r- ға орай шешеміз:

$$r = (r+4,83)\cos 2,23° \Rightarrow r - r\cos 2,23° = 4,83\cos 2,23° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4,83\cos 2,23°}{1-\cos 2,23°} \Rightarrow r = 6372,91.$$

Мынаны атап өту қажет, шыққан нәтиже Жердің шындығындағы орташа радиусы 6371 км- ге өте жақын.

Жауабы: $r = 6372,91$ км. ▲

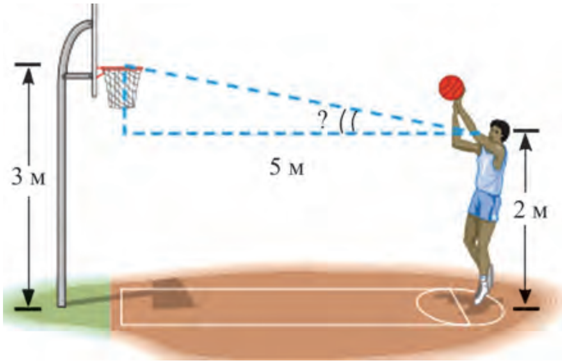
Есептер

1. Бақылаушы Жер серігі Жер бетінен h(км) қашықтықта шеңбер бойымен қозғалсын. Көз алдымызға келтірейік, d серіктен Жер бетінің бақылау мүмкін болған аралығының ұзындығы болсын (74- сурет).

74- сурет.

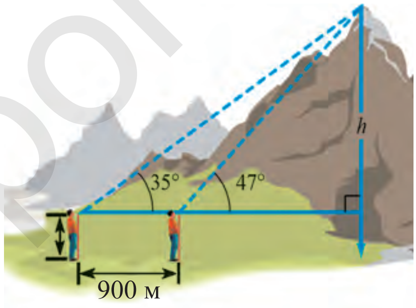
1) Центрлік бұрыш θ (радиандарда) және h биіктікті байланыстыратын теңдеуді табыңдар;
2) бақылануы мүмкін болған аралықтың d ұзындығымен θ- ны байланыстыратын теңдеуді табыңдар;
3) d және h- ты байланыстыратын теңдеуді табыңдар;
4) егер d = 4000 км болса, Жер серігі қандай биіктікте болады?
5) егер Жер серігі 100 км биіктікте болса, d қандай болады?

2. Баскетбол себетшесінен 5 метр қашықтықта тұрған баскетболшының көзі еденнен 2 метрлік биіктік дәрежесінде, мұнда себетше градусы еденнен 3 метрлік биіктікте (75-сурет). Оның көзінен себетше сақинасының центріне қарау бұрышы қандай?



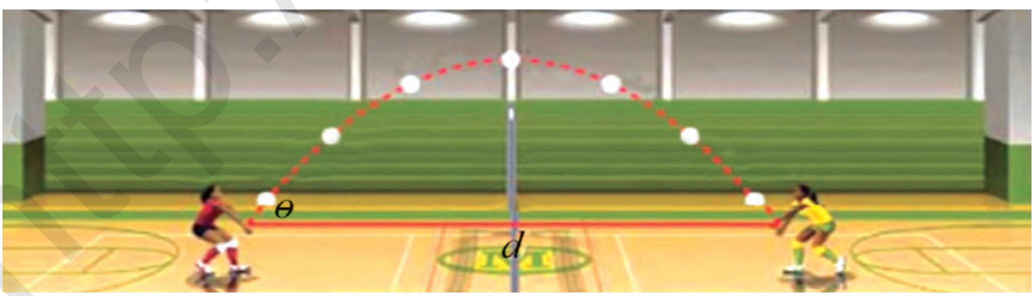
75- сурет.

3. Маркшейдер (кендерді жоспарлау және оларды дұрыс пайдадалану бойынша маман) таудың биіктігін өлшеу мақсатында арақашықтығы 900 метрлік екі нүктеден көтерілу бұрыштарын өлшеді (76- сурет). Нәтижеде бірінші бұрыш 47° және екінші бұрыш 35° екені анықталды. Егер теодолит (бұрышты өлшейтін құрылғының) биіктігі 2 метр болса, таудың биіктігін табыңдар.



76- сурет.

4. Волейбол ойынында көтерілу бұрышы θ және бастапқы жылдамдығы v м/с- пен атылған доп $d = \frac{v}{9,75}\sin 2(\theta)$ формулаға орай d горизонтал қашықтыққа ұшып барады. Егер $\theta = 60°$ және жылдамдық 12 м/с болса, d- ны табыңдар (77- сурет).



77- сурет.

Тарихи есептер

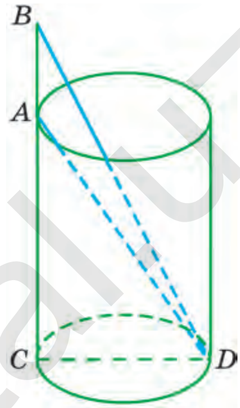
Әбу Райхан Берунидің есептері

1. Құдық цилиндр пішінді қазылған. Оның табаны құдық ернеуіндегі A нүктеден α бұрыш жасап, ал құдық қабырғасының жалғасы болатын B нүктеден β бұрыш жасап көрінеді (78- сурет). Егер $AB = a$ болса, құдықтың тереңдігін табыңдар:

Берілген:

$\angle CAD = \alpha, \ \angle ABD = \beta, \quad AB = a.$

Табу керек: $AC = ?$



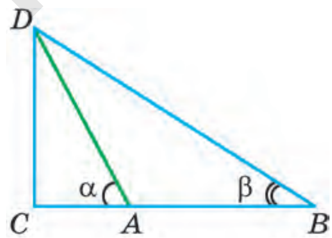
78- сурет.

2. Мұнара жердегі A нүктеден α бұрыш жасап, B нүктеден β бұрыш жасап көрінеді (79- сурет). $AB = a$ болса, мұнараның биіктігін табыңдар.

Берілген:

$\angle CAD = \alpha, \ \angle ABD = \beta, \ AB = a.$

Табу керек: $CD = ?$



79- сурет.

Ғиясиддин Жамшид әл-Кашидің есебі

3. Кез келген α бұрыш үшін

$$\sin\left(45^\circ \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

болатынын дәлелдеңдер.

Әйгілі математик Әбулвафо Мұхаммед әл-Бозжанидің (940–998) есебі

4. Кез келген α және β үшін

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

болатынын дәлелдеңдер.

Тарихи мағлұматтар

Мырза Ұлықбек (1394–1449)

Математика, оның бір бөлімі тригонометрияның дамуына ұлы ойшыл ғалымдар Мұхаммед әл-Хорезми, Ахмед Ферғани, Әбу Райхан Беруни, Мырза Ұлықбек, Әли Құсшы, Ғиясиддин Жамшид әл-Кашилар үлкен үлес косқан. Жұлдыздардың аспан сферасындағы координаталарын анықтау, планеталардың қозғалысын зерттеу, Ай мен Күннің тұтылуын алдын ала айту және басқа да ғылыми, практикалық маңызды мәселелерді анық есептеулерді, осы есептеулерге негізделген кестелерді жасаумен шұғылданған. Міне осындай астрономиялық (тригонометриялық) кестелер Шығыста „Зидж" деп аталған.

Мұхаммед әл-Хорезми, Әбу Райхан Беруни, Мырза Ұлықбек сияқты ғұламалардың математикалық шығармаларымен бірге „Зиджлері" де әлемге әйгілі болған, олар латын және басқа тілдерге аударылған, Еуропадағы математиканың, астрономияның дамуына салмақты әсерін тигізген.

Берунидің „Маъсуди Заңы" еңбегінде синустар кестесі 15 минуттық қадаммен, тангенстер кестесі 1°- тық қадаммен 10^{-8}-ге дейінгі дәлдікпен берілген. Өте анық „Зиджлердің" бірегейі — Мырза Ұлықбектің „Зиджі" – „Зидж-и Курагани". Мұнда синустар кестесі 1 минут аралықпен алынған, тангенстер кестесі 0° -тан 45° -қа дейінгі 1 минут аралықпен алынған, ал 46°-тан 90°-қа дейін 5 минут аралықпен 10^{-10} дейінгі дәлдікпен берілген.

Ғиясиддин Жамшид әл-Кашидің „Ватар және синус туралы мақаласында" $\sin 1^\circ$- ты үтірден соң 17 таңба дәлдікпен есептейді:

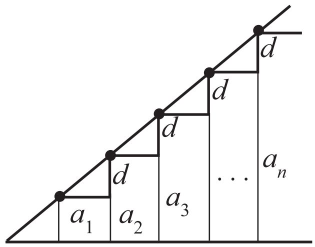
$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Шеңбер ұзындығын оған іштей және сырттай сызылған дұрыс $3 \cdot 2^n$ – көп бұрыштар периметрлерінің арифметикалық ортасы деп, $n = 28$ болғанда Жамшид әл-Каши „Шеңбер туралы мақала" шығармасында 2π үшін мынадай нәтижені келтіріп шығарды:

$$2\pi = 6{,}2831853071795865...$$

IV ТАРАУ.

САНДАР ТІЗБЕГІ. ПРОГРЕССИЯЛАР



28-§. САНДАР ТІЗБЕГІ

Күнделікті жұмыс барысында түрлі бұйымдардың орналасу ретін көрсету үшін оларды нөмірлеу пайдаланылады. Мысалы, әрбір көшедегі үйлер нөмірленеді. Кітапханадағы оқырмандардың абономенттері нөмірленеді және олар берілген нөмерлер ретімен арнаулы картотекаларға орналастырылады.

Банкте клиенттің есеп-шотының нөмері бойынша ондағы қаржының мөлшерін көруге болады. Айталық, №1 есеп-шотында a_1 сум, №2 есеп-шотында a_2 сум, тағы сол сияқты болсын. Нәтижеде

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$$

сандар тізбегі пайда болады, мұндағы N – барлық есеп-шоттардың саны. Мұнда 1- ден N- ға дейінгі әрбір натурал n санына a_n саны сәйкес қойылған.

Математикада *шексіз* сандық тізбектер үйреніледі:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

a_1 саны – тізбектің бірінші мүшесі, a_2 – тізбектің екінші мүшесі, a_3 – тізбектің үшінші мүшесі делінеді, т.с.с. a_n саны – тізбектің n- (энінші) мүшесі деп, ал натурал n сан оның нөмірі деп аталады. Мысалы, натурал сандар квадраттарынан құралған $1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, (n+1)^2, ...$ сандар тізбегі үшін $a_1=1$ тізбектің бірінші мүшесі; $a_n=n^2$ тізбектің n- мүшесі; $a_{n+1}=(n+1)^2$ тізбектің $(n+1)$- мүшесі.

Сандар тізбектері көбінесе ортақ n-мүшесінің формуласы арқылы беріледі. Мысалы, $a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ формула арқылы $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},...,\ \frac{1}{n},...$ сандар тізбегі берілген.

1-есеп. Сандар тізбегі $a_n=n(n-2)$ формуламен берілген. Оның жүзінші мүшесін есептеңдер.

$$\triangle\ a_{100}=100\cdot(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

2-есеп. Сандар тізбегі $a_n=2n+3$ формуламен берілген. 1) Тізбектің 43- ке тең болған мүшесінің нөмірін табыңдар; 2) 50 саны тізбектің мүшесі болатынын немесе болмайтынын анықтаңдар.

$\triangle$**1)** Шарт бойынша $2n+3=43$, бұдан $n=20$.

2) Егер 50 саны тізбектің n- нөмірлі мүшесі болса, онда $2n+3=50$, бұдан $n=23{,}5$. Пайда болған n- ның мәні натурал сан болмағандықтан, ол тізбектің мүшесінің нөмірі болмайды. Сол себепті, 50 саны тізбектің мүшесі емес. $\blacktriangle$

Кейде тізбек мынадай формула арқылы беріледі, мұнда оның қандайда бір нөмірінен бастап кез келген мүшесін одан алдыңғы бір немесе бірнеше мүшелері арқылы есептеуге болады. Тізбектің мұндай берілу әдісі *реккурент* (латынша *recuro* – қайту) әдісі деп аталады.

3-есеп. Сандар тізбегі $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$ рекурент формуламен және $b_1=1,\ b_2=3$ шарттармен берілген. Бұл тізбектің бесінші мүшесін есептеп табыңдар.

$\triangle\ b_3=b_2+b_1=3+1=4.$

$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$

$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$

Жауабы: $b_5=11.\ \blacktriangle$

Жаттығулар

349. Натурал сандардың квадраттарынан құралған 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... сандар тізбегі берілген.
1) Тізбектің үшінші, алтыншы, n- мүшелерін табыңдар.
2) Тізбектің 4, 25, n^2, $(n+1)^2$- ге тең болған мүшелерінің нөмірлерін көрсетіңдер.

350. n- мүшесінің формуласымен берілген тізбектің бірінші үш мүшесін есептеңдер:
1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;
4) $a_n = \frac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Ауызша.) Сандар тізбегі $x_n = n^2$ формуламен берілген. Тізбектің 100; 144; 225- ке тең болған мүшелерінің нөмірі қандай? 48, 49, 169 сандары осы тізбектің мүшелері бола ма?

352. Тізбек $a_n = n^2 - 2n - 6$ формуламен берілген.
1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9
сандары тізбектің мүшелері бола ма?

353. 1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$
реккурент формуламен және $a_1 = 2$ шартпен берілген тізбектің бастапқы төрт мүшесін табыңдар.

354. Сандар тізбегі n- мүшенің формуласы $a_n = (n - 1)\ (n + 4)$- пен берілген. Егер
1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ болса, n-ны табыңдар.

355. $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ реккурент формуламен және $a_1 = 256$ шартпен берілген тізбектің бастапқы төрт мүшесін табыңдар.

356. $a_1 = 1$ шартпен және

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$

реккурент формуламен берілген тізбектің бастапқы алты мүшесін жазыңдар.

357. Сандар тізбегі $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ реккурент формуламен және $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, шартпен берілген. Тізбектің бесінші мүшесін есептеңдер.

358. *n*- мүшесінің формуласымен берілген сандар тізбегінің (n + 1)-, (n + 2)- және (n + 5)- мүшелерін жазыңдар:

1) $a_n = -5n + 4$; | 2) $a_n = 2(n - 10)$; | 3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; | 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

29- §. АРИФМЕТИКАЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ

Мынадай есепті қарастырайық.

Есеп. Оқушы сынаққа дайындық кезеңінде әр күні 5 есептен шығаруды жоспарлады. Әр күні шешілуі жоспарланған есептердің саны қалай өзгереді?

Жоспар бойынша орындалған есептер саны әрбір күн бойынша былайша өзгереді:

1- күн	2- күн	3- күн	4- күн ...
5	10	15	20 ...

Нәтижеде мынадай сандар тізбегі пайда болады:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots .$$

a_n арқылы n- күнде шешілетін барлық есептер санын белгілейік. Мәселен:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ \ldots .$$

Пайда болған

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

сандар *сандар тізбегі* деп аталады.

Бұл тізбекте екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдыңғы мүшесіне тұрақты 5 санын қосқанға тең. Бұл тізбекті *арифметикалық прогрессия* деп атаймыз.

Анықтама. ***Егер $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сандар тізбегінде барлық натурал n үшін***

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(мұндағы d – кез келген сан) теңдігі орындалса, мұндай тізбек арифметикалық прогрессия деп аталады.

Бұл формуладан $a_{n+1} - a_n = d$ екендігі келіп шығады. d саны *арифметикалық прогрессияның айырмасы* деп аталады. Мысалы,

1) Сандардың 1, 2, 3, 4 ..., n, ... натурал қатары арифметикалық прогрессияны құрайды. Бұл прогрессияның айырмасы $d = 1$.

2) Бүтін теріс сандардың –1, –2, –3, ..., $-n$, ... тізбегінің айырмасы $d=-1$ болатын арифметикалық прогрессия.

3) 3, 3, 3, ..., 3, ... тізбегінің айырмасы $d = 0$ болатын арифметикалық прогрессиядан құралған.

1-есеп. $a_n = 1{,}5 + 3n$ формуламен берілген тізбектің арифметикалық прогрессия болатынын дәлелдеңдер.

△ $a_{n+1} - a_n$ айырмасы барлық n үшін бірдей (n- ге байланысты емес) екендігін көрсету талап етіледі.

Берілген тізбектің (n + 1)- мүшесін жазамыз:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Сондықтан

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Демек, $a_{n+1} - a_n$ айырмасы n- ге байланысты емес. ▲

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$, бұдан

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n > 1.$$

Сонымен, арифметикалық прогрессияның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі оған көршілес екі мүшенің арифметикалық ортасына тең. „Арифметикалық“ прогрессия деген ұғым осылай түсіндіріледі.

Егер a_1 және d берілген болса, онда арифметикалық прогрессияның басқа мүшелерін $a_{n+1} = a_n + d$ формуласымен есептеуге болатынын ескертеміз. Бұндай әдіспен прогрессияның бірнеше мүшесін табу қиын емес. Бірақ, мәселен, a_{100} үшін бірқатар есептеулер талап етіледі. Әдетте бұл үшін n- мүше формуласы пайдаланылады.

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ va h.k.}$$

Жалпы алғанда,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d,} \qquad \textbf{(1)}$$

өйткені арифметикалық прогрессияның n- мүшесі оның бірінші мүшесіне d санын $(n - 1)$ рет қосудың нәтижесінде пайда болады.

(1) формула *арифметикалық прогрессияның n- мүшесінің формуласы* деп аталады.

2 - есеп. Егер $a_1 = -6$ және $d = 4$ болса, арифметикалық прогрессияның жүзінші мүшесі қандай болатынын табыңдар.

△ (1) формула бойынша: $a_{100} = -6 + (100 - 1)\cdot 4 = 390$. ▲

3 - есеп. 99 саны 3, 5, 7, 9, ... арифметикалық прогрессияның мүшесі болып саналады. Осы мүшесінің нөмірін табыңдар.

△ Айталық, n – ізделінген нөмір болсын. $a_1 = 3$ және $d = 2$ болғандықтан $a_n = a_1 + (n - 1)d$ формуласы бойынша: $99 = 3 + (n - 1)\cdot 2$. Сондықтан $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Жауабы: $n = 49$. ▲

4 - есеп. Арифметикалық прогрессиядан $a_8 = 130$ және $a_{12} = 166$. n- мүшесінің формуласын табыңдар.

△ (1) формуланы пайдаланып табамыз:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

a_8 және a_{12} мүшелерінің берілген мәндерін қойсақ, a_1 және d- ға қатысты теңдеулер жүйесі пайда болады:

$$\begin{cases} a_1 + 7\text{d} = 130, \\ a_1 + 11\text{d} = 166. \end{cases}$$

Екінші теңдеуді біріншісінен мүшелеп алсақ:

$$4d = 36, \; d = 9.$$

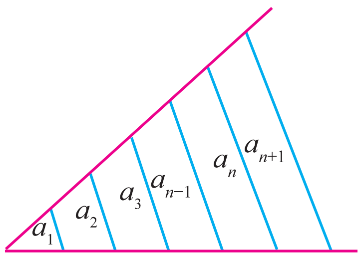
Демек, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Прогрессияның n- мүшесінің формуласын жазамыз:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Жауабы: $a_n = 9n + 58$. ▲

5-есеп. Бұрыштың бір жағында оның төбесінен тең кесінділер бөлінген. Олардың ұштарынан параллель түзу сызықтар жүргізілген (80- сурет). Түзу сызықтардың бұрыштары арасындағы a_1, a_2, a_3, ... кесінділерінің ұзындықтары арифметикалық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.



80- сурет.

△ Табандары a_{n-1} және a_{n+1} болған трапецияда оның орта сызығы a_n- ге тең. Сондықтан

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Бұдан $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ немесе

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Тізбектің әрбір мүшесі мен одан алдыңғы мүшенің айырмасы бірдей сан болғандықтан бұл тізбек арифметикалық прогрессия болады. ▲

Жаттығулар

359. (Ауызша.) Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесін және айырмасын айтыңдар:

1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Егер:

1) $a_1 = 2$ және $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ және $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ және $d = -1$ болса, арифметикалық прогрессияның алғашқы бес мүшесін табыңдар.

361. n- мүшесінің формуласымен берілген тізбек арифметикалық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер:

1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Арифметикалық прогрессияда:

1) егер $a_1 = 2$, $d = 3$ болса, a_{15}- ті табыңдар;

2) егер $a_1 = 3$, $d = 4$ болса, a_{20}- ны табыңдар;
3) егер $a_1 = -3$, $d = -2$ болса, a_{18}- ді табыңдар;
4) егер $a_1 = -2$, $d = -4$ болса, a_{11}- ді табыңдар.

363. Арифметикалық прогрессияның n- мүшесінің формуласын жаз:

1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. –22 саны 44, 38, 32, ... арифметикалық прогрессия мүшесі. Бұл санның нөмірін табыңдар.

365. 12 саны –18, –15, –12, ... арифметикалық прогрессия мүшесі бола ма?

366. –59 саны 1, –5 ... арифметикалық прогрессияның мүшесі. Оның нөмірін табыңдар. –46 саны осы прогрессияның мүшесі бола ма?

367. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8$, $a_{10} = 64$ болса, оның айырмасын табыңдар.

368. Арифметикалық прогрессияның айырмасы 1,5- ке тең. Егер:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$ болса, a_1- ді табыңдар.

369. Егер арифметикалық прогрессияда:
1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5{,}5$;
3) $a_3 = -1$, $a_9 = 17$ болса, оның бірінші мүшесін табыңдар.

370. Егер арифметикалық прогрессияда:
1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11$, $a_{13} = 29$ болса, оның n- мүшесінің формуласын табыңдар.

---

371. n- нің қандай мәндерінде 15, 13, 11, ... арифметикалық прогрессияның мүшелері теріс болады?

372. Арифметикалық прогрессияда $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$ болса, n- нің қандай мәндерінде $a_n < 2$ теңсіздік орандалады?

373. Арифметикалық прогрессияда:

1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;

3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5$, $a_{10} = -2{,}5$

болса, тоғызыншы мүшесін және айырмасын табыңдар.

30-§. АРИФМЕТИКАЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ *n* МҮШЕСІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫ

1- есеп. 1- ден 100- ге дейінгі барлық натурал сандардың қосындыларын табыңдар.

△ Бұл қосындыны екі тәсілмен жазамыз:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1.$$

Бұл теңдіктерді мүшелеп қосамыз:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101}_{100 \text{ қосылғыш}}$$

Сондықтан $2S = 101 \cdot 100$, бұдан $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Енді кез келген

$$a_1, a_2, ... , a_n, ...$$

арифметикалық прогрессия берілген болсын. S_n – бұл арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы десек:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

***Теорема.* Арифметикалық прогрессияның алғашқы *n* мүшелерінің қосындысы мына төмендегі өрнекке тең:**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \qquad \textbf{(1)}$$

○ S_n- ді екі тәсілмен жазамыз:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша бұл теңдіктерді мына төмендегідей жазуға болады:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n - 1)d), \qquad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n - 1)d). \qquad (3)$$

(2) және (3) теңдіктерді мүшелеп қосамыз:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ қосылғыш}}$$

Демек, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, бұдан $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$. ●

2- есеп. Алғашқы n натурал сандардың қосындысын табыңдар.

△ Натурал сандардың

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...,\ n,\ ...$$

тізбегінің айырмасы $d = 1$ болатын арифметикалық прогрессия. $a_1 = 1$ және $a_n = n$ болғандықтан (1) формуланың көмегімен табамыз:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Сонымен,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}. \ ▲$$

3- есеп. Егер 38 + 35 + 32 + ... + (–7) қосындысының қосылғыштары арифметикалық прогрессияның тізбек мүшелері болса, қосындыны тап.

△ Шарт бойынша, $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. Енді $a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласын қолданып, $-7 = 38 + (n-1)(-3)$ екенін жазамыз, бұдан $n = 16$.

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ формуласы арқылы есептейміз:

$$S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248. \ ▲$$

4-есеп. Қосындысы 153 -ке тең болатындай, 1-ден бастап тізбектеп неше натурал сандарды қосу керек?

△ Сандардың натурал тізбегі – айырмасы $d = 1$ болатын арифметикалық прогрессия. Шарт бойынша $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Алғашқы n мүшелерінің қосындысының формуласын төмендегідей өзгертіп жазамыз:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_1+(n-1)\mathrm{d}}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n.$$

Берілгендерді пайдаланғанда, n белгісізі бар теңдеу келіп шығады:

$$153 = \frac{2 \cdot 1+(n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

бұдан

$$306 = 2n + (n - 1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Бұл теңдеуді шешіп түбірлерін тапсақ:

$$n_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1-35}{2},$$

$$n_1 = -18, \; n_2 = 17.$$

Қосылғыш саны теріс бола алмайды, демек $n = 17$. ▲

Жаттығулар

374. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1=1, \; a_n=20, \; n=50$;
3) $a_1=-1, \; a_n=-40, \; n=20$;
2) $a_1=1, \; a_n=200, \; n=100$;
4) $a_1=2, \; a_n=100, \; n=50$

болса, оның алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

375. 2- ден 98- ге дейінгі барлық натурал сандардың қосындысын есептеңдер (98 де қосындыға енеді).

376. 1- ден 133- ке дейінгі барлық тақ сандардың қосындысын есептеңдер (133 де қосындыға енеді).

377. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1=-5, \; d=0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}, \; d=-3$; 3) $a_1=36, \; d=-2{,}5$

болса, алғашқы он екі мүшесінің қосындысын есептеңдер.

378. 1) егер $n = 11$ болса, 9; 13; 17; ...;
2) егер $n = 12$ болса, –16; –10; –4; ...

арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

379. Егер:

1) $3 + 6 + 9 + ... + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + ... + (-60)$

қосындының қосылғыштары арифметикалық прогрессияның тізбектегі мүшелері болса, қосындыны есептеңдер.

380. Барлық екі таңбалы, барлық үш таңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

381. Арифметикалық прогрессия n- мүшенің формуласымен берілген. Егер:

1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$ болса, S_{50}- ді табыңдар.

382. Қосындысы 75- ке тең болатындай, 3- тен бастап тізбекке неше натурал сан қосуға болады?

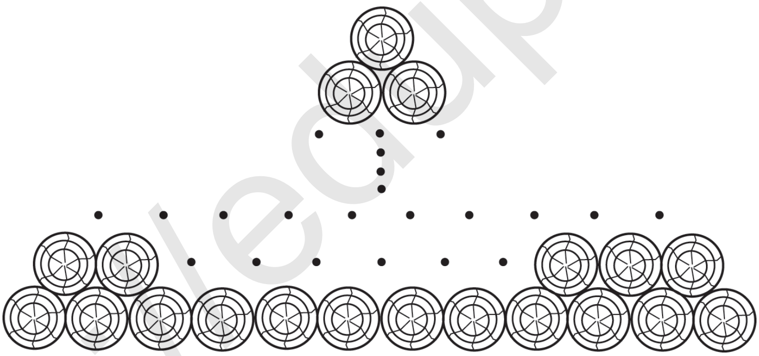
383. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$ болса, a_n мен d ны табыңдар.

384. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; | 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$; | 3) $a_{20} = 65$, $S_{20} = 350$ болса, a_1 және d- ны табыңдар.

385. Үй салуға қажетті бөренелерді 81- суретте көрсетілгендей етіп жинайды. Егер ең астында жатқан бөренелер саны 12 болса, онда барлығы қанша бөрене жиналған?



81- сурет.

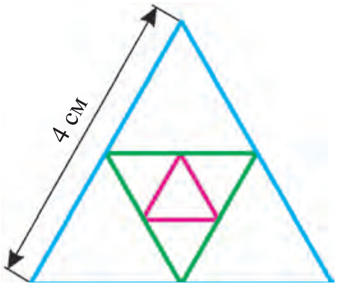
386. Арифметикалық прогрессияда $a_3 + a_9 = 8$. S_{11}- ді табыңдар.

387. Егер арифметикалық прогрессияда $S_5 = 65$ және $S_{10} = 230$ болса, оның бірінші мүшесін және айырмасын табыңдар.

388. Арифметикалық прогрессия үшін $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ теңдігінің орындалуын дәлелдеңдер.

31-§. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ

Қабырғасы 4 см болатын тең қабырғалы дұрыс үшбұрышты алайық. Төбелері берілген үшбұрыштың қабырғаларының ортасынан тағы да бір үшбұрыш саламыз (82- сурет). Үшбұрыш орта сызығының қасиеті бойынша екінші үшбұрыштың қабырғасының ұзындығы 2 см ге тең болады. Сондықтан осы әрекетімізді одан ары жалғастырсақ, қабырғаларының қабырғалары 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см т. с. с. ұшбұрыштар пайда болады. Үшбұрыштар қабырғаларының ұзындықтарының тізбегін жазайық:



82- сурет.

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots .$$

Бұл тізбекте екіншісінен бастап, оның әрбір мүшесі, алдыңғы мүшені бірдей $\frac{1}{2}$ санына көбейткенге тең болады. Мұндай тізбектер *геометриялық прогрессия* делінеді.

Анықтама. ***Егер***

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

сандар тізбегіндегі барлық натурал n үшін

$$b_{n+1} = b_n q$$

теңдігі орындалса, мұндай тізбек геометриялық прогрессия деп аталады, мұндағы $b_n \neq 0$, q – нөлге тең емес кез келген сан.

Бұл формуладан $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ екендігі келіп шығады. q саны *геометриялық прогрессияның еселігі* деп аталады.

Мысалдар

1) 2, 8, 32, 128, ... – еселігі $q = 4$ болатын геометриялық прогрессия;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – еселігі $q = \frac{2}{3}$ болатын геометриялық прогрессия;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – еселігі $q = -12$ болатын геометриялық прогрессия;

4) 7, 7, 7, 7, ... – еселігі $q = 1$ болатын геометриялық прогрессия.

1- есеп. $b_n = 7^{2n}$ формуламен берілген тізбек геометриялық прогрессия болатынын дәлелдеңдер.

△ Барлық n- дер үшін $b_n = 7^{2n} \neq 0$ екенін ескерсек. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ бөліндінің барлық n- дер үшін n- ге тәуелді емес бірдей санға тең екендігі талап етіледі. Шынында да,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

яғни $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ бөлінді n- ге тәуелді емес. ▲

Геометриялық прогрессияның анықтамасы бойынша

$$b_n+1=b_nq, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

бұдан

$$b^2_{n+1} = b_{n-1}\, b_{n+1}, \quad n>1.$$

Егер прогрессияның барлық мүшелері оң болса, онда $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ болады, яғни геометриялық прогрессияның әрбір мүшесі, екіншісінен бастап, оған көрші екі мүшелерінің геометриялық ортасына тең. „Геометриялық“ прогрессия ұғымы осылай түсіндіріледі.

Егер b_1 және q берілген болса, онда геометриялық прогрессияның басқа мүшелерін $b_{n+1} = b_nq$ реккурент формуласы бойынша есептеуге болады. Бірақ, n өте үлкен болғанда бұл көбірек еңбекті талап етеді. Әдетте, n- мүшенің формуласы пайдаланылады.

Геометриялық прогрессияның анықтамасы бойынша

$$b_2 = b_1q,$$
$$b_3 = b_2q = b_1q^2,$$
$$b_4 = b_3q = b_1q^3 \text{ және т.с.с.}$$

Жалпы алғанда,

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

себебі геометриялық прогрессияның n- мүшесі оның бірінші мүшесін q санға $(n–1)$ рет көбейткенде келіп шығады.

(1) формула геометриялық прогрессияның *n- мүшесінің формуласы* деп аталады.

2- есеп. Егер $b_1 = 81$ және $q = \frac{1}{3}$ болса, геометриялық прогрессияның жетінші мүшесін табыңдар.

△ (1) формула бойынша:

$$b_7 = 81 \cdot (\tfrac{1}{3})^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}\cdot \ ▲$$

3- есеп. 486 саны 2, 6, 18, ... геометриялық прогрессияның мүшесі. Осы мүшесінің нөмірін табыңдар.

△ Айталық, n – ізделінетін нөмір болсын. $b_1 = 2$, $q = 3$ болғандықтан $b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласы бойынша:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1},\ \ 243 = 3^{n-1},\ \ 3^5 = 3^{n-1},$$

бұдан $n-1=5$, $n=6$. ▲

4- есеп. Геометриялық прогрессияда $b_6=96$ және $b_8=384$. n- мүшенің формуласын табыңдар.

△ $b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласы бойынша: $b_6=b_1q^5$, $b_8=b_1q^7$. b_6 және b_8- дің берілген мәндерін орындарына қойсақ: $96=b_1q^5$, $384=b_1q^7$. Бұл теңдіктердің екіншісін біріншісіне бөлеміз:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1q^7}{b_1q^5},$$

бұдан $4=q^2$ немесе $q^2=4$. Соңғы теңдіктен $q=2$ немесе $q = –2$ шығады.

Прогрессияның бірінші мүшесін табу үшін $96 = b_1q^5$ теңдігін пайдаланамыз:

1) $q = 2$ болсын. Онда $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96= b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$.

Демек, $b_1 = 3$ және $q = 2$ болғандықтан n- мүшенің формуласы

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

болады.

2) $q = -2$ болсын. Онда $96 = b_1(-2)^5$, $96 = b_1(-32)$, $b_1 = -3$.

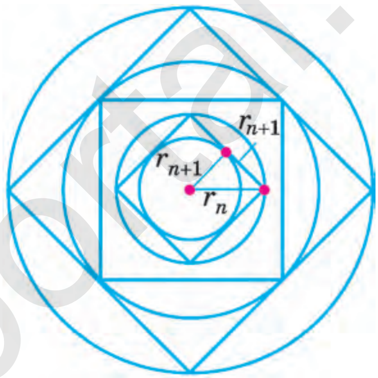
Демек, $b_1 = -3$ және $q = -2$ болғандықтан, n- мүшенің формуласы

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

болады.

Жауабы: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ немесе $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

5-есеп. Шеңберге іштей квадрат сызылған, ол квадратқа іштей шеңбер сызылған. Екінші шеңберге іштей квадрат сызылған, ал екінші квадраттың ішіне үшінші шеңбер іштей сызылған т. с. с. (83- сурет). Шеңберлердің радиустары геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.



83-сурет.

△ n-шеңбердің радиусы r_n болсын. Онда Пифагор теоремасы бойынша

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

бұдан,

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ яғни } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n .$$

Демек, шеңберлер радиустарының тізбегіндегі еселігі $\frac{1}{\sqrt{2}}$ болатын геометриялық прогрессия құрайды. ▲

Жаттығулар

389. (Ауызша.) Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі және еселігі неге тең:

1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ;
3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$

болса, алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

391. n- мүшесінің формуласымен берілген төмендегі тізбек геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер:

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 3$ және $q = 10$ болса, b_4- ті;

2) $b_1 = 4$ және $q = \frac{1}{2}$ болса, b_7- ні;

3) $b_1 = 1$ және $q = -2$ болса, b_5- ті;

4) $b_1 = -3$ және $q = -\frac{1}{3}$ болса, b_6- ны есептеңдер.

393. Геометриялық прогрессияның n- мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) 4, 12, 36, ...; 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...; 3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;

4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ; 5) 16, 8, 4, 2, ... ; 6) –9, 3, –1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Геометриялық прогрессияның асты сызылған мүшесінің нөмірін табыңдар:

1) 6, 12, 24, ... , <u>192</u>, ...; 2) 4, 12, 36, ... , <u>324</u>, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , <u>128</u>, ...

395. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

болса, оның еселігін табыңдар.

396. 2, 6, 18, ... геометриялық прогрессия берілген.

1) прогрессияның сегізінші мүшесін есептеңдер;

2) тізбектің 162- ге тең мүшесінің нөмірін табыңдар.

397. Егер оң мүшелі геометриялық прогрессияда:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

болса, оның жетінші мүшесін және еселігін есептеңдер.

398. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$ болса, оның бесінші және бірінші мүшелерін табыңдар.

399. Салымшы жинақ банкіне 2009 жылдың 4 қаңтары күні 300000 сум ақша салды. Егер жинақ банкі жылына 30% мөлшерінде өсім төлесе, салымшының ақшасы 2012 жылдың 4 қаңтарында қанша болады?

400. Қабырғасының ұзындығы 4 см квадрат берілген. Оның қабырғаларының ортасы – екінші квадраттың төбелері, екінші квадрат қабырғаларының ортасы – үшінші квадраттың төбелері болады, т. с. с. Осы квадраттар аудандарының тізбегі геометриялық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер. Жетінші квадраттың ауданын табыңдар.

32-§. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ *n* МҮШЕЛЕРІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫ

1- есеп. Қосындысын табыңдар:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

△ Теңдіктің екі жағын да 3- ке көбейтеміз:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктерді былайша жазып аламыз:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Жақшаның ішіндегі өрнектер бірдей. Сондықтан төмендегі теңдіктен жоғарыдағы теңдікті айырамыз:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6-1}{2} = \frac{729-1}{2} = 364 \text{ .} \; ▲$$

Енді еселігі $q \neq 1$ болатын кез келген b_1, b_1q, ..., b_1q^n, ... геометриялық прогрессияны қарастырайық. S_n – осы прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы болсын:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Теорема. ***Еселігі $q \neq 1$ болатын геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы мына төмендегі өрнекке тең:***

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad \mathbf{(4)}$$

○ (3) теңдіктің екі жағын да q- ге көбейтеміз:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^n. \qquad (5)$$

(3) және (5) теңдіктерді, олардағы бірдей қосылғыштарды бөлек жазамыз:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Жақшаның ішіндегі өрнектер өзара тең. Сонымен жоғарыдағы теңдіктен төмендегісін айырсақ:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Бұдан

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Егер $q = 1$ болса, онда

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + ... + b_1}_{n \text{ қосылғыш}} = b_1 n$$

2- есеп. 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... геометриялық прогрессияның алғашқы бес мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

△ Бұл прогрессияда $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. (4) формула бойынша табамыз:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. ▲$$

3- есеп. Еселігі $q = \frac{1}{2}$ болатын геометриялық прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысы 252- ге тең. Прогрессияның бірінші мүшесін табыңдар.

△ (4) формула бойынша есептейміз:

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Бұдан $252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right), 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, b_1 = 128$. ▲

4- есеп. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы –93- ке тең. Прогрессияның бірінші мүшесі –3- ке, ал еселігі 2- ге тең. n- ді табыңдар.

△ (4) формула бойынша есептейміз:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Бұдан $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

5- есеп. 5, 15, 45, ..., 1215, ... – геометриялық прогрессия. 5 + 15 + 45 + ... + 1215 қосындысын табыңдар.

△ Бұл прогрессияда $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Алғашқы n мүшелерінің қосындысы формуласын былай түрлендіреміз:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^{n-1}q}{1-q} = \frac{b_1 - b_nq}{1-q} = \frac{b_nq - b_1}{q-1}.$$

Есептің шарты бойынша есептейміз:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645-5}{2} = 1820.$$ ▲

Жаттығулар

401. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$

болса, оның алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

402. Геометриялық прогрессияның алғашқы жеті мүшесінің қосындысын табыңдар:

1) 5, 10, 20, ... ; 2) 2, 6, 18, ... ; 3) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $q = 2$, $S_7 = 635$ болса, b_1 және b_7- ні табыңдар;

2) $q = -2$, $S_8 = 85$ болса, b_1 және b_8- ді табыңдар.

404. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2;$

2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2;$

3) $S_n = 170, b_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2};$

4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

болса, оның мүшелерінің саны n- ді табыңдар.

405. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 847$ болса, n және b_n- ді;

2) $b_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$ болса, n және b_n- ді;

3) $b_1 = 2,\ b_n = 1458,\ S_n = 2186$ болса, n және q- ді;

4) $b_1 = 1,\ b_n = 2401,\ S_n = 2801$ болса, n және q- ді табыңдар.

406. Егер сандар қосындысының қосылғыштары геометриялық прогрессияның тізбекті мүшелері болса, онда қосындысын есептеңдер:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128;$ 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243;$

3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128;$ 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405.$

407. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_2 = 15,\ b_3 = 25;$ | 2) $b_2 = 14,\ b_4 = 686,$ | 3) $b_2 = 15,\ b_4 = 375,\ q > 0$ болса, b_5 және S_4- ті табыңдар.

408. Геометриялық прогрессияда n- мүшесінің формуласымен берілген:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ болса, S_5- ті табыңдар;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ болса, S_6- ны табыңдар.

409. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1,$

мұнда n дәреже көрсеткіші және ол 1- ден үлкен натурал сан.

410. Геометриялық прогрессияда:

1) $b_3 = 135, S_3 = 195$ болса, b_1 және q- ді табыңдар;

2) $b_1 = 12, S_3 = 372$ болса, q және b_3- ті табыңдар.

411. Геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 1$ және $b_3 + b_5 = 90$ болса, q- ді;
2) $b_2 = 3$ және $b_4 + b_6 = 60$ болса, q- ді;
3) $b_1 - b_3 = 15$ және $b_2 - b_4 = 30$ болса, S_{10}- ды;
4) $b_3 - b_1 = 24$ және $b_5 - b_1 = 624$ болса, S_5 - ті табыңдар.

33- §. ШЕКСІЗ КЕМІМЕЛІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ

84- суретте бейнеленген квадраттарды алайық. Бірінші квадраттың қабырғасы 1- ге тең, екіншісінікі $\frac{1}{2}$- ге, үшіншісінікі $\frac{1}{2^2}$- ге тең т. с. с. Сонымен, квадраттың қабырғалары еселігі $\frac{1}{2}$ болатын мынадай геометриялық прогрессияны құрайды:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots . \qquad (1)$$

Ал бұл квадраттардың аудандары еселігі $\frac{1}{4}$ болатын мынадай геометриялық прогрессияны құрайды:

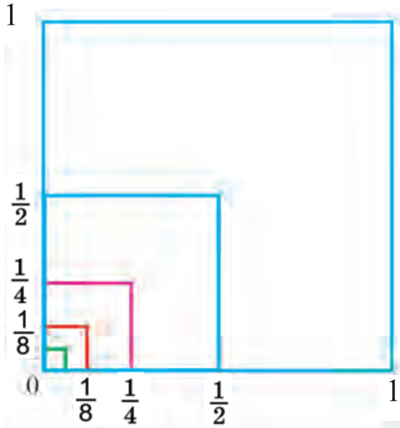
$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots . \qquad (2)$$

84- суреттен айқын көрініп тұрғандай, квадраттардың қабырғалары мен олардың аудандары n нөмірінің өсуіне байланысты барған сайын азайып, нөлге жақындай береді. Сондықтан (1) және (2) прогрессиялар шексіз кемімелі прогрессиялар деп аталады. Бұл прогрессиялардың еселіктері бірден кіші.

Енді мына геометриялық прогрессияны қарастырайық:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \ldots . \qquad (3)$$

Бұл прогрессияның еселігі $q = -\frac{1}{3}$, ал мүшелері $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ және т.б.



84- сурет.

n - нөмірінің өсуіне байланысты бұл прогрессияның мүшелері нөлге жақындайды. (3) прогрессия да *шексіз кемімелі прогрессия* деп аталады. Оның еселігінің модулі бірден кіші, яғни: $|q|<1$.

Еселі модулі бірден кіші болатын геометриялық прогрессия *шексіз кемімелі* прогрессия деп аталады.

1- есеп. n- мүшесінің $b_n=\frac{3}{5^n}$ формуласымен берілген геометриялық прогрессия шексіз кемімелі болатынын дәлелдеңдер.

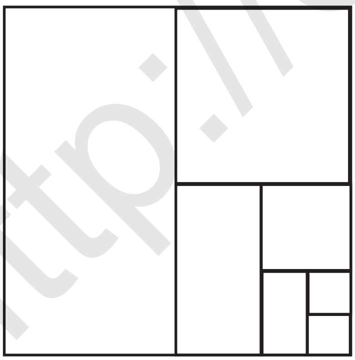
△ Шарт бойынша $b_1=\frac{3}{5}$, $b_2=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$, бұдан $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{5}$. $|q|<1$ болғандықтан берілген прогрессия шексіз кемімелі болады.▲

85- суретте қабырғасының ұзындығы 1- ге тең квадрат бейнеленген. Оның жартысын штрихтаймыз. Соң қалған бөлігіннің жартысын штрихтаймыз, т. с. с. Штрихталған тік төртбұрыштардың аудандары төмендегідей шексіз кемімелі геометриялық прогрессия құрайды:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots.$$

Егер осылай барлық тік төртбұрыштарды штрихтап шықсақ, онда бүкіл квадрат штрихталады. Барлық штрихталған тік төртбұрыш аудандарының қосындысы 1- ге тең деп есептеу орынды, яғни:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1.$$



85- сурет.

Бұл теңдіктің сол жағында шексіз сандық қосылғыштардың қосындысы тұр. Бастапқы n қосылғыштың қосындысын қарастырайық:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелері қосындысының формуласы бойынша:

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Егер n шексіз өссе, онда $\frac{1}{2^n}$ нөлге мүмкіндігінше жуықтайды (нөлге ұмтылады). Бұл жағдай мына төмендегі белгімен жазылады:

$$n \to \infty \text{ - де } \frac{1}{2^n} \to 0$$

(оқылуы: n шексіздікке ұмтылғанда $\frac{1}{2^n}$ нөлге ұмтылады) немесе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(оқылуы: n шексіздікке ұмтылғанда $\frac{1}{2^n}$ тізбектің шегі (лимиті) нөлге тең).

Демек, кез келген a_n тізбегі үшін $n\to\infty$- де $a_n - a \to 0$- ге ұмтылатын болса, онда a_n тізбегі a санға ұмтылады (a_n тізбегінің $n\to\infty$- дегі шегі a-ға тең) делінеді және бұл $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ түрінде жазылады.

$n\to\infty$ da $\frac{1}{2^n} \to 0$ болғандықтан $n\to\infty$- де $\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \to 1$, яғни $n\to\infty$- де $S_n \to 1$. Сондықтан $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ шексіз қосынды 1- ге тең деп есептелінеді.

Енді кез келген шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны қарастырайық:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots,$$

мұндағы $|q| < 1$.

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы деп n → ∞- де оның алғашқы n мүшелерінің қосындысы ұмтылатын санды айтады.

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласын пайдаланып, оны былай жазамыз:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.} \qquad (4)$$

Егер n шексіз өссе, $|q|<1$ болғандықтан $q^n \to 0$. Сондықтан $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ де $n\to\infty$- де нөлге ұмтылады. (4) формулада бірінші қосылғыш n- ге тәуелді емес. Демек, $n\to\infty$- де S_n қосынды $\frac{b_1}{1-q}$ санына ұмтылады.

Сонымен, шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның S қосындысы мынаған тең:

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

Дербес жағдайда, $b_1 = 1$ болғанда, $S=\frac{1}{1-q}$ болады. Бұл теңдік әдетте төмендегідей жазылады:

$$1+q+q^2+...+q^{n-1}+...=\frac{1}{1-q}.$$

Бұл теңдік пен (5) теңдік $|q| < 1$ болғанда орынды болуын ескертеміз.

2- есеп. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54},...$ шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын есептеңдер.

△ $b_1=\frac{1}{2}, b_2=-\frac{1}{6}$ болғандықтан $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{3}, S=\frac{b_1}{1-q}$ формула бойынша:

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}. \ ▲$$

3- есеп. Егер $b_3 = -1,\ q=\frac{1}{7}$ болса, шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

△ $n = 3$ болғанда $b_n = b_1q^{n-1}$ формуласын қолдансақ, $-1=b_1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1=b_1\cdot\frac{1}{49}$ болады, бұдан $b_1 = -49$.

(5) формула бойынша S қосындысын есептейміз:

$$S=\frac{-49}{1-\frac{1}{7}}=-57\frac{1}{6}. \ ▲$$

4- есеп. (5) формуланы пайдаланып, $a = 0,(15) = 0,151515...$ шексіз ондық периодты бөлшекті жай бөлшек түрінде жазыңдар.

△ Берілген шексіз бөлшектің жуық мәндерінің мына тізбегін қарастырайық:

$$a_1=0,15=\frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$
$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Жуық мәндерін былайша жазу берілген периодты бөлшекті шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы түрінде бейнелеуге болатындығын көрсетеді:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots .$$

(5) формула бойынша:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \ \blacktriangle$$

Жаттығулар

412. Мына геометриялық прогрессия шексіз кемімелі болатынын дәлелдеңдер:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; 3) $-81, -27, -9, \dots$;

4) $-16, -8, -4, \dots$; 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots$; 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$.

413. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 40, \ b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12, \ b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30, \ b_6 = 15$; 4) $b_5 = -9, \ b_9 = -\frac{1}{27}$

болса, ол шексіз кемімелі бола ала ма? Соны анықтаңдар.

414. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын тап:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots$; 3) $-25, -5, -1, \dots$;

4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots$; 5) $128, 64, 2, \dots$; 6) $-81, -27, -9, \dots$.

415. Егер шексіз кемімелі геометриялық прогрессияда:

1) $q = \frac{1}{2}, \ b_1 = \frac{1}{8}$; 2) $q = -\frac{1}{3}, \ b_1 = 9$;

3) $q = \frac{1}{3}, \ b_5 = \frac{1}{81}$; 4) $q = -\frac{1}{2}, \ b_4 = -\frac{1}{8}$

болса, оның қосындысын есептеңдер.

416. Егер тізбектің n- мүшесінің формуласымен берілген төмендегі тізбек шексіз кемімелі геометриялық прогрессия құрай ала ма?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын тап:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) 100, –10, 1 ... ; 3) 98, 28, 8, ...

418. Егер шексіз кемімелі геометриялық прогрессияда:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

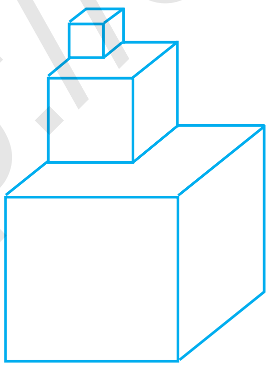
болса, оның қосындысын есептеңдер.

419. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы 150 -ге тең. Егер:

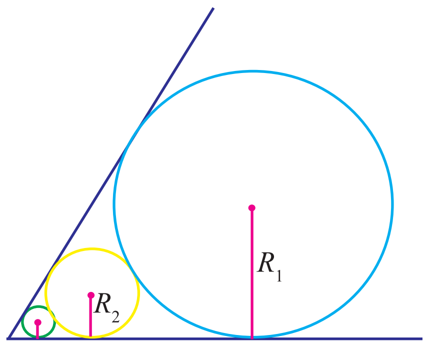
1) $q = \frac{1}{3}$ болса, b_1- ді; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

болса, q-ді табыңдар.

420. Қыры a болған кубтың үстіне қыры $\frac{a}{2}$ болған куб қойылды. Бұл кубтың үстіне қыры $\frac{a}{4}$ болған куб қойылды, ал оның үстіне қыры $\frac{a}{8}$ болған куб қойылды, т. с. с. (86-сурет). Құрастырылған фигураның биіктігін табыңдар.



86- сурет.



87- сурет.

421. 60°- тық бұрышқа бірін-бірі жанай өтетін шеңберлер іштей сызылған (87- сурет). Бірінші шеңбердің радиусы R_1- ге тең. Қалған шеңберлердің R_2, R_3, ..., R_n, ... радиустарын тауып, олар шексіз кемімелі геометриялық прогрессия құрайтынын көрсетіңдер. $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ қосынды бірінші шеңбердің центрінен бұрыштың төбесіне дейінгі арақашықтыққа тең екендігін дәлелдеңдер.

422. Шексіз периодты ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде жазыңдар:

1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

IV тарауға арналған жаттығулар

423. Арифметикалық прогрессияның айырмасын табыңдар, оның төртінші және бесінші мүшелерін жазыңдар:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ ...;$ 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ ...;$

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ ...;$ 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ ...$.

424. n- мүшесінің $a_n = -2(1-n)$ формуласы арқылы берілген тізбек арифметикалық прогрессия құрайтынын дәлелдеңдер.

425. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = 6$, $d = \frac{1}{2}$ болса, a_5- ті; 2) $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$ болса, a_7- ні;

3) $a_1 = 4{,}8$, $d = 1{,}2$ болса, a_{11}- ді есептеңдер.

426. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2$, $a_5 = 6$ болса, оның алғашқы жиырма мүшесінің қосындысын есептеңдер.

427. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = -2$, $a_n = -60$, $n = 10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 11$

болса, оның алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

428. Егер:

1) $-38 + (-33) + (-28) + ... + 12;$
2) $-17 + (-14) + (-11) + ... + 13$

қосындының қосылғыштары арифметикалық прогрессияның тізбектелген мүшелері болса, онда қосындысын есептеңдер.

429. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңдар, оның төртінші және бесінші мүшелерін жазыңдар:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots;$ 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots;$

4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots;$ 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Геометриялық прогрессияның n- мүшесінің формуласын жазыңдар:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ \ldots;$ 3) –27, –9, –3... .

431. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = 2,\ q = 2,\ n = 6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{8},\ q = 5,\ n = 4;$

3) $b_1 = -8,\ q = \frac{1}{2},\ n = 5$ болса, b_n- ді есептеңдер.

432. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -4,\ n = 5;$ 2) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 10;$

3) $b_1 = 10,\ q = 1,\ n = 6;$ 4) $b_1 = 5,\ q = -1,\ n = 9$

болса, оның алғашқы n мүшесінің қосындысын есептеңдер.

433. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесі қосындысын тап:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6;$ 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5;$

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ n = 5;$ 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n = 4.$

434. Берілген геометриялық прогрессияның шексіз кемімелі екендігін дәлелдеңдер және оның қосындысын есептеңдер:

1) $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots;$ 2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $7,\ 1,\ \frac{1}{7},\ \ldots.$

435. Егер арифметикалық прогрессияда $a_1 = 2\frac{1}{2}$ және $a_8 = 23\frac{1}{2}$ болса, оның айырмасын табыңдар.

436. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = 5,\ a_3 = 15;$ 2) $a_3 = 8,\ a_5 = 2;$ 3) $a_2 = 18,\ a_4 = 14$

болса, оның алғашқы бес мүшесін жазыңдар.

437. –10 және 5- тің арасына бір санды қойыңдар. Нәтижеде арифметикалық прогрессияның тізбекті үш мүшесі пайда болсын.

438. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_{13} = 28,\ a_{20} = 38;$ 2) $a_{18} = -6,\ a_{20} = 6;$ 3) $a_6 = 10,\ a_{11} = 0$

болса, оның он тоғызыншы және бірінші мүшелерін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. Арифметикалық прогрессияда: 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$ болса, a_{10}- ды және алғашқы он мүшесінің қосындысын табыңдар.

2. Геометриялық прогрессияда: 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ болса, b_6 - ны, алғашқы алты мүшесінің қосындысын есептеңдер.

3. 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) 128, 32, 8,..., тізбек шексіз кемімелі геометриялық прогрессия екендігін дәлелдеңдер және оның барлық мүшелерінің қосындысын табыңдар.

439. x- тің қандай мәндерінде:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$; 3) x^2, $10x$, 25

сандар арифметикалық прогрессияның тізбекті мүшелері болады?

440. Мына төмендегі сандар арифметикалық прогрессияның тізбекті үш мүшесі болатынын көрсетіңдер:

1) $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1; 4) $\sin5\alpha$, $\sin3\alpha\cos2\alpha$, $\sin\alpha$.

441. Қосындысы 252- ге тең болуы үшін 5- тен бастап тізбектей неше тақ натурал сандарды қосу керек?

442. Егер арифметикалық прогрессияда:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;
3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$ болса, a_n және d- ны табыңдар.

443. Геометриялық прогрессияда:

1) егер $b_1 = 4$ және $q = -1$ болса, b_9- ды есептеңдер;
2) егер $b_1 = 1$ және $q = \sqrt{3}$ болса, b_7- ні есептеңдер.

444. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$

болса, оның бесінші мүшесін табыңдар.

445. 4 және 9 сандарының аралығына оң санды орналастырыңдар, нәтижесінде геометриялық прогрессияның тізбектей үш мүшесі пайда болуы тиіс.

446. Егер тізбектің n- мүшесінің:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

формуласымен берілген болса, ол шексіз кемімелі геометриялық прогрессия бола ала ма?

447. Егер геометриялық прогрессияда:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$

болса, ол шексіз кемімелі екендігін көрсетіңдер.

448. Емделуші дәрігердің кеңесімен бірінші күні күн нұрына 5 минут шынықты, одан соң күн сайын шынығу уақыты 5 минуттан ұзартылды. Егер шынығу сәрсенбі күні басталған болса, аптаның қайсы күнінде оның шынығу уақыты 40 минутқа жетеді?

449. Егер арифметикалық прогрессияда $a_1+a_2+a_3=15$ және $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3=80$ болса, оның бірінші мүшесі мен айырмасын табыңдар.

450. Егер арифметикалық прогрессияда $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ және $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ болса, оның бірінші мүшесі мен айырмасын тап.

451. Сағат 1-де 1 рет, 2-де 2 рет, ... 12-де 12 рет қоңырау соғады. Сағат тілі кезектегі әр сағаттың жартысына жеткенде бір рет қоңырау соғады. Бұл сағат бір тәулікте неше рет қоңырау соғады?

IV тарауға арналған сынақ (тест) жаттығулары

1. Арифметикалық прогрессияда $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101}- ді табыңдар.

A) –9797; B) –9798; C) –7979; D) –2009.

2. Арифметикалық прогрессияда $d = 4$, $S_{50} = 5000$ болса, a_1- ді табыңдар.

A) –2; B) 2; C) 100; D) 1250.

3. Арифметикалық прогрессияда $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ болса, d- ны табыңдар.

A) 4; B) 2; C) 3; D) 3,5.

4. Арифметикалық прогрессияда $a_2 + a_9 = 20$ болса, S_{10}- ды табыңдар.
A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.

5. 8- ге бөлгенде 7 қалдық қалатын тізбектің 5- мүшесін белгілеңдер.
A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.

6. 701 саны 1, 8, 15, 22, ... прогрессияның нешінші нөмірлі мүшесі?
A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.

7. 1002, 999, 996, ... прогрессияның нешінші нөмірлі мүшесінен бастап, оның мүшелері теріс сандар болады?
A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.

8. Арифметикалық прогрессияда $a_2+a_6=44$, $a_5 - a_1 = 20$ болса, a_{100}- ді табыңдар.
A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.

9. Арифметикалық прогрессияда $a_1=7$, $d=5$, $S_n=25450$ болса, n- ді табыңдар.
A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.

10. Арифметикалық прогрессияда $a_{12}+a_{15}=20$ болса, S_{26}- ны табыңдар.
A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.

11. 1 және 11 сандары арасында 99 сондай санды орналастырыңдар, олар сол сандармен бірге арифметикалық прогрессия құрсын. Осы прогрессия үшін S_{50}- ді табыңдар.
A) $172\frac{1}{2}$; B) 495; C) 300; D) 178.

12. Арифметикалық прогрессияда $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$ болса, қайсы нөмірлі мүшеден бастап прогрессияның барлық мүшелері оң болады?
A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.

13. 7- ге еселі алғашқы неше натурал санды қосқанда 385 болады?
A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.

14. Геометриялық прогрессияда $b_1 = 2$, $q = 3$ болса, S_6- ны табыңдар.
A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.

15. Геометриялық прогрессияда $q=\frac{1}{3}$, $S = 364$ болса, b_1- ді табыңдар.
A) $242\frac{2}{3}$; B) 81; C) $121\frac{1}{3}$; D) 240.

16. Геометриялық прогрессияда $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ болса, q- ді табыңдар:

A) 4; B) 2; C) 8; D) $\frac{1}{2}$.

17. Геометриялық прогрессияда 6 мүше бар. Алғашқы 3 мүшенің қосындысы 26- ға, кейінгі 3 мүшенің қосындысы болса 702- ге тең. Прогрессия еселігін табыңдар.

A) 4; B) 3; C) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$.

18. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ болса, q- ді табыңдар.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{64}{65}$; C) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$.

19. Геометриялық прогрессияда $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2 - \sqrt{3}$ болса, S- ті табыңдар.

A) $2 + \sqrt{3}$; B) 3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

1- есеп. Дене еркін түсу кезінде бірінші секундта 4,9 м, ал әрбір кейінгі секундта алдыңғысына қарағанда 9,8 м -ге көбірек түсетін болады. Дене 4410 метрлік биіктіктен қанша уақытта жерге түседі.

△ Есеп шарты бойынша дене бірінші секундта $a_1 = 4{,}9$, екінші секундта $a_2 = 4{,}9 + 9{,}8$, үшінші секундта $a_3 = a_2 + 9{,}8 = a_1 + 2 \cdot 9{,}8$ және т. с. с. n- секундта $a_n = a_{n-1} + 9{,}8 = a_1 + (n-1)9{,}8$ метр төмен түседі, яғни әр секундта түсетін қашықтықтар арифметикалық прогрессияны құрайды. Демек, n секундта жерге түскен болса, арифметикалық прогрессияның n мүшесінің қосындысы формуласы бойынша

$$4410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$$

$$= \frac{2 \cdot 4{,}9 + (n-1) \cdot 9{,}8}{2} \cdot n.$$

Бұдан $4{,}9n^2 = 4410$, $n^2 = 900$, $n = 30$ келіп шығады.

Жауабы: Дене 30 секундта жерге түседі. ▲

2- есеп. Салымшы b сум қаржыны банкке жылына p%- ға қойды және n жылдан соң барлық ақшасын қайтарып алды. Егер $b=4\ 000\ 000$, $p=8$ болса, салымшы екі жылдан соң қанша қанша ақша алған?

△ Бастапқы салынған қаржы b сум болса, бір жылдан кейінгі салымшының қаржысы $b_1=b\cdot(1+\frac{p}{100})$ сум болады. Келесі жылдар үшін төмендегі варианттардың бірі болуы мүмкін:

1) Келесі әр жылда пайыз бастапқы қаржы b сумнан есептелінеді. Мұнда екінші жылдан кейін $b_2=b+1+\frac{bp}{100}+\frac{bp}{100}=b\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ сум және т. с. с. n- жылдан соң $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сум болады. Пайызды есептеудің бұл әдісі *қарапайым пайыз* деп аталады. Мұнда, егер $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ болса, онда $b_2=4\,000\,000\cdot1{,}16==\ 4\,640\ 000$;

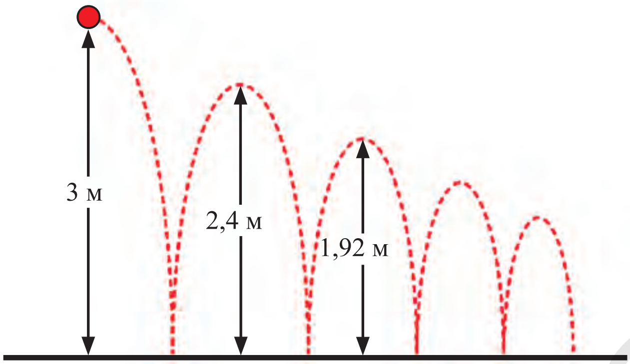
2) Келесі әр жылда пайыз алдыңғы жылы жиылған қаржыдан есептелінеді. Екі жылдан соң $b_2=b_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ сум және т. с. с. n жылдан соң $b_n=b_{n\text{-}1}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ болады. Пайызды есептеудің бұл әдісі *күрделі пайыз* деп аталады. Мұнда, егер $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ болса, онда $b_2=4\ 000\,000\cdot1{,}08^2=4\ 665\ 600$ сум.

Жауабы: қарапайым пайыз түрінде $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сум; 4 640 000,

күрделі пайыз түрінде $b_n=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ сум; 4 665 600 сум. ▲

Есептер

1. Дене еркін түсу кезінде бірінші секундта 4,9 м жол жүрді, ал кейінгі әрбір секундта алдыңғысына қарағанда 9,8 м көбірек жол жүрді. Түсіп жатқан дене бесінші секундта қанша қашықтықты жүріп өтеді?
2. Циркттің секторларының бірінде әрбір келесі қатарда бұрыңғысына қарағанда біреуден орындық көп. Егер
   1) бірінші қатарда 8 орындық, ал қатарлар 22 болса;
   2) бірінші қатарда 10 орындық, ал қатарлар 21 болса, бұл секторда неше орын бар?
3. Саяхатшылар өзеннің бойымен 140 км жүруді жоспарлады. Бірінші күні 5 км, келесі әрбір күнде, одан алдыңғы күнге қарағанда 2 км көбірек жүретін болса, олар саяхатта неше күн болады?
4. Ашытқының жасушалары әрбір жасуша екіге бөлінуі арқылы көбейеді. Егер бастапқы күйінде 6 жасуша болса, 10 рет бөлінгеннен соң жасуша саны нешеу болады?
5. Күнтізбе жылы барысында зауыт жұмысшысының айлық еңбекақысы бірдей мөлшерде артып барды. Маусым, шілде, тамызда алған айлық еңбекақыларының жалпы мөлшері 9 900 000 сум, ал қыркүйек, қазан, қараша айлары үшін алған еңбекақыларының қосындысы 10 350 000 сум болды. Жұмысшының жыл бойы алған жалпы еңбекақысын табыңдар.
6. Ауа ваннасын қабылдау жолымен емделуде бірінші күні емделу 15 минут жалғасты, келесі әрбір күнде оны 10 минуттан арттырып барды. Ванна қабылдау ең көбі 1 сағат 45 минут жалғасуы үшін көрсетілген тәртіппен ауа ваннасын қабылдау неше күн жалғасады?
7. Таңдалған эластикалық доп жерге соғылып, тағы да жоғарыға көтерілгенде әр кез алдыңғы биіктігінің 80%- ына көтерілсе, онда 3 метрден тасталған доптың төменге және жоғарыға қозғалу кезінде жүріп өткен жалпы вертикаль қашықтықтарының қосындысын табыңдар (88-сурет).



88- сурет.

Тарихи есептер

1. *Беруни есебі.* Егер мүшелері оң геометриялық прогрессияның: мүшелерінің саны тақ болса, онда $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$; мүшелерінің саны жұп болса, онда, $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ болатынын дәлелдеңдер.
2. *Ахмес папирусынан алынған есеп (эрамызға дейінгі 2000 жылдар).* 10 өлшем бидайды 10 адамға сондай бөліп бер, бұл адамдардың әрқайсысы мен одан кейінгі (немесе алдыңғы) алған бидай айырмасы $\frac{1}{8}$ өлшемге тең болсын.

Тарихи мағлұматтар

„Ежелгі халықтардан қалған ескерткіштер“ еңбегінде Әбу Райхан Беруни шахмат туралы аңызбен байланысты есепте бірінші мүшесі $b_1 = 1$ және еселігі $q = 2$ болатын геометриялық прогрессияның бірінші 64 мүшесінің қосындысын есептейді; шахмат тақтасындағы k- торға сәйкес саннан 1- ді айырса, айырма k- тордан алдыңғы барлық торларға сәйкес сандар қосындысына тең болатынын көрсетеді, яғни

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}$$

екендігін дәлелдейді.

V ТАРАУ. ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

34-§. ОҚИҒАЛАР

Ықтималдық теориясы және математикалық статистика кездейсоқ құбылыстардың заңдылығын зерттейтін математикалық ғылым болып, байланыстарды, заңдылықтарды үйрену және олардан туындайтын қорытындыларды іс жүзіндік есептерді шешуде қолдануға арналған пән.

1. Мүмкін емес, ақиқат және кездейсоқ оқиғалар.

Өмірде оқиға деп болатын немесе болмайтын кез келген үдерісті айтады. Одан басқа адамдар жүзеге асыратын тәжірибелер немесе сынақтар, бақылаулар мен өлшеу істерінің нәтижелері де оқиғалар. Барлық оқиғаны ақиқат, мүмкін емес және кездейсоқ оқиғаларға бөлуге болады.

Мүмкін емес оқиға деп, белгілі бір жағдайда болуы мүмкін емес оқиғаны айтады. Мүмкін емес оқиғаларға мысалдар келтірейік:

1) көлдің суы +30°С- да мұздайды;

2) жақтары 1- ден 6 ға дейінге цифрлармен белгіленген ойын кубигі лақтырылғанда 8 цифрының пайда болуы.

Ақиқат оқиға деп берілген жағдайда міндетті түрде анық болатын оқиғаны айтады. Мысалы:1) қыстан кейін көктем келді; 2) ойын кубигін лақтырғанда алтыдан үлкен емес цифр (0- ден басқа) түсті.

Кездейсоқ оқиға деп, берілген жағдайда болуы да, болмауы да мүмкін оқиғаны айтады. Мыналар кездейсоқ оқиғаға мысал болады: 1) 1- ден 50- ге дейінгі натурал сандар арасынан кездейсоқ таңдалған сан 7- ге бөлінеді; 2) тасталған теңге герб жағымен түсті.

2. Бірге болуы мүмкін және бірге болмайтын оқиғалар.

Берілген шарттарда бір уақытта болуы мүмкін екі оқиға бірге болуы мүмкін дейіледі, ал бір уақыттың өзінде болмайтын оқиғалар бірге болмайтын оқиғалар дейіледі. Мысалы, „күн шықты“ және „күн суық“ бірге болуы мүмкін оқиғалар, „күн батты“ және „күн шықты“ оқиғалары бірге болмайтын оқиғалар. Ойын кубигімен байланысты мына оқиғаны қарастырайық: 1) 3 ұпай түсті; 2) 4 ұпай түсті; 3) 3 ұпайдан көбірек түсті; 4) үшке еселі ұпай түсті. Бұл оқиғалардың арасында төмендегі үш жұптық бірге болуы мүмкін оқиғалар: 1- және 4- (3 саны үшке еселі болғандықтан); 2- және 3- (4 ұпай 3 ұпайдан үлкен болғаны үшін); 3- және 4- (мысалы, 6 ұпай). Ал төмендегілер бірге болмайтын оқиғалар: 1- және 2- (бір уақыттың өзінде екі түрлі сан түсуі мүмкін емес); 1- және 3- (3 ұпайдан жоғары, яғни 4, 5, 6 ұпайлары 3 ұпаймен бірге түсе алмайды); 2- және 4- (4 саны 3- ке еселі емес).

3. Тең мүмкіндікті оқиғалар.

Төмендегідей оқиғалар тобына мысалдар қарастырайық:

Герб жағы *Цифрлы жағы*

89-сурет.

1) теңгені бір рет тастағанда „цифрлы жағының түсуі“ және „гербті жағының түсуі“ (89-сурет);

2) ойын кубигін бір рет тастағанда „1 ұпайдың түсуі“, „2 ұпайдың түсуі“,..., „6 ұпайдың түсуі“;

3) бір жағы көкке, қалған жақтары қызылға боялған кубик тасталғанда „көк жағы жоғарыда болып түсуі“ және „қызыл жағы жоғарыда болып түсуі“;

4) ішінде 10 ақ және бір қара шар салынған қораптан шар алынғанда оның „ақ шар шығуы“ және „қара шар шығуы“.

1- және 2- мысалдарда оқиғалардың біреуі болуы үшін оқиғалардың біреуінде басқасына қарағанда бірде-бір артықшылық бар деуге болмайды (теңге мен кубиктер дұрыс болса, әрине). Мұндай оқиғалар ***тең мүмкіндікті оқиғалар*** деп аталады.

3- және 4- мысалдарда тең мүмкіндікті болмаған оқиғаларға мысал келтірілген. Шынында да боялған кубиктің 5 жағы қызыл, бір жағы болса көк болса, демек, қызыл жағы түсуі үшін мүмкіндік көк жағы түсуіне қарағанда көбірек. Сол сияқты ақ шарлардың шығу мүмкіндігі қара шар шығу мүмкіндігінен көп.

Жаттығулар

Жаттығуларда шарттар мен осы шарттарда болатын оқиғалар берілген. Әр оқиға үшін (ауызша) оның мүмкін емес немесе ақиқат, яки кездейсоқ екенін анықтаңдар **(452–456):**

452. Мектептегі оқушылардың:

1) екеуінің аты бірдей; 2) барлығының бойы бірдей.

453. Алгебра оқулығы кездейсоқ ашылып, оқулықтың оң бетіндегі үшінші сөз табылды. Ол сөз:

1) „ықтималдық“ сөзі; 2) „!“ белгісімен басталады.

454. IX сынып (онда қыздар да, ұл балалар да бар) журналындағы тізімнен кездейсоқ бір оқушы таңдап алынды:

1) ол қыз бала; 2) таңдалған оқушының жасы 16- да; 3) таңдалған оқушы 15 айлық; 4) ол оқушының жасы 3- тен асқан.

455. Бүгін Самарқантта барометр қалыпты атмосфера қысымын көрсетуде. Онда:

1) Самарқантта жасайтын адам қазанындағы су $t = 70°C$ -да қайнайды; 2) ауаның температурасы $-5°C$-ға түскенде, көлмек су мұздайды.

456. Екі ойын кубигі тасталуда:

1) бірінші кубикте 4 ұпай, ал екіншісінде 6 ұпай түсті; 2) екі кубикте түскен ұпайлардың қосындысы 1- ге тең; 3) екі кубикте түскен ұпайлардың қосындысы 14- ке тең; 4) екі кубиктің әрқайсысында 5

ұпайдан түсті; 5) екі кубикте түскен ұпайлар қосындысы 12- ден үлкен емес.

Берілген оқиғалар жұбының қайсысы бірге болатынын, қайсысы бірге болмайтынын көрсет (**457–459**):

457. Саодат пен Шухрат ойнаған дойбы ойынында:

1) Саодат жеңді; Шухрат жеңілді; 2) Саодат жеңілді; Шухрат жеңілді.

458. Ойын кубигі тасталды. Оның жоғарғы жағы:

1) 5 ұпайды; 3 ұпайды; 2) 1 ұпайды; тақ ұпайды көрсетті.

459. Доминодан бір домино алынды, онда:

1) сандардың бірі 4- тен үлкен, екіншісі 6-ға тең; 2) бір сан 5- тен кіші емес, екіншісі 5- тен үлкен емес; 3) сандардың бірі 5, екі санның қосындысы 12- ге тең; 4) екі сан да 4- тен үлкен, сандардың қосындысы 9-дан үлкен емес.

460. Төмендегі:

1) „қар жауып тұр“; 2) „аспанда бірде-бір бұлт жоқ“; 3) „ауаның температурасы +37°С“ оқиғаларынан барша мүмкін деген жұптықтарды түзіп, олардың арасынан бірге болуы мүмкін және бірге болмайтын оқиғалар жұптығын анықтаңдар.

461. Мына оқиғалар:

1) „көктем келді“; 2) „сабақ кестесі бойынша бүгін 6 сабақ болады“; 3) „бүгін 1 қаңтар“; 4) „Ташкентте ауаның температурасы +40°С“-тан мүмкін болған барлық жұптықты түзіп, олардың арасынан бірге болуы мүмкін және бірге болуы мүмкін емес оқиғалар жұптығын анықтаңдар.

462. Төрт сіріңке қорабының бірінің іші бос, қалғандарында сіріңке шиі бар. Кездейсоқ таңдалған қораптардың бірі ашылды „Сіріңке қорабының іші бос шықты“ және „сіріңке қорабының іші бос емес“ оқиғалары тең мүмкіндікті бола ма?

463. Ойын кубигінің:

1) 1 жағы; 2) 2 жағы жасылға, қалған жағы қызылға боялды. „Жасыл жағы түсті “ және „қызыл жағы түсті“ оқиғалары тең мүмкіндікті бола ма?

464. Бірден алтыға дейін нөмірленген 6 ақ, 6 қызыл, 6 көк, 6 сары шар бір қалтаға салынып араластырылды. Қалтадан кездейсоқ бір шар алынды. Мына оқиғалар тең мүмкіндікті бола ма:

1) „таңдалған шар ақ“ және „таңдалған шар көк “; 2) „таңдалған шардың нөмірі 5“ және „таңдалған шардың нөмірі 4“; 3) „таңдалған шар қызыл және нөмірі 2“ және „ таңдалған шар сары және нөмірі 6“; 4) „таңдалған шар қызыл“ және „таңдалған шар қызыл емес“; 5) „таңдалған шардың нөмірі 2- ден үлкен емес“ және „таңдалған шардың нөмірі 2- ден үлкен“?

35-§. ОҚИҒАНЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ

Өмірде түрлі оқиғаларға душар болғанда, көп жағдайда оқиғалар болуының сенімділік дәрежесіне баға береміз. Онда кейде оқиғалар жайлы „олай болуы мүмкін емес“ десек, басқа бір оқиғалар жайлы „бұл сөзсіз болады“ немесе „бұл оқиғаның болатынына сенім зор“ немесе „бұл оқиғаның болуында сенім аз“ дейміз. Оқиғалардың болуының сенімділік дәрежесін бағалау ықтималдық ұғымымен байланысты.

XVII ғасырдағы француз ғалымдары Блез Паскаль (1623 – 1662) және Пеьр Ферма (1601 – 1665) арасында бірқатар математикалық есептер бойынша жазылған хаттарда бірінші рет ықтималдықпен байланысты есептерді шешудің алғаш рет ортақ жанасулары қалыптасты. Блез Паскаль 1654жылғы 28октябрьде Пеьр Фермаға жазған хатында, атап айтқанда мынадай ой-пікірлерін айтады:

„Ойыншы кубикті тастағанда қандай сан түсетінін білмейді. Бірақ ол 1, 2, 3, 4, 5 және 6 сандары тең мүмкіндікпен түсетінін біледі. Бұдан басқа, ойыншы тәжірибе (кубик тастау) нәтижесінде көрсетілген сандардың бірі түсетіні ақиқат оқиға екенін де біледі. Егер біз ақиқат оқиғаның болу мүмкіндігін 1 деп қабылдасақ, онда осы сандардың бірінің, мысалы 6-ның (дәл сондай басқа сандардың да) шығуы 6 есе кіші, яғни $\frac{1}{6}$- ға тең болады“.

Ол немесе бұл оқиғаның табысты болу мүмкіндігін математиктер ***оқиғаның ықтималдығы*** деп атайды және латынша *probabilitas* – ықтималдық сөзінің бірінші әрпіне сай *P* арқылы белгіледі.

Егер *A* арқылы ойын кубигі бір рет тасталғанда „5 ұпай түсті“ оқиғасы белгіленсе, онда *A* оқиғаның ықтималдығы *P(A)* арқылы белгіленеді, $P(A)=\frac{1}{6}$ түрінде жазылады және оқиғаның ықтималдығы $\frac{1}{6}$ деп оқылады.

1-есеп. Бірдей карточкаларға 1-ден 20-ға дейінгі сандар жазылды (әр бір карточкаға біреуден сан жазылды). Карточкалар үстелге теріс қойылды және араластырылды. Кездейсоқ алынған карточкадағы сан 7 болуы ықтималын табыңдар.

△ Бірдей карточкаларға 1-ден 20-ға дейінгі сандар жазылды (әр бір карточкаға біреуден сан жазылды). Карточкалар үстелге теріс қойылды және араластырылды. Кездейсоқ алынған карточкадағы сан 7 болуы ықтималын табыңдар.

Карточкалар саны 20 және әр карточкада 1- ден 20- ға дейінгі сандар бір реттен жазылғаны үшін таңдау нәтижесінде тең мүмкіндікті 20 оқиға болуы мүмкін (тәжірибе нәтижелері): 1) 1 саны шықты; 2) 2 саны шықты; ….; 20) 20 саны шықты.

Мұнда „бір сан шықты“ оқиғасы ақиқат оқиға. Осы ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1- ге тең және А – „7 саны шықты“ оқиғасының ықтималдығы 20 есе кіші, яғни $P(A) = \frac{1}{20}$.

Жауабы: $\frac{1}{20}$ ▲.

Жоғарыда қаралаған элементар оқиғалардан тыс күрделірек оқиғаларды да үйренуге болады. Мысалы, 1- есептегі таңдалған карточкадағы санның түп сан болуының ықтималдығын табу керек болсын. A – „20-дан үлкен емес түп санның шығуы“ оқиғасын қарастырайық. Бұл оқиға 8 жағдайда (нәтижеде) болады – яғни 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 түп сандардың бірі шыққанда. Осы нәтижелер A оқиға үшін *қолайлылық туғызатын мүмкіндіктер* деп аталады. Мүмкін болған барлық нәтижелер (олар 20) арасында 8-і қолайлылық тудыратын мүмкіндіктер, сондықтан A оқиғаның ықтималдығы

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Егер қандайда бір тәжірибеде *n* тең мүмкіндікті, өзара жұп-жұп болып бірге болмаған нәтиже бар, олардан *m*-і *A* оқиға үшін қолайлылық туғызатын мүмкіндіктер болса, онда $\frac{m}{n}$ қатынас *A оқиға болуының ықтималдығы* дейіледі және төмендегідей жазылады:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

2-есеп. Ойын кубигі бір рет тасталғанда тақ санды ұпай шығуының ықтималдығын табыңдар.

△ A – „тақ санды ұпай шығуы“ оқиғасына қолайлылық тудыратын 3 нәтиже (1-дің шығуы, 3-тің шығуы және 5 ұпайдың шығуы) бар, яғни $m = 3$. Ал тең мүмкіндікті барлық нәтижелер саны $n = 6$, сол себепті

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Жауабы: $\frac{1}{2}$. ▲

3-есеп. Қорапта 6 қызыл және 4 көк шар бар. Олардың біреуі кездейсоқ таңдалып, қораптан алынды. Алынған шардың қызыл болу ықтималдығын табыңдар.

△ Тәжірибенің тең мүмкіндікті 10 нәтижесі бар: 1- шар алынды, 2- шар алынды, ..., 10- шар алынды, яғни $n = 10$. Қолайлылық тудыратын нәтижелер саны $m = 6$. Сол себепті

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Жауабы: $\frac{3}{5}$. ▲

Ақиқат, мүмкін емес және кездейсоқ оқиғалардың ықтималдығы туралы (1) формулаға негізделіп төмендегілерді айтуға болады:

Егер A оқиға ақиқат болатын оқиға болса, онда барлық нәтиже оған қолайлық туғызатын болады, яғни $m = n$. Олай болса $P(A) = \frac{m}{n} = 1.$

Егер A оқиға мүмкін емес оқиға болса, онда оған қолайлық тудыратын нәтижелер жоқ, яғни $m = 0$. Демек, бұл жағдайда $P(A) = \frac{0}{n} = 0.$

Егер A оқиға кездейсоқ оқиға болса, онда оған қолайлық туғызатын нәтижелер үшін $0 < m < n$ шарт орындалады. Сол себепті, мұндай жағдайда $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1.$

Жаттығулар

465. Төмендегі жағдайлардан болуы мүмкін барлық элементар тең мүмкіндікті оқиғаларды санап шық:
1) теңге тастау; 2) ойын кубигін тастау; 3) жақтарының түсі ақ, қызыл, сары және көк болған тетраэдрды тастау; 4) беті A, B, C, D, E және F арқылы белгіленген 6 секторға бөлінген рулетканың стрелкасын айналдыру.

466. Домино ойынының толық комплектінен бір данасы кездейсоқ алынды. Бұл дананың:
1) 6 және 5 сандары; 2) 0 және 1 сандары; 3) бірдей сандар; 4) әртүрлі сандар шығу ықтималдығын табыңдар.

467. Қорапта 4 қызыл және 5 көк шар бар. Кездейсоқ бір шар алынды. Алынған шардың:
1) қызыл; 2) көк; 3) жасыл; 4) қызыл немесе көк болу ықтималдығы қандай?

468. Қорапта 3 көк, 4 сары, 5 қызыл шар бар. Кездейсоқ бір шар алынды. Алынған шардың:
1) көк; 2) сары; 3) қызыл; 4) көк емес; 5) сары емес; 6) қызыл емес ықтималдығы қандай?

469. Бірдей карточкаларға 1- ден 12- ге дейігі сандар жазылды (әрбір карточкаға біреуден сан жазылды). Карточкалар үстелге теріс қойылды және араластырылды. Кездейсоқ түрде алынған карточканың:
1) 5; 2) жұп; 3) 3- ке еселі; 4) 4- ке еселі; 5) 5- ке бөлінетін; 6) түп сан болу ықтималы қандай?

470. Нигора құрбысының телефон нөмірінің соңғы екі цифрын ұмытып қалды және оны кездейсоқ терді. Нигораның құрбысының телефонына түсу ықтималы қандай?

471. Лотереяда 1000 билет бар, оның 30-ы ұтысты. Бір билет сатып алынды. Сатып алынған билет:
1) ұтысты; 2) ұтыссыз болу ықтималы қандай?

472. Студент емтиханға дайындалу үдерісінде оған берілетін 30 билеттің біреуіне дайындалуға үлгерді. Емтиханда студентке білетін билеті түсуінің ықтималы қандай?

473. Теңге 6 рет қатарынан тасталғанда әр кез герб жағымен түсті. Теңге тағы бір рет тасталса, герб жағымен түсу ықтималы қандай?

474. 52- лік картадан бір карта кездейсоқ алынды. Осы картаның: 1) алты қыш; 2) сегіз; 3) қызыл түсті валет; 4) санды кресті; 5) тақ санды қыш болу ықтималы қандай?

36-§. КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАНЫҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ЖИІЛІГІ

Ықтималдықтың алдыңғы параграфта берілген анықтамасы *ықтималдықтың классикалық анықтамасы* дейіледі. Классикалық анықтама әрине сынақ немесе тәжірибенің өткізілуін талап етпейді: оқиғаның барша тең мүмкіндікті және қолайлық тудыратын нәтижелері теориялық тұрғыдан анықталады.

Мұндай анықтама бойынша тәжірибенің элементтері тең мүмкіндікті нәтижелер саны шекті және белгілі санмен өрнектеледі. Бірақ практикада, яғни табиғаттануда, экономикада, медицинада, өндірісте, тағы басқа салалардағы кездейсоқ үдерістер үйренілгенде жиі осындай сынақтар немесе тәжірибелер кездесіп тұрады, олардағы мүмкін болған нәтижелер санын қамтудың мүмкіндігі жоқ дәрежеде көп. Басқа бірқатар жағдайларда тәжірибені іс жүзінде өткізбегенше нәтижелердің тең мүмкіндікті болуын анықтау қиын немесе мүмкін емес. Мысалы, фирма шығарған көптеген лампочканы тексеріп көргенше „жарамды“ немесе „жарамсыздығы“ тең мүмкіндікті болу немесе болмайтынын көз алдымызға келтіру қиын. Сол себепті, классикалық анықтамамен қатар практикада *ықтималдықтың статисткалық анықтамасы* да қолданылады. Бұл анықтамамен танысу үшін *салыстырмалы жиілік* ұғымын кіргізуіміз керек.

Берілген тәжірибелер қатарында *A оқиғаның салыстармалы жиілігі деп, осы оқиға болған тәжірибелер саны M-* нің өткізілген барлық тәжірибелер саны *N-* ге қатынасы айтылады. Мұнда *M* саны *A* оқиғаның *жиілігі* деп аталады.

A оқиғаның салыстырмалы жиілігі $W(A)$ арқылы белгіленеді. Олай болса анықтама бойынша

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

1-есеп. Сыныпта 30 оқушы бар. Өткізілген бақылау жұмысынан 6 оқушы 5 баға алды. Сыныпта өткізілген бақылау жұмысынан алынған үздік бағалардың салыстырмалы жиілігін табыңдар.

△ A – „5 баға алынды“ оқиғасы болса, бұл жағдай 6 рет болды, яғни $M = 6$. Жалпы нәтижелер саны $N = 30$, сол себепті

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Жауабы: $\frac{1}{5}$. ▲

Француз зерттеушісі Бюффон (1707–1788) теңгені 4 040 рет тастап көрген, содан 2 048 жағдайда теңге герб жағымен түскен. Демек, бұл жағдайда осы тәжірибелер қатарында герб түсуінің салыстырмалы жиілігі, $W(A) = \frac{2\,048}{4\,040} \approx 0,5069$ - ға тең. Ал ағылшын математигі Карл Пирсон теңгені 24 000 рет тастағанында герб жағы 12 012 рет түскен. Демек, теңге тастаудың бұл тәжірибелерінде герб жағы түсуінің салыстырмалы жиілігі $W(A) = \frac{12\,012}{24\,000} = 0,5005$ - ке тең.

Осы екі жағдайдағы нәтижені салыстырсақ, салыстырмалы жиіліктердің мәні, жалпы алғанда, белгілі бір тәжірибелерге және олардың санына қарап өзгеруі мүмкін екенін көруге болады.

Бірақ кездейсоқ оқиға салыстырмалы жиілігінің негізгі ерекшелігі мынадай, тәжірибелер саны артқан сайын салыстырмалы жиілік те тұрақтанып, бірер сан айналасында тербеліп тұрар екен. Сол сан кездейсоқ оқиғаның *статистикалық ықтималдығы* ретінде қабылданады. Мысалы, теңге тасталғанда бұл сан 0,5, яғни Бюффон тәжірибесі де, Пирсон тәжірибесінде де пайда болған салыстырмалы жиіліктер 0,5- ке өте жуық сандар. Демек, теңге тасталғанда оның статистикалық ықтималдығы 0,5- ке тең.

Теңге тастауға ұқсас түрлі үдерістерді үйрену бойынша үлкен санды тәжірибелерді түрлі зерттеушілер өткізген және олардың нәтижелері негізінде швейцариялық математик ғалым Якоб Бернулли (1654–1705) *үлкен сандар заңын* негіздеп берді:

Тәжірибелер саны үлкен болғанда оқиғаның салыстырмалы жиілігі $W(A)$ осы оқиғаның ықтималдығы $P(A)$- дан іс жүзінде айырмашылығы жоқ екенін, яғни үлкен санды тәжірибелерде $P(A) = W(A)$ екені туралы дәлелді ақиқат деп санауға болады.

2- есеп. Бір елге шетелден келген саяхатшылар және осы елдің ішінде саяхат жасаған елдің азаматтары (ішкі саяхатшылар) туралы мәліметтер берілген болсын:

Жылдар	Саяхатшылардың жалпы саны	
	Шетелдік саяхатшылар саны	Ішкі саяхатшылар
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Қаралып жатқан жылдарда ел ішінде саяхат жасаған ел азаматтары санының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

Ел ішінде саяхат жасаған азаматтар саны:

$M = 403\,989 + 348\,953 + 316\,897 + 346\,103 + 351\,028 = 1\,766\,970$,

шетелдік саяхатшылар саны: $610\,623 + 746\,224 + 822\,558 + 774\,262 + 811\,314 = 3\,764\,981$.

Жалпы саяхатшылар саны: $N = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5\,531\,951$.

Олай болса,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

Жауабы: $W \approx 0,3194$.

Жаттығулар

475. Кестенің соңғы бағанын толтырыңдар:

Реттік тәртібі	Тәжірибе	Тәжірибе саны (N)	A оқиға	A оқиғаның жиілігі	A оқиғаның салыстырмалы жиілігі $\left(W(A)=\right)\frac{M}{N}$
1	Теңге тастау	150	Цифрлы жағының түсуі	78	
2	Спортшы садақтан нысанға атуда	200	Нысанға тиюі	182	
3	Ойын кубигі тасталуда	400	4 түсуі	67	

476. Бір қалада 920 адамнан жұмысқа қалай жетіп баратынын сұрағанда олардың : 350-і машинада, 420-сы қоғамдық транспортта, 80-і велосипедте, 70-і жаяу баратыны белгілі болса 1) машинада; 2) қоғамдық транспортта; 3) велосипедте; 4) жаяу баратындар санының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

477. Дайындалған 5 000 қатты дисктен 70-і жарамсыз болды. Жарамсыз қатты диск шығуының салыстырмалы жиілігін тауып, оны пайызда өрнекте.

478. Жас баскетболшылар тобы допты себетке түсіру жаттығуын өткізді. Нәтижелер төмендегі кестеде берілген:

Себетке лақтырылған доптар саны (N)	10	50	100	250	500
Себетке түскен доптар жиілігі (M)	6	32	68	155	320
Себетке түскен доптардың салыстырмалы жиілігі (W)					

Кестенің соңғы қатарын толтыр. Доптардың себетке түсу ықтималадығы P- ның мәні туралы не айтуға болады (оннан бірге дейінгі дәлдікпен)?

37-§ КЕЗДЕЙСОҚ МӨЛШЕРЛЕР

Статистика түрлі кездейсоқ мөлшерлер туралы деректерді жинау, топтау, мәліметтерді кестелер, диаграммалар, графиктер, тағы басқа көріністерде көрнекі бейнелеу және сол деректердің талдауымен шұғылданатын пән.

Кездейсоқ мөлшер **деп, бақылаулар немесе тәжірибелерді өткізу барысында түрлі мәндерді кездейсоқ қабылдау мүмкін болған шаманы айтады. Мұндай мөлшерлер туралы олардың мәндері кездейсоқтыққа байланысты деп айтуымыз мүмкін.**

Мысалы, ғарыштан мектеп ауласына келіп түскен космостық түйіршіктер саны телефон станциясына келіп түсетін қоңыраулар саны, пиаладағы шай молекулаларының жылдамдығы, ойын кубигін тастағанда қандай цифр шығуы, тағы басқалар кездейсоқ мөлшерлерге мысал болады.

1-есеп. Екі ойын кубигі тасталды. Екі кубиктен түсетін қандай ұпайлар қосындысы ең үлкен ықтималдықпен болатынын анықтау мүмкін бе?

Әрбір қосындының пайда ықтималдығын табамыз. Жалпы нәтижелер саны осы екі кубик түсуінен пайда болатын барлық қосындылар саны $6 \cdot 6 = 36$- ға тең. Жиынтық ұпайлар кестесін құрамыз:

1- кубик	2- кубик					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Кестенің көмегімен әрбір белгілі қосынды үшін қолайлық тудыратын нәтижелер саны *m*- ді анықтаймыз:

$$m_2 = m_{12}=1,\ \ m_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Екі кубикті тастағанда ол немесе бұл қосындының пайда болу ықтималын төмендегі кесте көрінісінде өрнектеуге болады:

Ұпайлар жиыны	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ықтималдық $\left(p = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Кестеден ұпайлар жиынтығы 7 болатыны ең үлкен ықтималдыққа $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ие болуы көрініп тұр.

Жауабы: ең үлкен ықтималдыққа ие болған ұпайлар жиынтығы 7. ▲

1- есепте екі кубикті тастағандағы ұпайлар жиынтығы – *кездейсоқ мөлшер*. Оны *X* арқылы белгілейік. Онда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ сандары *X* кездейсоқ мөлшердің мәндері. *X* - тің әр мәніне сәйкес келетін P_1, P_2,..., P_{10}, P_{11} ықтималдықтар мәні төмендегі кестеде көрсетілген:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Бұл кестенің көмегімен, мөлшер бірдей ықтималдықпен қандай мәндер қабылдайтынын; *X* мөлшердің қандай мәні көбірек ықтималдықпен пайда болады және сол сияқты сұрақтарға жауапты оңай анықтауға болады. Бұл кесте екі кубикті тастағандағы ұпайлар жиынтығынан құралған кездейсоқ мөлшер *X*- тың ықтималдықтар бойынша *бөліну кестесі* деп аталады.

Кездейсоқ мөлшер *X*- тің мәндерін және әрбір мәнді қабылдау ықтималын өрнектейтін кесте *кездейсоқ мөлшердің ықтималдықтары бойынша бөліну кестесі* деп аталады.

Ықтималдықтар бойынша бөлу кестелері ықтималдықтарды теориялық тұрғыдан бағалау нәтижелері негізінде түзіледі.

Практикада нақты тәжірибелер өткізілгеннен кейін, кездейсоқ мөлшерлер мәндерінің *жиіліктер немесе салыстырмалы жиіліктер бойынша бөлу кестелері* түзіледі. Одан кейін, айқындау болу үшін, бөлу кестелері *диаграмма* немесе *жиіліктер полигоны* көрінісінде бейнеленеді. Мәліметтерді диаграмма және жиіліктер полигоны арқылы бейнелеумен 8-сыныптың Алгебра курсында танысқансыңдар.

2- есеп. Компанияларда жұмыс істейтін қызметкерлер санын үйрену мақсатында 36 компаниядан оларда істейтіндердің саны бойынша деректер алынды және олар төмендегі кестеге кіргізілді:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Бұл деректерді 1) жиіліктер (M) және салыстырмалы жиіліктер (W) бойынша бөлу кестесінің; 2) жиіліктер полигонының көмегімен бейнелеңдер.

△ 1) Кестеден көрініп тұрғандай, қызметкерлер санын X арқылы белгілесек, ол кездейсоқ мөлшер болады. Тікелей кестені үйреніп, бұл кездейсоқ мөлшердің мәндері 23-тен 33-ке дейінгі мәндерді қабылдайтынын көреміз және сол сандардың кестеде неше рет қатысатынын санап, жиіліктер бойынша бөлу кестесін түземіз:

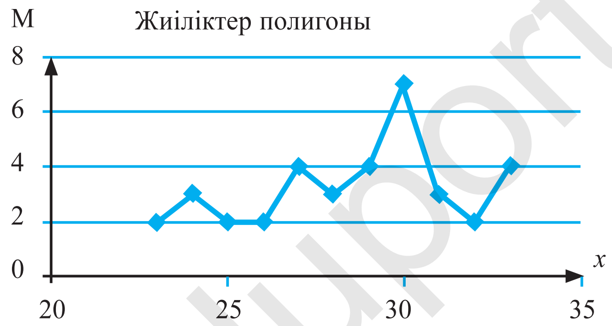
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Жиіліктердің әрқайсысын компаниялар саны $N = 36$- ға бөліп, салыстырмалы жиіліктер бөлу кестесін аламыз:

X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Мұнда барлық жиіліктер қосындысы $N = 36$ және барлық салыстырмалы жиіліктер қосындысы болса 1-ге тең екенін естеріңе саламыз.

2) Компаниялар қызметкелері санының жиіліктер полигонын 90-суреттен көруге болады:



90- сурет.

Бір мөлшердің барлық мәндерінің қосындысын таппақшы болсақ, Л.Эйлер кіргізген $\sum$ белгісін пайдаланамыз. Мысалы, егер M жиілік M_1, $M_2, \ldots, M_k$ мәндерді қабылдаса, онда төмендегідей белгілеуді пайдаланамыз:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Кездейсоқ мөлшердің барлық жиіліктерінің қосындысы тәжірибелер саны N- ге тең:

$$\sum M = N.$$

Кез келген кездейсоқ мөлшер үшін оның салыстырмалы жиілігінің қосындысы 1-ге тең.

$$\sum W = \sum\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} =$$

$$= \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Осы параграфта қаралған кездейсоқ мөлшерлер бір-бірінен ажыралған мәндерді қабылдайды. Мұндай мөлшерлер *дискрет* (латын тіліндегі *diskretus* – ажыратылған, үзілісті сөзінен) *мөлшерлер* деп аталады.

Егер кездейсоқ мөлшерлер бірер аралықтағы барлық мәндерді қабылдауы мүмкін болса, онда мұндай мөлшер *үздіксіз кездейсоқ мөлшер* деп аталады. Үздіксіз кездейсоқ мөлшерлерге мысал ретінде ауа температурасының өзгеруін, үйден мектепке баруға кететін уақытты, өсіп жатқан теректің ұзындығын, аялдамаға келуі күтілген автобустың келу уақытын, тағы басқаларды айтуға болады.

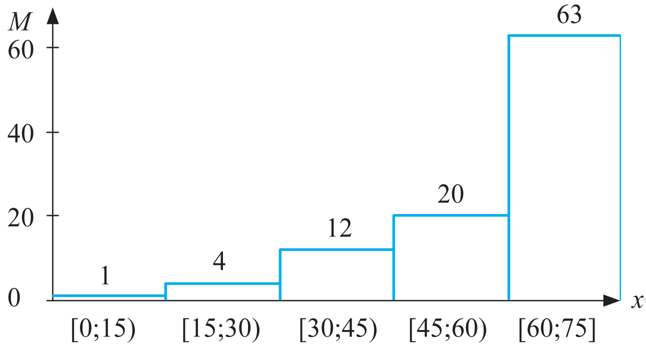
Үздіксіз кездейсоқ мөлшерлер шексіз көп мәндерді қабылдаса да олардың бөлінуін беруге болады. Ол үшін, үздіксіз мөлшер мәндерінің өзгеру аралығы бөлімдерге ажыратылады және кездейсоқ шаманың әрбір бөлімге түсуінің жиіліктері (немесе ықтималдықтары) есептелініп табылады.

Мысалы, оқушы 100 күн спорт залда болғаны және әр жолы жаттығуға 1 сағат 15 минуттан артық уақыт емес уақыт жұмсағанын жазып жүрген болсын. Онда жұмсалған уақыттың минуттар [0;75] аралығында болатынын ескеріп, бұл аралықты, мысалы 5 тең уақыт аралықтарына бөліп, жаттығуларға жұмсалған уақыттардың жиілігін кестеге кіргізуге болады:

T (минут)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Тікелей жиіліктер қосындысын есептеп, $\sum M = N = 100$ екенін көруге болады.

Осы кестедегі деректерді *жиіліктер диаграммасы* – саты сияқты пішінде бейнелеуге болады (91-rasm). Мұнда әрбір саты негізі h ұзындыққа ие болса, онда бағанның биіктігін $\frac{M}{h}$, мұндағы M осы X кездейсоқ шаманың сәйкес аралығындағы жиілігі. Олай болса, мұндай бағанның ауданы $\frac{M}{h} \cdot h = M$ - ға, ал гистограмма астындағы пішіннің ауданы $\sum M = N$ - ге тең болады.

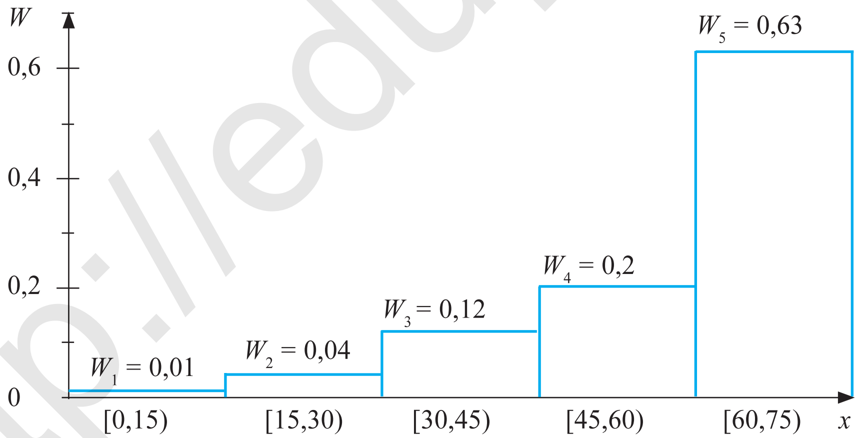


91- сурет.

Егер жиіліктердің көмегімен салыстырмалы жиіліктер анықталса:

T (minut)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W=\dfrac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

онда олардың көмегімен сызылған сызбаның саты сияқты пішіні (92-сурет) кездейсоқ шаманың *салыстырмалы жиіліктер бойынша гистограммасы* дейіледі.



92- сурет.

Салыстырмалы жиіліктер гистограммасының әрбір баған астындағы ауданы W- нің сәйкес мәніне тең болады. Олай болса гистограмма астындағы пішіннің ауданы бірге тең болады ($\sum W=1$).

Жаттығулар

479. 1) Жай ойын кубигі; 2) екі жағында 1 ұпай, екі жағында 2 ұпай, екі жағында 3 ұпай белгіленген кубик; 3) үш жағында 1 ұпай, екі жағында 2 ұпай, бір жағында 3 ұпай белгіленген кубик; 4) екі жағында 1 ұпай, үш жағында 2 ұпай, бір жағында 3 ұпай белгіленген кубик тасталғанда түсетін „ұпайлар саны“ – X кездейсоқ мөлшер мәндерінің P ықтималдықтар бойынша бөлу кестесін түзіңдер.

480. Үстелге екі теңге тасталды. Нәтижеде „герб жағы“ түссе шартты түрде 0 санды мәнді, нәтижеде „цифрлы жағы“ түссе 1 санды мәнді береміз. Теңгелер түскенде берілген санды мәндер қосындысы – X кездейсоқ мөлшердің P ықтималдықтар бойынша бөлу кестесін түзіңдер.

481. Жақтары 1, 2, 3, 4 сандарымен белгіленген екі тетраэдр бір уақытта үстелге тасталуда, онда тетраэдрлердің үстелге тиіп тұрған жағындағы ұпай есептеледі. Екі тетраэдрдің түсетін қандай ұпайлары 1) қосындысының; 2) көбейтінідісінің ең үлкен ықтималдықпен болатынынын анықтау мүмкін бе?

482. Үстелге екі ойын кубигі тасталды. Осы екі кубиктің түсетін ұпайлары көбейтіндісінің ықтималдықтары бойынша бөлу кестесін түзіңдер.

483. Кафенің иесі түстік кезінде тамақтанушыларға өз уақытында қызмет көрсету, сол уақытта қызмет етушілердің санын дұрыс белгілеу және даярланатын тағамдарға жұмсалатын қаражатты дұрыс жоспарлау мақсатында оның кафесінде түстік жасайтындардың санын 50 күн барысында кестеге жазып жүрді:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Осы кестенің көмегімен түстік жасайтындар саны – X кездейсоқ мөлшерінің; 1) жиіліктер (M) және салыстырмалы жиіліктер (W) бойынша бөлу кестесін; 2) жиіліктер полигонын түзіңдер.

484. Жабық бассейнге жүзуге келген ұлдар мен қыздардың саны бес ай барысында жазылып, төмендегі кесте түзілді:

Ай	Бассейнге келген балалар	
	Қыздар	Ұлдар
Апрель	311	357
Май	284	404
Июнь	278	417
Июль	340	412
Август	322	406

Су бассейніне келген ұлдар саны – X кездейсоқ мөлшерінің жиілігін, салыстырмалы жиілігін табыңдар және гистограммасын салыңдар.

485. Мәндері төмендегі телефон нөмірлеріне қатысқан цифрлар болған X кездейсоқ мөлшерлердің жиіліктер бойынша бөлу кестесін түзіңдер:

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

486. Бөлінуі төмендегі кестеде берілген X кездейсоқ мөлшердің жиіліктер полигоны және салыстырмалы жиіліктер полигонын түзіңдер:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. Кестеде 9- сыныптағы 16 ұл баланың аяқ киімдерінің өлшемдері жазылған:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

9- сынып ұл балаларының аяққиімінің өлшемі – X кездейсоқ мөлшердің жиіліктер бойынша және салыстырмалы жиіліктер бойынша бөліну кестелерін түзіңдер.

38- §. КЕЗДЕЙСОҚ МӨЛШЕРЛЕРДІҢ САНДЫ ХАРАКТЕРИСТИКАСЫ

Сен 8-сынып „Алгебра“ курсының деректерді талдауға арналған IV тарауында бас жиын, іріктеме, орташа мән, мода, медиана сияқты ұғымдармен танысқансың. Дәл осындай ұғымдарды кездейсоқ мөлшерлерге де кіргізуге болады.

Статистикада деректер жиыны ретінде кездейсоқ мөлшерлердің санды мәндері, олардың жиіліктері ескеріліп қаралады. Мұнда кездейсоқ мөлшерлердің барлық мәндері *бас жиын* деп аталады, ал олардың таңдап алынған бір бөлігі *іріктеме* деп аталады. Егер іріктемеде кездейсоқ мөлшердің бас жиындағы және тек ондағы мәндері қатысса және ондағы мәндер жиілігінің қатынасы бас жиындағы секілді болса іріктеме *репрезантитивті іріктеме* деп аталады.

Мысал. X кездейсоқ мөлшердің M жиіліктер бойынша бөлінуі төмендегідей берілген болсын:

X	– 3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

және осы кездейсоқ мөлшердің барлық міндері (назар аудар, олардың саны 17000) бас жиын деп қабылданған болсын. Төмендегідей үш іріктемені қарастырайық:

1-кесте

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

2-кесте

X	–3	9	11
M	5	7	3

3-кесте

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

Бөлінуі 1- кестеде берілген іріктеме репрезентативті іріктеме, өйткені онда да –3, 5, 9, 11 мәндер және тек осы мәндер қатысуда, сондай-ақ бас жиында да, осы іріктеме де жиіліктер қатынасы бірдей:

5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5 :2:7:3.

Бөлінуі 2- кестеде берілген іріктеме репрезентативті іріктеме емес, өйткені онда *X* кездейсоқ мөлшердің 5- ке тең мәне қатыспайды.

Бөлінуі 3- кестеде берілген іріктеме де репрезентативті іріктеме емес, өйткені онда жиіліктер қатынасы сақталмаған: 5 000:2 000:7 000:3 000≠5:6:7:3.

Берілген деректерді, атап айтқанда кездейсоқ мөлшерлердің мәндерін кейде бір санмен сипаттау немесе бағалау мүмкін. Бұл сан берілген деректер құрамындағы сандар немесе кездейсоқ мөлшерлер мәндері *орталық тенденциясының өлшемі* дейіледі. Орталық тенденция өлшемдеріне мысал ретінде мода, медиана және орташа мән сияқтыларды келтіруге болады.

Кездейсоқ мөлшердің қаралып жатқан іріктемедегі жиілігі ең үлкен болған мәні *мода* деп аталады және M_0 деп белгіленеді.

Мысалы, іріктеме 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3- тен құралған болса, онда оның модасы 8-ге тең. Ал 5, 6, 11, 3, 3, 5 іріктеменің модасы екеу – M_2= 3, M_2= 5. Егер 1, 3, 7, 20, 6, 11 іріктемені қарастырсақ, оның модасы жоқ.

Егер іріктеме мәндерін өсу тәртібімен жазып алсақ, онда іріктемені берілгендердің саны тұрғысынан тең екіге бөлетін сан *медиана* деп аталады және M_e сияқты белгіленеді. Егер реттелген іріктемеде берілгендер саны тақ болса, онда медиана олардың арасында тұрған санға тең. Егер реттелген іріктемеде берілгендер саны жұп болса, онда медиана ортада тұрған екі санның орташа арифметикалығына тең.

1-есеп. Кездейсоқ мөлшер мәндері іріктемесінің медианасын табыңдар:

1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Іріктеме элементтерін өсу тәртібімен орналастырамыз: – 5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Берілгендер саны тақ. 5 санынан солға қарай және оңға қарай үшеуден сан бар, яғни 5 іріктеменің орташа саны, сондықтан M_e=5.

2) Берілген 8, 5, 3, 4, 7, 2 іріктеме элементтерін өсу тәртібімен жазамыз: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Берілгендер саны жұп. Іріктеменің ортасында тұрған сандар: 4 және 5, сондықтан $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5.$

Жауабы: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Іріктемелерді үйренуде маңызды тағы бір ұғым – іріктеменің кеңдігі ұғымымен сен 8-сыныпта танысқансың. *Іріктеменің кеңдігі* деп кездейсоқ мөлшердің ең үлкен мәні мен ең кіші мәнінің айырмасын айтады және ол R арқылы белгіленеді.

Іріктеменің кеңдігі кездейсоқ мөлшер мәндерінің қаншалықты шашыраңқы екенін білдіреді.

Мысал. 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 va 190, 187, 198, 189, 195, 190 іріктемелердің кеңдігін салыстырыңдар.

1- іріктеменің ең үлкен мәні 27 ал ең кіші мәні 8. Демек, 1- іріктеменің кеңдігі R_1=27–8=19.

2- іріктеменің ең үлкен мәні 198 ал ең кіші мәні 186. Нәтижеде, 2- іріктеменің кеңдігі R_2=198–186=12.

Демек, бірінші іріктеменің мәндері екінші іріктемеге қарағанда шашыраңқы орналасқан.

Кездейсоқ мөлшер мәндерінің *орташа мәні (немесе орташа арифметикалығы)* деп іріктемедегі барша сандар қосындысының олардың санына қатынасын айтатынымызды еске сала кетейік. X кездейсоқ мөлшер барша мәндерінің орташасы $\overline{X}$ арқылы белгіленеді.

2- есеп. Жиіліктері бойынша бөлінуі төмендегі кестеде берілген кездейсоқ мөлшер іріктемесінің орташасын табыңдар:

4-кесте

X	3	4	5	7	10
M	3	1	2	1	3

$$\overline{X} = \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 3\cdot 10}{3+1+2+1+3} = \frac{9+4+10+7+30}{10} = 6.$$

Жауабы: 6.

Ықтималдығы бойынша бөлінуі белгілі болған кездейсоқ мөлшер іріктемесін сипаттайтын ұғымдардың тағы бірі – бұл *математикалық күтім* ұғымы.

Егер X кездейсоқ мөлшердің X_1, X_2, ..., X_n мәндерді қабылдау ықтималы, сәйкесінше, P_1, P_1, ...P_n болса, онда

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_nP_n \qquad (1)$$

саны X кездейсоқ мөлшердің *математикалық күтімі* деп аталады.

Мысалы, X кездейсоқ мөлшердің ықтималдығы бойынша бөлінуі төмендегідей берілген болсын:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Олай боса бұл кездейсоқ мөлшердің математикалық күтімі:

$$E = 6\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Кездейсоқ мөлшердің мәні мен іріктеменің орташасы арасындағы айырма *ортшадан шеттеу* деп аталады.

Мысалы, кездейсоқ мөлшерінің мәні $X_1 = 35$, ал орташасының мәні $\overline{X} = 32$ болса, онда X_2- нің орташадан шеттеуі $X_1 - \overline{X} = 35 - 32 = 3$.

Іріктеменің барлық мәндерінің орташадан шеттеулерінің қосындысы нөлге тең болатынын көрсету оңай:

$$(X_1-\overline{X})+(X_2-\overline{X})+...+(X_n-\overline{X})=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\overline{X}=$$

$$=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}=0.$$

Сондықтан кездейсоқ мөлшер мәндерін сипаттау үшін орташа шеттеулер қосындысының орнына орташа шеттеулер квадраттарының орташа арифметикалығы пайдаланылады. Мұндай шама *дисперция* (латыншадан *dispersion* – шашылу, жайылу) деп аталады.

Егер X кездейсоқ мөлшер N түрлі мәндерді қабылдаса және оның орташасы $\overline{X}$ болса, онда оның дисперциясы төмендегі формуламен табылады:

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_\mathrm{n}-\bar{X})^2}{N}. \qquad (2)$$

Демек, дисперция – кездейсоқ мөлшер мәндерінің орташадан шеттеулер квадраттарының орташа арифметикалығына тең.

Егер X кездейсоқ мөлшерінің $X_1, X_2,..., X_k$ мәндері сәйкесінше, M_1, $M_2,..., M_k$ жиіліктермен қайталанса, онда оның дисперциясын

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_\text{k} - \bar{X})^2 Mk}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}. \qquad (3)$$

формуламен есептеуге болады, мұнда

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_\text{k} M_\text{k}}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}.$$

Мысалы, 4- кестедегі кездейсоқ мөлшердің орташасы $\overline{X} = 6$ екенін анықтаған едік. Енді сол мөлшердің дисперциясын есептейік:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \ldots + (Xk - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + Mk} =$$

$$= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3+1+2+1+3} =$$

$$= \frac{27+4+2+1+48}{10} = \frac{82}{10} = 8,2.$$

Егер кездейсоқ мөлшер қандайда бір өлшемге (мысалы сантиметр) ие болса, онда оның орташасы $\overline{X}$ және орташадан шеттеуі $X - \overline{X}$ те X мөлшермен бірдей өлшемге (сантиметр) ие. Шеттеудің квадраты және дисперциясы болса X мөлшер өлшемінің квадраты (квадрат сантиметр) өлшемге ие. Орташадан шеттеуді бағалау үшін X кездейсоқ мөлшермен бірдей өлшемге ие шаманы пайдаланған қолайлы. Сондықтан, дисперциядан алынған квадрат түбір, яғни $\sqrt{D}$ - ның мәндері пайдаланылады.

Дисперциядан алынған квадрат түбір *орташа квадрат шеттеу* дейіледі және σ арқылы белгіленеді, яғни $\sigma = \sqrt{D}$.

Мысалы, 4- кестедегі кездейсоқ мөлшердің дисперциясы $D = 8{,}2$ екенін есептеген едік. Енді дисперцияның сондай мәнінен калькулятордың көмегімен квадрат түбір алсақ, орташа квадрат шеттеуді туындатамыз:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{8,2} \approx 2{,}86.$$

Дисперция және орташа квадрат шеттеуді статистикада кездейсоқ мөлшер мәндерінің орташа мән айналасындағы жайылулардың өлшемдері деп те айтады.

Жаттығулар

488. Кездейсоқ мөлшер X мәндерінің бас жиынындағы бөлінуі төмендегі кестеде көрсетілген:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Берілген бас жиын үшін төмендегілердің қайсысы репрезентативті іріктеме болады:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Іріктеменің модасын табыңдар:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10; 2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5; 4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Іріктеменің медианасын табыңдар:
1) 18, 13, 35, 19, 7; 2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11; 4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Іріктеменің кеңдігін табыңдар:
1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Іріктеменің орташасын табыңдар:
1) 34, –10, 23, –18; 2) –3, 6, –19, –12, 1;
3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0,7, 0,6, 0,4; 4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Іріктеменің модасын, медианасын және орташасын табыңдар:
1) 4, –3, 2, 0, 3, –2; 2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Жиіліктері бойынша бөлінуі төмендегі кестеде берілген X кездейсоқ мөлшер мәндері іріктеменің орташа арифметикалығын табыңдар:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Ықтималдығы бойынша бөлінуі төмендегі мына кестеде берілген X кездейсоқ мөлшер мәндерінің математикалық күтімін табыңдар:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Іріктеменің дисперциясын табыңдар
1) 9 см, 11 см, 8 см, 10 см;
2) 18 кг, 16 кг, 15 кг, 19 кг;
3) 8 с, 11 с, 8 с, 9 с, 9 с;
4) 1 м, 9 м, 4 м, 8 м, 8 м.

497. Жиіліктері бойынша бөлінуі төмендегі кестеде берілген X кездейсоқ мөлшер мәндері жиынының дисперциясын табыңдар.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Іріктеме элементтерінің орташа мәнінен орташа квадрат шеттеуін есептеңдер:
1) 4 г, 5 г, 8 г, 3 г, 5 г;
2) 9 см, 12 см, 7 см, 10 см, 12 см.

499. Жиіліктері бойынша бөлінуі төмендегі кестеде берілген X кездейсоқ мөлшердің орташа квадрат шеттеуін табыңдар:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

V тарауға арналған жаттығулар

500. (Ауызша.) Төмендегі тәжірибеде болуы мүмкін барлық элементар оқиғаларын айт: 1) кездейсоқ түрде жылдағы айлардың аты аталады; 2) екі теңге тасталып, түсіп жатқан жақтары бақыланады; 3) бір 50- ден кіші түп сан айтылады; 4) кездейсоқ түрде екі таңбалы 3- ке еселі сан айтылады.

501. Қорапта 4 қара, 5 қызыл, 6 көк шар бар. Қораптан кездейсоқ бір шар алынды. Алынған шар: 1) қара; 2) қызыл; 3) көк; 4) қара емес; 5) қызыл емес; 6) көк емес; 7) жасыл; 8) немесе қара, немесе қызыл, яки көк болуы ықтималын табыңдар.

502. Тәуекелмен 1- ден 50- ге дейінгі натурал сан айтылды. Бұл санның:1) 7; 2) 7 емес; 3) 7- ге еселі; 4) 10- ға еселі; 5) түп сан емес; 6) 30- дан үлкен емес екенінің ықтималын анықтаңдар.

503. Үстелге ойын кубигі мен теңге тасталуда. Мұнда 1) кубикте 5, теңге цифр жағымен; 2) кубикте шыққан сан түп, теңге герб жағымен түсу ықтималын табыңдар.

Іріктеменің кеңдігін, модасын, медианасын және орташасын табыңдар (**504–507**):

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Іріктеменің дисперциясын және орташа квадрат шеттеуін анықтаңдар:
1) 6, 11, 8, 9; 2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4; 4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4; 6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Жиіліктері бойынша бөлінуімен берілген Z кездейсоқ мөлшердің дисперциясын және орташа квадрат шеттеуін табыңдар:

1)

Z	–1	0	2	4
M	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
M	1	2	3	1

510. Іріктеменің дисперцияларын салыстырыңдар:
1) 4, 5, 7, 5, 9 және 6, 9, 7, 8;
2) –2, 2, 3 және –3, –1, 1, 3, 4.

511. Ықтималдық бойынша бөліну кестесі:

1)

X	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

арқылы берілген X кездейсоқ мөлшердің математикалық күтімін табыңдар.

V тарауға арналған сынақ (тест) жаттығулары

1. Бірдей карточкаларға 1- ден 15- ке дейінгі сандар жазылды (әр карточкаға біреуден сан жазылды). Карточкалар үстелге теріс қойылды және араластырылды. Кездейсоқ алынған карточкадағы санның түп сан болу ықтималын табыңдар.

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{3}{5}$.

2. Қорапта 3 ақ және 7 қара шар бар. Олардың біреуі кездейсоқ таңдалып қораптан алынды. Алынған шардың ақ болу ықтималын табыңдар.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

3. Сыныптағы 27 оқушыдан 15-і ұлдар. Сыныпқа бір ұл және бір қыз келіп қосылды. Сонда ұлдардың саны – X кездейсоқ мөлшердің салыстырмалы жиілігі қаншаға өзгерді?

A) $\frac{1}{45}$ - ға артты; B) $\frac{1}{45}$ - ға кемейді;

C) $\frac{2}{45}$ - ға артты; D) $\frac{2}{45}$ - ға кемейді.

4. Кездейсоқ мөлшер мәндері іріктемесінің модасы мен медианасының қосындысын табыңдар: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

A) 14; B) 17; C) 16; D) 13.

5. Кездейсоқ мөлшер мәндері іріктемесінің модасы мен медианасының көбейтіндісін табыңдар: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.

6. Жиіліктері бойынша бөлінуі төмендегі кестеде берілген X кездейсоқ мөлшер іріктемесінің $\overline{X}$ орташасын табыңдар:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

A) $1\frac{5}{9}$; B) $1\frac{4}{9}$; C) $1\frac{1}{9}$; D) 1.

7. X кездейсоқ мөлшердің ықтималдық бойынша бөлінуіне сай математикалық күтімін табыңдар:

X	–1	2	3	5	7
M	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

A) $\frac{25}{9}$; B) $\frac{26}{9}$; C) $\frac{29}{9}$; D) $\frac{30}{9}$.

8. X кездейсоқ мөлшердің жиілігі бойынша бөлінуіне сай орташа квадрат шеттеуін табыңдар:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.

9. X кездейсоқ мөлшердің ықтималдық бойынша бөлінуіне сай дисперциясын табыңдар:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

1-есеп. 5000 а.б.-да (ақша бірлігінде) автомобиль, әрқайсысы 250 а.б.-дан 4 теледидар, әрқайсысы 200 а.б.- дан 5 ұялы телефон ұтысты лотерея ойналуда. Барлығы 7 а.б.- дан 1000 билет сатылды. Бір билет сатып алған лоторея қатысушысының таза ұтысының бөліну кестесін түзіңдер және математикалық күтімін есептеңдер.

△ X – бір билетке түскен таза ұтыс болса, онда оның мәні:

бірде-бір ұтыс шықпаса, $0 - 7 = -7$;

ұялы телефон ұтса, $200 - 7 = 193$;

теледидар ұтса, $250 - 7 = 243$;

автомобиль ұтса, $5\,000 - 7 = 4\,993$

ақша бірлігінде болады. 1000 билеттен 990- нына ұтыс шықпайтынын және ұтыстар саны $5 + 4 + 1 = 10$ екенін есепке алып, ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша туындатамыз:

X – кездейсоқ мөлшер

-7 мәнді қабылдау ықтималы $\frac{990}{1000} = 0{,}990$;

193 мәнді қабылдау ықтималы болса $\frac{5}{1000} = 0{,}005$;

243 мәнді қабылдау ықтималы $\frac{4}{1000} = 0{,}004$;

4 993 мәнді қабылдау ықтималы $\frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Демек, X – кездейсоқ мөлшердің ықтималдықтары бойынша бөліну кестесі төмендегідей болады:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Бөліну кестесі негізінде математикалық күтімді есептеуге болады:

$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0$, яғни орташа ұтыс нөлге тең. Пайда болған нәтиже, лотерея билеттерін сатудан түскен барлық ақша ұтысқа кететінін білдіреді.

Жауабы: бөліну кестесі:

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

және математикалық күтім $E = 0$.▲

2- есеп. Бір фирмадағы тәржімандық жұмыс орнына екі үміткер әрекет жасауда. Оларға әртүрлі сынақ мерзімі белгіленді және 125 беттік бірдей мәтін аудармаға берілді. Олардың әр күні неше бет тәржіма жасайтыны төмендегі кестеде берілген:

Аптаның күндері	Күндік тәржіма жасалған беттер саны	
	1- үміткер (X)	2- үміткер (Y)
Дүйсенбі	24	25
Сейсенбі	26	31
Сәрсенбі	25	27
Бейсенбі	23	22
Жұма	27	20

Жұмыс беруші кестедегі мәліметтерді талдап, үміткерлердің қайсысын алуды дұрыс деп санайды?

△ Үміткерлердің әрқайсысы 5 күнде 125 беттік аударма жасады, демек екі үміткердің де орташа еңбек өнімділігі бірдей:

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \frac{125}{5} = 25 \text{ (бет/күн)}.$$

Екі кездейсоқ мөлшер X және Y- тің модасы жоқ, ал медианалары бірдей (25 және 25). Үміткерлердің қайсысын жұмысқа алған мақсатқа сай болады? Мұндай жағдайда үміткерлер *еңбек өнімділігінің тұрақтылығын* салыстыру арқылы жүзеге асыруға болады. Мұны шеттеулер квадраттарының қосындыларын немесе дисперсияларын салыстыру арқылы жүзеге асырса болады:

Аптаның күндері	Кездейсоқ мөлшердің мәні		Орташадан шеттеу $\overline{X} = \overline{Y} = 25$		Шеттеулер квадраттары	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Дүйсенбі	24	25	–1	0	1	0
Сейсенбі	26	31	1	6	1	36
Сәрсенбі	25	27	0	2	0	4
Бейсенбі	23	22	–2	–3	4	9
Жұма	27	20	2	–5	4	25
Жалпы	125	125	0	0	10	74

Көрініп тұрғанындай, шеттеулер квадраттарының қосындысы X үшін 10, ал Y үшін 74, немесе дисперцияларды есептесек:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Демек, X кездейсоқ мөлшердің дисперциясы Y кездейсоқ мөлшердің дисперциясынан кіші. Практикалық тұрғыдан бұл нәтиже екінші үміткердің еңбек өнімділігі тұрақты еместігін көрсетеді: кей күндері ол мүмкіндігін толық пайдаланбастан істеген, басқа күндері мүмкіндігінен көбірек істеуге әрекет жасаған, бұл әрине орындалып жатқан істің сапасына ұнамсыз әсер етуі мүмкін. Көрініп тұрғанындай, нәтижеде жұмыс беруші бірінші үміткерді жұмысқа алуды абзал көреді.

Жауабы: жұмыс беруші бірінші үміткерді жұмысқа алуды абзал көреді.

3- есеп. Екі мерген нысанға садақтан оқ атқанда алатын ұпайлары – X және Y кездейсоқ мөлшерлердің ықтималдығы бойынша бөліну кестесі белгілі:

1-мерген үшін

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

2- мерген үшін

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Мергендердің қайсысы садақтан нысанға жақсырақ атады?

△ Көрініп тұрғанындай, мергендердің қайсысының нысанға тиетін орташа ұпайы көп болса, сонысын жақсы нысанға алушы деуге болады. Сол себепті, X және Y кездейсоқ мөлшерлердің математикалық күтімін есептейміз:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \dots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \dots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

яғни, екі мергеннің де нысанға тиетін ұпайлары орташа бірдей.

Енді X және Y- тердің дисперциясын және орташа квадрат шеттеулерін есептеп көрейік:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \dots +$$
$$+ (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \dots +$$
$$+ (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Осылайша, нысанға тиетін ұпайлардың орташа мәндері тең $E(X) = E(Y)$ болғанымен, екінші мерген үшін дисперция бірінші мергенге қарағанда кішірек: $D(Y) < D(X)$, яғни екінші мергеннің нысанға тиетін ұпайларының „центр“ ($E(Y) = 5{,}36$) айналасына орналасу шашыраңқылығы бірінші мергенге қарағанда кішірек. Былайша айтқанда, оның нәтижелері бірінші мергеннің нәтижелеріне қарағанда 5,36- дан алысқа кетіп қалмаған. Демек, ол бірінші мергенге қарағанда жоғары нәтижеге жету үшін нысанға жақсырақ көздеп, $E(Y)$ - ті оңға қарай (жоғарырақ) жылжытуға әрекет жасауы керек.

Жауабы: мергендердің біріншісі нысанға жақсырақ атады. ▲

4- есеп. Жарыстар кезінде футбол командасының ойыншылары қарсыластар қақпасына кіргізген доптар саны X- тің жиіліктер бойынша бөлінуі берілген:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

Барша кіргізілген доптар санының орташа мәнінен орташа квадрат шеттеуін есептеңдер.

△ Алдымен орташаны есептейміз:

$$\bar{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \cdots + X_5M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{0\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1}{3+3+2+1+1} = \frac{0+3+4+3+4}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Кейінгі есептеу нәтижелері төмендегі кестеде келтірілген:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X-\overline{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X-\overline{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X-\overline{X})^2\cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Онда, дисперция және орташа квадрат шеттеу төмендегідей есептеледі:

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2 \mathrm{M}_1 1 + (X_2-\bar{X})^2 \mathrm{M}_2 + \cdots + (X_5-\bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{5,88 + 0,48 + 0,72 + 2,56 + 6,76}{10} = \frac{16,4}{10} = 1,64,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$$

Жауабы: $\sigma \approx$ 128. ▲

Есептер

1. Көп жылдық статистикалық мәліметтер негізінде 4 перзентті жанұялардағы ұл балалардың саны – X кездейсоқ мөлшердің бөліну заңы төмендегі кестеде берілген болса, оның матиматикалық күтімін және дисперциясын есептеңдер.

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Екі гимнастшының жарыстағы шығуына 9 төреші 10 балл жүйесінде қойған балдары төмендегі кестеде берілген:

Гимнастшының нөмірі	Төрешінің нөмірі және қойған балдары								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Әр гимнастшы алған балдарды сәйкесінше, X және Y кездейсоқ мөлшерлер деп қарасақ, олардың математикалық күтімін және дисперциясын, сондай-ақ орташа квадрат шеттеуін есептеңдер және салыстырыңдар.

3. Алушылардың аяқкиімге сұранысын үйреніп жатқан студент екі дүкенде әр күні сатылған аяқкиімдер санын 25 күн барысында жазып отырды. Егер X_1 бірінші дүкенде, X_2 екінші дүкенде сатылған аяқкиімдер саны болса, онда төмендегі кестелерде келтірілген деректерге негізделіп X_1 және X_2 кездейсоқ мөлшерлердің математикалық күтімін және орташа квадрат шеттеуін есептеңдер. Алынған нәтижелерді салыстырып, дүкендердегі аяқкиім сатылуын салыстырыңдар.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

4. Цилиндр көрінісіндегі болаттан жасалған кеспелтек партиясынан алынған жиырма кеспелтек табанының d диаметрлері екі түрлі өлшеу аспабымен өлшенді. Бірінші өлшеу аспабының көмегімен (1 мм- ге дейінгі дәлдікте) алынған нәтижелер сол жақтағы, екіншісінде алынған нәтижелер оң жақтағы кестеде келтірілген:

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

d_1 және d_2 кездейсоқ мөлшерлердің дисперциясын салыстырыңдар.

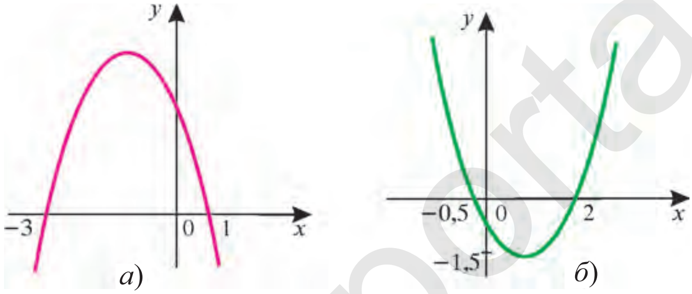
IX СЫНЫПТЫҢ „АЛГЕБРА“ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

512. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; – 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Аузыша.) $y = ax^2 + bx + c$ функциясының графигін пайдаланып (93-сурет), оның қасиеттерін анықтаңдар.



93- сурет.

514. Функция графигін салыңдар және қасиеттерін анықтаңдар:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. Функция графигін бір координата жазықтығында салыңдар:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ және $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ және $y = 3x^2 - 2$.

Теңсіздікті шешіңдер (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \le 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \le 0$; 6) $x^2 - 7 \ge 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\leq 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\geq 0$.

Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешіңдер (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\leq 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\geq 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\leq 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\geq 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\geq 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\leq 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Трапецияның ауданы 19,22 см^2- ден артық. Оның орта сызығының ұзындығы биіктігінен екі есе ұзын. Трапецияның орта сызығы мен биіктігінің ұзындықтарын табыңдар.

524. Параллелограмның қабырғасы осы қабырғасына түсірілген биіктігінің ұзындығынан 2 см артық. Егер параллелограмның ауданы 15 см^2- тан артық болса, осы қабырғасының ұзындығын табыңдар:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geq 2$.

526. Егер x^2+px+q квадрат үшмүше $x=0$ болғанда -14- ке, ал $x=-2$ болғанда -20- ға тең мәнді қабылдаса, осы квадрат үшмүшенің p және q коэффициенттерін табыңдар.

527. Егер $y=x^2+px+q$ парабола:

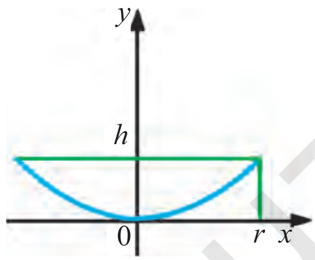
1) абсциссалар осін $x=-\frac{1}{2}$ және $x=\frac{2}{3}$ нүктелерде қиып өтсе;

2) абсциссалар осімен $x=-7$ нүктеде жанасатын болса;

3) абсциссалар осін $x=2$ және ординаталар осін $y=-1$ нүктеде қиып өтсе, $p-q$ - ді табыңдар.

528. Егер парабола абсциссалар осін 5 нүктеде қиып өтсе және оның төбесі $\left(2\frac{3}{4};10\frac{1}{8}\right)$ нүктеде болса, осы параболаның теңдеуін жазыңдар.

529. Телескоптың (рефлектордың) қайтаратын линзасы осьтік қимасы бойынша парабола пішінді (94-сурет). Осы параболаның теңдеуін жазыңдар.



94- сурет.

530. Егер $y = ax^2 + bx + c$ квадрат функцияның графигі:

1) $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ және $C(0;\ -6)$ нүктелерден өтсе;

2) $K(-2;0)$, $L(1;0)$, $M(0;\ 2)$ нүктелерден өтсе, оның коэффициенттерін табыңдар.

531. Кез келген теріс емес a және b сандары үшін

1) $a^2+b^2 \le (a+b)^2$; 2) $a^3+b^3 \le (a+b)^3$

теңсіздіктің дұрыс болатынын дәлелдеңдер.

532. Функция графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt{x^2}$; 2) $y = |x-1|$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

533. Теңдеудің нақты түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 - |x| - 2 = 0$; 2) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$; 3) $|x^2 - x| = 2$;

4) $|x^2 + x| = 1$; 5) $|x^2 - 2| = 2$; 6) $|x^2 - 26| = 10$.

534. Түбір табыңдар:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, a $\neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

535. Ықшамдаңдар:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0{,}5\sqrt{343}$.

536. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ және $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ және $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Түбір астынан көбейткіштерді шығарыңдар:

1) $\sqrt{9a^2b}$, мұнда $a < 0, b > 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, мұнда $a > 0, b > 0$;

539. Көбейткішті түбір астына енгізіңдер:

1) $x\sqrt{5}$, мұнда $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, мұнда $x < 0$;

3) $-a\sqrt{3}$, мұнда $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, мұнда $a < 0$.

540. $y = -\frac{25}{x}$ функция графигіне:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; 3) $C(0,1; 250)$

нүкте тиісті болатынын немесе болмайтынын анықтаңдар.

541. $y = \sqrt{1-2x}$ функция графигіне: 1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; $E(-4; 3)$

нүкте тиісті болатынын немесе болмайтынын анықтаңдар.

542. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -x^2 - 7x - 6$.

543. $P(1; 0)$ нүктені: 1) $A(0; 1)$; 2) $B)$ $(0; -1)$; 3) $C(-1; 0)$; 4) $D(1; 0)$ нүктеге өткізетін бірнеше бұру бұрыштарын көрсетіңдер.

544. Есептеңдер: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Санның оң немесе теріс екенін анықтаңдар:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

546. Берілген: $\sin\alpha = 0,6$, $\sin\beta = -0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Есептеңдер: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha - \sin 2\alpha$; 4) $1 - \sin 2\alpha - \cos^2\alpha$.

548. Егер 1) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ және $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ және $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ болса $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$- ны есептеңдер.

549. Егер

1) $a_1=10,\ d=6,\ n=23;$ 2) $a_1=42,\ d=\frac{1}{2},\ n=12;$

3) $a_1=0,\ d=-2,\ n=7;$ 4) $a_1=\frac{1}{3},\ d=\frac{2}{3},\ n=18$

болса, арифметикалық прогрессияның n- мүшесін және алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

550. Егер $a_1 = 2$, $a_n = 120$, $n= 20$ болса, арифметикалық прогрессияның алғышқы n мүшелерінің қосындысын табыңдар.

551. n- мүшесі $a_n = \frac{1-2n}{3}$ формуламен берілген тізбектің арифметикалық прогрессия болатынын дәлелдеңдер.

552. Егер геометриялық прогрессия үшін

1) $b_1 = 5$ және $q = -10$ болса, b_4- ті табыңдар;

2) $b_4 = -5000$ және $q = -10$ болса, b_1- ді табыңдар.

553. Егер:

1) $b_1=3,\ q=2,\ n=5;$ 2) $b_1 = 1,\ q = 5,\ n = 4$

болса, геометриялық прогрессияның n- мүшесін және алғашқы n мүшелерінің қосындысын есептеңдер.

554. Егер: 1) $b_1=\frac{1}{4},\ q=2,\ n=6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{5},\ q = -5,\ n = 5$ болса, геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелері қосындысын табыңдар.

555. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысын табыңдар.

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots;$ 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots;$ 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$.

556. Көбейткішті түбір астынан шығарыңдар:

1) $\sqrt{20a^4b}$, мұнда $a<0, b>0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, мұнда $a<1$;

557. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, мұнда $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, мұнда $b>a$;.

558. Бөліміндегі иррационалдылықтан құтылыңдар:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

559. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \dfrac{a^2+4}{a^2-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Теңдеуді шешіңдер:

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$.

564. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

565. Арифметикалық прогрессияда $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Прогрессияның алғашқы он жеті мүшесінің қосындысын табыңдар.

566. Геометриялық прогрессияда $q=3$, $S_6=1\,820$ болса, b_1 және b_5- ті табыңдар.

567. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы $\frac{8}{5}$- ге тең, ал екінші мүшесі $-\frac{1}{2}$- ге тең. Үшінші мүшесін табыңдар.

Өрнекті ықшамдаңдар:

568. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

569. Егер: 1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{12}{13}$ болса, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$- ны есептеңдер

ЖАУАПТАР

2. 2) $x_1 = 0, x_2=1$; 4) x- тің берілген функцияның мәні –5-ке тең болатын нақты мәндері жоқ. **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$. $x_2=-1$; 4) $x_1=0,\ x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2) нөлдері жоқ; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) нөлдері жоқ. **6.** 2) $p=3,\ q=-4$; 4) $p = -2,\ q = -15$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$. **9.** B және C. **12.** 2) $(\sqrt{5}; 5), (-\sqrt{5}; 5)$; 4) $(0; 0), (2; 4)$; 6) $(1; 1)$. **13.** 2) Иә. **14.** 2) Иә; 4) жоқ; **16.** 1) $x<-3, x>3$; 2) $-5\leq\leq x\leq 5$; 3) $x\leq -4, x\geq 4$; 4) $-6<x<6$. **20.** 2) $(-3; -4{,}5), (2; -2)$. **21.** 2) Иә; 4) жоқ. **22.** 1) Өседі; 2) кемиді; 3) өседі; 4) өсуші де, кемеюші де болмайды. **23.** 3 м/с^2. **26.** 2) $(0;-5)$; 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x=-2$; 4) $x=2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2) Жоқ; 4) жоқ. **29.** 2) $(1; 0)$, $(0{,}5; 0)$, $(0; -1)$; 4) $(0; 0)$, $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$.

30. $y = x^2 - 2x + 3$. **32.** 2) $k = -10$. **34.** 1) $y = 2(x - 3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1{,}5)^2 + 3{,}5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) $(1;0)$, $(-5; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(0; 14)$. **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 және 5. **42.** Қабырғаға параллель қабырғасы 6 м; қалған қабырғалары 3 м- ден. **43.** Жоқ. **44.** 2) $x=1$- де $y= -5$ ең кіші мәні; 4) $x=1$- де $y=-2$ ең кіші мәні. **45.** 1) $a>0,\ b>0,\ c>0$; 2) $a<0,\ b>0,\ c<0$. **46.** 1) 5 с- тан соң ең үлкен биіктік 130 м- ге тең; 2) $(5 + \sqrt{26})$s . **48.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **50.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x>-1$. **51.** 2) $x < -3,\ x > 3$; 4) $x < 0,\ x > 2$. **52.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3,\ x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **53.** 2) $x= \frac{1}{6}$; 4) $x < -4,\ x > 2$. **56.** Оң мәндері $x < -3,\ x > 2$ интервалда, теріс мәндері $-3< x < 2$ интервалда. **58.** 2) $x \leq -1,\ x \geq 4$; 4) $-1<x<4$. **59.** 2) $x< -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x\leq -0{,}25$; $x\geq 1$. **60.** 2) $x = 7$; 4) шешімдері жоқ. **61.** 2) Шешімдері жоқ; 4) шешімдері жоқ; 6) x – кез келген нақты сан. **62.** 2) $x< -\sqrt{7}$, $x> \sqrt{7}$; 4) $x< -2$; $x> 0$. **64.** 2) $x< -\frac{5}{3}$ $x> \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x – кез келген нақты сан. **65.** 2) x – кез келген нақты сан; 4) $x\neq \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$. **66.** 2) Шешімдері жоқ; 4) $-0{,}5 < x < 3$. **67.** 2) $x = 1$; 4) x – кез келген нақты сан. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x<-5$, $x> 2\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0,\ x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1,\ x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x <$

$< 0,\ x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2,\ x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4,\ x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \le x < 7$; 6) $-2 \le x < -1,\ x \ge 3$. **76.** 2) $x < 0{,}5,\ x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3},\ 0 < x < \frac{1}{2},\ x > \frac{2}{3}$. **77**. 2) $-4 < x < -2,\ x > 3$; 4) $-3 \le x \le -1,\ 4 \le x \le 5$. **78.** 2) $x < -2,\ 2 < x < 6$; 4) $x < -3,\ -1 \le x < 2,\ x \ge 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3,\ 0 < x < < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5,\ x > 2$; 3) $-1 < x \le -\frac{2}{5}$. **81.** 2) $x = 2$- де $y = 1$; $x = 0$ және $x = 4$- те $y = 5$; $x = -1$ және $x = 5$- те $y = 10$; $x = -2$ және $x = 6$- да $y = 17$. **82.** 1) $y(-2) = -1,\ y(0) = -5,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 11,\ y(3) = 4$; 2) $x = \frac{1}{2}$ - де $y = -3$; $x = -1$- де $y = -2$; $x = \frac{3}{2}$ - те $y = 13$; $x = \frac{4}{3}$ - те $y = 19$. **84.** 2) $x \le 2,\ x \ge 5$; 4) $-2 \le x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3,\ y(-1) = 1,\ y(1) = -1,\ y(3) = 1$; 2) $x = 2$- де $y = -2$; $x = 0$ және $x = 4$- те $y = 0$; $x = -2$ және $x = 6$- да $y = 2$; $x = -4$ және $x = 8$- де $y = 4$. **86.** 2) $x \ne -1$; 5) $-1 \le x \le 1,\ x \ge 4$; 6) $-5 \le x \le 1,\ x > 2$. **87.** 2) Иә; 4 иә. **93.** 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2) тақ; 4) жұп та, тақ та емес. **99.** 2) тақ; 4) тақ. **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110**. 2) $x \le 3$; 4) $y < < 5$; 6) $x < -5,\ x > 5$. **111.** 2) Кубтың қыры 7 дм- ден артық. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **117.** $x = \frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1,\ x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **121.** 2) $x = 2{,}25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x = 4$. **124.** 2) $2 \le x \le 3$; 4) $1 < x \le 2$; 6) $x \ge 1$. **125.** 2) $x_1 = 2,\ x_2 = 0{,}5$; 4) x- тің мұндай мәні жоқ. **126.** 2) $x < -6,\ x > 6$. **127.** 2) $(5; 0),\ (-2; 0),\ (0; 10)$; 4) $(1; 0),\ \left(-\frac{11}{7}; 0\right),\ (0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 м және 150 м. **131.** 2) $p = 1,\ q = 0$. **132.** 1) $x_1 = 1,\ x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2,\ x > 4$; 4) $x < 3,\ x > 4$. **134.** 2) $x < -6,\ x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2},\ x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) Шешімдері жоқ; 4) шешімдері жоқ; 6) шешімдері жоқ. **137.** 2) $x < -1,\ 1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2},\ 4 < x \le 7$; 6) $x \ge 2,\ -\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2},\ x \ge -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5},\ \frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{5},\ \frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** 12 км/сағ- тан кем емес. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$. **143.** 2) $(-1; -1)$; $(1; 1)$. **144**. 2) $x > 2$; 4) $x \le -2$.

145. 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2) x – кез келген сан; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < -7$, $-3 \le x < -1$, $x \ge 3$. **148.** 2) кемиді; 4) кемиді. **149.** 2) тақ; 4) жұп та, тақ та емес. **150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1$, $x > 9$; 2) $-1 < x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154**. 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 және 13. **160.** 4 және 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 м, 200 м. **165.** 2) (4; 5) және (5; 4). **166.** 2) (1; –2) және (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) және (5; 2); 4) (1; 3) және (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) және (–20; –4); 4) (3; 6) және (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) және (9; 1). **176.** 2) жүйенің шешімі жоқ. **177.** 2) $-9 \le x \le 3$; 4) $-6 \le x \le 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ және $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \le -2$ және $1 \le x \le 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) және (4; 4); 2) (2; –2) және (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) және (6; –5); 4) (–1; 10) және (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) және (2; 3); 4) (2; 6) және (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) және (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) және (1; 5). **200.** 2) (–2; 1) және (2; 1); 4) (–1; 4) және (24; 0,6). **201.** 2) (4; $\sqrt{3}$) және (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) және (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ және $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Бойы 1,2 см және ені 0,8 см. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **214.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{\circ}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 м. **219.** 2 рад. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2. **221.** 2 рад. **222.** 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) екінші ширек; 4) төртінші ширек; 6) екінші ширек. **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, -1, -2, \ldots$. **227.** 2) екінші ширек; 4) төртінші ширек. **228.** 2) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 4) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 6) $x = \frac{5}{3}\pi$ $k = 2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1).

231. 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1; 6) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) -1; 4) -1; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) -1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$.

237. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **241.** 2) $x = 2\pi k - 1$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x = k\pi - 1$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3}+1$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **242.** 2) екінші ширек; 4) екінші ширек; 6) екінші ширек. **243**. 2) оң; 4) оң; 6) оң. **244.** 2) теріс; 4) теріс; 6) оң. **245.** 2) оң, оң; 4) теріс, теріс; 6) теріс, теріс; 8) оң, оң. **246.** 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{ctg}\alpha> 0$. **247.** 2) $\sin3 > 0$, $\cos3 < 0$, $\mathrm{tg}3 < 0$; 4) $\sin(-1{,}3) < 0$, $\cos(-1{,}3) > 0$, $\mathrm{tg}(-1{,}3) < 0$.

248. 2) теріс; 4) оң; 6) оң; 8) теріс. **249.** Егер $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ немесе $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болса, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ сандарының таңбалары сәйкес түседі; егер $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ немесе $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болса, $\sin\alpha$ және $\cos\alpha$ сандарының таңбалары қарама-қарсы. **250.** 2) теріс; 4) оң.

251. 2) $\cos1{,}3 > \cos2{,}3$. **252.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$

253. 2) екінші ширек. **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) орындалады; 4) орындалмайды. **257.** 2) орындалмайды. **258.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$.

260. $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$.

264. 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$;

4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$ **266.** 1) 0; 4) 1 + sinα. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$.

273. $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x=\pi k, k=0, \pm1, \pm2, ...$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$ **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) −3.

276. 2) 2cosα; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) −2cosα. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) −1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

283. 2) cos3β; 4) −1. **284.** −sinα − sinβ. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$.

287. 2) −sinα − cosβ; 4) sinα − cosβ. **288.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta)=\frac{36}{85}$.

289. 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) tgα − tgβ. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) −1.

295. 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) 2ctgα; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$.

302. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) cos6α; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0;

6) −1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$;

6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) −1. **312.** 2) cos2α. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2)

1; 4) $-\frac{1}{\cos–}$. **317.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

318. 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) sin2α. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320**. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2) 2sinα. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2)

$2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **328.** 2) үшінші ширек; 4) екінші ширек; 6)

екінші ширек. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; −1. **330.** 2) 2; 4) −1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$.

334. 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) sin2α; 4) tg2α. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

338. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) cos0 > sin5. **340.** 2) оң; 4) теріс. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin 2=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2\alpha=-\frac{1}{9}$. **344.** 2) tgα. **345.** 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) cos4α. **350**. 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) Болады; 4) болады. **354.** 2) $n=9$. **360.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) −42. **363.** 2) $a_n = 29-4n$; 4) $a_n = 6-5n$. **364.** 12. **365.** Иә, $n = 11$. **366.** $n = 11$, жоқ. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) −13. **369.** 2) −100. **370.** 2) $a_n = 5n-17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) −192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10}=15\frac{5}{6}$ $d=\frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78 тосын. **388.** 44. **389.** $a_1=5$, $d = 4$. **392.** 2) −3, 12, −48, 192, −768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7=3\sqrt{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$.. **400.** $b_5 = 6$, $b_1=30\frac{3}{8}$ немесе $b_5 = -6$, $\beta_1=-30\frac{3}{8}$.. **401.** 659100 сум. **402.** 0,25 см^2. **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) −400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q=7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = 4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$.. **412.** 2) $q= 5$, $b_3 = 300$ немесе $q = -6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ немесе $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ немесе $S_5= 521$. **415.** 2) иә; 4) иә. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$.. **417.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) жоқ; 4) иә. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6+4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** $2a$. **423.** $R_n=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot R_1$.. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d=-\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5=1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4=\sqrt{2}-9$, $a_5=\sqrt{2}-12$.

427. $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) −1080. **429.** 143. **430.** 2) −22. **431.** 2) $\overline{q} = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **432.** 2) $b_n = -0{,}5 \cdot (-2)^{n-1}$. **433.** 2) $b_n = \frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$. **437.** $24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. **441.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$; 4) $x_2 = -4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) −27; 4) $-\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) Жоқ; 4) иә. **450.** Сәрсенбі күні. **451.** $a_1 = 8$ $d = = -3$ немесе $a_1 = 2$, $d = 3$. **452.** $a_1 = 5$, $d = -5$ немесе $a_1 = -5$, $d = 5$. **453.** 180 рет. **453.** 2) мүмкін емес. **454.** 2) Кездейсоқ; 4) анық. **457.** 2) Бір уақытта емес. **462.** Мүмкіндік тең емес. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$; **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4%. **481.** 2) Мүмкін, 4 ұпай. **488.** 3 іріктеме. **489.** 2) 11; 4) 5 және 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 кг^2, 4) 6 м^2. **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 және 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15 < x < 2$; 4) $x \le 12$, $x \ge 12$. **517.** 2) $0 < x < \sqrt{5}$;; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > > \sqrt{3}$. **518.** 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0{,}1$; 6) $x \le \frac{1}{8}$, $x \ge 2$. **519.** 2) $x = -12$; 4) x – кез келген нақты сан; 6) шешімдері жоқ. **520.** 2) $-0{,}7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \le x \le 1$. **521.** 2) $x \le -2$, $x = 1$; 4) $x \le -\frac{1}{3}$, $0 \le x \le 2$. **522.** 2) $-0{,}5 \le x < 2$. **523.** Биіктігі 3,1 см- ден артық, орта сызығы 6,2 см- ден артық. **524.** 5 см артық. **525.** 2) $x < -7$, $-1 \le x \le 2$; 4) $-1 \le x < \frac{1}{3}$., $x > \frac{1}{3}$. **526**. $p = 5$, $q = -14$. **527.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **528.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **529.** $y = \frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$.

531. *Нұсқау*. 1) $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ түрінде белгілеп және $ABC = 1$ теңдікті ескеріп, берілген теңсіздікті $A^3 + B^3 + C^3 \geq 3ABC$ түрінде жазыңдар, оны $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geq 0$- ге түрлендіріңдер. $A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + AC + BC$ теңсіздігі $A^2 + B^2 \geq 2AB$, $A^2 + C^2 \geq 2AC$, $B^2 + C^2 \geq 2BC$ теңсіздіктерін қосу арқылы пайда болды; 2) арифметикалық орта және геометриялық орта шамаларға арналған теңсіздіктерді қосыңдар: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$; 3) теңсіздіктің сол жақ бөлігінен оң бөлігінің айырмасын және пайда болған бөлшектің алымын мына түрде жазыңдар: $(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (a + c)(a - c)^2$; 1) $x_{1,2} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$; 3) $x_{3,4} = \pm 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 4) $x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 6) $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) Жоқ. **541.** 2) Жоқ. **544.** –1. **545.** 2) Теріс. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha = \frac{240}{289}$, $\cos\alpha = -\frac{161}{289}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12} = 47,5$, $S_{12} = 537$; 4) $a_{18} = 11\frac{2}{3}$, $S_{18} = 108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1 = 5$. **553.** 2) $b_4 = 125$, $S_4 = 156$; 4) $b_4 = 81$, $S_5 = 61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1 + \sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0,1(5 - \sqrt{5})5 + \sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **560.** 2) $x = 61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x = \frac{\ }{2} + \pi n$, $x = n + 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1 = 5$, $b_5 = 405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 немесе 20, 13, 6. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos\alpha = -\frac{119}{169}$.

„Өзіңді тексеріп көр“ тапсырмаларының жауаптары

I тарау.

1. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **2.** $-1 < x < 1$ болғанда $y > 0$; $x < -1$ болғанда $y < 0$; $x > 1$. **3.** 1) $x > 0$ болса функция өседі; $x < 0$ болса функция кемиді. **4**. 1) $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 0$. **5.** 1) $x \neq 1$; 2) $-3 \leq x \leq 3$. **6.** 1) $x = 28$; 2) $x = 1$.

III тарау.

1. 1) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$.

2. 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) sinαcosβ; 2) $\cos^2\alpha$; 3) 2sinα.

IV тарау. **1.** 1) $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **2.** 1) $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q=\frac{1}{3}$, $S=1{,}5$.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептерінің жауаптары

І тарау. **1.** Жылдамдық 60,01 км/сағ- тан артпауы керек. **2.** $n\leq 30$. **3.** 2 млн. 10 м. **4.** 125. **5.** 1) 135; 2) 17739; 3) ≈ 4,9 айда.

ІІ тарау. **1.** 2) 20 қатар. **2.** Бірінші бригадада 8, екіншісінде 12 жұмысшы. **3.** 2) 16%. **4.** 2) 4 л және 12 л. **5.** Желсіз ашық ауа райында.

ІІІ тарау. **1.** 4) ≈335,42 км; 5) ≈2243,3 км. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 м. **4.** ≈12,8 м.

IV тарау. **1.** 420. **2.** 10 км. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 сум. **5.** 27 метр.

V тарау. **1.** $E(X)=26$, $D(X)=0{,}9964$. 2. $E(X)\approx 8{,}94$, $E(Y)\approx 8{,}93$, $D(X)\approx 0{,}07$, $D(Y)\approx 0{,}03$, $G(X)\approx 0{,}071$, $\sigma(Y)\approx 0{,}76$. 3. $E(X_1)=E(X_2)=3{,}36$, $\sigma(X_1)\approx 1{,}47$, $\sigma(X_2)\approx 1{,}41$. 4. $E(d_1)=60$, $D(d_1)=1{,}2$, $E(d_2)=60{,}02$, $D(d_2)=0{,}76$.

МАЗМҰНЫ

IV тарау. САНДАР ТІЗБЕГІ. ПРОГРЕССИЯЛАР

V тарау. ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Алимов Ш.А.

А 39 Алгебра: жалпы білім беретін мектептердің 9-сыныбына арналған оқулық /Ш.А.Алимов, А.Р.Халмухамедов, М.А.Мирзахмедов. – 4-басылымы. – Ташкент: „O‘qituvchi“ БПШҮ, 2019. – 240 б.

ISBN 978-9943-5750-5-9

УЎК: 512(075.3)=512.122
КБК 22.14я72

Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov, Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Qozoq tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
9-sinfi uchun darslik
Qayta ishlangan 4-nashri

„O‘qituvchi“ nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket „Davr nashriyoti“ MCHJ da tayyorlandi.

Тәржіман *Қатира Нұрбаева*
Редактор *Т. Ахметов*
Көркемдеуші дизайнер *Р. Запаров*
Корректор *Т. Ахметов*
Компьютерде беттеген *Х. Сапаралиев,*
Мәтінді терген *С. Ниязова*

Баспа лицензиясы AI № 012. 20.07.2018. Оригинал-макеттен басуға рұқсат берілді 25.07.2019.
Пішімі $70\times90^{1}/_{16}$. Таймс гарнитурасы. Офсеттік әдіспен басылды. Шартты б.т. 17,55.
Нақты б.т. 16,6. Таралымы 615 Тапсырыс № 19-193.

Өзбекстан Республикасы Президенті Әкімшілігі құзырындағы Ақпарат және бұқаралық коммуникациялар агенттігінің „O‘qituvchi“ баспа-полиграфия шығармашылық үйі.
Ташкент – 206, Юнусабад ауданы, Янгишахар көшесі, 1-үй.
Келісімшарт № 75-19.

Өзбекстан Республикасы Президенті Администрациясы қасындағы Ақпарат және бұқаралық коммуникациялар агенттігінің «O‘zbekiston»
баспа-полиграфия шығармашылық үйі баспаханасында басылды.
100011, Ташкент қаласы, Ә.Науаи көшесі, 30.

Жалға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

Р/с	Оқушының аты, фамилиясы	Оқу жылы	Оқулықты алғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы	Оқулықты тапсыр-ғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Оқулық жалға беріліп, оқу жылының соңында қайтып алғанда жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалау өлшемдеріне орай толтырады:

Жаңа	Оқулықтың бірінші рет пайдалануға берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқабасы бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажырамаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, көшпеген, беттерінде жазу-сызу жоқ.
Қанағаттанарлы	Мұқабасы езілген, біршама сызылып, шеттері мұжілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыраған, қолданушы қанағаттанарлық жағдайға келтірген. Жыртылған парақтары қалпына келтірілген, кейбір беттері сызылған.
Қанағаттанарсыз	Мұқабасы сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе бүтіндей жоқ, қанағаттанарсыз жөнделген. Беттері жыртылған, парақтары толық емес, сызылып боялған. Оқулықты қалпына келтіруге болмайды.