**SH.A. ALIMOV, Ó.R. XOLMUHAMEDOV,
M.A. MIRZAAHMEDOV**

ALGEBRA

ULÍWMA BILIM BERIW MEKTEPLERINIŃ
9-KLASÍ USHÍN SABAQLÍQ

Ózbekshe 4-basılımına sáykes qaraqalpaqsha basılım

*Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tárepinen
basıwǵa usınıs etilgen*

"O'QITUVCHI" BASPA-POLIGRAFIYALÍQ DÓRETIWSHILIK ÚYI
TASHKENT – 2019

UO‘K: 512(075.3)=512.121
KBK 22.14ya72
A 51

Pikir bildiriwshiler:

F.S. Raximova – Al-Xorezmiy atındaǵı TATU matematika páni oqıtıwshısı;
Ǵ.A. Fazilova – Tashkent qalası, Yunusobod rayonındaǵı 274-sanlı mekteptiń matematika páni muǵallimi;
D.Sh. Abrayev – Tashkent qalası, Olmazor rayonındaǵı 326-sanlı mekteptiń matematika páni muǵallimi.

Kitaptaǵı shártli belgiler:

– biliw áhmiyetli hám eslep qalıw paydalı (yadlaw shárt emes) tekst;

– máseleni sheshiw baslandı;

– máseleni sheshiw tamamlandı;

– matematikalıq tastıyıqlawdı tiykarlaw yaki formulanı keltirip shıǵarıw baslandı;

– tiykarlaw yaki formulanı keltirip shıǵarıw tamamlandı;

– sheshiliwi májbúriy bolǵan máselelerdi ajıratıp turıwshı belgi;

33, 34... – quramalıraq másele;

– tiykarǵı materialdı ajıratıw;

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIŃ – tiykarǵı material boyınsha bilimdi tekseriw ushın óz betinshe jumıs;

– Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler;

– tarixiy máseleler;

– tariyxıy maǵlıwmatlar.

Respublika maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan ijara ushın basıp shıǵarıldı.

ISBN 978-9943-5750-7-3

8-KLASTA ÚYRENILGEN TEMALARDÍ TÁKIRARLAW

Áziz oqıwshı! Sizge 8-klasta "Algebra"dan alǵan bilimlerińizdi eske túsiriw maqsetinde bir neshe shınıǵıwlar usınıs etemiz.

1. 1) $y=2x+3$; 2) $y=-3x+4$; 3) $y=4x-1$; 4) $y=-2x-5$ funkciyalarınıń grafigin sızıń. Grafik qaysı shereklerde jatadı? Grafiktiń Ox hám Oy kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların aytıń.

2. $y=kx+b$ funkciya grafigi $A(0; -7)$, $B(2; 3)$ noqatlarınan ótedi. k hám b nı tabıń.

3. Tuwrı sızıq $A(0; 5)$, $B(1; 2)$ noqatlarınan ótedi. Tuwrı sızıqtıń teńlemesin jazıń.

4. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. 3 at hám 4 sıyırǵa bir kúnde 27 kg jem beriledi. Bir kúnde 9 atqa berilgen jem 5 súyırǵa berilgen jemnen 30 kg kóp. Bir atqa hám bir sıyırǵa 1 kúnde qansha jem beriledi?

6. Kitap hám dápter birgelikte 5 800 swm turadı. Kitap bahasınıń 10% i dápter bahasınıń 35% inen 220 swmǵa qımbat. Kitap hám dápterdiń hár qaysısı neshe swm turadı?

7. Teńsizlikti sheshiń:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\le 3$; 3) $|3x-4|\ge 2$.

8. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$ teńsizliktiń eń kishi pútin sheshimin tabıń.

10. Esaplań:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Ápiwayılastırıń:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Teńlemeni sheshiń (**12–14**):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. 240 km aralıqtı bir avtomobil ekinshisine qaraǵanda 1 saat tezirek basıp ótedi. Eger birinshi avtomobildiń tezligi ekinshisinen 20 km/saat artıq bolsa, hárbir avtomobildiń tezligin tabıń.

16. 1) Eki sannıń ayırması 2,5 ke, kvadratlardıń ayırması bolsa 10 ǵa teń. Bul sanlardı tabıń.

2) Qosındısı 1,4 ke, kvadratlarınıń qosındısı 1 ge teń bolǵan eki sandı tabıń.

17. $x^2-8x+3=0$ teńlemeniń korenleri x_1 hám x_2 bolsa, 1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$ 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$ ni tabıń.

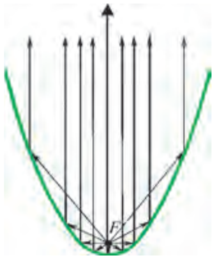
18. Sandı júzden birge shekem dóńgelekleń. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń.

1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Sandı standart túrinde jazıń:

1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

I BAP. KVADRAT FUNKCIYA. KVADRAT TEŃSIZLIKLER



1-§. KVADRAT FUNKCIYANÍŃ ANÍQLAMASÍ

Siz VIII klasta $y = kx + b$ sızıqlı funkciya hám onıń grafigi menen tanısqansız.

Ilim hám texnikanıń túrli tarawlarında *kvadrat funkciyalar* dep atalatuǵın funkciyalar ushıraydı. Mısallar keltiremiz.

1) Tárepi x bolǵan kvadrattıń maydanı $y = x^2$ formulası boyınsha esaplanadı.

2) Eger dene joqarıǵa v tezlik penen atılǵan bolsa, onda t waqıtta onnan Jer betine shekemgi aralıq $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$ formulası menen anıqlanadı, bunda s_0 – waqıttıń t = 0 baslanǵısh waqtındaǵı deneden Jer betine shekemgi bolǵan aralıq.

Bul mısallarda $y = ax^2 + bx + c$ túrindegi funkciyalar qaraladı. Birinshi mısalda $a=1$, $b=c=0$, ózgeriwshileri x hám y ler boladı. Ekinshi mısalda $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$, ózgeriwshileri t hám s háripleri menen belgilengen.

Anıqlama. ***$y = ax^2 + bx + c$ funkciyası kvadrat funkciya dep ataladı, bunda a, b hám c – berilgen haqıyqıy sanlar, $a \neq 0$, x – haqıyqıy ózgeriwshi.***

Mısalı, tómendegi funkciyalar kvadrat funkciyalar boladı:

$y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = x^2 - x$,

$y = x^2 - 5x + 6$, $y = -3x^2 + \frac{1}{2}x$.

1- másele. $x=-2$, $x=0$, $x=3$ bolǵanda

$$y(x)=x^2-5x+6$$

funkciyasınıń mánisin tabıń:

△ $y(-2)=(-2)^2-5\cdot(-2)+6=20;$

$y(0)=0^2-5\cdot 0+6=6;$

$y(3)=3^2-5\cdot 3+6=0.$ ▲

2- másele. x tiń qanday mánislerinde $y=x^2+4x-5$ kvadrat funkciyası: 1) 7 ge; 2) –9 ǵa; 3) –8 ge; 4) 0 ge teń bolǵan mánisti qabıl etedi?

△ 1) Shárt boyınsha $x^2+4x-5=7$. Bul teńlemeni sheship, tómendegige iye bolamız:

$$x^2+4x-12=0,$$

$$x_{1,2}=2-\sqrt{4+12}=-2-4,\ x_1=2,\ x_2=-6.$$

Demek, $y(2)=7$ hám $y(-6)=7$.

2) Shárt boyınsha $x^2+4x-5=-9$, bunnan

$$x^2+4x+4=0,\quad (x+2)^2=0,\quad x=-2.$$

3) Shárt boyınsha $x^2+4x-5=-8$, bunnan $x^2+4x+3=0$. Bul teńlemeni sheship, $x_1=-3$, $x_2=-1$ ekenin tabamız.

4) Shárt boyınsha $x^2+4x-5=0$, bunnan $x_1=1$, $x_2=-5$. ▲

Sońǵı jaǵdayda x tiń $y=x^2+4x-5$ funkciyası 0 ge teń, yaǵnıy $y(1)=0$ hám $y(-5)=0$ bolǵan mánisleri tabıldı. x tıń bunday mánisleri *kvadrat funkciyanıń nolleri* dep ataladı.

3- másele. $y=x^2-3x$ funkciyasınıń nollerin tabıń.

△ $x^2-3x=0$ teńlemeni sheship, $x_1=0$, $x_2=3$ ekenligin tabamız. ▲

Shınıǵıwlar

1. (Awızeki.) Tómendegi berilgen funkciyalardıń qaysıları kvadrat funkciya boladı:

1) $y=2x^2+x+3;$ 2) $y=3x^2-1;$ 3) $y=5x+1;$
4) $y=x^3+7x-1;$ 5) $y=4x^2;$ 6) $y=-3x^2+2x$?

2. x tiń sonday haqıyqıy mánislerin tabıń, $y=x^2-x-3$ kvadrat funkciyası: 1) –1 ge; 2) –3 ke; 3) $-\frac{13}{4}$ ga; 4) –5 ke teń bolǵan mánisti qabıl etsin.

3. x tiń qanday haqıyqıy mánislerinde $y = -4x^2 + 3x - 1$ kvadrat funkciya: 1) -2; 2) -8; 3) $-0{,}5$; 4) -1 ge teń mánisti qabıl etedi?

4. -2; 0; 1; $\sqrt{3}$ sanlarınan qaysıları tómendegi kvadrat funkciyanıń nolleri boladı:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Kvadrat funkciyanıń nollerin tabıń:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Eger $y = x^2 + px + q$ kvadrat funkciyanıń x_1 hám x_2 nolleri belgili bolsa, p hám q kooefficientlerin tabıń:

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

7. x tiń $y = x^2 + 2x - 3$ hám $y = 2x + 1$ funkciyalar teń mánislerin qabıl etetuǵın mánislerdi tabıń.

2-§. $y = x^2$ FUNKCIYA

$y = x^2$ funkciyasın, yaǵnıy $a = 1$, $b = c = 0$ bolǵandaǵı $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciyasın qaraymız. Bul funkciyasınıń grafigin jasaw ushın onıń mánisleriniń kestesin dúzemiz:

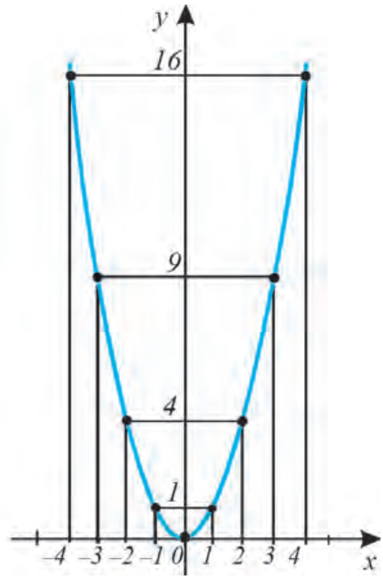
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Kestede kórsetilgen noqatlardı jasap hám olardı bir tegis iymek sızıq penen tutastırıp, $y = x^2$ funkciyasınıń grafigin payda etemiz (1-súwret).

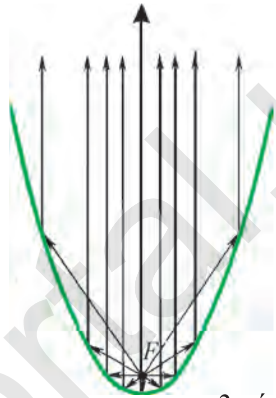
$y = x^2$ funkciyasınıń grafigi bolǵan iymek sızıq parabola dep ataladı.

$y = x^2$ *funkciyasınıń qásiyetlerin* qaraymız.

1) $y = x^2$ funkciyasınıń mánisi $x \neq 0$ bolǵanda oń hám $x = 0$ bolǵanda nolge teń. Demek, $y = x^2$ parabola koordinalar basınan ótedi, parabolanıń



1-súwret.



2-súwret.

qalǵan noqatları bolsa, abcissalar kósherinen joqarıda jatadı. $y = x^2$ *parabola abcissalar kósherine* (0; 0) *noqatında urınadı*, delinedi.

2) $y = x^2$ funkciyanıń grafigi *ordinatalar kósherine salıstırmalı simmetriyalı*, sebebi $(-x)^2 = x^2$. Mısalı, $y(-3) = y(3) = 9$ (1-súwret). Solay etip, ordinatalar kósheri *parabolanıń simmetriya kósheri* boladı. Parabolanıń óz simmetriya kósheri menen kesilisiw noqatı *parabolanıń tóbesi* delinedi. $y = x^2$ parabolası ushın kóoordinatalar bası onıń tóbesi boladı.

3) $x \geq 0$ bolǵanda x tiń úlken mánisine y tiń úlken mánisi sáykes keledi. Mısalı, $y(3) > y(2)$. $y = x^2$ funkciyası $x \geq 0$ *aralı*ǵında ósiwshi delinedi (1-súwret).

$x \leq 0$ bolǵanda x tiń úlken mánisine y tiń kishi mánisi sáykes keledi. Mısalı, $y(-2) < y(-4)$. $y = x^2$ funkciyası $x \leq 0$ *aralı*ǵında kemeyiwshi delinedi (1-súwret).

Másele. $y = x^2$ parabolası menen $y = x + 6$ túwrı sızıǵınıń kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń.

△ Kesilisiw noqatları
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$$
sistemasınıń sheshimleri boladı.

Bul sistemadan $x^2 = x + 6$, yaǵnıy $x^2 - x - 6 = 0$ di payda etemiz, bunnan $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. x_1 hám x_2 niń mánislerin sistemanıń teńlemeleriniń birine qoyıp, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$ ti tabamız.

Juwabı: (3; 9), (–2; 4). ▲

Parabola texnikada keń kólemde paydalanatuǵın kóplegen qásiyetlerǵe iye. Mısalı, parabolanıń simmetriya kósherinde *parabolanıń fokusı* dep atalatuǵın F noqatı bar (2-súwret). Eger bul noqatta jaqtılıq deregi jaylasqan bolsa, onda paraboladan sáwlelengen barlıq jaqtılıq nurları parallel boladı. Bul qásiyetten projektor, lokator hám basqa ásbaplar tayarlawda paydalanıladı.

$y = x^2$ parabolasınıń fokusı $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ noqatı boladı.

Shınıǵıwlar

8. $y = x^2$ funkciyasınıń grafigin millimetrli qaǵazda jasań. Grafik boyınsha:
1) $x = 0{,}8$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}9$; $x = -2{,}3$; $x = -1{,}5$ bolǵanda y tiń mánisin juwıq tabıń;
2) eger $y = 2$; $y = 3$; $y = 4{,}5$; $y = 6{,}5$ bolsa, x tiń mánisin juwıq tabıń.

9. $y = x^2$ funkciyasınıń grafigin jasamastan: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$ noqatlarınan qaysıları parabolaǵa tiyisli ekenligin anıqlań.

10. (Awızeki.) Ordinata kósherine salıstırǵanda $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ noqatlarına simmetriyalı bolǵan noqatlardı tabıń. Bul noqatlar $y = x^2$ funkciyasınıń grafigine tiyisli bolama?

11. (Awızeki.) $y=x^2$ funkciyasınıń mánislerin,

1) $x = 2{,}5$ va $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ va $x = 0{,}3$;

3) $x = -0{,}2$ va $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ va $x = -5{,}2$

bolǵanda salıstırıń.

12. $y = x^2$ parabolanıń:

1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;
4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$

tuwrı sızıq penen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń.

13. A noqatı $y = x^2$ parabola menen

1) $y = -x - 6$, $A(-3;\ 9)$; 2) $y = 5x - 6$, $A(2;\ 4)$

tuwrı sızıqtıń kesilisiw noqatı bolama?

14. Tastıyıqlaw durıs pa: $y = x^2$ funkciyası:

1) $[1;\ 4]$ kesindisinde; 2) $(2;\ 5)$ intervalda;

3) $x > 3$ intervalda; 4) $[-3;\ 4]$ kesindisinde ósedi.

15. Bir koordinata tegisliginde $y = x^2$ parabola menen $y = 3$ tuwrı sızıq sızıń. x tiń qanday mánislerinde parabolanıń noqatları tuwrı sızıqtan joqarıda boladı; tómende boladı?

16. x tiń qanday mánislerinde $y = x^2$ funkciyasınıń mánisi:

1) 9 dan úlken; 2) 25 ten úlken emes; 3) 16 dan kishi emes; 4) 36 dan kishi boladı?

3- §. $y = ax^2$ FUNKCIYA

1-másele. $y = 2x^2$ funkciyasınıń grafigin sızıń.

△ $y = 2x^2$ funkciyasınıń mánisleriniń kestesin dúzemiz:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

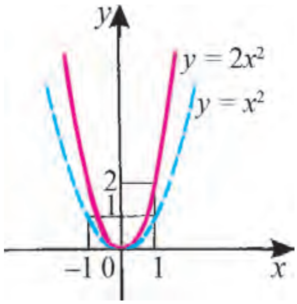
Tabılǵan toqatlardı jasaymız hám olar arqalı bir tegis iymek sızıq júrgizemiz (3-súwret). ▲

$y=2x^2$ hám $y=x^2$ funkciyalarınıń grafiklerin salıstıramız (3-súwret). x tiń anıq bir mánisinde $y = 2x^2$ funkciyasınıń mánisi $y = x^2$ funkciyasınıń mánisinen 2 márte artıq. Bul $y = 2x^2$ funkciyası grafiginiń abcissalı noqatınıń ordinatasın 2 márte arttırıw menen payda etiw múmkin ekenligin bildiredi.

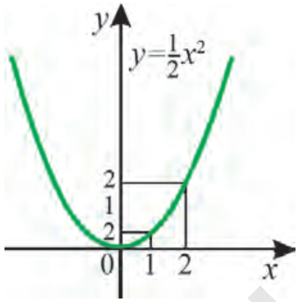
$y=2x^2$ funkciyasınıń grafigi *$y=x^2$ funkciyasınıń grafigin Ox* kósherinen *Oy* kósheri boyınsha 2 márte sozıw menen payda boladı, delinedi.

2-másele. $y = \frac{1}{2}x^2$ funkciyasınıń grafigin jasań.

△ $y = \frac{1}{2}x^2$ funkciyasınıń mánisleriniń kestesin dúzemiz:



3- súwret.



4- súwret.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Tabılǵan noqatlardı jasap, olar arqalı bir tegis iymek sızıq júrgizemiz (4-súwret).▲

$y=\frac{1}{2}x^2$ hám $y = x^2$ funkciyalarınıń grafiklerin salıstıramız.

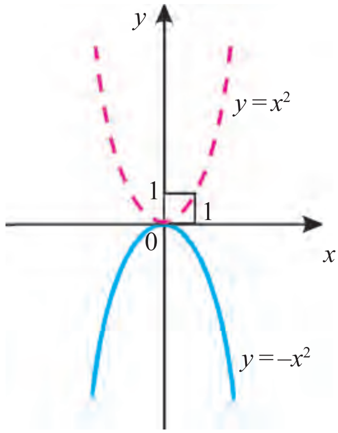
$y=\frac{1}{2}x^2$ funkciyası grafiginiń hárbir noqatın $y = x^2$ funkciyası grafiginiń dál sonday abcissalı noqatınıń ordinatasın 2 márte kemeytiw arqalı payda etiw múmkin.

$y=\frac{1}{2}x^2$ funkciyasınıń grafigi $y=x^2$ *funkciyasınıń grafigin Ox* kósherin *Oy* kósheri boyınsha 2 márte *qısıw* jolı menen payda etiledi, delinedi.

3-másele. $y = -x^2$ funkciyasınıń grafigin jasań.

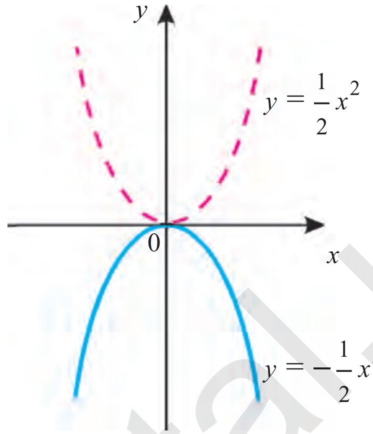
△ $y=-x^2$ hám $y=x^2$ funkciyaların salıstıramız. x tiń sonday bir mánisinde bul funkciyalardıń mánisleriniń modulleri boyınsha teń hám qarama-qarsı belgige iye. Demek, $y=-x^2$ funkciyasınıń grafigin $y=x^2$ funkciyası grafigi *Ox* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı kórinisinde payda etiw múmkin (5-súwret). ▲

Usıǵan uqsas, $y=-\frac{1}{2}x^2$ funkciyasınıń grafigi *Ox* kósherine salıstırǵanda $y=\frac{1}{2}x^2$ funkciyası grafigine simmetriyalı (6-súwret).



5-súwret.

0



6-súwret.

$y = ax^2$ funkciyasınıń grafigi qálegen $a \neq 0$ de de *parabola* dep ataladı. $a>0$ de parabolanıń shaqaları *joqarıǵa*, al $a<0$ de bolsa tómenge baǵdarlanǵan boladı.

$y = ax^2$ parabolanıń fokusı $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ noqatında jaylasqanın ańlaymız.

$y = ax^2$ *funkciyasınıń tiykarǵı qásiyetlerin* atap ótemiz, bunda $a \neq 0$:

1) eger $a > 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funkciyası $x \neq 0$ bolǵanda oń mánislerdi qabıl etedi;

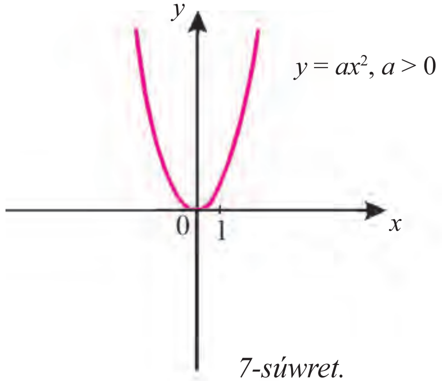
eger $a < 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funkciyası $x \neq 0$ bolǵanda teris mánislerdi qabıl etedi;

$y = ax^2$ funkciyasınıń mánisi tek $x = 0$ bolǵanda ǵana nolge teń boladı.

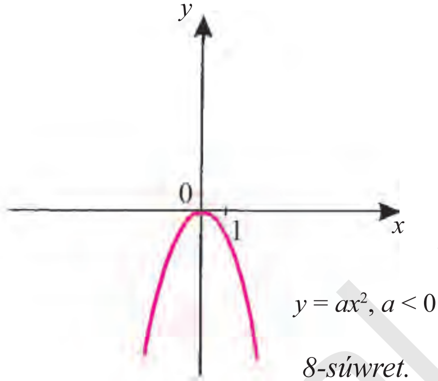
2) $y = ax^2$ parabolası ordinatalar kósherine salıstırǵanda simmetriyalı boladı.

3) eger a>0 bolsa, onda $y = ax^2$ funkciyası $x \geq 0$ bolǵanda ósiwshi hám $x \leq 0$ bolǵanda kemeyiwshi;

eger a<0 bolsa, onda $y = ax^2$ funkciyası $x \geq 0$ bolǵanda kemeyiwshi hám $x \leq 0$ bolǵanda ósiwshi.



7-súwret.



8-súwret.

Bul barlıq qásiyetler grafikten anıq kórinip tur (7-, 8-súwretler).

Shınıǵıwlar

17. Millemetrli qaǵazda $y = 3x^2$ funkciyasınıń grafigin jasań. Grafik boyınsha:

1) $x = -2{,}8;\ -1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$ bolsa, x tiń mánisin esaplań;

2) eger $y = 9;\ 6;\ 2;\ 8;\ 1{,}3$ bolsa, x tiń mánisin juwıq tabıń.

18. (Awızeki.) Parabola shaqalarınıń baǵdarın anıqlań:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Tómendegi funkciyalardıń grafiklarin bir koordinata tegisliginde jasań:

1) $y = x^2$ hám $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ hám $y = -3x^2$;

3) $y = 3x^2$ hám $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ hám $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Grafiklerden paydalanıp, bul funkciyalardıń qaysıları $x \geq 0$ aralıǵında ósiwshi ekenligin anıqlań.

---

20. Tómendegi funkciyalardıń grafikleriniń kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń:

1) $y = 2x^2$ hám $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ hám $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Funkciya $x \le 0$ aralıǵında kemeyiwshi funkciya bola ma:

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. $y = -2x^2$ funkciyası:

1) $[-4; -2]$ kesindisinde; 3) $(3; 5)$ intervalında;
2) $[-5; 0]$ kesindisinde; 4) $(-3; 2)$ iintervalında;
ósiwshi yaki kemeyiwshi bolıwın anıqlań

23. Deneniń turaqlı tezleniwshi qozǵalısta basıp ótken jolı $s = \frac{at^2}{2}$ formula menen esaplanadı, bunda s – jol, metrde; a – tezleniw, m/s^2 ta; t – waqıt sekundlarda ólshenedi. Eger dene 8 s ta 96 m joldı basıp ótken bolsa, a tezleniwin taıń.

4-§. $y = ax^2 + bx + c$ FUNKCIYASÍ

1-másele. $y=x^2 - 2x + 3$ funkciyasınıń grafigin jasań hám onıń $y=x^2$ funkciyası grafigi menen salıstırıń.

△ $y = x^2 - 2x + 3$ funkciyasınıń mánisleriniń kestesin dúzemiz:

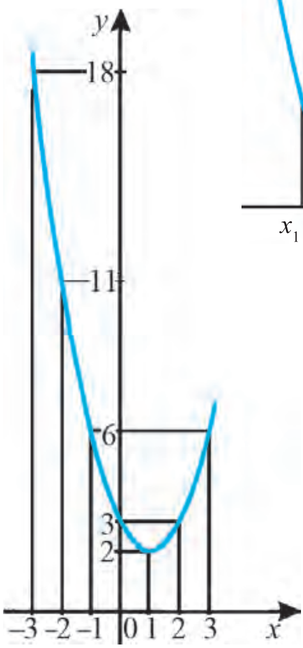
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Tabılǵan noqatlardı jasaymız hám olar arqalı bir tegis iymek sızıq júrgizemiz (9-súwret).

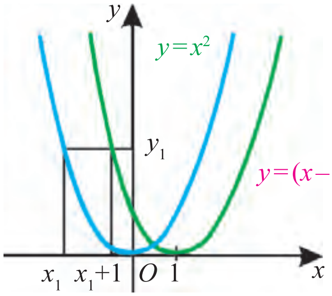
Grafiklerdi salıstırıw ushın tolıq kvadrattı jiklew usıllarınan paydalanıp, $y = x^2 - 2x +3$ formulasın túrlendiremiz:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

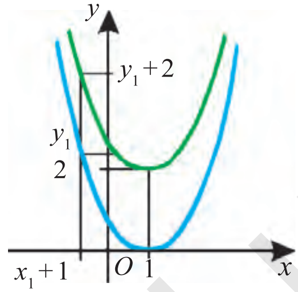
Dáslep $y = x^2$ hám $y = (x - 1)^2$ funkciyasınıń grafiklerin salıstıramız. Eger $(x_1; y_1)$ noqatı $y=x^2$ parabolasınıń noqatı, yaǵnıy $y_1 = x_1^2$ bolsa, onda $(x_1 + 1; y_1)$ noqatı $y = (x—1)^2$ funkciyasınıń grafigine tiyisli, sebebi, $((x_1+1)-1)^2 = x_1^2 = y_1$. Demek, $y=(x-1)^2$ funkciyasınıń grafigi $y = x^2$ paraboladan onı bir birlik ońǵa *kóshiriw* (parallel kóshiriw) arqalı payda etilgen parabola (10-súwret).



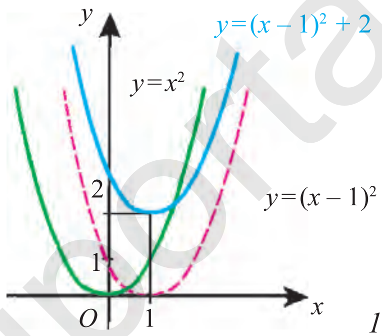
9-súwret.



10-súwret.



11-súwret.



12-súwret.

Endi $y = (x - 1)^2$ hám $y = (x - 1)^2 + 2$ funkciyasınıń grafiklerin salıstıramız. x tiń hárbir mánisinde $y = (x - 1)^2 + 2$ funkciyasınıń mánisi $y = (x - 1)^2$ funkciyasınıń mánisinen 2 ge artıq. Demek, $y = (x - 1)^2 + 2$ funkciyasınıń grafigi $y = (x - 1)^2$ parabolanı eki birlik joqarıǵa kóshiriw arqalı payda etilgen parabola boladı (11-súwret).

Solay etip, $y = x^2 - 2x + 3$ funkciyasınıń grafigi $y = x^2$ parabolanı bir birlik ońǵa hám eki birlik joqarıǵa kóshiriw arqalı payda etilgen parabola (12-súwret). $y = x^2 - 2x + 3$ parabolanıń simmetriya kósheri ordinatalar kósherine parallel hám parabolanıń tóbesi bolǵan (1; 2) noqatınan ótiwshi tuwrı sızıq boladı. ▲

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ *funkciyasınıń grafigi* $y = ax^2$ *parabolanı:*

eger $x_0 > 0$ bolsa, abcissalar kósheri boyınsha ońǵa qaray x_0 ge, eger $x_0 < 0$ bolsa, shepke $|x_0|$ǵa kóshiriw;

eger $y_0 > 0$ bolsa, ordinatalar kósheri boyınsha joqarıǵa y_0 ǵa, eger $y_0 < 0$ bolsa, tómenge $|y_0|$ǵa kóshiriw jolı menen payda etiletuǵın parabola bolıwı usıǵan uqsas dálillenedi.

Qálegen $y=ax^2+bx+c$ *kvadrat funkciyanı* onnan tolıq kvadrattı jiklew formulası járdeminde

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

yaǵnıy, $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ *túrinde jazıw múmkin*, bunda

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Solay etip, $y = ax^2 + bx + c$ funkciyasınıń grafigi $y=ax^2$ parabolanı koordinatalar kósherleri boylap kóshiriw nátiyjesinde payda bolatuǵın parabola boladı. $y = ax^2 + bx + c$ teńligi parabolanıń teńlemesi delinedi. $y=ax^2+bx+c$ parabola tóbesiniń $(x_0;y_0)$ koordinataların tómendegi formula boyınsha tabıw múmkin:

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c.$$

$y=ax^2+bx+c$ parabolasınıń simmetriya kósheri ordinatalar kósherine parallel hám parabolanıń tóbesinen ótiwshi tuwrı sızıq boladı.

$y=ax^2+bx+c$ parabolanıń shaqaları, eger $a>0$ bolsa, joqarıǵa baǵdarlanǵan, eger $a<0$ bolsa, tómenge baǵdarlanǵan boladı.

2-másele. $y=2x^2-x-3$ parabola tóbesiniń koordinataların tabıń.

△ Parabola tóbesiniń abcissası:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}.$$

Parabola tóbesiniń ordinatası:

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-3=-3\frac{1}{8}.$$

Juwabı: $\left(\frac{1}{4};\ -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

3-másele. Eger parabolanıń (–2; 5) noqatı arqalı ótetuǵın hám tóbesi (–1; 2) noqatında bolatuǵını belgili bolsa, parabolanıń teńlemesin jazıń.

△ Parabolanıń tóbesi (–1; 2) noqatında bolǵanı ushın parabolanıń teńlemesin tómendegishe jazıw múmkin.

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Shárt boyınsha (–2; 5) noqatı parabolaǵa tiyisli, demek,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

bunnan $a = 3$.

Solay etip, parabola

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{yamasa} \quad y = 3x^2 + 6x + 5$$

teńlemesi menen beriledi. ▲

Shınıǵıwlar

Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń (**24–26**):

24. (Awızeki.)
1) $y = (x - 3)^2 - 2$;
2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$;
4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$;
2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;
4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = -x^2 - 5$;
3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$;
5) $y = -3x^2 + x$;
6) $y = 2x^2 - x$.

27. *Ox* kósherinen sonday noqattı tabıń, onnan parabolanıń simmetriya kósheri ótetuǵın bolsın:
1) $y = x^2 + 3$;
2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$;
4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$;
6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. $y=x^2-10x$ parabolanıń simmetriya kósheri: 1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1) noqatınan óte me?

29. Parabolanıń koordinatalar kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń:
1) $y = x^2 - 3x + 2$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;
4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Eger parabolanıń (-1; 6) noqatı arqalı ótetuǵınlıǵı hám onıń tóbesi (1; 2) noqatı ekenligi belgili bolsa, parabolanıń teńlemesin jazıń.

31. (Awızeki.) (1; –6) noqatı $y=-3x^2+4x-7$ parabolaǵa tiyisli bola ma? (–1; 8) noqatı she?

32. Eger (–1; 2) noqatı: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$ parabolasına tiyisli bolsa, k niń mánisin tabıń.

33. $y=x^2$ parabola ólshemi járdeminde funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;

4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

34. $y=2x^2$ parabolasınıń onı:

1) *Ox* kósheri boyınsha 3 birlik oń tárepke kóshiriw;

2) *Oy* kósheri boyınsha 4 birlik joqarıǵa kóshiriw;

3) *Ox* kósheri boyınsha 2 birlik shep tárepke hám keyin *Oy* kósheri boyınsha bir birlik tómenge kóshiriw;

4) *Ox* kósheri boyınsha 1,5 birlik oń tárepke hám keyin *Oy* kósheri boyınsha 3,5 birlik joqarıǵa kóshiriw nátiyjesinde payda bolǵan parabolanıń teńlemesin jazıń.

5-§. KVADRAT FUNKCIYANÍŃ GRAFIGIN JASAW

1-masala. $y=x^2-4x+3$ funkciyasınıń grafigin jasań.

△ 1. Parabola tóbesiniń koordinataların esaplaymız:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$

$$y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

(2; –1) noqatın jasaymız.

2. (2; –1) noqatları arqalı ordinatalar kósherine parallel tuwrı sızıq, yaǵnıy parabolanıń simmetriya kósherin júrgizemiz (13-a, súwret).

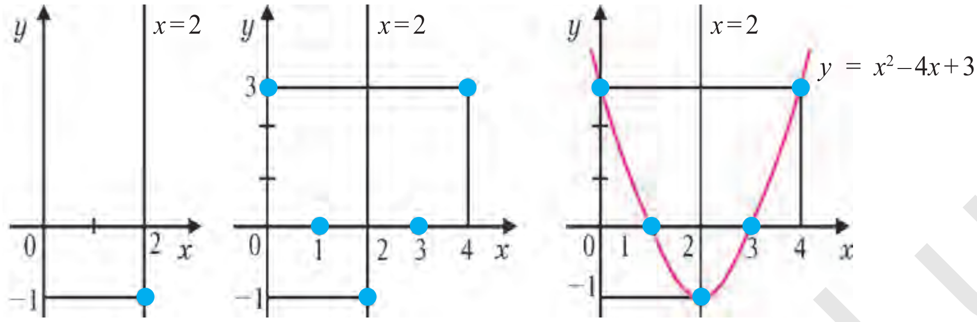
3. Mına,

$$x^2-4x+3=0$$

teńlemesin sheship, funkciyanıń nollerin tabamız: $x_1=1$, $x_2=3$. (1; 0) hám (3; 0) noqatların jasaymız (13-b, súwret).

4. *Ox* kósherinde $x=2$ noqatına salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan eki noqattı, mısalı, $x=0$ hám $x=4$ noqatların alamız. Funkciyanıń usı noqatlardaǵı mánislerin esaplaymız: $y(0)=y(4)=3$.

(0; 3) hám (4; 3) noqatların jasaymız (13-b, súwret).



a) *b)* *d)* *13-súwret.*

5. Jasalǵan noqatlar arqalı parabolanı júrgizemiz (13-d, súwret). ▲

Bunday sxema boyınsha *qálegen* y = ax^2 + bx +c *kvadrat funkciyasınıń grafigin jasawǵa boladı*:

1. x_0, y_0 lerdi $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ formulalarınan paydalanıp esaplap, parabolanıń (x_0; y_0) tóbesi jasaladı.

2. Parabolanıń tóbesinen ordinatalar kósherine parallel tuwrı sızıq – parabolanıń simmetriya kósheri júrgiziledi.

3. Funkciyanıń nolleri (olar bar bolsa) tabıladı hám abcissalar kósherinde parabolanıń sáykes noqatları jasaladı.

4. Parabolanıń onıń kósherine salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan qanday da eki noqatı jasaladı. Bunıń ushın *Ox* kósherinde x_0(x_0≠0) noqatına salıstırmalı simmetriyalı bolǵan eki noqattı alıp hám funkciyanıń sáykes mánislerin (mánisler birdey) esaplaw kerek. Mısalı, parabolanıń abcissaları x = 0 hám x = 2x_0 bolǵan noqatların (noqatlardıń ordinataları *c* ǵa teń) jasaw múmkin.

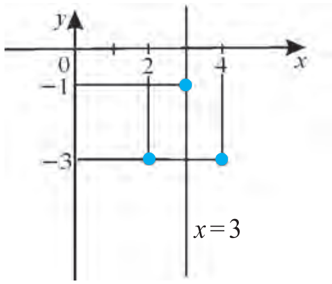
5. Jasalǵan noqatlar arqalı parabola júrgiziledi. Grafikti jáne de anıǵıraq jasaw ushın parabolanıń taǵı da bir neshe noqatın tabıw paydalı.

2- másele. $y=-2x^2+12x-19$ funkciyasınıń grafigin jasań.

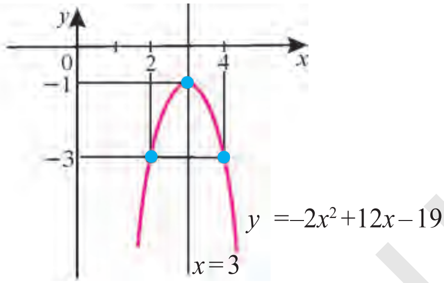
△ 1. Parabola tóbesiniń koordinataların esaplaymız:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3,\ \ y_0 = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 19 = -1\,.$$

(3; –1) noqatın – parabolanıń tóbesin jasaymız (14-súwret).



14-súwret.



15-súwret.

2. (3; –1) noqatı arqalı parabolanıń simmetriyalı kósherin ótkeremiz (14-súwret).

3. $-2x^2 + 12x - 19 = 0$ teńlemesin sheship, haqıyqıy korenler joqlığına hám sonıń ushın parabola Ox kósherin kespewine isenim payda etemiz.

4. Ox kósherinde $x = 3$ noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan eki noqattı, máselen $x = 2$ hám $x = 4$ noqatların alamız. Funkciyanıń bul noqatlardaǵı mánislerin esaplaymız:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

(2; –3) hám (4; –3) noqatların jasaymız (14-súwret).

5. Jasalǵan noqatlar arqalı parabola júrgizemiz (15-súwret). ▲

3-masala. $y = -x^2 + x + 6$ 6 funkciyasınıń grafigin jasań hám bul funkciya qanday qásiyetke iye ekenligin anıqlań.

△ Funkciyanıń grafigin jasaw ushın onıń nollerin tabamız: $-x^2+x+6=0$, bunnan $x_1=-2$, $x_1=3$. Parabola tóbesiniń koordinataların tómendegishe tabıwǵa boladı:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

$a=-1 < 0$ bolǵanı ushın parabolanıń shaqaları tómenge baǵdarlanǵan.

Parabolanıń jáne bir neshe noqatın tabamız: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)=6$, $y(2) = 4$. Parabolanı jasaymız (16-súwret).

Grafik járdeminde $-x^2 + x + 6$ *funkciyasınıń* tómendegi *qásiyetlerin* payda etemiz:

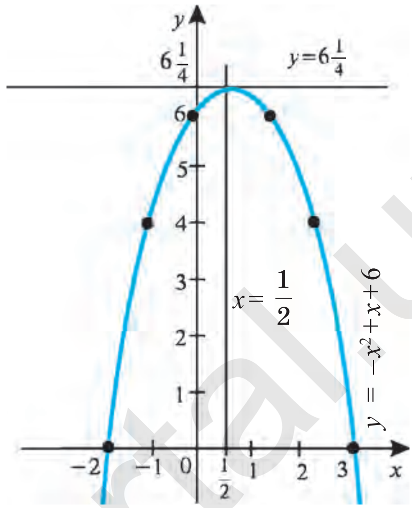
1) x tiń qálegen mánislerinde funkciyanıń mánisleri $6\frac{1}{4}$ ge teń yaki onnan kishi;

2) $-2<x<3$ te funkciyanıń mánisleri oń, $x<-2$ de hám $x>3$ te teris, $x=-2$ hám $x=3$ te nolge teń;

3) funkciya $x\leq\frac{1}{2}$ aralıqta ósiwshi, $x\geq\frac{1}{2}$ aralıqta kemeyiwshi;

4) $x=\frac{1}{2}$ bolǵanda funkciya $6\frac{1}{4}$ ge teń bolǵan eń úlken mánisti qabıl etedi;

5) funkciyanıń grafigi $x=\frac{1}{2}$ tuwrı sızıqqa salıstırǵanda simmetriyalı. ▲



16- súwret.

$y=ax^2+bx+c$ funkciya $x_0=-\frac{b}{2a}$ noqatında *eń kishi yamasa eń úlken mánislerdi* qabıl etedi; bul x_0 noqatı parabola tóbesiniń abcissası boladı.

Funkciyanıń x_0 noqatındaǵı mánisin $y_0=y(x_0)$ formulası boyınsha tabıw múmkin. *Eger $a>0$ bolsa, onda funkciya eń kishi mániske iye boladı, eger $a<0$ bolsa, onda funkciya eń úlken mániske iye boladı.*

Mısalı, $y = x^2 - 4x+3$ funkciyası $x = 2$ bolǵanda -1 ge teń bolǵan eń kishi mánisin qabıl etedi (13-*d*, súwret); $y = -2x^2 + 12x - 9$ funkciyası $x = 3$ bolǵanda -1 ge teń bolǵan eń úlken mánisin qabıl etedi (15-súwret).

4-másele. Eki oń sannıń qosındısı 6 ǵa teń. Eger olardıń kvadratlarınıń qosındısı eń kishi san bolsa, usı sanlardı tabıń. Bul sanlardıń kvadratlarınıń qosındısınıń eń kishi mánisi qanday boladı?

△ Birinshi sandı x háribi menen belgileymiz, onda ekinshi san $6-x$, olardıń kvadratlarınıń qosındısı bolsa $x^2+(6-x)^2$ boladı. Bul ańlatpanıń jazılıwın túrlendiremiz:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Másele, $y = 2x^2 - 12x + 36$ funkciyasınıń eń kishi mánisin tabıwǵa keltiriledi. Parabola tóbesiniń koordinatasın tabamız:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \; y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Demek, $x = 3$ bolǵanda funkciya 18 ge teń eń kishi mánisti qabıl etedi. Solay etip, birinshi san 3 ke teń, ekinshi san da 6 – 3=3 ke teń. Bul sanlardıń kvadratlarınıń qosındısınıń mánisi 18 ge teń. ▲

Shınıǵıwlar

35. Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Parabolanıń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

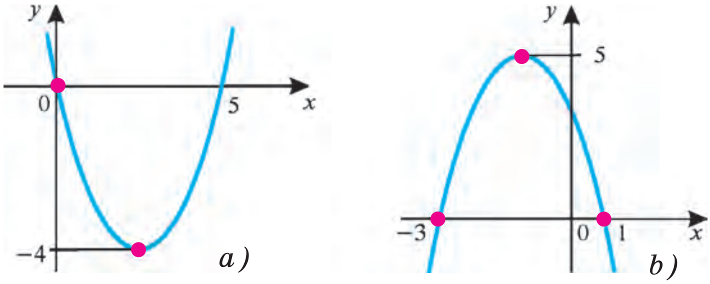
Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha: 1) x tiń mánisleri oń, teris bolatuǵın mánislerin tabıń; 2) funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń; 3) x tiń qanday mánislerinde funkciya eń úlken yaki eń kishi mánislerdi qabıl etetuǵının anıqlań hám tabıń **(37–38):**

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Kvadrat funkciyanıń berilgen grafigi (17-súwret) boyınsha onıń qásiyetlerin anıqlań.

40. 15 sanın eki sannıń qosındısı túrinde sonday etip kórsetiń, bul sanlardıń kóbeymesi eń úlkeni bolsın.



17-súwret.

41. Eki sannıń qosındısı 10 ǵa teń. Eger bul sanlardıń kublarınıń qosındısı eń kishi bolsa, onda usı sanlardı tabıń.

42. Úy diywalları qaptalındaǵı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydandı úsh tárepinen 12 m li pánjere menen orap alıw talap etiledi. Maydannıń ólshemleri qanday bolǵanda onıń maydanı eń úlken boladı?

43. Úshmúyeshlikte ultanı menen usı ultanǵa túsirilgen biyikliktiń qosındısı 14 cm ge teń. Bunday úshmúyeshlik 25 cm^2 qa teń maydanǵa iye bolıwı múmkin be?

44. Grafikti jasamay turıp, x tiń qanday mánisinde funkciya eń úlken (eń kishi) mániske iye bolatuǵının anıqlań; usı mánisti tabıń:

1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Eger:

1) parabolanıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlanǵan, onıń tóbesiniń abcissası teris, ordinatası oń bolsa;

parabolanıń shaqaları tómenge baǵdarlanǵan, onıń tóbesiniń abcissası hám ordinatası teris bolsa, $y = ax^2 + bx + c$ parabola teńlemesiniń koefficientleriniń belgilerin anıqlań.

46. 5 m biyiklikten oq jaydan 50 m/s tezlik penen joqarıǵa vertikal tárizde nayza atıldı. Nayzanıń t sekundtan keyin kóterilgen biyikligi, metrlerde $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$ formulası menen esaplanadı, bunda g=10 m/sek^2. Nayza neshe sekundtan keyin: 1) eń úlken biyiklikke erisedi hám ol qanday biyiklik boladı? 2) Jerge túsedi?

6-§. KVADRAT TEŃSIZLIK HÁM ONÍŃ SHESHIMI

1- máselе. Tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri 2 hám 3 dm ge teń. Onıń hárbir tárepi bir qıylı sandaǵı decimetrlerge sonday etip arttırıladı, nátiyjede tuwrımúyeshliktiń maydanı 12 dm^2 tan artıq boladı. Hárbir tárep qáytip ózgergen?

Tuwrı tórtmúyeshliktiń hárbir tárepi x decimetrge arttırılǵan bolsın. Onda jańa tórtmúyeshliktiń tárepleri $(2+x)$ hám $(3+x)$ decimetrge, onıń maydanı bolsa $(2+x)(3+x)$ kvadrat decimetrge teń boladı. Máseleniń shárti boyınsha $(2+x)(3+x)>12$ bunnan $x^2+5x+6>12$ yaki $x^2+5x-6>0$.

Bul teńsizliktiń shep bólimin kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x+6)(x-1)>0.$$

Máseleni shárt boyınsha, $x>0$ bolǵanı ushın $x+6>0$.

Teńsizliktiń eki bólimin $x+6$ oń sanǵa bólip, $x-1>0$, yaǵnıy $x>1$ di payda etemiz.

Juwabı: Tuwrı tórtmúyeshliktiń hárbir tárepi 1 dm den kóbirek arttırılǵan.

$x^2+5x-6>0$ teńsizliginde x penen belgisiz san belgilengen. Bul kvadrat teńsizlikke mısal bola aladı.

Eger teńsizliktiń shep bóliminde kvadrat funkciya, al oń bóliminde nol tursa, bunday teńsizlik kvadrat teńsizlik dep ataladı.

Mısalı,

$$2x^2-3x+1\geq 0, \qquad -3x^2+4x+5<0$$

teńsizlikleri kvadrat teńsizlikler boladı.

Bul belgisizli *teńsizliktiń sheshimi* dep, belgisizdiń usı teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandırıwshı mánisine aytılatuǵının esletip ótemiz.

Teńsizlikti sheshiw – onıń barlıq sheshimlerin tabıw yamasa olardıń joq ekenligin kórsetiw degen sóz.

2- másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$x^2-5x+6>0.$$

△ $x^2-5x+6=0$ kvadrat teńlemesi eki túrli $x_1=2$, $x_2=3$ korenge iye. Demek, x^2-5x+6 kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklewge boladı:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Sonıń ushın berilgen teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Eger eki kóbeytiwshi birdey belgige iye bolsa, olardıń kóbeymesi oń boladı.

1) Eki kóbeytiwshi oń, yaǵnıy $x-2>0$ hám $x-3>0$ bolǵan jaǵdaydı qaraymız.

Bul eki teńsizlik tómendegi sistemanı dúzedi:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0. \end{cases}$$

Sistemanı sheship, $\begin{cases} x>2, \\ x>3 \end{cases}$ ti payda etemiz, bunnan $x>3$.

Demek, barlıq $x>3$ sanları $(x-2)(x-3)>0$ teńsizliginiń sheshimleri boladı.

2) Endi eki kóbeytiwshi teris, yaǵnıy $x-2<0$ hám $x-3<0$ bolǵan jaǵdaydı qaraymız.

Bul eki teńsizlik tómendegi sistemanı dúzedi:

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Sistemanı sheship, $\begin{cases} x<2, \\ x<3 \end{cases}$ ti payda etemiz, bunnan $x<2$.

Demek, barlıq $x<2$ sanları $(x-2)(x-3)>0$ teńsizliginiń sheshimleri boladı.

Solay etip, $(x-2)(x-3)>0$ teńsizliginiń, demek, berilgen $x^2-5x+6>0$ teńsizliginiń de, sheshimleri $x<2$, sonday-aq, $x>3$ sanları boladı.

Juwabı: $x<2$, $x>3$. ▲

! **Ulıwma, eger $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńlemesi eki kórenge iye bolsa, onda $ax^2+bx+c>0$ hám $ax^2+bx+c<0$ kvadrat teńsizliklerin sheshiwdi, kvadrat teńsizliktiń shep bólimin kóbeytiwshilerge jiklep, birinshi dárejeli teńsizlikler sistemasın sheshiwge keltiriw múmkin.**

3- másele. $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ teńsizligin sheshiń.

△ Esaplawlardı qolaylıraq alıp barıw ushın berilgen teńsizliktiń birinshi koefficienti oń bolǵan teńsizlikler túrinde kórsetemiz. Bunıń ushın onıń eki bólimin -1 ge kóbeytemiz:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

$3x^2+5x-2=0$ teńlemesiniń korenlerin tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{-5-\sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5-7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3},\ \ x_2 = -2.$$

Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Bunnan eki sistemanı payda etemiz:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3}>0, \\ x+2<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3}<0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

Birinshi sistemanı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x<-2, \end{cases}$$

bunnan sistema sheshimlerge iye emesligi kórinip tur.

Ekinshi sistemanı sheship, tómendegini tabamız:

$$\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ x>-2, \end{cases}$$

bunnan $-2 < x < \frac{1}{3}$.

Demek, $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$ teńsizliginiń, yaǵnıy $-3x^2-5x+2>0$ teńsizliginiń sheshimleri $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$ intervaldaǵı barlıq sanlar boladı.

Juwabı: $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

Shınıǵıwlar

47. (Awızeki.) Tómendegi teńsizliklerden qaysıları kvadrat teńsizlik ekenin kórsetiń:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \le 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \le 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Tómendegi teńsizlikti kvadrat teńsizlikke keltiriń:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Awızeki.) 0; -1; 2 sanlarınan qaysıları

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \ge 0$;
3) $x^2 - x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

teńsizliktiń sheshimleri boladı?

Teńsizlikti sheshiń (**50–52**):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$; 3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

53. Teńsizlikti sheshiń:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \le 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Funkciyanıń grafigin jasań. Grafik boyınsha funkciya x tiń oń mánisler; teris mánisler; nolge teń mánisti qabıl etetuǵın barlıq mánislerin tabıń:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. x_1 hám x_2 sanlar (bunda $x_1 < x_2$) $y = ax^2 + bx + c$ funkciyasınıń nolleri ekeni belgili. Eger x_0 san x_1 hám x_2 arasında jatsa, yaǵnıy $x_1 < x_0 < x_2$ bolsa, onda $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ teńsizliktiń orınlanatuǵının dálilleń.

7-§. KVADRAT TEŃSIZLIKTI KVADRAT FUNKCIYA JÁRDEMINDE SHESHIW

Kvadrat funkciya $y = ax^2 + bx + c$ (bunda $a \neq 0$) formulası menen beriletuǵının esletip ótemiz. Sonıń ushın kvadrat teńsizlikti sheshiw, kvadrat funkciyanıń nollerin hám kvadrat funkciya oń yaki teris mánislerdi qabıl etetuǵın aralıqlardı tabıwǵa keltiriledi.

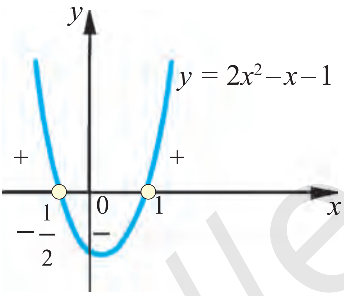
1- másele. Teńsizlikti grafik járdeminde sheshiń:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

△ $y = 2x^2 - x - 1$ kvadrat funkciyasınıń grafigi – shaqaları joqarıǵa baǵdarlanǵan parabola.

Bul parabolanıń Ox kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız. Bunıń ushın $2x^2 - x - 1 = 0$ kvadrat teńlemeni sheshemiz. Bul teńlemeniń korenleri:

$$x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1-3}{4}; x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$



18-súwret.

Demek, parabola Ox kósherin $x = -\frac{1}{2}$ hám $x = 1$ noqatlarında kesip ótedi (18-súwret).

$2x^2 - x - 1 \leq 0$ teńsizlikti x tiń funkciya nolge teń bolǵan yaki funkciyanıń mánisleri teris bolǵan mánisleri qanaatlandıradı, yaǵnıy x tiń sonday mánisleri bolıp, bul mánislerde parabolanıń noqatları Ox kósherinde yaki usı kósherden tómende jatadı. 18-súwretten, bul mánisler $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ kesindidegi barlıq sanlar bolatuǵını kórinip tur.

Juwabı: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

Bul funkciyanıń grafiginen berilgen teńsizliktiń tek belgisi menen ózgeshelenetuǵın basqa teńsizliklerdi sheshsiwde de paydalanıwǵa boladı. 18-súwrette kórinip turǵanınday:

1) $2x^2 - x - 1 < 0$ teńsizlikleriniń sheshimleri $-\frac{1}{2} < x < 1$, yaǵnıy $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ intervalındaǵı barlıq sanlar boladı;

2) $2x^2 - x - 1 > 0$ teńsizlikleriniń sheshimleri $x < -\frac{1}{2}$ hám $x > 1$ aralıǵındaǵı barlıq sanlar boladı.

3) $2x^2 - x - 1 \geq 0$ teńsizlikleriniń sheshimleri $x \leq -\frac{1}{2}$ hám $x \geq 1$ aralıǵındaǵı barlıq sanlar boladı.

2- másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

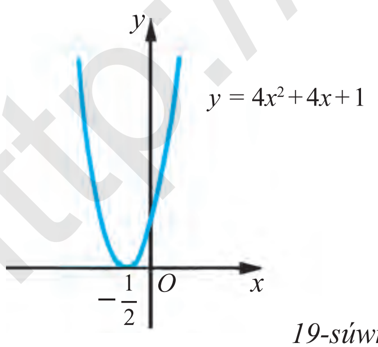
△ $y=4x^2+4x+1$ funkciyası grafiginiń eskizin sızamız. Bul parabolanıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlanǵan $4x^2+4x+1=0$ teńleme bir $x=-\frac{1}{2}$ korenge iye, sonıń ushın parabola Ox kósherine $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ noqatında urınadı. Bul funkciyanıń grafigi 19-súwrette kórsetilgen. Berilgen teńsizlikti sheshiw ushın x tiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisleri oń bolatuǵının anıqlaw kerek. Solay etip, $4x^2+4x+1>0$ teńsizlikti parabolanıń noqatları Ox kósherinen joqarıda jatıwshı x tiń mánisleri qanaatlandıradı. 19-súwretten, bunday mánisler $x=-0{,}5$ ten basqa barlıq haqıyqıy sanlar bolatuǵınlıǵı belgili.

Juwabı: $x \neq -0{,}5$. ▲

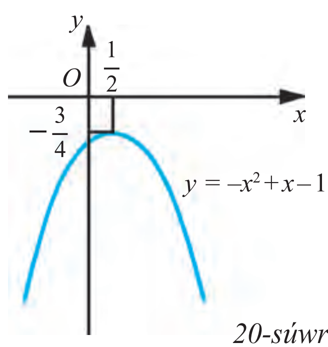
19-súwrette kórinip turǵanınday:

1) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ teńsizliginiń sheshimi barlıq haqıyqıy sanlar boladı;

2) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ teńsizligi bir $x=-\frac{1}{2}$ sheshimge iye;



19-súwret.



20-súwret.

3) $4x^2 + 4x + 1 < 0$ teńsizligi sheshimlerge iye emes.

Eger $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ ekeni itibarǵa alınsa, bul teńsizliklerdi awızeki sheshiwge boladı.

3-masala. $-x^2 + x - 1 < 0$ teńsizlikti sheshiń.

△ $y = -x^2 + x - 1$ funkciya grafiginiń eskizin sızamız. Bul parabolanıń shaqaları tómenge baǵdarlanǵan. $-x^2 + x - 1 = 0$ teńlemesin haqıyqıy korenleri joq, sonıń ushın parabola Ox kósherin kesip ótpeydi. Demek, bul parabola Ox kósherinen tómende jaylasqan (20-súwret). Bul barlıq x larda kvadrat funkciyanıń mánisleri teris, yaǵnıy $-x^2 + x - 1 < 0$ teńsizligi x tiń barlıq haqıyqıy mánisinde orınlanatuǵının bildiredi. ▲

20-súwretten de $-x^2 + x - 1 \leq 0$ teńsizliginiń sheshimleri x tiń barlıq haqıyqıy mánisleri bolıwı, $-x^2 + x - 1 > 0$ hám $-x^2 + x - 1 \geq 0$ teńsizligi sheshimlerge iye emesligi kórinip tur.

Solay etip, *kvadrat teńsizlikti grafik járdeminde sheshiw ushın:*

1) kvadrat funkciyanıń birinshi koefficientiniń belgisi boyınsha parabola shaqalarınıń baǵdarın anıqlaw;

2) tiyisli kvadrat teńlemeniń haqıyqıy korenlerin tabıw yaki olardıń joq ekenligin anıqlaw;

3) kvadrat funkciyanıń Ox kósheri menen kesilisiw noqatları (eger olar bar bolsa) yaki urınbadan paydalanıp, kvadrat funkciya grafiginiń eskizin jasaw;

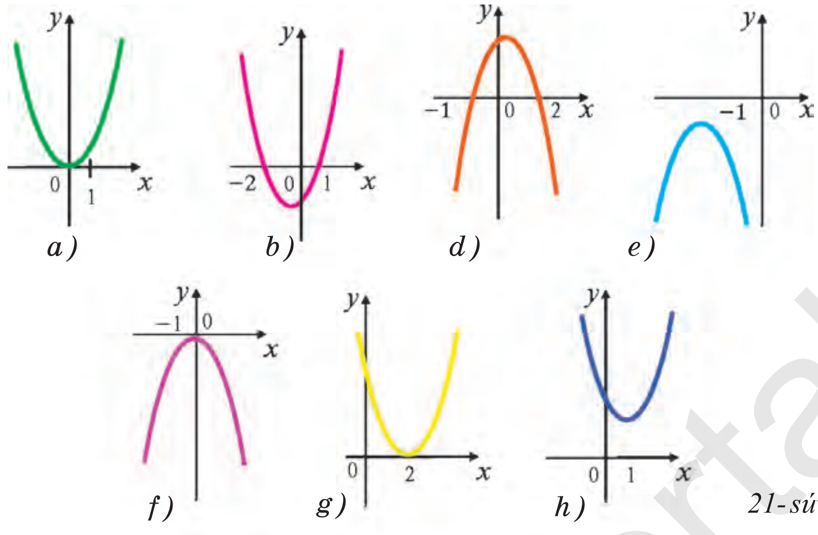
4) grafik boyınsha funkciya kerekli mánislerdi qabıl etetuǵın aralıqların anıqlaw kerek.

Shınıǵıwlar

56. $y = x^2 + x - 6$ funkciyasınıń grafigin jasań. Grafik boyınsha x tiń funkciya oń mınislerdi; teris mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

57. (Awızeki.) $y = ax^2 + bx + c$ *funkciya* grafiginen paydalanıp (21-súwret), x tiń qanday mánislerinde bul funkciya oń mánislerge, teris mánislerge, nolge teń mánisti qabıl etiwin kórsetiń.

Kvadrat teńsizlikti sheshiń (**58–62**):



21-súwret.

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \le 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \ge 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \ge 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \le 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \le 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \ge 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \ge 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Awızeki.) Teńsizlikti sheshiń:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

Kvadrat teńsizlikti sheshiń (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;

5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$; 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \geq 0$; 6) $3x^2 + x \leq 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. x tiń funkciya nolden úlken bolmaǵan mánislerin qabıl etetuǵın barlıq mánislerin tabıń:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) $x^2 - 2x + q > 0$ teńsizliktiń $q > 1$ bolǵandaǵı sheshimleri x tiń barlıq haqıyqıy mánisleri bolatuǵının kórsetiń:
2) $x^2 + 2x + q \leq 0$ teńsizlik $q > 1$ bolǵanda haqıyqıy sheshimlerge iye emesligin kórsetiń.

69. r dıń $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$ teńsizlik x tiń barlıq haqıyqıy mánislerinde orınlanatuǵın barlıq mánislerin tabıń.

8-§. INTERVALLAR USULI

Teńsizlikti sheshiwde kóbinese intervallar usılı qollanıladı. Bul usıldı mısallarda túsindiremiz.

1- másele. x tiń qanday mánislerinde $x^2 - 4x + 3$ kvadrat úsh aǵzalı oń mánisler, qanday mánislerinde bolsa teris mánislerdi qabıl etetuǵının anıqlań.

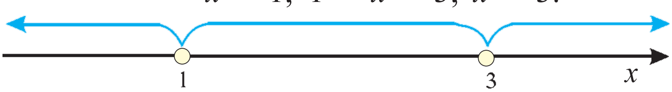
△ $x^2 - 4x + 3 = 0$ teńlemeniń korenlerin tabamız:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Sonıń ushın $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$x = 1$ hám $x = 3$ noqatlar (22-súwret) san kósherin úsh aralıqqa bóledi:

$$x < 1; \; 1 < x < 3; \; x > 3.$$



22-súwret.

$1 < x < 3$ aralıq sıyaqlı $x < 1$, $x > 3$ aralıqlar da *intervallar* delinedi.

San kósheri boyınsha ońnan shepke jıljıtıp, $x > 3$ intervalda $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ úsh aǵzalı oń mánislerin qabıl etetuǵının kóremiz, sebebi, bul jaǵdayda eki $x-1$ hám $x-3$ kóbeytiwshisi de oń.

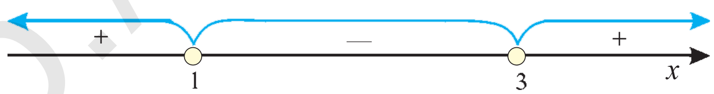
Keyingi $1 < x < 3$ intervalda bul úsh aǵzalı teris mánislerdi qabıl etedi hám $x = 3$ noqatı arqalı ótkende belgisin ózgertedi. Bul jaǵday sonıń ushın da bolıp ótedi, $(x-1)(x-3)$ kóbeymede $x=3$ noqatı arqalı ótkende $x-1$ kóbeytiwshi belgisin ózgertpeydi, ekinshi $x-3$ kóbeytiwshisi bolsa belgisin ózgertedi.

$x=1$ noqat arqalı ótkende úsh aǵzalı jáne belgisin ózgertedi, sebebi, $(x-1)(x-3)$ kóbeymede birinshi $x-1$ kóbeytiwshi belgisin ózgertedi, ekinshi $x-3$ kóbeytiwshisi belgisin ózgertpeydi.

Demek, san kósheri boyınsha ońnan shepke qarap jıljıtıp bir intervaldan qońsılas intervalǵa ótip barǵanda $(x-1)(x-3)$ kóbeymeniń belgileri almasıp baradı.

Solay etip, $x^2 - 4x + 3$ kvadrat úsh aǵzalınıń belgisi haqqındaǵı máseleni tómendegi usıl menen sheshiwge boladı.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ teńlemesiniń korenlerin san kósherinde belgileymiz: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Olar san kósherin úsh kestege intervalǵa ajıratadı (22-súwret). $x > 3$ intervalda $x^2 - 4x + 3$ úsh aǵzalınıń oń bolatuǵının anıqlap, úsh aǵzalınıń qalǵan intervaldaǵı belgilerin almasıp baratuǵın tártipte belgileymiz (23-súwret). 23-súwretten kórinip turǵanınday, $x < 1$ hám $x > 3$ bolǵanda $x^2 - 4x + 3 > 0$, $1 < x < 3$ bolǵanda $x^2 - 4x + 3 < 0$. ▲



23-súwret.

Qarap ótilgen usıl *intervallar usılı* delinedi. Bul usıldan kvadrat teńsizliklerdi hám basqa teńsizliklerdi sheshiwde paydalanıladı.

Máselen, 1-máseleni sheshkende biz negizinde $x^2 - 4x + 3 > 0$ hám $x^2 - 4x + 3 < 0$ teńsizliklerin intervallar usılı menen sheshtik.

2- másele. $x^3 - x < 0$ teńsizligin sheshiń.

△ $x^3 - x$ kóp aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleymiz:

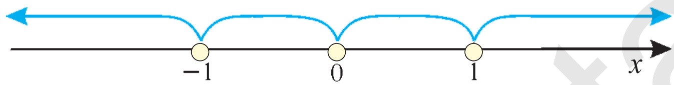
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Demek, teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

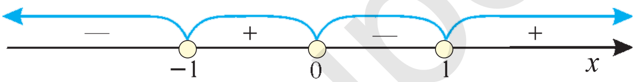
San kósherinde –1, 0 hám 1 noqatların belgileymiz. Bul noqatlar san kósherin tórt intervalǵa bóledi (24-súwret):

$$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1.$$



24-súwret.

$x > 1$ bolǵanda $(x + 1)x(x - 1)$ kóbeymeniń barlıq kóbeytiwshileri oń, sonıń ushın $x > 1$ intervalda $(x+1)x(x-1) > 0$ boladı. Qońsı intervalǵa ótiwde kóbeyme belgisiniń almasıwın itibarǵa alıp, hárbir interval ushın $(x+1)x(x-1)$ kóbeymeniń belgisin tabamız (25-súwret).



25-súwret.

Solay etip, teńsizliktiń sheshimleri x tiń $x < -1$ hám $0 < x < 1$ intervallardaǵı barlıq mánisleri boladı.

Juwabı: $x < -1,\ 0 < x < 1.$ ▲

3- másele. $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ teńsizligin sheshiń.

△ Berilgen teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Barlıq $x \neq -3$ da $(x + 3)^2 > 0$ bolǵanı ushın $x \neq -3$ te (1) teńsizliktiń sheshimleriniń kópligi,

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

teńsizlik sheshimleriniń kópligi menen ústi-ústine túsedi.

$x = -3$ mánisi (1) teńsizliktiń sheshimi bolmaydı, sebebi $x = -3$ bolǵanda teńsizliktiń shep bólimi 0 ge teń.

(2) teńsizlikti intervallar usılı menen sheship, $x < 2$, $x < 3$ ti payda etemiz (26-súwret).

***26**-súwret.*

$x = -3$ berilgen teńsizliktiń sheshimi bola almaytuǵının itibarǵa alıp, sońında nátiyjeni tómendegishe jazamız:

$$x < -3, \quad -3 < x < 2, \quad x > 3. \ \blacktriangle$$

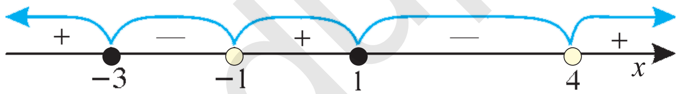
4- másele. Tómendegi teńsizlikti sheshiń:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

$\triangle$ Bólshektiń alımın hám bólimin kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \tag{3}$$

San kósherinde bólshektiń alımı yaki bólimi nolge aylanatuǵın –3; –1; 1; 4 noqatların belgileymiz. Bul noqatlar san tuwrısın bes intervalǵa bóledi (27-súwret). $x>4$ bolǵanda bólshektiń alımı hám bólimindegi barlıq kóbeytiwshileri oń bolǵanı ushın bólshek oń boladı.



27-súwret.

Bir intervaldan keyingisine ótiwde, bólshek belgisin ózgertedi, sonıń ushın bólshektiń belgilerin 27-súwrettegidey etip qoyıwǵa boladı. $x=-3$ hám $x=1$ mánisleri (3) teńsizlikti qanaatlandıradı, $x=-1$ hám $x=4$ bolǵanda bolsa, bólshek mániske iye emes. Solay etip, berilgen teńsizlik tómendegi sheshimlerge iye.

$$x \leq -3, \quad -1 < x \leq 1, \quad x > 4. \ \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

70. (Awızeki.) $x=5$ mánisi teńsizliktiń sheshimi bolatuǵının kórsetiń:

1) $(x-1)(x-3)>0$; 2) $(x+2)(x+5)>0$;
3) $(x-7)(x-10)>0$; 4) $(x+1)(x-4)>0$.

Teńsizlikerdi intervallar usılı menen sheshiń (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;

3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;
4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;
3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;
3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1,5-x}{3+x}\geq 0$;

4) $\frac{3,5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;
3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Teńsizlikti sheshiń (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;

4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x\ \ 6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$;

9- §. FUNKCIYANÍŃ ANÍQLANÍW OBLASTÍ

Siz 7-klasta funkciya túsinigi menen tanısqansız. Usı túsinikti esletip ótemiz.

Eger sanlardıń bazı bir kópliginen alınǵan x tiń hárbir mánisine y sanı sáykes keltirilgen bolsa, usı kóplikte *y(x) funkciyası berilgen* dep aytıladı. Bunda x *erkli ózgeriwshi* yaki *argument*, *al y erksiz ózgeriwshi* yaki *funkciya* dep ataladı.

Siz $y=kx+b$ sızıqlı funkciyası hám $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciyası menen tanıssız.

Bul funkciyalar ushın argumenttiń mánisi qálegen haqıyqıy san bolıwı múmkin.

Endi hárbir teris emes x sanına $\sqrt{x}$ sanı sáykes qoyılatuǵın funkciyanı, yaǵnıy $y=\sqrt{x}$ funkciyasın qaraymız. Bul funkciya ushın argument tek teris emes mánislerdi qabıl etiwi múmkin: $x \geq 0$. Bul jaǵdayda funkciya barlıq teris emes sanlar kópliginde anıqlanǵan delinedi hám bul kóplik $y=\sqrt{x}$ funkciyasınıń *anıqlanıw oblastı* dep ataladı.

Ulıwma funkciyanıń *anıqlanıw oblastı* dep onıń argumenti qabıl etiwi múmkin bolǵan barlıq mánisleriniń kópligine aytıladı.

Máselen, $y=\frac{1}{x}$ formula menen berilgen funkciya $x \neq 0$ de anıqlanǵan, yaǵnıy bul funkciyanıń anıqlanıw oblastı – nolden basqa barlıq haqıyqıy sanlar kópligi boladı.

Eger funkciya formula menen berilgen bolsa, onda funkciya argumentiniń berilgen formula maǵanaǵa iye bolatuǵın (yaǵnıy, formulanıń oń bóleginde turǵan ańlatpada kórsetilgen barlıq ámeller orınlanatuǵın)barlıq mánislerinde anıqlanǵan, dep esaplaw qabıl etilgen.

Formula menen berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıw – argumenttiń maǵanaǵa iye bolatuǵın barlıq mánislerin tabıw degendi bildiredi.

1- másele. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y(x)=2x^2+3x+5x$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\frac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x\ \ 2}}$.

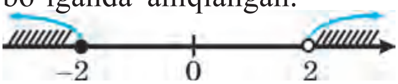
△ 1) $2x^2+3x+5$ ańlatpası x tiń qálegen mánisinde mağanağa iye bolıwı ushın funkciya barlıq x larda anıqlanğan.

Juwabı: x – qálegen san.

2) $\sqrt{x-1}$ ańlatpası $x-1\geq 0$ bolğanda mağanağa iye, yağnıy funkciya $x\geq 1$ bolğanda anıqlanğan.

Juwabı: $x\geq 1$.

3) $\frac{1}{x+2}$ ańlatpası $x+2\neq 0$ bolğanda mağanağa iye, yağnıy funkciya $x\neq -2$ bo‘lganda aniqlangan.



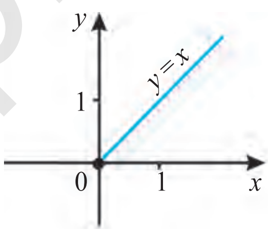
28-súwret.

Juwabı: $x\neq -2$.

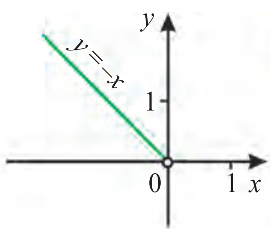
4) $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ ańlatpası $\frac{x+2}{x-2}\geq 0$ bolğanda mağanağa iye. Bul teńsizlikti sheship, mınağan iye bolamız (28-súwret): $x\leq -2$ hám $x>2$, yağnıy funkciya $x\leq -2$ hám $x>2$ bolğanda anıqlanğan.

Juwabı: $x\leq -2$, $x>2$. ▲

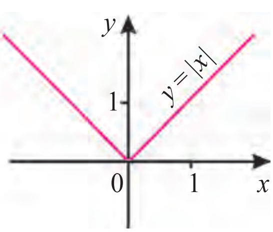
Funkciyanıń grafigi dep, koordinatalar tegisliginiń abcissaları, usı funkciyanıń anıqlanıw oblastınan alınğan erkli ózgeriwshiniń mánislerine, al ordinataları funkciyanıń sáykes mánislerine teń bolğan noqatlar kópligine aytılatuğının esletip ótemiz.



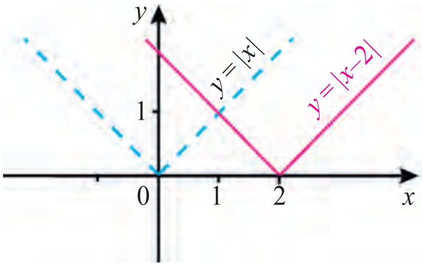
29-súwret.



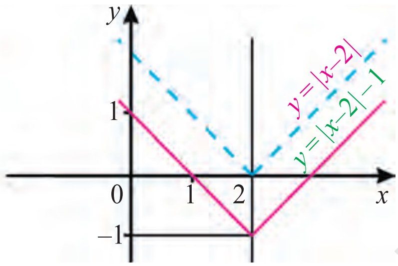
30-súwret.



31-súwret.



32-súwret.



33-súwret.

2-másele. $y = |x|$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastın tabıń hám onıń grafigin jasań.

△ Esletip ótemiz:

$$x, \text{ eger } x^3 \geq 0 \text{ bolsa,}$$
$$-x, \text{ eger } x < 0 \text{ bolsa.}$$

Solay etip, $|x|$ańlatpa qálegen haqıyqıy x ta mağanağa iye, yağnıy $y=|x|$funkciyasınıń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat.

Eger $x \geq 0$ bolsa, onda $|x| = x$ boladı hám sonlıqtan da $x \geq 0$ bolǵanda $y=|x|$funkciyasınıń grafigi birinshi koordinata múyeshiniń bissektrisası boladı (29-súwret).

Eger $x < 0$ bolsa, onda $|x| = -x$ boladı. Demek, teris x ler ushın $y=|x|$funkciyasınıń grafigi ekinshi koordinata múyeshiniń bissektrisası boladı (30-súwret).

$y=|x|$funkciyasınıń grafigi 31-súwrette kórsetilgen. ▲

Qálegen x ushın $|-x|=-x$. Sonlıqtan da $y=|x|$ funkciyasınıń grafigi ordinatalar kósherine qarata simmetriyalı jaylasqan.

3-másele. $y = |x-2| - 1$ funkciyasınıń grafigin jasań.

△ $y = |x-2|$ funkciyasınıń grafigi $y=|x|$funkciyası grafiginen onı Ox kósheri boyınsha 2 birlik ońǵa kóshiriw menen payda etiledi (32-súwret).

$y=|x-2|-1$ funkciyasınıń grafigin payda etiw ushın $y=|x-2|$ funkciyasınıń grafigin bir birlik tómenge qaray kóshiriw jetkilikli (33-súwret). ▲

Shınığıwlar

81. Funkciya $y(x)=x^2-4x+5$ formula menen berilgen:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$ ni tabıń;

2) eger $y(x)=1$, $y(x)=5$, $y(x)=10$, $y(x)=17$ bolsa, x tiń mánisin tabıń;

82. Funkciya $y(x)=\frac{x+5}{x-1}$ formula menen berilgen:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$ ti tabıń;

2) eger $y(x)=-3$, $y(x)=-2$, $y(x)=13$, $y(x)=19$ bolsa, x tiń mánisin tabıń;

Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń (**83–84**):

83. (Awızeki).

1) $y=4x^2-5x+1$; 2) $y=2-x-3x^2$; 3) $y=\frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y=\dfrac{3}{5-x^2}$; 5) $y=\sqrt[4]{6-x}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-7x+10}$;

3) $y=\sqrt[3]{3x^2-2x+5}$; 4) $y=\sqrt[6]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$; 5) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{4-x}}$.

85. Funkciya $y(x)=|2-x|-2$ formula menen berilgen:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$ ti tabıń;

2) eger $y(x)=-2$, $y(x)=0$, $y(x)=2$, $y(x)=4$ bolsa, x tiń mánisin tabıń.

86. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; 2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

3) $y=\sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}}$.

5) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$; 6) $y=\sqrt[8]{\dfrac{x^2+4x-5}{x-2}}$;

87. (−2; 1) noqatı funkciya grafigine tiyisli bola ma:

1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;

3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Funkciya grafigin jasań:

1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;

4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. $y=\text{a}x^2+bx+c$ funkciyası A (0; 1), B (1; 2), C $(\frac{5}{6};\ 1)$ nuqatlarınan ótedi. 1) a, b, c ti tabıń; 2) x tiń qanday mánislerinde $y=0$ boladi? 3) funksiya grafigin sızıń.

10- §. FUNKSIYANÍŃ ÓSIW HÁM KEMEYIWI

Siz $y=x$ hám $y=x^2$ funkciyalar menen tanıssız. Bul funkciyalar *dárejeli funkciyanıń,* yaǵnıy

$$y=x^r \tag{1}$$

(bunda r – berilgen san) funkciyasınıń jeke hallarınan ibarat.

r – natural san bolsın, $r=n=1,\ 2,\ 3,\ ...$ deyik. Bul jaǵdayda natural kórsetkishli dárejeli funkciya $y=x^n$ di payda etemiz.

Bul funkciya barlıq haqıyqıy sanlar kópliginde, yaǵnıy san kósheriniń barlıq jerinde anıqlanǵan. Ádette, barlıq haqıyqıy sanlar kópligi **R** háribi menen belgilenedi. Solay etip, natural kórsetkishli dárejeli funkciya $y=x^n$, $x\in\boldsymbol{R}$ ushın anıqlanǵan. Eger (1) de $r=-2k$, $k\in\boldsymbol{N}$ bolsa, onda $y=x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$ funkciyası payda boladı. Bul funkciya x tiń nolden basqa barlıq mánislerinde anıqlanǵan. Onıń grafigi Oy kósherine salıstırǵanda simmetriyalı boladı. $r=-(2k-1)$, $k\in\boldsymbol{N}$ bolsa, onda $y=x^{-(2k-1)}=\frac{1}{x^{2k-1}}$ funkciyası kelip shıǵadı. Onıń qásiyetleri sizge tanıs $y=\frac{1}{x}$ funkciyasınıń qásiyetleri sıyaqlı boladı. p hám q – natural sanlar hám $r=\frac{p}{q}$ – qısqarmaytuǵın bólshek bolsın. $y=\sqrt[q]{x^p}$

funksiyasınıń anıqlanıw oblastı p hám q nıń jup – taqlıǵına qaray hár qıylı boladı. Máselen,, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ funkciyaları erkli $x\in\boldsymbol{R}$ de anıqlanǵan. $y=\sqrt[4]{x^3}$ bolsa, x tiń teris emes, yaǵnıy $x\geq0$ mánislerinde anıqlanǵan.

8-klass “Algebra” kursınan málim bolǵanınday, hárbir irracional sandı shekli onlıq bólshek penen, yaǵnıy racional san menen almastırıwǵa boladı. Ámeliy islerde irracional sanlar tásirinde ámeller, olardıń racional juwıqlasıwları járdeminde orınlanadı. Bul ámeller, teńlik hám teńsizliklerdiń racional sanlar ushın qásiyetleri irracional sanlar ushın da tolıq saqlanıwı menen kiritiledi.

r_1, r_2, ..., r_k, ... racional sanlar r irracional sannıń racional juwıqlasıwı bolsın. Bul jaǵdayda x oń san bolǵanda x tiń racional dárejeleri, yaǵnıy x^{r_1}, x^{r_2}, ... , x^{r_R}, ... sanları x^r dárejeniń (dárejeli sannıń) juwıqlasıwları boladı. Bunday anıqlanǵan dáreje *irracional kórsetkishli dáreje* dep ataladı. Demek, $x>0$ ushın dáreje kórsetkishi qálegen r bolǵan $y=x^r$ funkciyasın anıqlawǵa boladı.

Dárejeli funkciya x tiń (1) formula maǵanaǵa iye bolatuǵın mánisleri ushın anıqlanǵan. Máselen, $y=x$ hám $y=x^2$($r=1$ hám $r=2$) funkciyalarınıń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópligi boladı; $y=\frac{1}{x}$ $(r = 1)$ funkciyalarınıń anıqlanıw oblastı nolge teń bolmaǵan haqıyqıy sanlar kópligi boladı; $y=\sqrt{x}$ $(r=\frac{1}{2})$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastı barlıq teris emes sanlar kópliginen ibarat.

! **Eger argumenttiń bazı bir aralıqtan alınǵan úlken mánisine funkciyanıń úlken mánisi sáykes kelse, yaǵnıy usı aralıqqa tiyisli qálegen x_1, x_2 ushın $x_2>x_1$ teńsizliginen $y(x_2) > y(x_1)$ teńsizligi kelip shıqsa, $y(x)$ funkciyası usı aralıqta *ósiwshi* funkciya delinedi.**

! **Eger bazı bir aralıqqa tiyisli qálegen x_1, x_2 ushın $x_2>x_1$ teńsizliginen $y(x_2) < y(x_1)$ kelip shıqsa, $y(x)$ funkciya usı aralıqta *kemeyiwshi* funkciya delinedi.**

Mısalı, $y=x$ funkciyası sanlar kósherinde ósedi. $y=x^2$ funkciyası $x\geq0$ aralıqta ósedi, $x\leq0$ aralıqta kemeyedi.

$y = x^r$ dárejeli funkciyanıń ósiwi yaki kemeyiwi dáreje kórsetkishiniń belgisine baylanıslı.

Eger $r>0$ bolsa, onda $y=x^r$ dárejeli funkciya $x\geq 0$ aralığında *ósedi.*

$x_2>x_1\geq 0$ bolsın. $x_2>x_1$ teńsizlikti oń r dárejege kóterip, $x_2^r > x_1^r$ di, yağnıy $y(x_2) > y(x_1)$ di payda etemiz.

Máselen, $y=\sqrt{x}$ hám $y=x^{\frac{3}{2}}$ funkciyalar $x\geq 0$ aralığında ósedi. Bul funkciyalardıń grafikleri 34-súwrette kórsetilgen. Bul súwrette $y=\sqrt{x}$ funkciyasınıń grafigi $0<x<1$ aralıqta y=x funkciyasınıń grafiginen joqarıda, $x>1$ aralıqta bolsa y=x funkciyasınıń grafiginen tómende jatatuğınlığı kórinip tur.

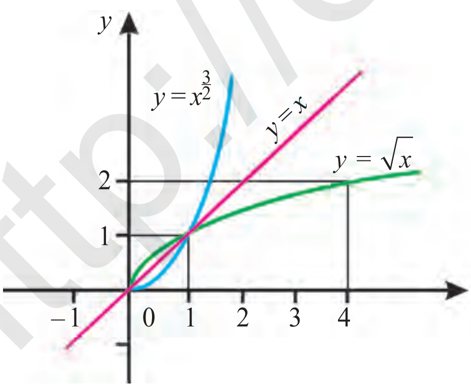
Eger $0<r<1$ bolsa, $y = x^r$ funkciyasınıń grafigi tap usınday qásiyetke iye boladı.

$y=x^{\frac{3}{2}}$ funkciyasınıń grafigi $0<x<1$ aralıqta $y=x$ funkciya grafiginen tómende, $x>1$ aralıqta bolsa $y=x$ funkciyasınıń grafiginen joqarıda jatadı.

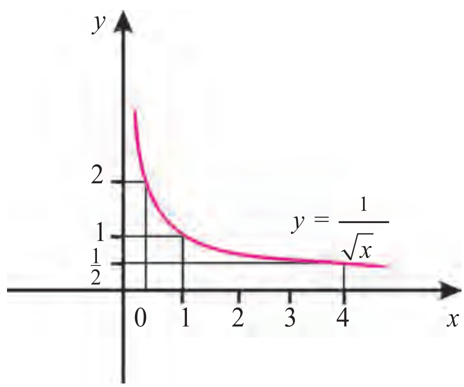
$r>1$ bolsa, $y–x^r$ funkciyasınıń grafigi de tap usınday qásiyetke iye boladı.

Endi $r>1$ bolğan jağdaydı qarap shığamız.

Eger $r<0$ bolsa, onda $y=x^r$ dárejeli funkciya $x>0$ aralıqta kemeyedi.



34-súwret.



35-súwret.

○ $x_2 > x_1 > 0$ bolsın. $x_2 > x_1$ teńsizlikti oń r dárejege kóterip, shep hám oń tárepleri oń bolǵan teńsizliklerdiń qásiyetine muwapıq $x_2^r > x_1^r$ di, yaǵnıy $y(x_2) < y(x_1)$ payda etemiz. ●

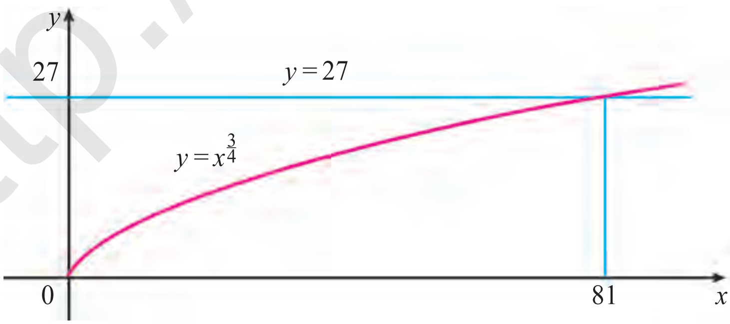
Máselen, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, yaǵnıy $y=x^{-\frac{1}{2}}$ funkciya $x>0$ aralıǵında kemeyedi. Bul funkciyanıń grafigi 35-súwrette kórsetilgen.

1- másele. $x^{\frac{3}{4}}=27$ teńlemeni sheshiń.

△ $y=x^{\frac{3}{4}}$ funkciya $x \geq 0$ e anıqlanǵan. Sonıń ushın berilgen teńleme tek teris emes korenlerge ǵana iye bolıwı múmkin. Bunday kórenlerden biri: $x=27^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{3^3})^4=3^4=81$. Teńlemeniń basqa korenleri joq, sebebi $y=x^{\frac{3}{4}}$ funkciya $x \geq 0$ bolǵanda ósedi hám sonlıqtan da, eger $x>81$ bolsa, onda $x^{\frac{3}{4}}>27$, eger $x<81$ bolsa, onda $x^{\frac{3}{4}}<27$ boladı (36-súwret). ▲

$x^r=b$ (bunda $r \neq 0$, $b>0$) teńlemesiniń bárhulla oń $x=b^{\frac{1}{r}}$ korenge iye ekenligi, sonıń menen birge bul korenniń jalǵız birew ǵana ekenligi usıǵan uqsas dálillenedi. Demek, $y=x^r$ (bunda $r>0$) funkciya $x>0$ bolǵanda *barlıq oń mánislerdi qabıl etedi.*

Bul bolsa, máselen, $y=x^{\frac{3}{4}}$ (36-súwret) funkciyanıń ástelik penen ósiwine qaramastan, onıń grafigi *Ox* kósherinen kem-kem uzaqlasıwı hám $y=b$



36-súwret.

tuwrı sızığın, b nıń qanday oń san bolıwına qaramastan kesip ótetuǵınlıǵın bildiredi.

2-másele. $y = x + \frac{1}{x}$ funkciyasınıń $x > 1$ aralıqta ósetuǵının dálilleń.

△ $x_2 > x_1 > 1$ bolsın. $y(x_2) > y(x_1)$ ekenligin kórsetemiz. $y(x_2) - y(x_1)$ ayırmasın qaraymız:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ bolǵanı ushın $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$, $x_1 x_2 > 0$. Sonıń ushın $y(x_2) - y(x_1) > 0$, yaǵnıy $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Shınıǵıwlar

90. Funkciyanıń grafigin jasań hám onıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

1) $y=2x+3$; 2) $y=1-3x$; 3) $y=x^2+2$;
4) $y=3-x^2$; 5) $y=(1-x)^2$; 6) $y=(2+x)^2$.

91. (Awızeki). Funkciya x>0 aralıqta óse me yaki kemeye me:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

92. $x > 0$ bolǵanda funkciya grafigi eskizin sızıń:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

93. Teńlemeniń oń korenin tabıń:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$;
5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; 7) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$; 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$.

94. Millimetrli qaǵazda $y = \sqrt[4]{x}$ funkciyasınıń grafigin sızıń. Grafik boyınsha:

1) y = 0,5; 1; 4; 2,5 bolǵanda x tiń mánislerin tabıń;

2) $\sqrt[4]{1,5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2,5}$; $\sqrt[4]{3}$ mánislerin juwıq túrde tabıń.

95. Funkciyalar grafikleri kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń:

1) $y=x^{\frac{4}{3}}$ hám $y=625$; 2) $y=x^{\frac{6}{5}}$ hám $y=64$;

3) $y=x^{\frac{3}{2}}$ hám $y=216$; 4) $y=x^{\frac{7}{3}}$ hám $y=128$.

96. 1) $y=x+\frac{1}{x}$ funkciyasınıń $0<x<1$ aralıqta kemeyiwin dálilleń;

2) $y=\frac{1}{x^2+1}$ funkciyasınıń $x\geq 0$ aralıqta kemeyiwi hám $x\leq 0$ aralıqta ósetuǵının dálilleń;

3) $y=x^3-3x$ funkciyasınıń $x\geq -1$ hám $x\geq 1$ aralıqlarda ósetuǵını $-1\leq x\leq 1$ kesindisinde kemetuǵının dálilleń;

4) $y=x-2\sqrt{x}$ funkciyasınıń $x\geq 1$ aralıqta ósetuǵını hám va $0\leq x\leq 1$ kesindisinde kemetuǵının dálilleń.

97. Funksiya grafigin jasań hám ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń::

1) $y=\begin{cases} x+2, \text{ eger } x\leq -1 \text{ bolsa,} \\ x^2, \text{ eger } x>-1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

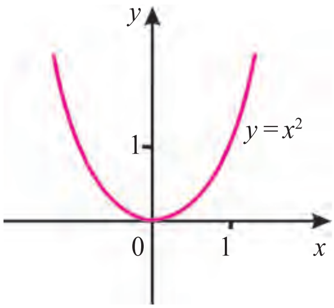
2) $y=\begin{cases} x^2, \text{eger } x\leq 1 \text{ bolsa,} \\ 2-x^2, \text{ eger } x>1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x-1, \text{ eger } x<-1 \text{ bolsa,} \\ -x^2+1, \text{ eger } x\geq -1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

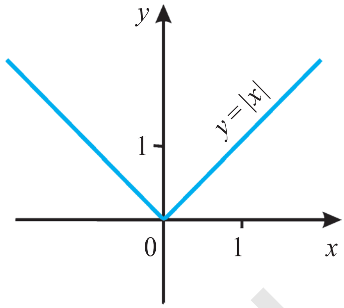
4) $y=\begin{cases} x^3, \text{ eger } x\leq 1 \text{ bo‘lsa,} \\ -x^2+2x, \text{ eger } x\geq 1 \text{ bolsa.} \end{cases}$

11-§. FUNKCIYANÍŃ JUPLÍLÍǴÍ HÁM TAQLÍǴÍ

Siz $y = x^2$ hám $y = |x|$ funkciyasınıń grafikleri ordinatalar kósherine qarata simmetriyalı (37 hám 38-súwretler) ekenligin bilesiz. Bunday funkciyalar *jup funkciyalar* dep ataladı.



37-súwret.



38-súwret.

Eger $y(x)$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastınan alınǵan qálegen x ushın $y(-x)=y(x)$ bolsa, bul funkciya jup funkciya delinedi.

Máselen, $y=x^4$ hám $y=\frac{1}{x^2}$ funkciyaları jup funkciyalar, sebebi qálegen x ushın $(-x)^4=x^4$ hám qálegen $x\neq 0$ ushın $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$.

1 - másele. $y=x^3$ funkciyasınıń grafigi koordinatalar basına salıstırǵanda simmetriyalı ekenligin dálilleń hám grafigin jasań.

△ 1) $y = x^3$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastı – barlıq haqıyqıy sanlar kópligi.

2) $y = x^3$ funkciyasınıń mánisleri $x>0$ bolǵanda oń, $x<0$ bolǵanda teris, $x=0$ bolǵanda nolge teń.

○ Meyli, $(x_0;\ y_0)$ noqatı $y = x^3$ funkciyasınıń grafigine tiyisli, yaǵnıy $y_0 = x_0^3$ bolsın. $(x_0;\ y_0)$ noqatına koordinatalar basına salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan noqat $(-x_0;\ -y_0)$ koordinatalarına iye boladı. Bul noqat ta $y = x^3$ funkciyanıń grafigine tiyisli boladı, sebebi, $y_0 = x_0^3$ tuwrı teńliktiń eki jasawǵa imkaniyat beredi: dáslep grafik $y_0=x_0^3$ tuwrı teńliktiń eki jaǵın da -1 ge kóbeytip, $-y_0=-x_0^3$ eki $-y_0=(-x_0)^3$ payda etemiz. ●

Bul qásiyet $y = x^3$ funkciyasınıń grafigin jasawǵa imkan beredi; dáslep grafik $x \geq 0$ ushın jasaladı, al sońınan onı koordinatalar basına qarata simmetriyalı sáwlelentiriledi.

3) $y = x^3$ funkciyası pútkil anıqlanıw oblastı boyınsha ósedi. Bul oń kórsetkishli dárejeli funkciyanıń $x\geq 0$ bolǵanda ósiw qásiyetinen

hám grafiktiń koordinatalar basına qarata simmetriyalılıǵınan kelip shıǵadı.

4) $x \geq 0$ bazı bir mánisleri (máselen, $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) ushın $y = x^3$ funkciyasınıń mánisleri kestesin dúzemiz, $x \geq 0$ bolǵanda grafiktiń bir bólegin jasaymız hám sońınan simmetriya járdeminde grafiktiń x tiń teris mánislerine sáykes keliwshi bólegin jasaymız (39-súwret).

Grafikleri koordinatalar basına qarata simmetriyalı bolǵan funkciyalar taq funkciyalar dep ataladı. Solay etip, $y = x^3$ – bul taq funkciya.

Eger y(x) funkciyasınıń anıqlaw oblastınan alınǵan qálegen x ushın

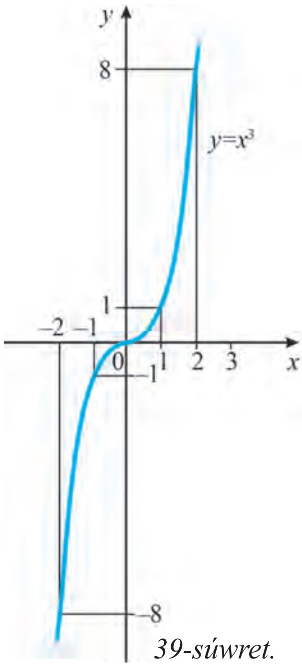
$$y(-x) = -y(x)$$

bolsa, bul funkciya taq funkciya delinedi.

Máselen, $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ funkciyaları taq funkciyalar, sebebi qálegen x ushın $(-x)^5 = -x^5$ hám qálegen $x \neq 0$ ushın $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$.

Jup hám taq funkciyalardıń *anıqlanıw oblastı koordinatalar basına qarata simmetriyalı* ekenligin eskertip ótemiz.

Juplıq yaki taqlıq qásiyetlerine iye bolmaǵan funkciyalar da bar. Máselen, $y = 2x + 1$ funkciyasınıń jup ta, taq ta funkciya emesligin kórsetemiz. Eger bul funkciya jup bolǵanında, onda barlıq x ushın $2(-x) + 1 = 2x + 1$ teńlik orınlanǵan bolar edi; biraq, máselen, $x=1$ bolǵanda bul teńlik nadurıs: $-1 \neq 3$. Eger bul funkciya taq bolǵanında, onda barlıq x ushın $2(-x) + 1 = -(2x - 1)$ teńlik orınlanǵan bolar edi; biraq, máselen, $x = 2$ bolǵanda bul teńlik nadurıs: $-3 \neq -5$.



39-súwret.

2- másele. $y = \sqrt[3]{x}$ funkciyasınıń grafigin jasań.

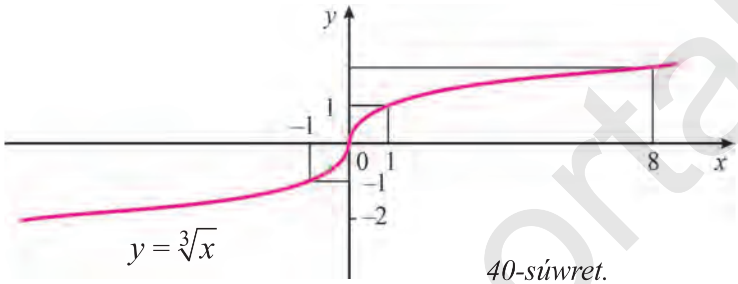
△ 1) Anıqlanıw oblastı–barlıq haqıyqıy sanlar kópligi;

2) funkciya – taq, sebebi, qálegen x ushın $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) $x \geq 0$ bolǵanda, funkciya oń kórsetkishli dárejeli funkciyanıń qásiyetine muwapıq ósedi, sebebi $x \geq 0$ bolǵanda $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) $x > 0$ bolǵanda funkciyanıń mánisi oń; $y(0) = 0$;

5) grafikke tiyisli bir neshe, máselen, (0; 0), (1; 1), (8; 2) noqatların tawıp, $x \geq 0$ diń mánisleri ushın grafiktiń bir bólegin jasaymız hám sońınan simmetriya járdeminde $x < 0$ ushın grafiktiń ekinshi bólegin jasaymız (40-súwret). ▲



40-súwret.

$y = \sqrt[3]{x}$ funkciyası barlıq x lar ushın, $y = x^{\frac{1}{3}}$ funkciyası bolsa tek $x \geq 0$ ushın anıqlanǵanın eskertip ótemiz.

Shınıǵıwlar

Funkciyanıń taq yaki jup bolıwın anıqlań (**98–99**):

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Funkciya grafiginiń eskizin sızıń:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. Funkciya jup ta, taq ta emesligin kórsetiń:

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Funkciyanıń taq yaki jup bolıwın anıqlań:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Simmetriyadan paydalanıp, jup funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

104. Simmetriyadan paydalanıp, taq funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Funkciyanıń qásiyetlerin anılqań, onıń grafigin jasań:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$;

106. Funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ eger } x\geq 0 \text{ bolsa,} \\ x^3, \text{ eger } x<0 \text{ bolsa;} \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, \text{eger } x>0 \text{ bolsa,} \\ x^2, \text{eger } x\leq 0 \text{ bolsa;} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{eger } x\leq 0 \text{ bolsa,} \\ -x^2, \text{eger } x\geq 0 \text{ bolsa;} \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^4, \text{ eger } x\leq 1 \text{ bolsa,} \\ -x^2+2x, \text{ eger } x\geq 1 \text{ bolsa.} \end{cases}$

Argumenttiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisleri oń bolatuǵının anıqlań. Ósiw hám kemeyiw aralıqların kórsetiń.

107. y funkciyası berilgen:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

$x>0$ bolǵanda y funkciyasınıń grafigin jasań. $x<0$ ushın usı funkciyalardıń hárbiriniń grafigin jasań, jasalǵan grafik: a) jup funkciyanıń; b) taq funkciyanıń grafigi bolsın. Payda etilgen hárbir funkciyanı bir formula menen beriń.

108. Funkciya grafiginiń simmetriya kósheriniń teńlemesin jazıń:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Funkciya grafiginiń simmetriya orayınıń koordinataların kórsetiń:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

12-§. DÁREJE QATNASQAN TEŃSIZLIK HÁM TEŃLEMELER

Dárejeli funkciyanıń qásiyetlerinen hár qıylı teńleme hám teńsizliklerdi sheshiwde paydalanıladı.

1-másele. $x^5>32$ teńsizlikti sheshiń.

△ $y=x^5$ funkciyası x tiń barlıq haqıyqıy mánislerinde anıqlanǵan hám anıqlanıw oblastında ósiwshi funkciya. $y(2)=32$ bolǵanlıqtan $x>2$ bolǵanda $y(x)>32$ hám x<2 bolǵanda $y(x)>32$.

Juwabı: $x>2$. ▲

2-másele. $x^4\leq 81$ teńsizligin sheshiń.

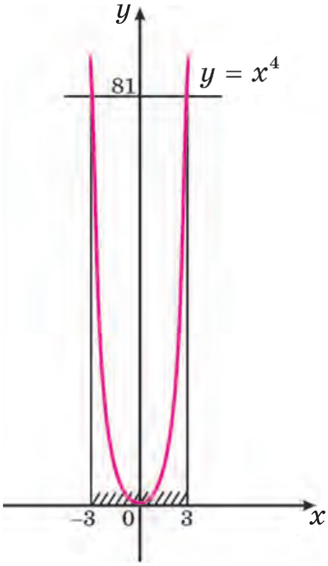
△ $y=x^4$ funkciyası $x\leq 0$ bolǵanda kemeyedi hám $x\geq 0$ bolǵanda ósedi. $x^4\leq 81$ teńlemesi eki haqıyqıy korenge iye: $x_1=-3$, $x_2=3$. Sonlıqtan da $x^4\leq 81$ teńsizligi $x\leq 0$ bolǵanda $-3\leq x\leq 0$ sheshimlerine hám $x\geq 0$ bolǵanda $0\leq x\leq 3$ sheshimlerine iye (41-súwret).

Juwabı: $-3\leq x\leq 3$. ▲

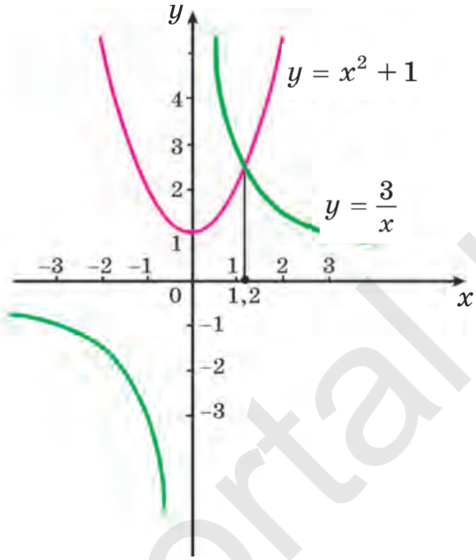
3-másele. Funkciyanıń grafikleri járdeminde $\frac{3}{x}=x^2+1$ teńlemesin sheshiń.

Bir koordinatalar tegisliginde $y=\frac{3}{x}$ hám $y=x^2+1$ funkciyalarınıń grafigin jasaymız (42-súwret).

△ $x<0$ bolǵanda $\frac{3}{x}=x^2+1$ teńlemesi korenlerge iye emes, sebebi $\frac{3}{x}<0$, biraq $x^2+1>0$. $x>0$ bolǵanda bul teńleme usı funkciyalar kesisiw noqatınıń abcissasına teń bolǵan bir ǵana korenge iye. 42-súwretten bul korenniń $x_1\approx 1{,}2$. ekenligi kórinip tur. Teńleme basqa oń korenlerge iye emes, sebebi $x>x_1$ bolǵanda $y=\frac{3}{x}$ funkciyası kemeyedi, al $y=x_2+1$ funkciyası



41-súwret.



42-súwret.

ósedi. Demek, funkciyalardıń grafikleri $x > x_1$ bolǵanda kesilispeydi. Tap usı sebepke baylanıslı, olar $0 < x < x_1$ bolǵanda kesilispeydi.

Juwabı: $x_1 \approx 1{,}2$. ▲

4-másele. Teńlemeni sheshiń:

$$\sqrt{2 - x^2} = x. \qquad (1)$$

△ Meyli, x – berilgen teńlemeniń koreni bolsın, yaǵnıy x – sonday san bolıp, (1) teńlemeni durıs teńlikke aylandıradı. Teńlemeniń eki jaǵın da kvadratqa kóterip, mınaǵan iye bolamız:

$$2 - x^2 = x^2. \qquad (2)$$

Bunnan $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Demek, (1) teńleme korenlerge iye dep boljap, biz bul korenler tek 1 hám –1 bolıwı múmkinligin bilip aldıq. Endi, bul sanlar (1) teńlemeniń korenleri bolıw yaki bolmaslıǵın tekseremiz. $x = 1$ bolǵanda (1) teńleme durıs teńlikke aylanadı: $\sqrt{2 - 1^2} = 1$. Sonlıqtan da x=1 (1) teńlemeniń koreni.

$x=-1$ bolǵanda teńlemeniń shep jaǵı $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$ ge teń, al oń jaǵı -1 ge teń, yaǵnıy $x=-1$ (1) teńlemeniń koreni bola almaydı.

Juwabı: $x=1$. ▲

Qaralǵan máselede (1) teńleme onıń eki jaǵın da kvadratqa kóteriw jolı menen sheshiledi. Bunda (2) teńleme payda boladı.

(1) teńleme tek bir ǵana korenge iye: $x=1$, (2) teńleme eki korenge iye: $x_{1,2}=\pm 1$, yaǵnıy (1) teńlemeden (2) teńlemege ótiwge *jat korenler* dep atalıwshı korenler payda boldı. Sonıń ushın da $x=-1$ bolǵanda (1) teńleme $1=-1$ den ibarat nadurıs teńlikke aylanadı, al bul nadurıs teńliktiń eki jaǵın da kvadratqa kóteriwge bolsa $1^2=(-1)^2$ tan ibarat durıs teńlik payda boldı.

! **Teńlemeniń eki jaǵın da kvadratqa kóteriwde jat korenler payda bolıwı múmkin.**

Teńlemeni onıń eki jaǵın da kvadratqa kóteriw menen sheshiwde tekseriw ótkeriw kerek.

(1) teńleme – *irracional teńlemege mısal.*

Jáne irracional teńlemelerge mısallar keltiremiz:

$$\sqrt{3-2x}=1 \quad x; \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}.$$

Bir neshe irracional teńlemelerdi sheshiwdi qaraymız.

5- másele. Teńlemesin sheshiń: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Teńlemeniń eki jaǵın da kvadratqa kóteremiz:

$$5-2x=x^2-2x+1$$

yaki $x^2=4$, bunnan $x_1=2$, $x_2=-2$. Tabılǵan korenlerdi tekseremiz.

$x=2$ bolǵanda berilgen teńlemeniń shep jaǵı $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$ ge teń, oń jaǵı $1-2=-1$ ge teń. $1\neq -1$ bolǵanlıqtan $x=2$ berilgen teńlemeniń koreni bola almaydı.

$x=-2$ bolǵanda berilgen teńlemeniń shep jaǵı $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=3$ ke teń, oń jaǵı $1-(-2)=3$ ke teń. Demek, $x=-2$ berilgen teńlemeniń koreni.

Juwabı: $x=-2$. ▲

6- másele. Teńlemeni sheshiń: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Bul teńlemeni $\sqrt{x-2}=-3$ túrinde jazıp alamız.

Arifmetikalıq koren teris bolıwı múmkin emes, demek, bul teńleme korenlerge iye emes.

Juwabı: korenleri joq. ▲

7- másele. Teńlemeni sheshiń: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△ Teńlemeniń eki jağın kvadratqa kóterip, mınağan iye bolamız:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Uqsas ağzaların jıynap, teńlemeni tómendegi túrde jazamız:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ yoki } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Aqırğı teńlemeniń eki jağın da kvadratqa kótereyik:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ yoki } x^2-12x+20=0,$$

bunnan $x_1=2$, $x_2=10$. Tekseriw 2 hám 10 sanlarınan hárbiri berilgen teńlemeniń koreni bolatuğının kórsetedi.

Juwabı: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

8- másele. Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{5-x}\le 7+x$.

△ Teńsizlik x tiń $-7\le x\le 5$ mánislerinde sheshimge iye. Eger, teńsizlik sheshimge iye bolsa, sheshim [–7; 5] kesindige tiyisli boladı. Teńsizliktiń hár eki bólegin kvadratqa kóteremiz hám ápiwayılastırılğannan soń $x^2+15x+44\ge 0$ teńsizligine iye bolamız. Onıń sheshimi $x\le -11$, $x\ge -4$ ekenligi belgili. Bul aralıqlardıń [–7; 5] kesindi menen ulıwma bólegi $[-7;5]$ yağnıy, [–4; 5] kesindisi boladı:

Juwabı: $-4\le x\le 5$. ▲

Shınığıwlar

110. Teńsizlikti sheshiń:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\le 27$; 3) $y^3\ge 64$; 4) $y^3<125$;
5) $x^4\le 16$; 6) $x^4>625$; 7) $x^5\le 243$; 8) $x^6\ge 64$.

111. 1) Eger kvadrattıń maydanı 361 cm^2 tan úlken ekenligi belgili bolsa, onıń tárepiniń uzınlıǵı qanday bolıwı múmkin?
2) Kvadrattıń maydanı 343 dm^3 tan úlken ekenligi belgili bolsa, onıń qırı qanday bolıwı múmkin?

112. (Awızeki.) 7 sanı teńlemeniń koreni bolatuǵının kórsetiń:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Awızeki.) Teńlemeni sheshiń:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Teńlemeni sheshiń (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;
4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;
4) $\sqrt{0,4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

118. Teńsizlikti sheshiń:
1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;
4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Berilgen teńleme ne ushın korenlerge iye emesligin túsindiriń:
1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;
4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Teńlemeni sheshiń (**120–122**):

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. x tiń qanday mánislerinde funkciyalar birdey mánislerdi qabıl etedi:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Teńsizlikti sheshiń:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\le 1$; 3) $\sqrt{2-x}\ge x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\le x+1$.

I Bapqa tiyisli shınıǵıwlar

125. x tiń $y = 2x^2 - 5x + 3$ kvadrat funkciyası: 1) 0 ge; 2) 1 ge; 3) 10 ǵa; 4) –1 ge teń mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

126. Teńsizlikti sheshiń:
1) $x^2 \le 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \ge 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Parabolanıń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatları koordinataların tabıń:
1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha onıń qásiyetlerin anıqlań:

1) $y = x^2 - 5x + 6$;
2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$;
4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 600 m. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı eń úlken bolıwı ushın onıń ultanı menen biyikligi qanday bolıwı kerek?

131. Eger $y = x^2 + px + q$ kvadrat funkciyası:

1) $x=0$ bolǵanda 2 ge teń mánisti, $x=1$ bolǵanda 3 ke teń mánisti qabıl este, onda p, q koefficientin tabıń;
2) $x=0$ bolǵanda 0 ge teń mánisti, $x=2$ bolǵanda bolsa 6 ǵa teń mánisti qabıl etse, onda p, q koefficietin tabıń.

132. x tiń qanday mánislerinde funkciyalar teń mánislerdi qabıl etedi:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ va $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ va $y = |3x - 3|$?

Teńsizlikti sheshiń (**133–137**):

133. 1) $(x - 5,7)(x - 7,2) > 0$;
2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2,5)(3 - x) < 0$;
4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$;
2) $x^2 > 36$;
3) $4 > x^2$;
4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$;
2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$;
4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$;
2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$;
4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$;
6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$;
2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;
3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$;
4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$;
5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;
6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$;
7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$;
8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Teńsizlikti sheshiń (**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\geq 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\leq (x+1)^2$;

3) $x(1-x)>1{,}5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\geq x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2}<0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1}\leq 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geq 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2}\leq 0$.

140. Kater 4 saattan kóp bolmaǵan waqıt dawamında dárya aǵısı boyınsha 22,5 km júziwi hám keyinge qaytıwı kerek. Eger, dárya aǵısınıń tezligi 3 km/saat bolsa, kater suwǵa salıstırǵanda qanday tezlik penen júziwi kerek?

141. Funkciyalardıń grafiklerin bir kordinata sistemasında jasań hám x tiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisi ekinshisinen úlken (kishi) bolatuǵının anıqlań. Nátiyjeni tiyisli teńsizlikti sheship, tekseriń:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$.

Funkciyalar grafikleriniń kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń(**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$; 3) $y=3x$, $y=\frac{3}{x}$.

143. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

144. Teńsizlikti sheshiń:

1) $x^4\leq 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\leq -32$.

Teńlemeni sheshiń (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

147. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; 5) $y=\sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x+7}}$; 6) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Funkciyanıń kórsetilgen aralıqta ósiwi yaki kemeyiwin anıqlań:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}, x>3$ aralıqta; 2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}, x<2$ aralıqta;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}, x\geq 0$ aralıqta; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x<-1$ aralıqta.

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIŃ!

1. $y = -x^2 + 2x + 3$ funkciyasınıń grafigi járdeminde x tiń qanday mánisinde funkciyanıń mánisi 3 ke teń bolatuǵının tabıń.

2. $y=1-x^2$ funkciyasınıń grafigi boyınsha x tiń funkciyası oń: teris mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

3. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ funkciya qanday aralıqlarda ósedi? Kemiydi? Bul funkciyanıń grafigin jasań.

4. Teńsizliklerdi intervallar usılı menen sheshiń:

1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Teńlemeni sheshiń:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Funkciyanıń jup yaki taq ekenligin anıqlań:

1) $y = x^6 - 3x^4 + x^2 - 2$; 2) $y = x^5 - x^3 + x$;

3) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; 4) $y = x^7 + x^5 + 1$.

150. Teńsizlikti sheshiń:

1) $(3x+1)^4 > 625$; 2) $(3x^2 + 5x)^5 \leq 32$; 3) $(x^2 - 5x)^5 > 216$.

151. Teńsizlikti sheshiń:

1) $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = x + 1$; 2) $\sqrt{3x^2 - 4x + 2} = x + 4$;

3) $\sqrt{x + 11} = 1 + \sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x + 19} = 1 + \sqrt{x}$.

152. Teńsizlikti sheshiń:

1) $\sqrt{x^2 - 8x} > 3$; 2) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$; 3) $\sqrt{3x - 2} > x - 2$;

4) $\sqrt{2x + 1} \leq x - 1$; 5) $\sqrt{3 - x} > 1 - x$; 6) $\sqrt{4x - x^2} > 4 - x$.

I bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

Sınaq shınıǵıwlardıń hárbirine 4 ewden "juwap" berilgen. Tórt "juwap"tıń tek birewi durıs, qalǵanları bolsa nadurıs. Oqıwshılardıń sınaq shınıǵıwlardı orınlaw yaki basqa talqılawlar járdeminde usı durıs juwaptı tabıw (onı bel-gilew) talap etiledi.

1. a nıń sonday mánisin tabıń, ol $y = ax^2$ parabola menen $y = 5x + 1$ tuwrı sızıqtıń kesilisiw noqatlarınan biriniń abcissası $x = 1$ bolsın.

A) $a = 6$; B) $a = -6$; C) $a = 4$; D) $a = -4$.

Parabolanıń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4$.

A) $(-1;\ 3)$; B) $(3;\ 1)$; C) $(1;\ 3)$; D) $(0;\ 4)$.

3. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

A) $(\frac{1}{3};\ 0)$, $(\frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ 1)$; B) $(-\frac{1}{3};\ 0)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$, $(1;\ 0)$;

C) $(0;\ \frac{1}{3})$, $(0;\ \frac{1}{2})$, $(0;\ 1)$; D) $(\frac{1}{3};\ 0)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ -1)$.

Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; –4); D) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) (–3; –4); B) (–5; –1); C) (–1; –5); D) (3; 4).

6. Abcissalar kósherin x = 1 hám x = 2 noqatında, ordinata kósherin bolsa $y=\frac{1}{2}$ noqatında kesip ótiwshi parabolanıń teńlemesin jazıń.

A) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; B) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$;

C) $y = x^2 - 3x + 2$; D) durıs juwap berilmegen.

Parabola qaysı shereklerde jaylasqan? (**7–8**):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, III, IV; D) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, II.

9. Eki oń sannıń qosındısı 160. Eger sanlardıń kublarınıń qosındısı eń kishi bolsa, usı sanlardı tabıń.

A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80.

10. $y = x^2 - 4x + 3$ funksiyasınıń eń kishi mánisin tabıń.

A) –1; B) 1; C) 7; D) –8.

Teńsizlikti sheshiń (**11–17**):

11. $2x^2-8\leq 0$.

A) $-2\leq x\leq 2$; B) $-2\leq x$; C) $x\geq 2$; D) $0\leq x\leq 4$.

12. $3x^2-9\geq 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$; D) $x \geq 3$.

13. $6x^2+5x-6>0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; B) $x < \frac{3}{2}$; C) $x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-3x-10} \leq 0.$

A) $-2<x\leq 2$; B) $-2< x <5$; C) $x\neq -2,\ x\neq 5$; D) $-2<x<0$.

15. $\dfrac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \geq 0.$

A) $-2<x<3$; B) $x<-2;\ -1\leq x\leq 1,\ x>3$;

C) $-1 \leq x<3$; D) $x\neq -2,\quad x\neq 3$.

16. $x^2+6x+5<0$ teńsizliktiń barlıq pútin sheshimleriniń qosındısın tabıń.

A) 10; B) 9; C) –9; D) –10.

17. a nıń qanday mánislerinde $ax^2+4x+9a<0$ teńsizlik x tiń barlıq mánislerinde orınlı boladı?

A) $a<-\dfrac{2}{3}$; B) $a>\dfrac{2}{3}$; C) $a<-1$; D) $a>1$.

18. a nıń qanday mánislerinde $ax^2-8x-2<0$ teńsizlik x tiń barlıq mánislerinde orınlı boladı?

A) $-8<a<8$; B) $a\geq 8$; C) $a<8$; D) $a<-8$.

19. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń: $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$.

A) $1\leq x\leq 2$; B) $1<x<2$; C) $x\geq 2,\ x\leq 1$; D) $-2\leq x\leq -1$.

20. Funkciyalardıń qaysıları jup funkciya?

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x^2+|x|$; 3) $y=-3+\dfrac{5}{x^4}$; 4) $y=x^2-\dfrac{3}{x}$.

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.

21. Funkciyalardıń qaysıları taq funkciya?

1) $y=6x$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=4x+7$; 4) $y=2x^3-10$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

1-másele. Jeńil avtomobil ózgermeytuǵın υ tezlik penen háreketlenip kiyatır. Stop sızıǵına shekem 50 metr qalǵanda svetofordıń jasıl sveti óship jana basladı. Sonnan yarım sekund ótkennen keyin shofer tormozlawdı basladı hám stop sızıǵına jetpey toqtadı. Jol háreketi qaǵıydalarınan belgili bolǵanınday, υ_0=50 km/saat tezlik penen háreketlenip kiyatırǵan avtomobildiń tormozlanıw jolı S_0=23,5 m, bunda tormozlanıw jolı dep tormozlanıw baslanıwdan, toqtaǵanǵa shekemgi avtomobil basıp ótken jolǵa aytıladı. Avtomobildiń svetofor óship, janıwı baslaǵandaǵı tezligin bahalań.

△ Svetofor óship, jana baslaǵanınan, tormozlanıw baslanaman degenshe, avtomobil 0,5 υ metr aralıqtı, keyin bolsa fizika kursınan málim bolǵan kυ^2 tormozlanıw jolın basıp ótedi, bunda

$$k = \frac{s_0}{\upsilon_0^2} = \frac{23,5}{13,88^2} \approx 0,12.$$

Demek, ulıwma basıp ótilgen aralıq, 50 km/saat tezliktiń metr sekundlarda 13,88 m/sek ekenligin esapqa alsaq, 50 metrden aspawı kerek ekenliginen

$$0,5\upsilon + 0,12\upsilon^2 \leq 50,$$

yaǵnıy

$$0,12\upsilon^2 + 0,5\upsilon - 50 \leq 0. \qquad (1)$$

△ Bul teńsizlikti sheshiw ushın, dáslep $0,12\upsilon^2 + 0,5\upsilon - 50$ úsh aǵzalınıń korenlerin tabamız:

$$0,12\upsilon^2 + 0,5\upsilon - 50 = 0,$$

bunnan

$$12\upsilon^2 + 50\upsilon - 5000 = 0.$$

Teńlemeni sheshemiz:

$$\upsilon_{1,2} = \frac{-50 - \sqrt{50^2 - 4\cdot 12(-5000)}}{2\cdot 12} = \frac{-25(1-\sqrt{97})}{12},$$

bunnan $\upsilon_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ hám $\upsilon_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Onda, (1) teńsizliktiń sheshimi $\upsilon_1 \leq \upsilon \leq \upsilon_2$ aralıqtaǵı sanlardan ibarat boladı. Biraq, máseleniń mazmunında $\upsilon > 0$, demek, bahalanıp atırǵan tezlik $0 < \upsilon \leq \upsilon_2$ aralıqtan sırtqa shıǵıp ketpewi kerek. Yaǵnıy, $\upsilon \leq \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18{,}43$ m/sek yaki 66,35 km/saat dan aspawı kerek.

Juwabı: tezlik 66,35 km/saattan aspawı kerek. ▲

2-másele. Bazarda belgili bir túrdegi tovarlardan *n* danası bar hám olardıń danası *p* púl birligine satılmaqta dep alayıq. Monitoring, bul tovarǵa bolǵan talap asqanda, onıń bahası kóteriledi hám keltiriletuǵın usınday tovarlar sanı $n=40p$ formula boyınsha ósetuǵının kórsetti. Ekinshi tárepten, bazarǵa kirip kelip, tutınıwshıǵa usınıs etiletuǵın tovarlar sanı *n* óse baslawı menen onıń bahası keri proporcional túrde túsip barıwı belgili:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Bazarǵa kirip kelip atırǵan tovarlar sanına qoyılatuǵın shártti anıqlań.

△ Máselede soralıp atırǵan shártti anıqlaw ushın usınıs etilip atırǵan baha $\frac{150}{n-40}$ talapqa baylanıslı, baha $\frac{n}{40}$ den tómen bolmawı kerek shártinen paydalanamız:

$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

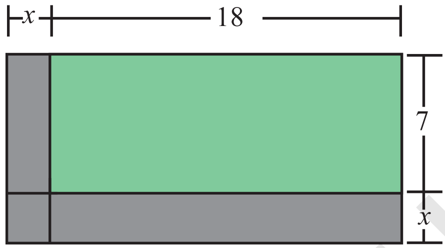
Bunnan

$$n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

teńsizlikti payda etemiz. Onıń sheshimleri $-60 \leq n \leq 100$. Máseleniń mazmunı boyınsha bazarǵa kirip keletuǵın tovarlar sanı *n* natural san hám ol 100 den aspawı kerek.

Juwabı: $n \leq 100$. ▲

3-másele. Siz 18 metrli baǵıńızdıń eki tárepine 7 metrli tastan trotuar isleyjaqsız (43-súwret). Biraq, Siz buniń ushın 54 kvadrat metrden aspaytuǵın jerdi qaplap alıwǵa jetetuǵın qarjı ajırata alasız. Bunda trotuardıń eni kóbi menen qanday bolıwı kerek?



43-súwret.

△ Máseleniń sheshimin tabıw ushın ulıwma maydan $(x + 18) \cdot (x + 7)$ kv.m den baǵdıń maydanı $18 \cdot 7 = 126$ ni alıp, nátiyjede trotuardıń maydanı 54 kv.m den asraytuǵınlıǵın esapqa alıwıńız kerek:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \qquad (1)$$

Bunnan

$$x^2 + 25x - 54 \leq 0 \qquad (2)$$

kvadrat teńsizlikti payda etemiz. $x^2+25x-54$ kvadrat úsh aǵzalınıń korenleri $x_1 = -27$ hám $x_2 = 2$ bolǵanı ushın (2) teńsizliktiń sheshimleri $-27 \leq x \leq 2$ aralıqtaǵı sanlardan ibarat boladı. Biraq, máseleniń mazmunında trotuardıń eni x teris san yaki nol bola almaydı. Sonıń ushın trotuardıń eni $0 < x \leq 2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı san bola aladı. Demek, trotuardıń eni 2 metrden aspawı kerek.

Juwabı: trotuardıń eni kóbi menen 2 metr. ▲

Máseleler

1. Júk mashinası *v* turaqlı tezlik penen háreketlenip kiyatır. Stop sızıǵına shekem 50 metr qalǵanda svetofordıń jasıl sveti óship jana basladı. Sonnan yarım sekund ótkennen keyin shofer tormozlawdı basladı hám stop sızıǵına jetpey toqtadı. Jol háreketi qaǵıydalarınan belgili bolǵanınday, v_0=50 km/saat tezlik penen háreketlenip kiyatırǵan júk mashinasınıń tormozlanıw jolı S_0=28,9 m. Júk mashinasınıń svetofor óship, janıwı baslaǵandaǵı *v* tezligin 0,01 anıqlıqta bahalań.

2. Bazarda belgili bir túrdegi tovarlardan n danası bar hám olardıń danası p púl birligine satılmaqta dep alayıq. Monitoring, bul tovarǵa bolǵan talap asqanda, onıń bahası kóteriledi hám keltiriletuǵın usınday tovarlar sanı $n=60p$ formula boyınsha ósetuǵının kórsetti. Ekinshi tárepten, bazarǵa kirip kelip, tutınıwshıǵa usınıs etiletuǵın tovarlar sanı n óse baslawı menen onıń bahası keri proporcional túrde túsip barıwı belgili:

$$p = \frac{60}{n-40}.$$

Bazarǵa kirip kelip atırǵan tovarlar sanına qoyılatuǵın shártti anıqlań.

3. Kompaniya reklama ushın ulıwma x (100 mıńlarda) swm jumsadı hám onıń nátiyjesinde P payda kórdi dep alayıq, bunda $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Reklamaǵa qansha pul sarıplansa, nátiyjede eń kóp payda kóredi?

4. Ónim islep shıǵarıwshı kishi kárxananıń aylıq paydası $P=250n-n^2$ (mıń swmlarda) model menen kórsetiledi dep alayıq, bul jerde n – islep shıǵarılatuǵın hám satılatuǵın ónim sanı. Eń kóp payda alıw ushın kishi kárxana ayına qansha ónim islep shıǵarıwı hám satıwı kerek?

5. Qubla Amerikanıń jawınlı toǵaylarınıń birinde siyrek ushırasatuǵın shıbın-shirkeydiń túri tabıldı hám dógerek – átiraptı úyreniwshi qánige shıbın-shirkeylerdi qorshalǵan territoriyaǵa ótkizdi. Ótkizilgennen keyin olardıń sanı t ayda

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t)$$

nızam boyınsha kóbeyip barǵan bolsa:

1) $t = 0$ shıbın-shirkeyler sanı qansha bolǵan?
2) 10 jıldan keyin olardıń sanı qansha boladı?
3) Qashan olardıń sanı 549 boladı?

Abu Rayxan Beruniy (973–1048)

«Funkciya» sózi latınsha «functio» sózinen alınǵan bolıp, ol «ámelge asırıw», «orınlaw» degen mánini bildiredi. Funkciyanıń dáslepki anıqlamaları **G. Leybnis** (1646 – 1716), **I. Bernulli** (1667–1748), **N.I. Lobachevskiy** (1792 –1856) miynetlerinde berilgen.

Funkciyanıń házirgi anıqlamasın bilmese de, áyyemgi alımlar shamalar arasında funkcional qatnas bolıwı lazım ekenligin túsingen.

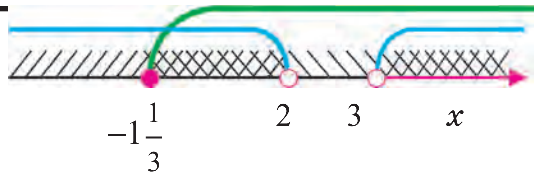
Tórt mıń jıldan burınıraq Bobil alımları radiusı r bolǵan dóńgelektiń maydanı ushın shamalap bolsa da $S = 3r^2$ formulasın keltirip shıǵarǵan.

Sannıń dárejesi haqqındaǵı dáslepki maǵlıwmatlar, áyyemgi bobilliklerden bizge shekem jetip kelgen áyyemgi jazıwlarda keltirilgen. Ásirese, olarda natural sanlardıń kvadratları, kublarınıń kesteleri berilgen.

Natural sanlardıń kvadratları, kublarınıń kesteleri, logarifmler kestesi, trigonometiyalıq kesteler, kvadrat korenler kesteleri shamalar arasındaǵı qatnastıń (funkciyanıń) keste usılında beriliwi bolıp tabıladı.

Ullı alım **Abu Rayxan Beruniy** de óz miynetlerinde funkciya túsiniginen, onıń qásiyetlerinen paydalanǵan. Abu Rayxan Beruniy belgili «Qonuni Masudiy» miynetiniń 6-maqalasında argument (erkli ózgeriwshi) hám funkciyanıń (erksiz ózgeriwshiniń) ózgeriw aralıqları, funkciyanıń belgileri, eń úlken hám eń kishi mánislerin táriyipleydi.

II BAP. TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLER SISTEMALARÍ



13-§. EKINSHI DÁREJELI TEŃLEME QATNASQAN EŃ ÁPIWAYÍ SISTEMALARDÍ SHESHIW

1- másele. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası $\sqrt{13}$ sm ge teń, onıń maydanı 3 cm^2. Úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

△ Úshmúyeshliktiń katetleri x hám y santimetrge teń bolsın. Pifagor teoreması hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanınıń formulasınan paydalanıp, másele shártin tómendegishe jazamız:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Sistemanıń birinshi teńlemesine 4 ke kóbeytilgen ekinshi teńlemesin qosıp, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

bunnan $(x + y)^2 = 25$ yaki $x + y = \pm 5$. x hám y ler oń sanlar bolǵanı ushın $x + y = 5$ boladı. Bul teńlemede y ti x arqalı ańlatamız hám (1) sistema teńlemeleriniń birine, máselen, ekinshi teńlemege qoyamız:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Payda bolǵan teńlemeni sheshemiz:

$$5x - x^2 = 6, \;\; x^2 - 5x + 6 = 0, \;\; x_1 = 2, \;\; x_2 = 3.$$

Bul mánislerdi $y = 5 - x$ formulaǵa qoyıp, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$ ni tabamız. Eki jaǵdayda da katetlerden biri 2 cm, ekinshisi 3 cm.

Juwabı: 2 cm, 3 cm. ▲

2- másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ Viet teoremasına keri teorema boyınsha, x hám y sanlar

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

kvadrat teńlemeniń korenleri boladı. Bul teńlemeni sheship, tómendegige iye bolamız: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Demek, sistemanıń sheshimleri tómendegi sanlar jubı boladı: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ hám $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Juwabı: (5; –2), (–2; 5). ▲

3- másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

△ Bul sistemanı ornına qoyıw usılı menen sheshemiz:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Bul teńlemeni ápiwayılastırıp, tómendegige iye bolamız: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, bunnan $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. x tiń mánisin $y = 3x - 6$ formulaǵa qoyıp, $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$ ekenin tabamız.

Juwabı: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

4- másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Sistemanıń birinshi teńlemesin tómendegishe jazamız:

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Buǵan $x-y=2$ ni qoyıp, $x+y=8$ di payda etemiz, solay etip,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Bul sistemanı qoyıw usılı menen sheship, $x=5$, $y=3$ ekenin tabamız.
Juwabı: (5; 3). ▲

Shınıǵıwlar

153. Eki belgisizge iye birinshi dárejeli teńlemeler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = -11, \\ xy = 18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 - y^2 = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x + y = 7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = 7. \end{cases}$

159. Eki sannıń qosındısı 18 ge, olardıń kóbeymesi 65 ke teń. Usı sanlardı tabıń.

160. Eki sannıń arifmetikalıq ortası 20 ǵa, olardıń geometriyalıq ortası 12 ge teń. Usı sanlardı tabıń.

161. Teńlemeler sistemasın sheshiń (**161–163**):

1) $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

164. Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydandı 1 km uzınlıqtaǵı diywal menen orap shıǵıw kerek. Eger, maydannıń beti 6 gektar bolsa, onıń boyı hám eni qanday bolıwı kerek?

14-§. TEŃLEMELER SISTEMASÍN SHESHIWDIŃ TÚRLI USÍLLARÍ

1-másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Sistema teńlemelerin aǵzama-aǵza qosıp, payda etemiz: $2x+2y=8$, bunnan $y=4-x$. Bul teńlikti sistemanıń qálegen, máselen, ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$x + 4 - x - 2x(4-x) = -2,$$
$$4-8x+2x^2=-2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$y=4-x$ bolǵanı ushın, $y_1=3$, $y_2=1$.

Juwabı: (1; 3), (3; 1). ▲

2-másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Sistemanıń birinshi teńlemesinen $y^2=x-3$. Bul teńlikti sistemanıń ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0,$$

Bunnan $x_1=7$, $x_2=-4$.

$y^2=x-3$ bolǵanı ushın y tiń mánisin tabamız:

1) Egerde $x=7$ bolsa, onda $y^2 = 7-3$, $y^2=4$, bunnan $y=2$ yaki $y=-2$;

2) Egerde $x=-4$ bolsa, onda $y^2=-4-3<0$, demek, haqıyqıy korenlerge iye emes.

Juwabı: (7; 2), (7; –2). ▲

Sonı aytıp ótiwimiz kerek, egerde birinshi teńlemede x ti y arqalı ańlatıp, ekinshi teńlemege qoyılsa, bikvadrat teńlemeni sheshiwge alıp keletuǵın edi.

3-másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Egerde, $(x;\ y)$ – sistemanıń sheshimi bolsa, onda $x \neq 0$ hám $y \neq 0$. Sistemanıń ekinshi teńlemesin tómendegishe jazamız: $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$.

Payda bolǵan teńlemege $x + y = 12$ mánisti qoyamız: $\frac{12}{xy} = \frac{3}{8}$, bunnan $xy = 32$.

Berilgen sistemanı sheshiw tómendegi sistemanı sheshiwge keltiriledi:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Viet teoremasına keri teorema boyınsha tómendegini payda etemiz: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Juwabı: (4; 8), (8; 4). ▲

4- másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Sistemanıń ekinshi teńlemesin $xy(x - y) = 2$ túrinde jazıp alamız. Bunda $x \neq 0$, $y \neq 0$, hám $x - y \neq 0$, ekenligi anıq, bul jaǵdayda sistemanıń birinshi teńlemesin ekinshi teńlemege bólip, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{7}{2};$$

$$2(x-y)(x^2+xy+y^2)=7xy,$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Payda bolǵan teńlemeni x ge keltirilgen kvadrat teńleme sıpatında qarap, korenlerin tabamız:

$$x_{1,2}=\frac{5y-\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y-3y}{4}.$$

Bunnan $x_1=2y$ yaki $x_2=\frac{y}{2}$.

Sistemanıń ekinshi teńlemesine x tiń y arqalı tabılǵan mánislerin qoyıp, tómendegini payda etemiz:

1) egerde $x=2y$ bolsa, onda $4y^3-2y^3=2$, bunnan $y^3=1$ hám $x=2$;

2) egerde $x=\frac{y}{2}$ bolsa, onda $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, bunnan $y^3=-8$, $y=-2$ hám $x=-1$.

Juwabı: (2; 1), (–1; –2).

5-másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x^3+8y^3=35. \end{cases}$$

Kublar qosındısı formulasın qollanıp, sistemanıń ekinshi teńlemesin tómendegishe jazamız:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Bul teńlemeni sisteamnıń birinshi teńlemesine bólip, tabamız: $x+2y=5$.

Bul teńlemeden $2y$ ti x arqalı ańlatamız: $2y=5-x$ hám sistemanıń ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$x^3+(5-x)^3=35,$$
$$x^3+125-75x+15x^2-x^3=35,$$
$$15x^2-75x+90=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=3,\ \ x_2=2.$$

Sáykes túrde y tiń mánislerin tabamız:

1) $2y=5-3$, bunnan $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, bunnan $y_2=\frac{3}{2}$.

Juwabı: (3; 1), $(2;\ \frac{3}{2})$.

6-másele. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x-y=5, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ dep belgilesek, $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$, $t>0$ boladı. Onda sistemanıń ekinshi teńlemesii $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$ kóriniske iye boladı. Bul teńlemeniń eki jaǵın da t ǵa jikleymiz:

$$t^2-\frac{5}{6}t-1=0.$$

Bunnan $t_{1,2}=\frac{5}{12}\mp\sqrt{\frac{25}{144}+1}=\frac{5}{12}\mp\frac{13}{12}$, $\quad t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{2}{3}$.

$t>0$ bolǵanı ushın $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$ yaki $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$, bunnan $x=\frac{9}{4}y$. x ushın bul teńlikti sistemanıń birinshi teńlemesine qoyıp, payda etemiz: $\frac{9}{4}y-y=5$, $\frac{5}{4}y=5$, $y=4$, sonıń ushın $x=9$.

Juwabı: (9; 4).

Shınıǵıwlar

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**165–175**):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

15-§. EKINSHI DÁREJELI BIR BELGISIZLI TEŃSIZLIKLER SISTEMALARÍ

1- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Bul teńsizliklerden birinshisi kvadrat teńsizlik, ekinshisi bola sızıqlı teńsizlik. Birinshi teńsizliktiń sheshimleri 6-paragraftaģı 2-máselede kórsetilgendey $x < 2$ hám $x > 3$ aralıqlarındaģı barlıq sanlardan ibarat. Ekinshi teńsizliktiń sheshimleri bolsa $x \geq -1\frac{1}{3}$ aralıqtaģı sanlar boladı. San kósherinde birinshi hám ekinshi teńsizliktiń sheshimlerin tabıwdı kórseteyik. Bunda sistemanıń eki teńsizligin bir waqıttıń ózinde qanaatlandırıwshı sanlar $-1\frac{1}{3} \le x < 2$ hám $x < 3$ aralıqlarınan ibarat (44-súwret).

44-súwret.

Juwabı: $-1\frac{1}{3} \le x < 2, x > 3.$ ▲

2-másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$|x^2 - x - 1| < 1.$$

△ $|x^2 - x - 1| < 1$ teńsizlik eki tárepleme teńsizlikke teń kúshli ekenin bilemiz:

$$-1 < x^2 - x - 1 < 1.$$

Bul eki teńsizlikten ibarat sistemaǵa teń kúshli:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

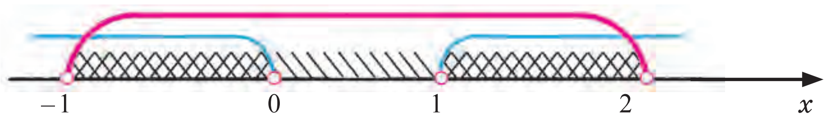
yaki

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Dáslep, birinshi teńsizlikti sheshemiz: $D = (-1)^2 - 4(-2) = 9 > 0$, demak, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Bunnan birinshi teńsizlikti qanaatlandırıwshı sanlar $-1 < x < 2$ aralıǵı ekenligi kelip shıǵadı.

Ekinshi teńsizlikti sheshemiz: $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Demek, bul teńsizliktiń sheshimi $x < 0$ hám $x > 1$ aralıqlardaǵı barlıq sanlar boladı.

Eki teńsizliktiń sheshimlerin san kósherinde kórsetemiz (45-súwret).



45-súwret.

Bunnan sistemanıń sheshimi $-1<x<0$ hám $1<x<2$ aralıqlarda jatqan barlıq sanlardan ibarat ekenligi kelip shıǵadı.

Juwabı: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

3-másele. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

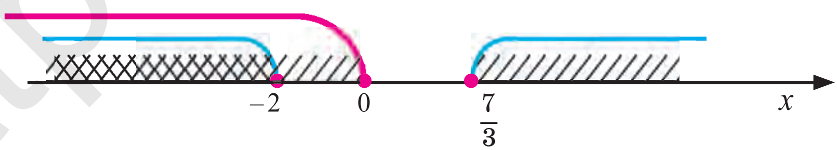
△ Kvadrat korende turǵan sanlar teris bolmawı shárt bolǵanı ushın, berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastı tómendegi teńsizlikler sistemasınıń sheshiminen ibarat:

$$\begin{cases}3x^2-x-14\geq 0,\\ -x\geq 0.\end{cases}$$

Dáslep, birinshi teńsizlikti sheshemiz. $3x^2-x-14$ kvadrat úsh aǵzalı diskriminantı $D=(-1)^2-4\cdot 3(-14)=169$, demek, $x_1=\frac{1-13}{6}=-2$, $x_2=\frac{1+13}{6}=\frac{7}{3}$. Sonıń ushın hám kvadrat úsh aǵzalınıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlanǵanı ushın birinshi teńsizliktiń sheshimleri $x\leq -2$ hám $x\geq\frac{7}{3}$. aralıqlarınan ibarat.

Ekinshi teńsizlikti -1 ge jiklep, onıń sheshimleri $x\leq 0$ aralıqtan alınǵan barlıq sanlardan ibarat ekenligin kóriwimizge boladı.

Birinshi hám ekinshi teńsizliklerdiń sheshimlerin san kósherinde kórsetemiz (46-súwret).



46-súwret.

Bunnan sistemanıń sheshimi $x\leq -2$ ekenligi kelip shıǵadı.

Juwabı: $x\leq -2$. ▲

176. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 4x+9>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

177. Teńsizlikti sheshiń:

1) $|x^2-6x|<27$; 2) $|x^2+6x|\le 27$;

3) $|x^2+4x|<12$; 4) $|x^2-4x|\le 12$.

Teńsizlikler sistemaların sheshiń (**178–181**):

178. 1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x-x^2>0, \\ 36-x^2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+x^2<0, \\ 49-x^2>0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2+x+20\le 0, \\ x^2-x-2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x<0, \\ -x^2+x+2\ge 0. \end{cases}$

182. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y=\sqrt{-x^2-6x-8}+\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$, 2) $y=\sqrt{x-x^2}-\sqrt{-x^2+12x-35}$.

16-§. ÁPIWAYÍ TEŃSIZLIKLERDI DÁLILLEW

Teńsizliklerdi dálillewdiń hár túrli usılları bar. Olardan ayırımlarınıń qollanılıwın kórip shıǵamız.

1-másele. Eki a hám b oń sanınıń arifmetikalıq ortası, usı sanlardıń geometriyalıq ortasınan kishi emesligin dálilleń:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Teńsizlikti tikkeley anıqlama boyınsha dálilleymiz, bunda $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ ekenin dálillew talap etiledi.

Bul teńsizliktiń shep bóleginiń formasın almastırıp, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

(1) qatnasta teńlik belgisi tek $a=b$ bolǵanda ǵana durıs bolıwın aytıp ótemiz. ▲

2-másele. Eki a hám b oń sanınıń geometriyalıq ortası, usı sanlardıń gormonikalıq ortasınan kishi emesligin dálilleń:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Bul teńsizlikti *aldın dálillengen* (1) *teńsizlikten paydalanıp* hám alımı ózgermey bólimi kishileskende, oń bólshek úlkeyiwinen paydalanıp dálilleymiz:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \ ▲$$

3-másele. Hár qanday a oń san ushın teńsizlikti dálilleń:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3)$$

△ Bul teńsizlikti *kerisinshe pikir júritiw usılı* menen dálilleymiz. Bunda (3) teńsizlik a nıń geybir oń mánisinde orınlanbadı dep oylasaq, yaǵnıy

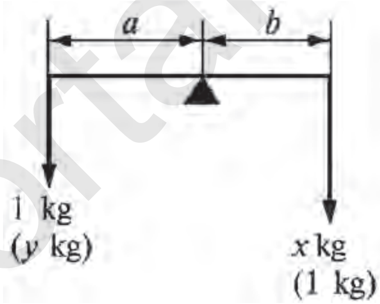
$$a + \frac{1}{a} < 2$$

teńsizlik orınlı bolsın. Teńsizliktiń eki tárepin de a kóbeytip, tómendegini payda etemiz:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

Yaǵnıy, $a^2 + 1 - 2a < 0$ yaki $(a-1)^2 < 0$, bul bolsa nadurıs teńsizlik. Sebebi, hár qanday haqıyqıy sannıń kvadratı (yaǵnıy $(a-1)^2$ ta) teris emes. Payda bolǵan qarama-qarsılıqtan (3) teńsizlik hár qanday a oń bolǵanda durıs teńsizlik ekenligi kelip shıǵadı. ▲

4-másele. Bir satıwshı. almalardı qol tárezide ólshep atır. Qarıydar 1 kg alma satıp aldı, keyin jáne satıwshıdan almalardı ekinshi mártebe ólshegende almalar menen taslardıń orınların almastırıp ólshewdi ótinish etti hám solay etip jáne 1 kg alma aldı. Eger tárezi durıslanbaǵan bolsa, kim zıyan kóredi?



47-rasm.

△ Aytayıq, táreziniń iyinleri a hám b bolsın (47-súwret). Súwretten kórinip turıptı, $a \neq b$. Birinshi mártebe ólshegende qarıydar x kilogramm alma aldı. Fizika kursınan málim bolǵanınday, $x \cdot b = 1 \cdot a$, bunnan $x = \frac{a}{b}$. Ekinshi mártebe ólshewde qarıydar y kilogramm alma aldı. Teppe-teńlik shártinen $y \cdot a = 1 \cdot b$, bunnan $y = \frac{b}{a}$. Solay etip, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ kilogramm alma satıp alınǵan.

$\frac{a}{b}$, hám $\frac{b}{a}$ sanlarınıń arifmetikalıq ortası hám geometriyalıq ortası ushın teńsizlikten paydalanıp, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

bunnan $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

Juwabı: satıwshı zıyan kóredi. ▲

Shınığıwlar

183. Qálegen haqıyqıy *a, b, x* larda teńsizliklerdiń orınlı ekenligin dálilleń:

1) $\frac{a^2+1}{2}\geq a$; 2) $\frac{b^2+16}{4}\geq b$; 3) $\frac{2x}{x^2+1}\leq 1$; 4) $\frac{2x}{4x^2+9}\leq\frac{1}{6}$.

184. Egerde $ab>0$ bolsa, teńsizlikti dálilleń:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$; 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

185. Egerde $a\geq -1$, $a\neq 0$ bolsa, teńsizlikti dálilleń:

$$\frac{4a^2+a+1}{4|a|}\geq\sqrt{a+1}.$$

186. $a\geq 0$, $b\geq 0$ hám $a\neq b$ bolsa, onda $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ hám $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ lardıń qaysı biri úlken?

187. Teńsizlikti dálilleń:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6)>96a^2,$$

bunda $a>0$.

188. Egerde $a>0$ bolsa, teńsizlikti dálilleń:

$$\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}.$$

189. Egerde *a, b, c, d* lar oń sanlar bolsa, onda

$$\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}\geq\sqrt{(a+b)(c+d)}$$

teńsizlikti dálilleń.

190. Egerde $a \geq 0$, $b \geq 0$ hám $c > 0$ bolsa, onda $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ bolıwın dálilleń:

191. Egerde $a > 0$, $b > 0$ bolsa, onda $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ bolıwın dálilleń:

192. Egerde $a > 0$, $b > 0$ hám $c > 0$ bolsa, onda

$$\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$$

teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń:

II bapqa tiyisli shınıǵıwlar

193. Berilgen teńlemelerdi bir ózgeriwshi boyınsha kvadrat úsh aǵzalı túrinde jazıń:

1) $2y^2 - xy + 3$, egerde $y = 3x + 1$;
2) $2xy + 3x^2 - 7$, egerde $x = 2y + 1$.

194. Teńlemeler sistemasın ornına qoyıw usılı menen sheshiń:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Viet teoremasına keri teoremanı qollanıp, teńlemeler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3+y^3=26, \\ x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3+y, \\ x^3-y^3=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ xy(x+y)=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+8y^3=16, \\ 2xy(x+2y)=16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4-3x^2y=36, \\ 3y^2-2x^2y=-9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4-2x^2y=24, \\ 2y^2-3x^2y=-6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=5, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1. \end{cases}$

205. 1) Eki tańbalı san óziniń sanlarınıń qosındısınan úsh ese úlken. Sanlardıń qosındısınıń kvadratı bolsa, berilgen sannan úsh ese úlken. Usı sandı tabıń.

2) Jup san óziniń sanları qosındısınan 4 esege úlken. Sanlardıń qosındısınıń kvadratı bolsa, berilgen sannan $\frac{3}{2}$ bólegin quraydı. Usı sandı tabıń.

206. 1) Eki kvadrat tárepleriniń qatnası 5:4. Egerde hárbir kvadrattıń tárepleri 2 cm ge kemeytilse, onda payda bolǵan kvadratlar maydanınıń ayırması 2,8 cm^2 qa teń boladı. Berilgen kvadratlardıń táreplerin tabıń.

2) Tuwrı tórtmúyeshliktiń uzınlıǵınıń enine qatnası 3:2. Egerde olardı 1 cm den arttırsaq, payda bolǵan tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı birinshi tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanınan 3 cm^2 qa úlken boladı. Birinshi tórtmúyeshliktiń uzınlıǵı hám enenin tabıń.

207. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -2x^2+3x+2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+4x-5<0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2-5x+2>0, \\ -x^2-3x-2\ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2-2x+4\le 0, \\ 3x^2-3x-6<0. \end{cases}$

208. 1) Egerde $xy = 9$ hám $x > 0$ ekeni belgili bolsa, $x + y$ tiń eń kishi mánisin tabıń.
2) Egerde $ab = 8$ hám $b > 0$ bolsa, onda $2a+b$ nıń eń kishi mánisin tabıń.

209. Teńlemeniń eń kishi mánisin tabıń:

1) $4x + \dfrac{81}{25x}$, $(x > 0)$;   2) $\dfrac{(x+3)(x+12)}{x}$, $x > 0$;

3) $\dfrac{4y^2 - 7y + 25}{y}$, $(y > 0)$;   4) $\dfrac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}$.

210. Egerde $x + y = 10$ hám $x > 0$, $y > 0$ bolsa, onda xy tiń eń úlken mánisin tabıń.

211. Egerde $2x + y = 6$ hám $x > 0$, $y > 0$ bolsa, onda xy tiń eń úlken mánisin tabıń.

212. Teńsizlikti dálilleń:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

II Bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwlar

1. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

A) $x = -4$, $y = -1$;   B) $x = 1$, $y = -4$;
C) $x = 4$, $y = -1$;   D) (1; 4) va (4; 1).

2. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

A) $x = 3$, $y = 1$;   B) $x = 5$, $y = -1$;
C) $x = 4$, $y = 0$;   D) $x = 1$, $y = 3$.

3. Eki sannıń ayırması 3 ke, olardıń kóbeymesi 28 ge teń. Usı sanlardı tabıń.

A) 7 hám 4;   B) 5 hám 2;   C) 14 hám 2;   D) 11 hám 8.

4. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 30 m ge, maydanı 56 m^2 qa teń. Onıń biyikligi eninen neshe metrge uzın?

A) 1,2 m; B) 1 m; C) 2 m; D) 2,5 m.

5. 60 m aralıqtı bir velosipedshi ekinshisine qarağanda 1 saat keshlew basıp ótti. Eger birinshi velosipedshiniń tezligi ekinshisiniń tezliginen 5 *km/saatqa* kem bolsa, hárbir velosipedshiniń tezligin tabıń.

A) 20 km/s, 25 km/s; B) 10 km/h, 15 km/s;
C) 15 km/s, 20 km/s; D) 12 km/h, 17 km/s.

6. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$

A) (0,6; 4) hám (12; 0,2); B) (0,4; 6) hám (0,12; 2);
C) (4; 0,6) hám (12; 0,2); D) (4; 0,2) hám (12; 0,6).

7. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$

A) (6; 4) hám (4; 3); B) (–3; 6) hám (6; –3);
C) (6; 3) hám (3; –6); D) (6; 3) hám (6; –3).

8. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

A) (–10; 5) hám (2; 5); B) (–10; 2) hám (5; 5);
C) (5; –10) hám (–10; 2); D) (5; 5) hám (–2; 10).

9. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$

A) $(4; \frac{1}{2})$ va (–2; –1); B) $(-2; \frac{1}{2})$ va (4; –1);
C) (4; 1) va (–4; –2); D) (–2; –1) va (2; 1).

10. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

A) (–1;12); B) (12;–1); C) (–1;11); D) (11;–1).

11. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

A) $-4 < y < \frac{2}{3}$; B) $-4,5 < y < \frac{2}{3}$; C) $x > -4,5$; D) $x < \frac{2}{3}$.

12. Teńsizliklerdi sheshiń: $|x^2 + x - 1| \leq 1$.

A) $-2 \leq x \leq 1,\ 2 < x \leq 3$; B) $-2 \leq x \leq -1,\ 0 \leq x \leq 1$;

C) $-1 \leq x \leq 0,\ 1 < x \leq 2$; D) $x \leq -2,\ x \geq 1$.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

Másele. Eki júk mashinası birgelikte islep, júkti 6 saatta tasıwı kerek edi. Ekinshi mashina jumıs baslawǵa kesh qalǵanı ushın, ol kelemen degenshe birinshi mashina tolıq júktiń $\frac{3}{5}$ bólegin tasıp boldı. Júktiń qalǵan bólegin tek ekinshi mashina tasıdı hám sonıń ushın júkti tasıwǵa 12 saat waqıt ketti. Júkti hárbir mashinanıń jalǵız ózi qansha waqıtta tasıǵan bolar edi?

△ Júk mashinaları tasıwları kerek bolǵan júkti bir dep alayıq. Tolıq júkti bólek-bólek tasıwı ushın birinshi mashina sarplaytuǵın waqıttı x saat, ekinshi mashina sarplaytuǵın waqıttı bolsa y saat arqalı belgileyik. Onda bir saatta birinshi mashina júktiń $\frac{1}{x}$ bólegin, ekinshisi $\frac{1}{y}$ bólegin tasıǵan bolar edi.

Birgelikte islep, olar bir saatta tolıq júktiń $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bólegin tasıǵan bolar edi hám máseleniń shártinde berilgendey 6 saatta tasıǵan bolar edi. Sol sebepli, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1.$

Biraq, negizinde birinshi mashina, júktiń $\frac{3}{5}$ bólegin tasıwǵa óz waqtınıń $\frac{3}{5}$ bólegin jumsadı, júktiń qalǵan bólegin bolsa ekinshi mashina tasıdı hám oǵan óz waqtınıń $\frac{2}{5}$ bólegin jumsadı. Bul jaǵdayda tolıq júkti tasıwǵa 12 saat ketkenligin esapqa alsaq, ekinshi teńlemeni payda etemiz:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Másele tómendegi teńlemeler sistemasın sheshiwge keltiriledi:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1,\\ \frac{3}{5}\mathrm{x}+\frac{2}{5}\mathrm{y}=12.\end{cases}$$

Dáslep, sistemanı ápiwayılastırıp, keyin onı ornına qoyıw usılı menen sheshemiz:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x=60-2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

bunnan, $y^2-27y+180=0$,

$$y_{1,2}=\frac{27}{2}-\sqrt{\frac{729}{4}-180}=\frac{27}{2}-\frac{3}{2},\ y_1=15,\ y_2=12.$$

$x = -20 - \frac{2}{3} y$ formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız

$$x_1 = 10,\ \ x_2 = 12.$$

Juwabı: 10 saat hám 15 saat – egerde mashinalardıń júk kóteriw imkaniyatları túrlishe bolsa;

12 saat hám 12 saat – egerde mashinalardıń júk kóteriw imkaniyatları birdey bolsa. ▲

Máseleler

1. 1) Birinshi tamashalaw zalında 420, ekinshi zalda 480 orınlıq bar. Ekinshi zalda birinshisine qaraǵanda 5 qatarǵa kem, biraq hárbir qatarda birinshi zaldaǵı hárbir qatardan 10 orınlıqqa kóp. Birinshi zaldıń hárbir qatarında neshe orınlıq bar?

2) Qızıl zalda 320, kók zalda 360 orınlıq bar. Qızıl zalda kók zaldaǵıǵa qaraǵanda 2 qatarǵa kóp, biraq hárbir qatarında kók zaldıń hárbir qatarındaǵıǵa qaraǵanda 4 ewden az orınlıq bar. Qızıl zalda neshe qatar bar?

2. 1) Eki nasos birgelikte 80 m^3 kólemli basseyndi toltıradı. Egerde ónimdarlıǵın $1\frac{1}{3}$ ese asırǵan birinshi nasostıń tek ózi islegende basseyn toltırıwǵa 2 saat kóbirek waqıt kerek bolar edi. Egerde tek ǵana ekinshi nasos óz ónimdarlıǵın saatına 1 m^3 qa kemeytip islegende, basseyndi toltırıwǵa ketken waqıt $3\frac{1}{3}$ ese kóbirek bolar edi (eki nasos birgelikte islegendegi waqıtqa salıstırǵanda). Hárbir nasostıń ónimdarlıǵın tabıń.

2) Hár túrli qánigeliktegi jumısshılardan ibarat eki brigada detallar tayarlaydı, bunda hárbir jumısshı jumıs kúni dawamında 2 detal tayarlaydı. Dáslep, tek birinshi brigada islep 32 detal tayarladı. Keyin ekinshi brigadanıń ózi islep, jáne 48 detal tayarladı. Bul jumısshılardıń barlıǵına 4 kún waqıt ketti. Sonnan keyin birgelikte 6 kún islep, 240 detal tayarladı. Hárbir brigadada neshewden jumısshı bar?

3. 1) Ónimnıń yarımı 10 % payda menen, ekinshi yarımınıń yarımı 20 % payda menen satıldı. Egerde barlıq ónimdi satıwdan túsken ulıwma payda 12 % ti qurasa, ónimnıń qalǵan sheregi neshe procent paydaǵa satılǵan?

2) Sawda firması dúkanlarǵa tovardı qosımsha baha menen jetkerip beredi: tovarlardıń $\frac{3}{5}$ bólegine 5 % ústeme baha qoyıp, qalǵan tovarlardıń yarımına 4 % ústeme baha qoyıp satıldı. Egerde barlıq tovarlarǵa qoyılǵan ústeme baha 7 % ti quraytuǵın bolsa, qalǵan tovarlardıń ekinshi yarımına neshe procent esabında qanday ústeme baha qoyılǵan?

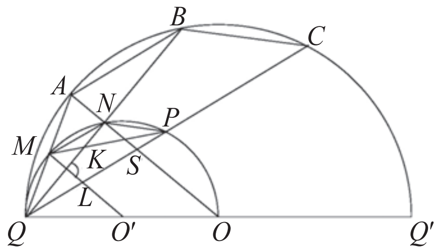
4. 1) Eki zattıń aralaspası bar. Egerde bul aralaspaǵa ekinshi zattan 3 kg qosılsa, onda onıń aralaspadaǵı muǵdarı procentlerde eki esege kóbeyedi, egerde baslanǵısh aralaspaǵa birinshi zattan 3 kg qosılsa, onda ekinshi zattıń muǵdarı procent esabında eki ese azayadı. Hárbir zattıń baslanǵısh aralaspadaǵı massasın tabıń.

2) Eki suyıqlıqtıń aralaspası bar. Egerde bul aralaspaǵa birinshi suyıqlıqtan 8 litr quyılsa, onda onıń aralaspadaǵı konsentraciyası eki esege kóbeyedi, egerde baslanǵısh aralaspaǵa ekinshi suyıqlıqtan 8 litr quyılsa, onda birinshi suyıqlıqtıń konsentraciyası bir yarım esege azayadı. Hárbir suyıqlıqtıń aralaspadaǵı kólemin tabıń.

5. Samolyot A hám B ǵa shekem samal baǵıtında hám B dan A ǵa samal baǵıtına qarsı ushıp ótti, bunda samaldıń tezligi ózgermedi. Basqa waqıtta samolyot usı jónelis boyınsha reysti samalsız hawa-rayında ámelge asırdı. Eki jaǵdayda da samolyot motorları birdey quwatta isleydi. Qaysı jaǵdayda párwazǵa azlaw waqıt ketedi?

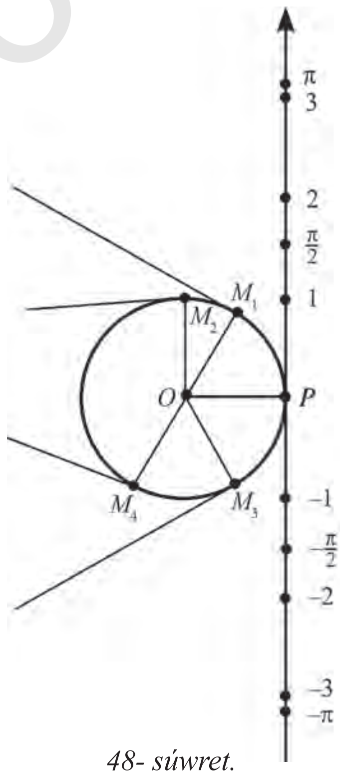
6. Eki traktorshı jer maydanın p kúnde súrip shıǵadı. Egerde birinshi traktorshı maydannıń yarımın súrse, al keyin ekinshi traktorshı qalǵan bólegin súrse, onda q kún waqıt kerek bolar edi. $q \geq 2p$ ekenligin dálilleń.

III BAP. TRIGONOMETRIYA ELEMENTLERI



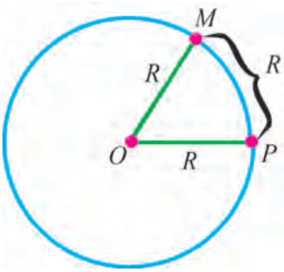
17-§. MÚYESHTIŃ RADIAN ÓLSHEMI

Meyli, vertikal tuwrısı orayı O noqatında hám radiusı 1 ge teń bolǵan sheńberge P noqatında urınsın (48-súwret). Bul tuwrını bası P noqatında bolǵan san kósheri dep, al joqarıǵa qaraǵan baǵıttı ońı baǵıt dep esaplaymız. San kósherinde uzınlıq birligi retinde sheńberdiń radiusın alamız. Tuwrınıń boyınan bir neshe noqattı belgileyik: ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$ (π – shama menen 3,14 ke teń ekenin esletip ótemiz). Bul tuwrını sheńberdiń P noqatına bekitilgen sozılmaytuǵın jip sıpatında kóz aldıǵa keltirip, onı sheńberge oray baslaymız. Bunda san tuwrısınıń (kósheriniń), máselen, 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2 koordinatalı noqatları, sheńberdiń sáykes túrde M_1, M_2, M_3, M_4 noqatlarınan ótip, PM_1 doǵasınıń uzınlıǵı 1 ge teń, PM_2 doǵasınıń uzınlıǵı $\frac{\pi}{2}$ ge teń boladı hám t.b.



48- súwret.

Solay etip, *tuwrınıń hárbir noqatına sheńberdiń qanday da bir noqatı sáykes keltiriledi.*



49- súwret..

Tuwrınıń koordinatası 1 ge teń bolǵan noqatına M_1 noqatı sáykes keltirilgenlikten, POM_1 múyeshin birlik múyesh dep esaplaw hám usı múyeshtiń ólshemi menen basqa múyeshlerdi ólshew tábiyiy boladı. Máselen, POM_2 múyeshin $\frac{\pi}{2}$ ge teń, POM_3 múyeshin – 1 ge teń, POM_4 múyeshin – 2 ge teń dep esaplaw kerek. Múyeshlerdi ólshewdiń bunday usılı matematika hám fizikada keń qollanıladı. Múyeshlerdiń usılayınsha ólsheniwine múyeshlerdiń *radianlarda ólsheniwi* dep aytıladı. POM_1 múyeshi 1 radianǵa (1 rad) teń múyeshi dep aytıladı. Sheńberdiń PM_1 doǵasınıń uzınlıǵı radiusqa teń ekenligin atap ótemiz (48-súwret).

Endi qálegen R radiuslı sheńberdi qaraymız hám onıń uzınlıǵı R ge teń bolǵan PM doǵasın hám POM múyeshin belgileymiz (49-súwret).

! Uzınlıǵı sheńberdiń radiusına teń bolǵan doǵaǵa tirelgen oraylıq múyesh 1 *radian múyesh* dep ataladı.

Bunda 1 radian múyesh uzınlıǵı ***R*** ge teń bolǵan doǵanı tartıp turadı deymiz.

1 rad múyeshtiń graduslıq ólshemin tabayıq. 180^0 lıq oraylıq múyeshti uzınlıǵı πR (yarım sheńber) ge teń bolǵan doǵa keripo turǵanlıqtan, uzınlıǵı R bolǵan doǵanı π ese kishi bolǵan múyeshti kerip turadı, yaǵnıy

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\text{o}}.}$$

$\pi \approx 3{,}14$ bolǵanlıqtan 1 rad $\approx 57{,}3°$ boladı..

Eger múyesh α radiannan ibarat bolsa, onda onıń graduslıq ólshemi tómendegige teń boladı:

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}a\right)^{\text{o}}.} \qquad (1)$$

1-másele. 1) π rad; 2) $\frac{\pi}{2}$ rad; 3) $\frac{3\pi}{4}$ rad ǵa teń múyeshtiń graduslıq ólshemin tabıń.

△ (1) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

1) π rad $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$; 3) . $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = 135°$.▲

1° lıq múyeshtiń radian ólshemin tabamız. 180° lıq múyesh ... r ǵa teń bolǵanlıqtan,

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\text{ rad}}$$

boladı.

Eger múyesh a gradusqa teń bolsa, onda onıń radianlıq ólshemi,

$$\boxed{\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180}\alpha\text{ rad}} \qquad (2)$$

ǵa teń

2-másele. 1) 45° qa teń múyeshtiń; 2) 15° qa teń múyeshtiń radian ólshemin tabıń.

△ (2) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

1) $45^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot 45\text{ rad} = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$; 2) $15^{\circ} = \frac{\pi}{180}\cdot 15\text{ rad} = \frac{\pi}{12}\text{ rad}$. ▲

Máseleler sheshiwde kóbirek ushırasatuǵın múyeshlerdiń graduslıq ólshemin hám olarǵa sáykes radianlıq ólshemin keltiremiz:

Gradus	0	30	45	60	90	180
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Ádette, múyeshtiń ólshemi radianlarda berilse, «rad» ataması túsirip qaldırıladı.

Múyeshtiń radianlıq ólshemi sheńber doǵalarınıń uzınlıqların esaplaw ushın qolaylı. 1 rad múyesh uzınlıǵı R radiusqa teń doǵanı kerip turǵanlıqtan α radian múyesh

$$l = \alpha R \qquad (3)$$

uzınlıqtaǵı doǵanı kerip turadı.

3-másele. Qala kurantlarınıń minutlıq tiliniń ushı radiusı $R \approx 0{,}8$ m bolǵan sheńber boylap háreket etedi. Bul minutlıq tiliniń ushı 15 min dawamında qanday joldı basıp ótedi?

△ Saattıń minutlıq tili 15 min dawamında $\frac{\pi}{2}$ radianǵa teń múyeshke burıladı. (3) formula boyınsha $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bolǵanda mınaǵan iye bolamız:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8 \text{ m} \approx 1{,}3 \text{ m}.$$

Juwabı: 1,3 m. ▲

(3) (3) formula sheńberi radiusı $R=1$ bolǵanda júdá ápiwayı kóriniske iye. Bul jaǵdayda doǵanıń uzınlıǵı usı doǵa menen tartılıp turǵan oraylıq múyeshtiń shamasına teń, yaǵnıy $l=\alpha$ boladı. Radian ólsheminiń matematika, fizika, mexanika hám basqa pánlerde qollanılıwınıń qolaylılıǵı usınıń menen túsindiriledi.

4-másele. Radiusı R bolǵan dóńgelek sektor a rad múyeshke iye. Usı sektordıń maydanı

$$S = \frac{R^2}{2} a$$

ge teń ekenligin dálilleń, bunda $0 < \alpha < \pi$.

△ π rad lıq dóńgelek sektordıń (yarım dóńgelek) maydanı $\frac{\pi R^2}{2}$ ge teń. Sonlıqtan 1 rad sektordıń maydanı π ese kishi, yaǵnıy $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Demek, α rad sektordıń maydanı $\frac{R^2}{2} a$ ge teń. ▲

Shınıǵıwlar

213. Gradusta berilgen múyeshtiń radian ólshemlerin tabıń:

1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Radianda berilgen múyeshtiń gradus ólshemin tabıń:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;

6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Sanlardı 0,01 ge shekemgi dállik penen jazıń:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$..

216. Sanlardı salıstırıń:

1) $\frac{\pi}{2}$ hám 2; 2) 2π hám 6,7; 3) π hám $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ hám 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ hám $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ hám $-\sqrt{10}$.

217. (Awızeki.) a) teń tárepli úshmúyeshlik; b) teń qaptallı túwrı múyeshli úshmúyeshlik; d) kvadrat; e) durıs altı múyeshliktiń múyeshleriniń graduslıq hám radian ólshemlerin anıqlań.

218. Eger sheńberdiń 0,36 m uzınlıqtaǵı doǵası 0,9 rad oraylıq múyeshti tartıp tursa, onıń radiusın esaplań.

219. Eger sheńberdiń radiusı 1,5 cm ge teń bolsa, sheńberdiń uzınlıǵı 3 cm bolǵan doǵası tartıp turǵan múyeshtiń radian ólshemin tabıń.

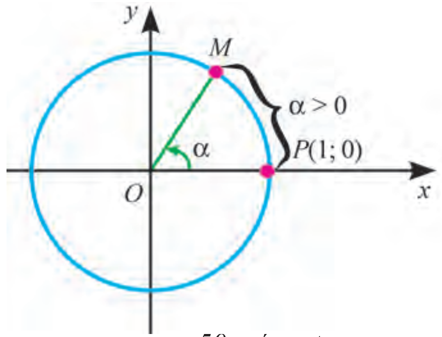
220. Dóńgelek sektor doǵası $\frac{3\pi}{4}$ rad múyeshti tartıp turadı. Eger dóńgelektiń radiusı 1 cm ge teń bolsa, sektordıń maydanın tabıń.

221. Dóńgelektiń radiusı 2,5 cm ge teń, al dóńgelek sektordıń maydanı 6,25 cm^2 qa teń. Usı dóńgelek sektordıń doǵası tartıp turǵan múyeshin tabıń.

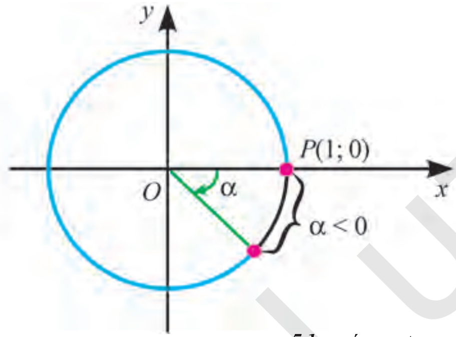
18-§. NOQATTÍ KOORDINATALAR BASÍ ÁTIRAPÍNDA BURÍW

Aldıńǵı paragrafta san tuwrısınıń noqatları menen sheńber noqatları ortasında sáykeslik ornatıwdıń kórgizbeli usılınan paydalandıq. Endi haqıyqıy sanlar menen sheńber noqatları ortasında sheńber noqatların burıw járdeminde sáykeslik ornatıw múmkinligin kórsetemiz.

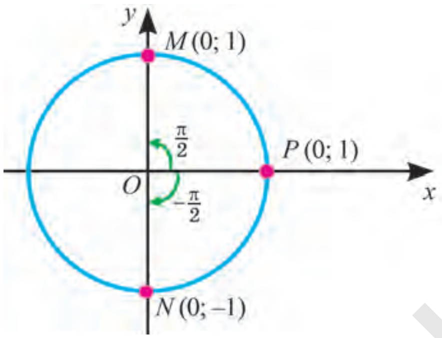
Koordinata tegisliginde radiusı 1 ge teń hám orayı koordinata basında jatqan sheńberdi qaraymız. Ol birlik sheńber delinedi. Birlik sheńberdiń noqatın koordinata bası átirapında α radian múyeshke burıw túsinigin kiritemiz (bunda α – qálegen haqıyqıy san).



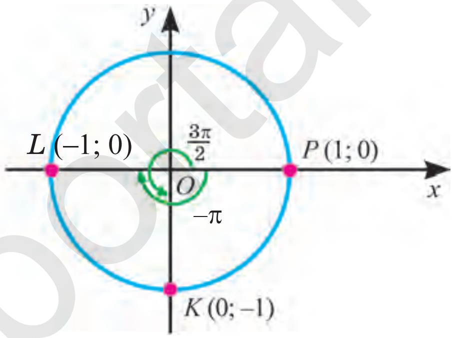
50- súwret.



51- súwret.



52- súwret.



53- súwret.

1. M e y l i , $\alpha > 0$ bolsın. Noqat birlik sheńber boylap P noqatınan saat tili baǵıtına qarama-qarsı háreket etip, α uzınlıqtaǵı joldı basıp ótti dep aytayıq (50-súwret). Joldıń sońǵı noqatın M menen belgileymiz.

Bul jaǵdayda M noqatı P noqatın koordinata bası átirapında α radian múyeshke burıw arqalı payda etiledi, dep aytamız.

2. M e y l i , $\alpha < 0$ bolsın. Bul jaǵdayda α radian múyeshke burıw noqattıń qozǵalıs háreketi saat tiliniń qozǵalıs baǵıtında júzege kelgenligin hám de noqat $|\alpha|$ uzınlıqtaǵı joldı basıp ótkenligin bildiredi (51-súwret).

0 rad ǵa burıw noqattıń óz ornında qalǵanlıǵın ańlatadı.

Mısallar:

1) $P(1;\ 0)$ noqatın $\frac{\pi}{2}$ rad múyeshke burıwda (0; 1) koordinatalarına iye M noqatı payda etiledi (52-súwret).

2) $P(1;\ 0)$ noqatın $-\frac{\pi}{2}$ rad múyeshke burıwda $N(0;\ -1)$ noqatı payda etiledi (52-súwret).

3) $P(1;\ 0)$ noqatın $\frac{3\pi}{2}$ rad múyeshke burıwda $K(0;\ -1)$ noqatı payda etiledi (53-súwret).

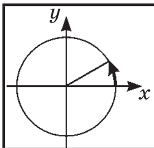
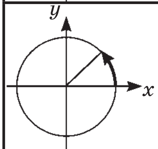
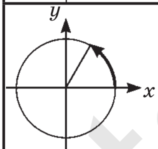
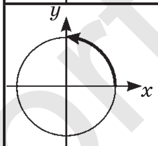
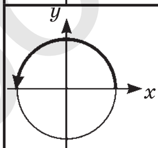
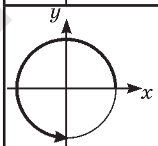
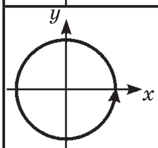
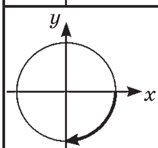
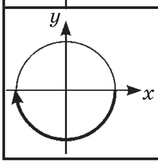
4) $P(1;\ 0)$ noqatın $-\pi$ rad múyeshke burıwda $L(-1;\ 0)$ noqatı payda etiledi (53-súwret).

Geometriya kursında 0° tan 180° qa shekemgi múyeshler qaralǵan. Birlik sheńberdiń noqatların koordinatalar bası átirapında burıwdan paydalanıp, 180^0 tan úlken múyeshlerdi, sonday-aq teris múyeshlerdi de qaraw múmkin. Burıw múyeshin graduslarda da, radianlarda da beriwge boladı. Mısalı, $P(1;0)$ noqatın $\frac{3\pi}{2}$ múyeshke burıw, onı 270° qa burıwdı ańlatadı; $-\frac{\pi}{2}$ múyeshke burıw –90° qa burıwdan ibarat

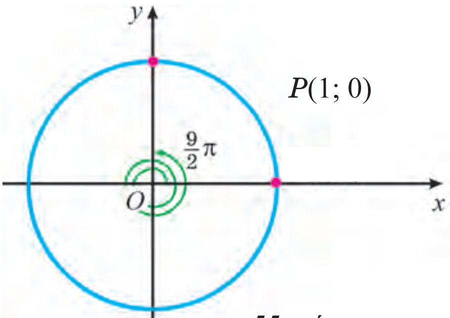
Bazı bir múyeshlerge burıwdıń radian hám graduslardaǵı ólshemleriniń kestesin keltiremiz (54-súwret).

$P(1;\ 0)$ noqatın 2π ge, yaǵnıy 360° qa burıwda noqat aldıńǵı jaylasqan ornına qaytatuǵının atap ótemiz (kestege qarań). Usı noqattı -2π ge, yaǵnıy –360° qa burıwda, ol jáne aldıńǵı halına qaytadı.

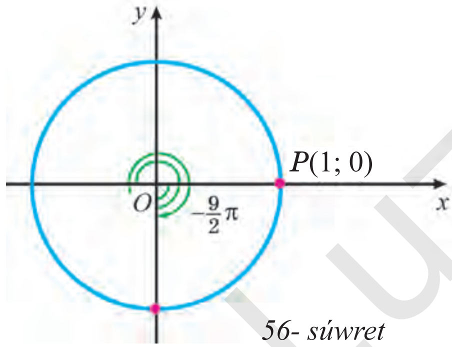
Noqattı 2π den úlken múyeshke hám -2π den kishi múyeshke burıwǵa tiyisli mısallardı qaraymız. Mısalı $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ múyeshke burıwda noqat saat tiliniń qozǵalısı baǵıtına

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

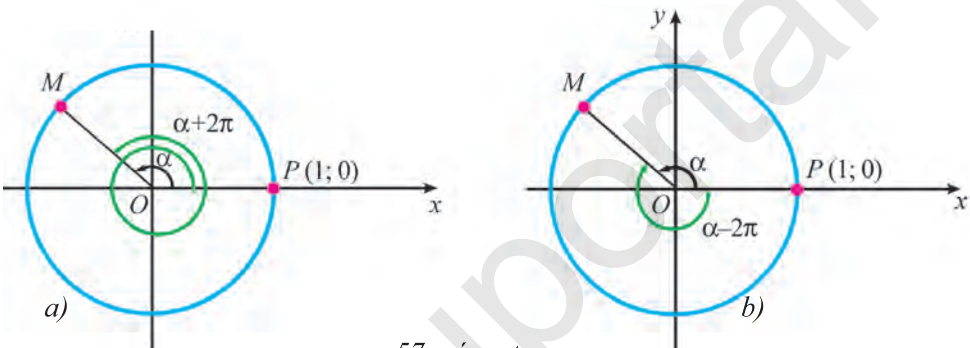
54- súwret..



55- súwret.



56- súwret



57- súwret.

qarama-qarsı baǵıtta eki tolıq aylanıstı hám jáne usı baǵıtta $\frac{\pi}{2}$ joldı ótedi (55-súwret).

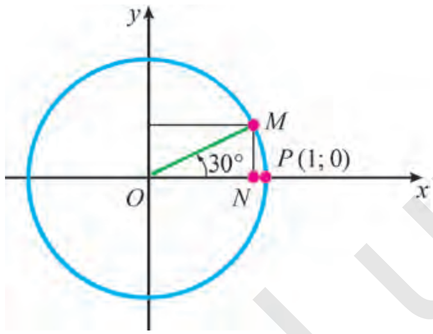
$-\frac{9\pi}{2}=2\cdot 2\pi-\frac{\pi}{2}$ múyeshke burıwda noqat saat tiliniń qozǵalısı baǵıtında eki tolıq aylanıstı hám jáne usı baǵıtta $\frac{\pi}{2}$ joldı basıp ótedi(56-súwret).

$P(1;\ 0)$ noqatın $\frac{9\pi}{2}$ múyeshke burıwda $\frac{\pi}{2}$ múyeshke burıwdaǵı noqattıń ózi payda bolatuǵının kórsetemiz (55-súwret) $-\frac{9\pi}{2}$ múyeshke burıwda $-\frac{\pi}{2}$ múyeshke burıwdaǵı noqattıń ózi payda boladı (56-súwret).

Ulıwma, eger $\alpha=\alpha_0+2\pi k$ (bunda k – pútin san) bolsa, onda a múyeshke burıwda a_0 múyeshke burıwdaǵı noqattıń ózi payda boladı.

Solay etip, hárbir α haqıyqıy sanǵa birlik sheńberdiń (1; 0) noqatın α rad múyeshke burıw menen payda etiletuǵın bir ǵana noqatı sáykes keledi.

Biraq, birlik sheńberdiń jalǵız ǵana bir M noqatına (P(1; 0) noqatın burıwda M noqatı payda etiletuǵın) sheksiz kóp $\alpha + 2\pi k$ haqıyqıy sanlar sáykes keledi, k – pútin san (57-súwret).



58- súwret.

1- másele. P (1; 0) noqatın: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$ múyeshke burıwdan payda bolǵan noqattıń koordinataların tabıń.

△ 1) $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$ bolǵanı ushın 7π ge burıwda π ge burıwdaǵı noqattıń ózi, yaǵnıy (–1; 0) koordinatalı noqat payda boladı.

2) $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ bolǵanlıqtan $-\frac{5\pi}{2}$ ge burıwda $-\frac{\pi}{2}$ ge burıwdaǵı noqattıń ózi, yaǵnıy (0; –1) koordinatalı noqat payda boladı. ▲

2- másele. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ noqatın payda etiw ushın (1;0) noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń.

△ NOM tuwrı múyeshli úshmúyeshliginen (58-súwret) NOM múyeshiniń $\frac{\pi}{6}$ ǵa teńligi kelip shıǵadı, yaǵnıy múmkin bolǵan burıw múyeshlerinen biri $\frac{\pi}{6}$ ǵa teń. Sonlıqtan $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ noqatın payda etiw ushın (1; 0) noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshler bılay ańlatıladı: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, bundaǵı k – qálegen pútin san, yaǵnıy $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ ▲

Shınıǵıwlar

222. Birlik sheńberdiń $P(1;0)$ noqatın:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π

múyeshke burıwdan payda bolǵan noqatlardıń koordinataların tabıń.

223. Birlik sheńberde $P(1;\ 0)$ nuqtın:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattı belgileń.

224. $P(1;\ 0)$ noqatın:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat jaylasqan koordinatalar sheregin tabıń.

225. $P(1;\ 0)$ noqatın:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) $540°$; 6) $810°$; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) $450°$

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattıń koordinataların tabıń.

226. 1) $(-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$ noqatların payda etiw ushın $P(1;0)$ noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń:

227. $P\ (1;\ 0)$ noqatın belgileń:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8.

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat jaylasqan koordinatalar sheregin tabıń.

228. Eger:

1) $a=6{,}7\pi$; 2) $a=9{,}8\pi$; 3) $a=4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a=7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a=\frac{11}{2}\pi$; 6) $a=\frac{17}{3}\pi$

bolsa, $a=x+2\pi k$ teńligi orınlanatuǵın x sannıń (bul jerde $0\le x\le 2\pi$) hám k natural sandı tabıń.

229. Birlik sheńberde $P(1;0)$ noqatın:

1) $\frac{\pi}{4}-2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}-2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}-6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4}-8\pi$;
5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π

múyeshke burıwdan payda bolǵan noqattı jasań.

230. $P(1;\ 0)$ noqatın:

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$

múyeshke (bul jerde k – pútin san) burıwdan payda bolǵan noqattıń koordinataların tabıń.

231. (1; 0) noqatın:

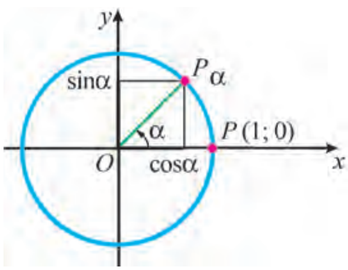
1) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

koordinatalı noqat payda etiw ushın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń.

19-§. MÚYESHTIŃ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSINIŃ ANÍQLAMALARÍ

Geometriya kursında graduslarda ańlatılǵan múyeshtiń sinusı, kosinusı hám tangensi berilgen edi. Bul múyesh 0° tan 180° qa shekemgi aralıqta qaralǵan. Qálegen múyeshtiń sinusı hám kosinusı tómendegishe anıqlanadı

! 1-Anıqlama. *α múyeshiniń sinusı dep (1; 0) noqatın koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattıń ordinatasına aytıladı (sinα túrinde belgilenedi).*



2-anıqlama. *α múyeshtiń kosinusı dep (1; 0) noqatın koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattıń abcissasına aytıladı (cosα túrinde belgilenedi).*

Bul anıqlamalarda α múyeshi graduslarda, sonday-aq, radianlarda da ańlatılıwı múmkin.

Máselen, (1; 0) noqatın $\frac{\pi}{2}$ múyeshke, yaǵnıy 90° qa burıwda (0; 1) noqatı payda etiledi. (0; 1) noqatınıń ordinatası 1 ge teń, yaǵnıy

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

bul noqattıń abcissası 0 ge teń, yaǵnıy

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Múyesh 0° tan 180° qa shekemgi aralıqta bolǵan jaǵdayda sinus hám kosinuslardıń anıqlamaları geometriya kursınan málim bolǵan sinus hám kosinuslardıń anıqlamaları menen sáykes túsetuǵının atap ótemiz.

Mısalı,

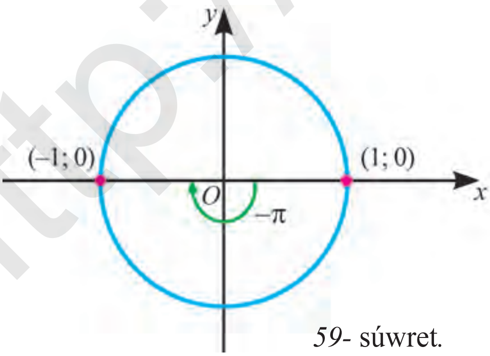
$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos\pi = \cos 180^\circ = -1.$$

1-másele. sin (–π) hám cos (–π) di tabıń.

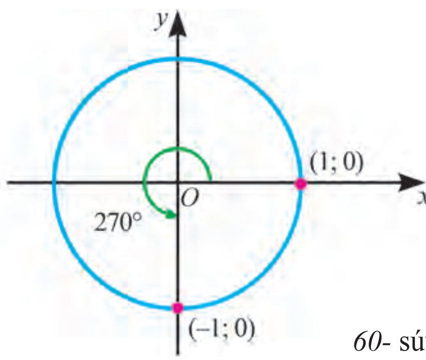
△ (1; 0) noqatın –π múyeshke burǵanda ol (–1; 0) noqatına ótedi (59-súwret). Sonlıqtan sin (–π)= 0, cos (–π) = –1. ▲

2- másele. sin 270° hám cos 270° tı tabıń.

△ (1; 0) noqatın 270° múyeshke burǵanda ol (0; –1) noqatına ótedi (60-súwret). Sonlıqtan cos 270°=0, sin 270°= –1. ▲



59- súwret.



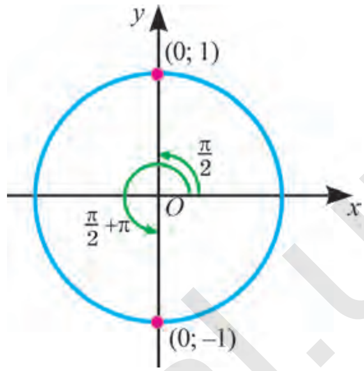
60- súwret.

3- másele. sin$t$=0 teńlemesin sheshiń.

△ sin$t$=0 teńlemesin sheshiw – bul sinusı nolge teń bolǵan barlıq múyeshlerdi tabıw degendi ańlatadı.

Birlik sheńberde ordinatası nolge teń bolǵan eki noqat bar: (1; 0) hám (–1; 0) (59-súwret). Bul noqatlar (1; 0) noqatın 0, π, 2π, 3π hám taǵı basqa, sonday-aq, –π, –2π, –3π hám taǵı basqa múyeshlerge burıw menen payda etiledi.

Demek, $t=k\pi$ bolǵanda (bunda k – qálegen pútin san) sin$t$=0 boladı. ▲



61- súwret.

Pútin sanlar kópligi $\boldsymbol{Z}$ háribi menen belgilenedi. k sanı $\boldsymbol{Z}$ ke tiyisli ekenin belgilew ushın $k\in\boldsymbol{Z}$ jazıwınan paydalanıladı („k sanı $\boldsymbol{Z}$ ke tiyisli" dep oqıladı). Sonlıqtan 3-máseleniń juwabın bılay jazıw múmkin:

$$t = \pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

4- másele. cos$t$ = 0 teńlemesin sheshiń.

△ Birlik sheńberde abcissası nolge teń bolǵan eki noqat bar: (0; 1) hám (0; –1) (61-súwret).

Bul noqatlar (1; 0) noqatın $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi$ hám taǵı basqa, sonday-aq, $\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi$ hám taǵı basqa múyeshlerge, yaǵnıy $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (bunda $k\in\boldsymbol{Z}$) múyeshlerge burıw menen payda boladı.

Juwabı: $t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$ ▲

5-másele. Teńlemeni sheshiń: 1) sin$t$= 1; 2) cos$t$ = 1.

△ 1) Birlik sheńberdiń (0; 1) noqatı birge teń ordinataǵa iye. Bul noqat (1; 0) noqattı $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ múyeshke burıw menen payda etiledi.

2) (1; 0) noqattı $2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$ múyeshke burıw menen payda etilgen noqattıń abcissası birge teń boladı.

Juwabı: $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ bolǵanda sin$t$ = 1,

$t=2\pi k$ bolǵanda cos$t$ = 1, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

3-anıqlama. *α múyeshiniń tangensi dep a múyeshiniń sinusınıń onıń kosinusına qatnasına aytıladı (tgα túrinde belgilenedi).*

Solay etip, $\mathrm{tg}a = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Máselen, $\mathrm{tg}0^{o} = \dfrac{\sin0^{o}}{\cos0^{o}} = \dfrac{0}{1} = 0,\ \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Geyde α múyeshiniń kotangensinen de paydalanıladı (ctgα túrinde jazılıp belgilenedi). Ol $\mathrm{ctg}a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ formulası menen anıqlanadı.

Máselen, $\mathrm{ctg}270^\circ = \dfrac{\cos270^\circ}{\sin270^\circ} = \dfrac{0}{-1} = 0,\ \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

sinα hám cosα lar qálegen múyeshler ushın táriplengenligin, al olardıń mánisleri -1 den 1 ge shekemgi aralıqta ekenligin atap ótemiz; $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ tek $\cos\alpha \neq 0$ bolǵan múyeshler ushın, yaǵnıy $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ ten basqa qálegen múyeshler ushın anıqlanǵan.

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenslerdiń kóbirek ushırasatuǵın mánisleriniń kestesin keltiremiz.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Anıq emes	0	Anıq emes	0
ctgα	Mavjud emas	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Anıq emes	0	Anıq emes

6- másele. Esaplań:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

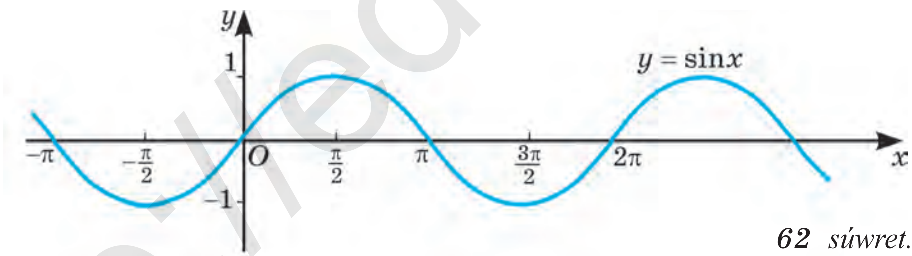
△ Kesteden paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2,5.$$ ▲

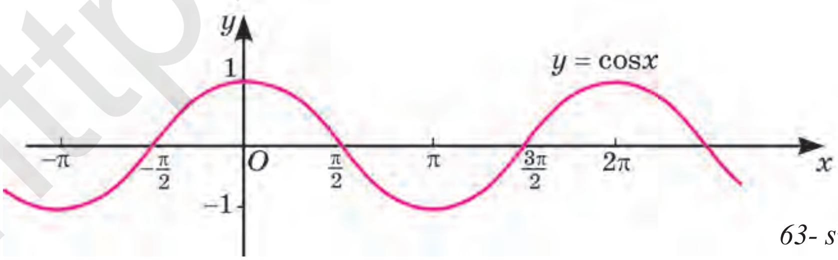
Sinus, kosinus, tangens hám kotangenslerdiń bul kestege kirmegen múyeshleri ushın mánislerin V.M. Bradistiń tórt tańbalı matematikalıq kestelerin, sonday-aq, mikrokalkulyator járdeminde tabıw múmkin.

Eger hárbir haqıyqıy x sanına $\sin x$ sanı sáykes qoyılsa, onda haqıyqıy sanlar kópliginde $y = \sin x$ funkciyası berilgen boladı. $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ hám $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyaları soǵan uqsas anıqlanadı. $y = \cos x$ funkciya barlıq $x \in \boldsymbol{R}$ da anıqlanǵan, $y = \operatorname{tg} x$ funkciya $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, $y = \operatorname{ctg} x$ bolsa $x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ bolǵanda anıqlanǵan. $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalarınıń grafikleri 62- hám 63-súwretlerde kórsetilgen.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyaları trigonometriyalıq funkciyalar dep ataladı.



62 súwret.



63- súwret.

Shınıǵıwlar

232. Esaplań:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Eger:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

bolsa, birlik sheńberde α múyeshke sáykes keliwshi noqattı kórsetiń.

Esaplań (**234–236**):

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi$; 6) $\cos 0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}0°-\mathrm{tg}180°$; 3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Teńlemeni sheshiń:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Awızeki.) sin*a* yaki cosα:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$

ge teń bolıwı múmkin be?

239. α nıń berilgen mánisinde ańlatpanıń mánisin tabıń:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, bunda $\alpha=\frac{\pi}{4}$; | 2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, bunda $\alpha=60°$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$, bunda $\alpha=\frac{\pi}{6}$; | 4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, bunda $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Teńlemeni sheshiń:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;

4) $\cos 0{,}5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Teńlemeni sheshiń:

1) $\sin(x+\pi) = -1$; 2) $\sin \frac{1}{2}(x-1) - 0$; 3) $\cos(x+\pi) = -1$;

4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x-2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

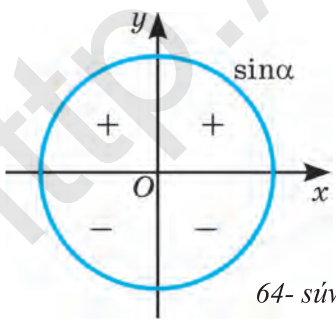
20-§. SINUS, KOSINUS HÁM TANGENSTIŃ BELGILERI

1. Sinus hám kosinustıń belgileri

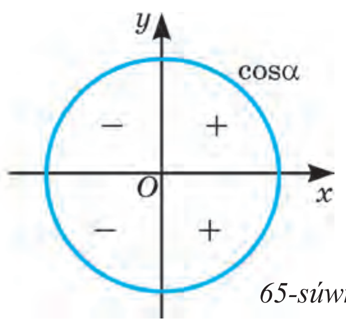
Meyli, (1; 0) noqatı birlik sheńber boyınsha saat tiliniń qozǵalısına qarama-qarsı baǵıtta qozǵalısta bolsın. Bul jaǵdayda birinshi sherekte (kvadratta) jaylasqan noqatlardıń ordinataları hám abcissaları oń. Sonlqıtan, eger $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha > 0$ hám $\cos\alpha > 0$ boladı (64–65-súwretler).

Ekinshi sherekte jaylasqan noqatlar ushın ordinatalar oń, al abcissalar bolsa teris. Sonlıqtan eger $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ boladı (64-65-súwretler). Soǵan uqsas, úshinshi sherekte $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, al tórtinshi sherekte $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ boladı (64-65-súwretler). Noqattıń sheńber boyınsha bunnan keyingi háreketinde sinus hám kosinuslardıń belgileri noqattıń qaysı sherekte turǵanlıǵı menen anıqlanadı.

Sinustıń belgileri 64-súwrette, kosinustıń belgileri bolsa 65-súwrette kórsetilgen.



64- súwret.



65-súwret.

Eger (1; 0) noqatı saat tiliniń qozǵalısı baǵıtında háreket etse, *bul jaǵdayda da sinus hám kosinustıń belgileri noqattıń qaysı sherekte jaylasqanlıǵına qarap anıqlanadı;* bul 64-, 65-súwretlerde kórsetilgen.

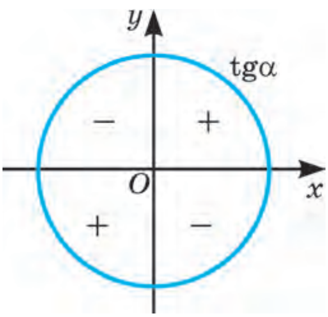
1- másele. Múyeshtiń sinusı hám kosinuslarınıń belgilerin anıqlań.

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $745°$; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) $\frac{3\pi}{4}$ múyeshine birlik sheńberdiń ekinshi shereginde jaylasqan noqat sáykes keledi. Sonlıqtan da $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) $745° = 2 \cdot 360° + 25°$ bolǵanlıqtan (1; 0) noqatın 745° múyeshke burıwda, bul múyeshke birinshi sherekte jaylasqan noqat sáykes keledi. Sonlıqtan da $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ bolǵanlıǵı sebepli (1; 0) noqatın $-\frac{5\pi}{7}$ múyeshke burǵanda, úshinshi sherekte jaylasqan noqat payda etiledi. Sonıń ushın $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲



66- súwret.

2. Tangenstiń belgileri

Anıqlamaǵa muwapıq $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Sonlıqtan da, eger $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ birdey belgige iye bolsa, $\mathrm{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ qarama-qarsı belgilerge iye bolsa, $\mathrm{tg}\alpha < 0$ boladı. Tangenstiń belgileri 66-súwrette kórsetilgen.

$\mathrm{ctg}\alpha$ belgileri $\mathrm{tg}\alpha$ nıń belgileri menen birdey boladı.

2- másele. Múyeshtiń tangensiniń belgilerin anıqlań:

1) 260°; 2) 3.

△ 1) $180° < 260° < 270°$ bolǵanlıǵı ushın $\mathrm{tg}260° > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ bolǵanlıǵı ushın $\mathrm{tg}3 < 0$. ▲

Shınıǵıwlar

242. Eger:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;

5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

bolsa, (1; 0) noqatın α múyeshke burıwda payda bolǵan noqat qaysı sherekte jaylasatuǵının anıqlań.

243. Eger:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;

5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$

bolsa, sinα sanınıń belgisin anıqlań.

244. Eger:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;

5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$

bolsa, cosα sanınıń belgisin anıqlań.

245. Eger:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;

5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$

bolsa, tgα hám ctgα sanlarınıń belgilerin anıqlań.

246. Eger:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;

4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\leq1{,}8\pi$

bolsa, sinα, cosα, tgα hám ctgα sanlarınıń belgilerin anıqlań.

247. Eger:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$

bolsa, sinα, cosα, tgα sanlarınıń belgilerin anıqlań.

248. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bolsın. Sannıń belgilerin anıqlań:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 4) $\sin(\pi-\alpha)$;

5) $\cos(\alpha-\pi)$; 6) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$; 7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

249. Sinus hám kosinuslardıń belgileri birdey (hár túrli) bolatuǵın α sannıń 0 den 2π ge shekemgi aralıqta jaylasqan barlıq mánislerin tabıń.

250. Sannıń belgisin anıqlań:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Ańlatpalardıń mánislerin salıstırıń:

1) $\sin 0{,}7$ hám $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ hám $\cos 2{,}3$.

252. Teńlemeni sheshiń:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

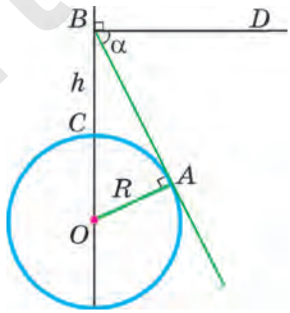
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. Eger:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1{,}2$

bolsa, α sanına sáykes keliwshi noqat qaysı sherekte jaylasqan?

254. (*Beruniy máselesi*). Tawdıń biyikligi $h=BC$ hám $\alpha=\angle ABD$ múyeshi belgili bolsa, Jerdiń radiusı R dı tabıń (67-súwret).



67 súwret.

21-§. BERILGEN BIR MÚYESHTIŃ SINUSÍ, KOSINUSÍ HÁM TANGENSI ARASÍNDAǴÍ QATNASLAR

Sinus penen kosinus arasındaǵı qatnastı anıqlaymız.

Meyli, birlik sheńberdiń $M\,(x;\,y)$ noqatı (1; 0) noqatın α múyeshke burıw nátiyjesinde payda etilgen bolsın (68-súwret). Sonda sinus hám kosinustıń anıqlamasına muwapıq,

$$x=\cos\alpha,\ \ y=\sin\alpha$$

boladi.

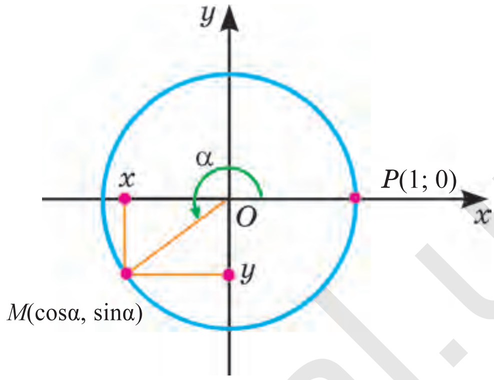
M noqatı birlik sheńberge tiyisli, sonlıqtan da onıń $(x;\,y)$ koordinataları $x^2+y^2=1$ teńlemesin qanaatlandıradı.

Demek,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

(1) teńlik α nıń qálegen mánisinde orınlanadı hám *tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik* dep ataladı.

(1) teńlikten sinα nı cosα arqalı hám kerisinshe, cosα nı sinα arqalı ańlatıw múmkin:



68- súwret.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,. \qquad (3)$$

Bul formulada koren aldındaǵı belgi formulanıń shep jaǵında turǵan ańlatpanıń belgisi menen anıqlanadı.

1-másele. Eger $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, sinα nı esaplań.

△ (2) formuladan paydalanamız. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolǵanlıqtan $\sin\alpha < 0$ boladı, sonıń ushın (2) formulada koren aldına „–" belgisin qoyıw kerek.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ ▲$$

2-másele. Eger $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ hám $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ bolsa, cosα nı esaplań.

△ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ bolǵanlıqtan $\cos\alpha > 0$ boladı hám sonlıqtan (3) formulada koren aldına „+" belgisin qoyıw kerek.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Endi *tangens penen kotangens arasındaǵı baylanıstı* qaraymız.

Tangens hám kotangenstiń anıqlaması boyınsha:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Bul teńlikti kóbeytip,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1} \qquad (4)$$

teńligin payda etemiz. (4) teńlikten $\mathrm{tg}\alpha$ nı $\mathrm{ctg}\alpha$ arqalı hám kerisinshe, $\mathrm{ctg}\alpha$ nı $\mathrm{tg}\alpha$ arqalı ańlatıw múmkin:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

(4)–(6) teńlikler $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \boldsymbol{Z}$ bolǵanda orınlı boladı.

3- másele. Eger $\mathrm{tg}\alpha = 13$ bo‘lsa, bolsa, $\mathrm{ctg}\alpha$ nı esaplań.

△ (6) formula boyınsha tabamız: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

4-másele. Eger $\sin\alpha = 0{,}8$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\mathrm{tg}\alpha$ nı esaplań.

△ (3) formula boyınsha $\cos\alpha$ nı tabamız. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolǵanı ushın $\cos\alpha < 0$ boladı. Sonıń ushın

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Demek, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten hám tangenstiń anıqlamasınan paydalanıp, *tangens penen kosinus arasındaǵı qatnasıqtı* tabamız.

△ $\cos\alpha \neq 0$ dep boljap, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ teńligininń eki tárepin de $\cos^2\alpha$ ǵa bólemiz: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, bunnan

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.} \quad ▲ \qquad (7)$$

Eger $\cos\alpha \neq 0$ bolsa, yaǵnıy $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ bolsa, (7) formula durıs boladı.

(7) formuladan tangensti kosinus hám kosinustı tangens arqalı ańlatıw múmkin.

5- másele. Eger $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\mathrm{tg}\alpha$ nı esaplań.

△ (7) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Tangens ekinshi sherekte teris, sonlıqtan $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. ▲

6- másele. Eger $\mathrm{tg}\alpha = 3$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\cos\alpha$ nı esaplań.

△ (7) formuladan tabamız:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolǵanlıqtan $\cos\alpha<0$ hám sonlıqtan $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$. ▲

Shınıǵıwlar

255. Eger:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ hám $\frac{3p}{2} < \alpha < 2\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\mathrm{tg}\alpha$ ni;

2) $\sin\alpha = 0{,}8$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\cos\alpha$ hám $\mathrm{tg}\alpha$ ni;

3) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ ni;

4) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{ctg}\alpha$ ni;

5) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ ni;

6) $\mathrm{ctg}\alpha = -3$ hám $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ ni esaplań.

256. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik járdeminde teńlikler bir waqıtta orınlanatuǵınlıǵın yaki orınlanbaytuǵının anıqlań:

1) $\sin\alpha=1$ hám $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$ hám $\cos\alpha=-1$;

3) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ hám $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ hám $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

257. Teńlikler bir waqıtta orınlanıw múmkin be:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ hám $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ hám $\cos\alpha=\frac{3}{4}$?

258. Meyli, tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń múyeshlerinen biri bolsın. Eger $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{11}$ bolsa, $\cos\alpha$ hám $\operatorname{tg}\alpha$ nı tabıń.

259. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshiniń tangensi $2\sqrt{2}$ teń. Usı úshmúyeshliktiń kosinusın tabıń.

260. Eger $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\frac{1}{8}$ bolsa, $\cos\alpha$ nı tabıń.

261. 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ bolsa, $\cos\alpha$ nı tabıń;

2) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ bolsa, $\sin\alpha$ nı tabıń.

262. $\operatorname{tg}\alpha=2$ ekenligi belgili. Ańlatpanıń mánisin tabıń:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

263. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ekenligi belgili. 1) $\sin\alpha\ \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ ańlatpalarınıń mánisin tabıń.

264. Teńlemeni sheshiń:

1) $2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x=1$; 2) $\sin^2 x-2=\sin x-\cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x-1=\cos x-2\sin^2 x$; 4) $3-\cos x=3\cos^2 x+3\sin^2 x$.

22-§. TRIGONOMETRIYALÍQ BIRDEYLIKLER

1-másele. $\alpha\neq\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ bolǵanda

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{1}$$

teńliginiń orınlı ekenligin dálilleń.

△ Kotangenstiń anıqlamasına muwapıq $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hám sonlıqtan,

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

$\alpha\neq\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ bolǵanda $\sin\alpha\neq0$. ▲

(1) teńlik α nıń múmkin bolǵan (barlıq ruqsat etiletuǵın) mánisleri ushın orınlı, yaǵnıy onıń shep hám oń tárepleri maǵanaǵa iye bolatuǵın barlıq mánisleri ushın durıs boladı. Bunday teńlikler birdeylikler dep ataladı hám bunday teńliklerdi dálillewge tiyisli máseleler birdeyliklerdi dálillewge tiyisli máseleler dep aytıladı.

Bunnan bılay birdeyliklerdi dálillewge, eger máseleniń shártinde talap etilmegen bolsa, múyeshlerdiń ruqsat etiletuǵın mánislerin izlep otırmaymız.

2-másele. Birdeylikti dálilleń: $\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

△ $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$. ▲

3-másele. Birdeylikti dálilleń: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△ Bul birdeylikti dálillew ushın onıń shep hám oń tárepleriniń ayırması nolge teń bolatuǵının kórsetiw jetkilikli:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0.$$ ▲

1–3- máselelerdi sheshiwde *birdeyliklerdi dálillewdiń tómendegi usıllarınan* paydalanıladı: oń tárepin túrlendiriw menen onıń shep tárpine teńligin kórsetiw; oń hám shep tárepleriniń ayırması nolge teń bolatuǵının kórsetiw. Geyde birdeyliklerdi dálillewde onıń oń hám shep táreplerin túrlendiriw menen olardı bir qıylı ańlatpaǵa keltirgen qolaylı.

4- másele. Birdeylikti dálilleń: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

$$\triangle\ \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Birdeylik dálillendi, sebebi, onıń shep hám oń tárepleri $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ǵa teń. ▲

5- másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.\ ▲$$

Trigonometriyalıq ańlatpalardı ápiwayılastırıwǵa tiyisli máselelerdi sheshiwde, eger máseleniń shártinde talap etilmegen bolsa, múyeshlerdiń qabıl etiwi múmkin bolǵan ruqsat etiletuǵın mánislerin tappaymız.

Shınıǵıwlar

265. Birdeylikti dálilleń:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$; 2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=tg^2\alpha$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=ctg^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$; 6) $\frac{1}{1+ctg^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

266. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\cos\alpha\cdot tg\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot ctg\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$; 5) $\frac{tg\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń san mánisin tabıń:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

268. Birdeylikti dálilleń:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

269. α nıń barlıq múmkin bolǵan mánislerinde tómendegi ańlatpaǵa birdey mánisti qabıl etetuǵınlıǵın, yaǵnıy α ǵa ǵárezli emesligin dálilleń:

1) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha$.

270. Birdeylikti dálilleń:

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń san mánisin tabıń:

1) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;

2) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)-\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, bunda $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

272. Eger $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$ bolsa, $\sin\alpha\cos\alpha$ nıń mánisin tabıń.

273. Eger $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$ bolsa, $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$ nıń mánisin tabıń.

274. Teńlemeni sheshiń:

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$; | 2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

23- §. α HÁM –α MÚYESHLERINIŃ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSI

Meyli, birdeylik sheńberiniń M_1 hám M_2 noqatları $P(1;\ 0)$ noqatın sáykes túrde α hám –α múyeshlerge burıw nátiyjesinde payda etilgen bolsın (69-súwret). Onda Ox kósheri M_1OM_2 múyeshin teń ekige bóledi hám sonlıqtan M_1 hám M_2 noqatları Ox kósherine salıstırǵanda simmetriyalı jaylasqan. Bul noqatlardıń abcissaları birdey, al ordinataları tek belgileri menen ǵana ózgeshelenedi. M_1 noqatı (cosα; sinα) koordinatalarına, M_2 noqatı (cos(-α); sin(-α)) koordinatalarına iye. Sonlıqtan,

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \tag{1}$$

Tangenstiń anıqlamasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha}.$$

Demek,

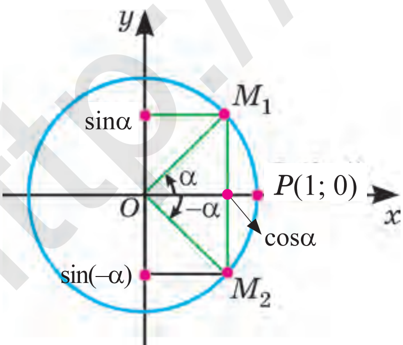
$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.} \tag{2}$$

Soǵan uqsas,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \tag{3}$$

(1) formula α nıń qálegen mánisinde orınlı boladı, al (2) formula $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in$ bolǵanda orınlı.

Eger $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ bolsa, onda ctg(–α) = –ctgα bolatuǵınlıǵın kórsetiw múmkin.



69 súwret.

(1)–(2) formulalar teris múyeshler ushın sinus, kosinus hám tangenstiń mánislerin tabıwǵa imkaniyat beredi.

Máselen:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Shınığıwlar

275. Esaplań:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\text{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\dfrac{1+\text{tg}^2(-30^o)}{1+\text{ctg}^2(-30^o)}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\text{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\text{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\text{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\text{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \text{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\text{tg}(-\alpha)\text{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

277. Birdeylikti dálilleń: $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\text{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Esaplań::

1) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-3\text{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+7,5\text{tg}\,(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

279. Ápiwayılastırıń:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

24-§. QOSÍW FORMULALARÍ

Qosıw formulaları dep $\cos(\alpha \pm \beta)$ hám $\sin(\alpha \pm \beta)$ lardı α hám β múyeshleriniń sinus hám kosinusları arqalı ańlatıwshı formulaǵa aytıladı.

Teorema. Qálegen α hám β ushın tómendegi teńlik durıs boladı:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

○ M_0 (1; 0) noqatın koordinatalar bası átirapında α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ radian múyeshlerge burıw nátiyjesinde sáykes túrde, M_α, $M_{-\beta}$ hám $M_{\alpha+\beta}$ noqatları payda bolatuǵın bolsın (70-súwret).

Sinus hám kosinustıń anıqlaması boyınsha, bul noqatlar tómendegi koordinatalarǵa iye:

$$M_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha), \quad M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta)).$$

$\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$ bolǵanlıqtan $M_0OM_{\alpha+\beta}$ hám $M_{-\beta}OM_\alpha$ teń qaptallı úshmúyeshlikleri teń hám demek, olardıń $M_0M_{\alpha+\beta}$ hám $M_{-\beta}M_\alpha$ ultanları da teń. Sonlıqtan

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

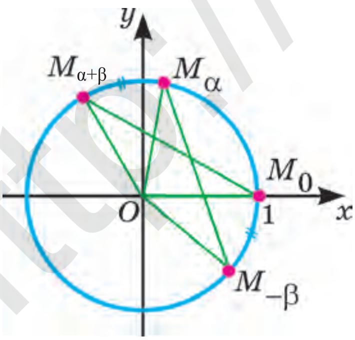
Geometriya kursınan belgili bolǵan eki noqat arasındaǵı aralıq formulasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

23-§ daǵı (1) formuladan paydalanıp, bul teńlemeni túrlendiremiz:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, tómendegige iye bolamız:



70 súwret.

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

bundan $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●

1-másele. $\cos75°$ tı esaplań.

△ (1) formula boyınsha tabamız:

$$\cos75° = \cos(45°+30°) =$$
$$= \cos45°\cos30° - \sin45°\sin30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

(1) formulada β ni –β ǵa almastırıp, tómendegige iye bolamız:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

Bunnan

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad \mathbf{(2)}$$

2- másele. cos15° tı esaplań.

△ (2) formulaǵa muwapıq, tómendegige iye bolamız:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

3- másele. Tómendegi formulalardı dálilleń:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin -, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \cdot \qquad (3)$$

△ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bolǵanda (2) formulaǵa tiykarlanıp:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta,$$

yaǵnıy

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta \, . \qquad (4)$$

Bul formulada β nı α ǵa almastırıp, mınaǵan iye bolamız:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \, .$$

(4) formulada $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ dep oylasaq:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \, . \ ▲$$

(1)–(4) formulalardan paydalanıp, *sinus ushın qosıw formulasın* keltirip shıǵaramız:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin - \cos\beta + \cos - \sin\beta \, .$$

Solay etip

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

(5) formulada β nı –β ǵa almastırıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

bunnan

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

4- másele. sin210° tı esaplań.

$$\triangle \ \sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=$$

$$=\sin 180^\circ\cos 30^\circ+\cos 180^\circ\sin 30^\circ=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

5- másele. Esaplań:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle \ \sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0. \ \blacktriangle$$

6- másele. Teńlikti dálilleń:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}. \qquad (7)$$

$$\triangle \ \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Bul bólshektiń alımı hám bólimin cosαcosβ ǵa bólip, (7) formulanı payda etemiz. ▲

(7) formula esaplawlarda paydalı bolıwı múmkin.

Máselen, usı formula boyınsha tómendeni tabamız:

$$\mathrm{tg}225^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ+45^\circ)=\frac{\mathrm{tg}180^\circ+\mathrm{tg}45^\circ}{1-\mathrm{tg}180^\circ\,\mathrm{tg}45^\circ}=1.$$

Shınıǵıwlar

Qosıw formulası járdeminde esaplań (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) $\cos 57°30'\cos 27°30' + \sin 57°30'\sin 27°30'$;

2) $\cos 19°30'\cos 25°30' - \sin 19°30'\sin 25°30'$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, bunda $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hám $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, bunda $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ hám $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Ańlatpanı ápiwayılastırıń (**283–284**):

283. 1) $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$; 2) $\cos 5\beta\cos 2\beta + \sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)$.

Qosıw formulaları járdeminde esaplań (**285–286**):

285. 1) $\sin 73°\cos 17° + \cos 73°\sin 17°$;

2) $\sin 73°\cos 13° - \cos 73°\sin 13°$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, bunda $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ hám $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, bunda $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ hám $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

287. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Eger $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ hám $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ bolsa, $\cos(\alpha+\beta)$ hám $\cos(\alpha-\beta)$ nı esaplań.

289. Eger $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ hám $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin(\alpha-\beta)$ nı esaplań.

290. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Birdeylikti dálilleń:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

292. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: 1) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi-\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

25-§. QOS MÚYESHTIŃ SINUSÍ HÁM KOSINUSÍ

Qosıw formulalarınan paydalanıp, *qos múyeshtiń sinusı hám kosinusı formulasın* keltirip shıǵaramız.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Solay etip,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

1- másele. Eger $\sin\alpha = -0{,}6$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin 2\alpha$ nı esaplań.

△ (1) formula boyınsha tabamız:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot \cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolǵanı ushın $\cos\alpha < 0$ boladı hám sonlıqtan:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Demek, $\sin 2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$
Solay etip,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

2- másele. Eger $\cos\alpha = 0{,}3$ bolsa, $\cos 2\alpha$ nı esaplań.

△ (2) formuladan hám tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \ ▲$$

3- másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$△ \ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha. \ ▲$$

4- másele. Eger $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ bolsa, $\operatorname{tg}2\alpha$ nı esaplań.

$$△ \ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Formulada $\beta = \alpha$ dep boljap (24-§ qa qarań), tómendegige iye bolamız:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Eger $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ bolsa, onda (3) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

Esaplań (**293–294**):

293. 1) $2\sin 15°\cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; 4) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Eger:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ hám $\pi < - < \frac{3\pi}{2}$
bolsa, $\sin 2\alpha$ ni hisoblang.

296. Eger:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ bolsa, $\cos 2\alpha$ nı esaplań.

Ańlatpanı ápiwayılastırıń (**297–298**):

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

299. Birdeylikti dálilleń:

1) $\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Eger:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{4}$

bolsa, $\sin 2\alpha$ nı esaplań.

301. Birdeylikti dálilleń:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

302. Esaplań:

1) $2\cos^2 15°-1$; | 2) $1-2\sin^2 22{,}5°$; | 3) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; | 4) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Birdeylikti dálilleń:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

305. Eger: $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$ bo'lsa, $\operatorname{tg}2\alpha$ nı esaplań.

306. Esaplań: 1) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{6\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 3) $\frac{4\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

26-§. KELTIRIW FORMULALARÍ

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenstiń mánisleriniń kesteleri 0° dan 90° qan shekem (yaki 0 den $\frac{\pi}{2}$ ge shekem) múyeshler ushın dúziledi. Bul jaǵday olardıń basqa múyeshler ushın mánisleri súyir múyeshler ushın mánislerine keltiriw menen túsindiriledi.

1 - másele. sin870° hám cos870° tı esaplań.

△ 870° = 2·360° + 150°. Sonlıqtan da P (1; 0) noqatın koordinatalar bası átirapında 870° qa burǵanda noqat eki tolıq aylanıs jasaydı hám jáne 150° qa burıladı, yaǵnıy 150° burıwdaǵı M noqatınıń dál ózi payda boladı (71-súwret). Sonlıqtan sin870° = sin150° cos870° = cos150°.

M noqatına Oy kósherine qarata simmetriyalı bolǵan M_1 noqatın jasaymız (72-súwret). M hám M_1 noqatlarınıń ordinataları birdey, al abcissaları tek belgileri menen ǵana ózgeshelenedi. Sonlıqtan $\sin150^\circ = \sin30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos150^\circ = -\cos30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Juwabı: $\sin870^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

1-máseleni sheshiwde

$$\sin(2\cdot360^\circ+150^\circ)=\sin150^\circ,\ \cos(2\cdot360^\circ+150^\circ)=\cos150^\circ, \qquad (1)$$

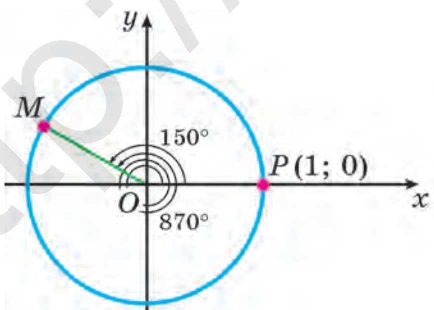
$$\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ,\ \cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ \qquad (2)$$

teńliklerden paydalanıladı.

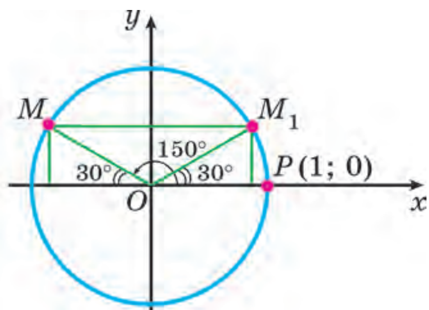
(1) teńlik durıs teńlik, sebebi $P(1;\ 0)$ noqatın $\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ múyeshke burǵanda onı α múyeshke burǵandaǵı noqattıń dál ózi payda boladı.

Sonlıqtan da tómendegi formulalar durıs boladı:

! $$\boldsymbol{\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z.} \qquad \textbf{(3)}$$



71- súwret.



72- súwret.

Atap aytqanda, $k = 1$ bolǵanda:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

teńlikleri orınlı boladı.

(2) teńlik

$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha} \qquad \mathbf{(4)}$$

formulalardıń dara jaǵdayı bolıp sanaladı.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ formulasın dálilleymiz.

Sinus ushın qosıw formulasın paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

(4) formulalardıń ekinshisi de usıǵan uqsas dálillenedi. (4) formulalar *keltiriw formulaları* dep ataladı. (3) hám (4) formulalar járdeminde qálegen múyeshtiń sinusı hám kosinusın esaplawdı, olardıń súyir múyeshler ushın mánislerin esaplawǵa keltiriw múmkin.

2-másele. $\sin930°$ tı esaplań.

(3) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sin930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°).$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ formulası boyınsha $\sin(-150°) = -\sin150°$ tı payda etemiz.

(4) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$-\sin150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}.$$

Juwabı: $\sin930° = -\frac{1}{2}$.

3-másele. $\cos\frac{15\pi}{4}$ tı esaplań.

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Endi qálegen múyeshtiń tangensin esaplawdı súyir múyeshtiń tangensin esaplawǵa qalay keltiriwge bolatuǵının kórsetemiz.

(3) formuladan hám tangenstiń anıqlamasınan

$$\mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{tg}\alpha,\ k\in \boldsymbol{Z}$$

teńligi kelip shıǵadı.

Usı teńlik hám (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \mathrm{tg}(\alpha - \pi) = -\mathrm{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Sonlıqtan tómendegi formula orınlı boladı:

! $$\mathbf{tg}(\alpha + \pi k) = \mathbf{tg}\alpha,\ k\in Z. \qquad \mathbf{(5)}$$

4-másele. Esaplań: 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4}$.

△ 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3} = \mathrm{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4} = \mathrm{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

24-§ da (3-másele.)

! $$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

formulaları dálillengen edi. Bul formulalar *keltiriw formulaları* dep ataladı. Usı formulalardan paydalanıp, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ nı payda etemiz.

x tiń qálegen mánisi ushın $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ teńlik-leri durıs bolatuǵını belgili.

Bul tengliklerden, argument 2π ge ózgergende sinus hám kosinustıń mánisleri periodlı tákirarlanatuǵınlıǵı kórinedi. Bunday funkciyalar *periodı 2π bolǵan periodlı funkciyalar* dep ataladı

Eger sonday bir $T \neq 0$ sanı bar bolıp, $y = f(x)$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastındaǵı qálegen x ushın

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

teńligi orınlansa, onda $f(x)$ funkciyası *periodlı funkciya* dep ataladı. T sanı $f(x)$ funkciyasınıń *periodı* dep ataladı.

Bul anıqlamadan, eger x san $f(x)$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastına tiyisli bolsa, onda $x + T$, $x - T$ sanları da, ulıwma, $x + Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$ sanları da usı periodlı funkciyanıń anıqlanıw oblastına tiyisli hám $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ boladı.

2π sanı $y = \cos x$ funkciyasınıń *eń kishi oń periodı* ekenligin kórsetemiz.

$T > 0$ kosinustıń periodı bolsın, yaǵnıy qálegen x ushın $\cos(x + T) = \cos x$ teńligi orınlanadı. $x = 0$ dep, $\cos T = 1$ di payda etemiz. Bunda $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $T > 0$ bolǵanlıqtan T tómendegi 2π, 4π, 6π, ... mánislerin qabıl ete aladı hám sonlıqtan da T nıń mánisi 2π den kishi bolıwı múmkin emes.

$y = \sin x$ funkciyasınıń *eń kishi oń periodı* 2π ge teń ekenin dálillew múmkin.

Shınıǵıwlar

Esaplań (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;
5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\,570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\,960°$;
5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\,585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Ańlatpanıń san mánisin tabıń:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Esaplań:

1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 2) $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$;

3) $2\sin 6,5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4,25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\frac{\sin(-6,5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16,25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^o)+\sin 480^o}{\operatorname{tg}405^o-\operatorname{ctg}330^o}$.

314. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

315. Úshmúyeshliktiń eki ishki múyeshiniń qosındısınıń sinusı úshinshi múyeshiniń sinusına teńligin dálilleń.

316. Birdeylikti dálilleń:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Teńlemeni sheshiń:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$; ;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; 5) $\cos(\pi-2x)=1$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

27-§. SINUSLARDÍŃ QOSÍNDÍSÍ HÁM AYÍRMASÍ. KOSINUSLARDÍŃ QOSÍNDÍSÍ HÁM AYÍRMASÍ.

1-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Qosıw formulası hám qos múyeshtiń sinusı formulasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ▲

Eger *sinuslardıń qosındısınıń formulası*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (1)$$

dep qollanılsa, bul máseleni ápiwayıraq sheshiwge boladı. Bul formula járdeminde tómendegini payda etemiz:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Endi (1) formulanıń orınlı ekenin dálilleymiz.

○ $\frac{\alpha+\beta}{2}=x, \frac{\alpha-\beta}{2}=y$ belgilewlerin kiritemiz. Sonda $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ boladı hám sonlıqtan $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+$ $+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

(1) formula menen bir qatarda tómendegi *sinuslar ayırmasınıń formulası*, *kosinuslardıń qosındısı* hám *ayırmasınıń formulalarınan* da paydalanıladı:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

(3) hám (4) formulalar da (1) formulanıń dálilleniwine uqsas dálillenedi; (2) formula β ni $-\beta$ menen almastırıw arqalı (1) formuladan keltirilip shıǵarıladı (*bunı ózińizshe dálilleń*).

2-másele. $\sin75^\circ+\cos75^\circ$ tı esaplań.

△ $\sin75^\circ+\cos75^\circ=\sin75^\circ+\sin15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$ ▲

3-másele. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ kóbeymege túrlendiriń.

△ $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

4- másele. sinα + cosα ańlatpasınıń eń kishi mánisi $\sqrt{2}$ ge, al eń úlken mánisi $\sqrt{2}$ ge teń ekenin dálilleń.

△ Berilgen ańlatpanı kóbeymege túrlendiremiz:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Kosinustıń eń kishi mánisi -1 ge, al eń úlken mánisi 1 ge teń bolǵanlıqtan, berilgen ańlatpanıń eń kishi mánisi $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$ ge, al eń úlken mánisi $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ ge teń. ▲

Shınıǵıwlar

318. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$; 2) $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$;

3) $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$; 4) $\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{4})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

319. Esaplań:

1) $\cos 105°+\cos 75°$; 2) $\sin 105°-\sin 75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105°+\sin 165°$.

320. Kóbeymege túrlendiriń:

1) 1 + 2sinα; 2) 1 – 2sinα; 3) 1 + 2cosα;

4) 1 + sinα; 5) 1 – cosα; 6) 1 + cosα;

321. Birdeylikti dálilleń:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\text{tg}2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\text{ctg}\alpha$.

322. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Birdeylikti dálilleń (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$.

324. 1) $\frac{\sin2\alpha+\sin5\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

325. Kóbeyme túrinde jazıń:

1) $\cos22^\circ+\cos24^\circ+\cos26^\circ+\cos28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

326. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ birdeylikti dálilleń hám esaplań:

1) $\mathrm{tg}267^\circ+\mathrm{tg}93^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\mathrm{tg}99^\circ+\mathrm{tg}81^\circ$.

327. Kóbeytiwshilerge jikleń:

1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha+\cos2\alpha$;
3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\mathrm{tg}\alpha$; 4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\alpha$.

III bobga doir mashqlar

328. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bolsın. P(1; 0) noqatın:

1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; | 2) $\alpha-\pi$; | 3) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$; | 4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; | 5) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; | 6) $\pi-\alpha$
múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat qaysı sherekte jatatuǵının anıqlań.

329. Múyeshtiń sinusı hám kosinusınıń mánisin tabıń:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) $\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(2k+1)\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 7) $2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Esaplań:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k + \cos 2k\pi$, bunda k – butun son;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, bunda k – butun son.

331. Tabıń:

1) eger $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\cos\alpha$ nı;

2) eger $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\operatorname{tg}\alpha$ nı;

3) eger $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ hám $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$ nı;

4) eger $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$ nı.

332. Birdeylikti dálilleń:

1) $5\sin^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $(1-\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{tg}(\pi+\alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1+\operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń san mánisin tabıń:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$, bunda $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$, bunda $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Esaplań:

1) $2\sin75°\cos75°$; 2) $\sin15°$; 3) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
4) $\sin75°$; 5) $\cos75°$; 6) $\sin135°$.

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIŃ!

1. Eger: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin2\alpha$ nı,

2) $\cos\alpha = -0{,}6$ hám $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos2\alpha$ nı esaplań.

2. Ańlatpanıń mánisin tabıń:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos150°$; 3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (*Ǵiyosiddin Jamshid al-Koshiy máselesi.*)
$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ ekenin dálilleń.

4. Birdeylikti dálilleń.

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2\alpha + \cos2\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha) + \sin(4\pi+\alpha)$.

336. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi+\alpha) - \sin^2(\alpha+2\pi)}{2\cos(\alpha+2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha-\pi)}$.

Esaplań (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;
3) $3\cos3660° + \sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°) + \operatorname{tg}1035°$.

339. Sanlardı salıstırıń.
1) sin3 hám cos4; 2) cos0 hám sin5; 3) sin1 hám cos1.

340. Sannıń belgisin anıqlań:
1) $\sin3{,}5\operatorname{tg}3{,}5$; 2) $\cos5{,}01\sin0{,}73$; 3) $\frac{\operatorname{tg}13}{\cos15}$;
4) $\sin1\cos2\operatorname{tg}3$; 5) $\sin2\cos2$; 6) $\operatorname{tg}1\cos1$.

341. Esaplań:
1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin165°$; 3) $\sin105°$;
4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2 195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:
1) $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. Berilgen: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ hám $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$ lardıń mánislerin esaplań.

Ańlatpanı ápiwayılastırıń (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha+\sin4\alpha}$;
3) $\frac{\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha-\cos2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;
3) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

347. 1) Eger $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ hám tgβ = 2,4 bolsa, tg(α + β) nı;

2) eger $ctg\alpha = \frac{4}{3}$ hám ctgβ = –1 bolsa, ctg(α + β) nı esaplań.

348. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

III bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

1. 153° tıń radian ólshemin tabıń

A) $\frac{17\pi}{20}$; B) $\frac{19\pi}{20}$; C) 17π; D) $\frac{2\pi}{9}$.

2. 0,65π diń gradus ólshemin tabıń.

A) 11,7°; B) 117°; C) 116°; D) 118°.

3. Kóbeymeniń qaysı biri teris?

A) cos314°sin147°; B) tg200°ctg201°;
C) cos163°cos295°; D) sin170°ctg250°.

4. Kóbeymeniń qaysı biri oń?

A) sin2cos2sin1sin1°; B) $tg8^{\circ}ctg8ctg10^{\circ}\, ctg\sqrt{10}$;
C) $\sin9^{\circ}\sin9\cos9^{\circ}\cos9$; D) $\cos10^{\circ}\cos10\cos11^{\circ}\cos\sqrt{11}$.

5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ noqatına túsiw ushın (1; 0) noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi tabıń:

A) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; B) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

C) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; D) $2\pi+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

6. (1; 0) noqatın $\frac{5\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ múyeshke burıwdan payda bolatuǵın noqattıń koordinataların tabıń:

A) (0; 1); B) (0; –1); C) (1; 0); D) (–1; 0).

7. Sanlardı ósiw tártibinde jazıń:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

A) $a < c < b$; B) $b < c < a$; C) $c < a < b$; D) $b < a < c$.

8. Sanlardı kemeyiw tártibinde jazıń:

$$a = \cos 2; \ \ b = \cos 2°; \ \ c = \sin 2; \ \ d = \sin 2°.$$

A) $a > c > d > b$; B) $d > c > b > a$;
C) $b > c > d > a$; D) $c > d > b > a$.

9. Esaplań: $\dfrac{\sin 136° \cdot \cos 46° - \sin 46° \cdot \cos 224°}{\sin 110° \cdot \cos 40° - \sin 20° \cdot \cos 50°}$.

A) $\cos 40°$; B) 0,5; C) $\sin 44°$; D) 2.

10. Esaplań: $\dfrac{\sin 10° \cdot \sin 130° - \sin 100° \cdot \sin 220°}{\sin 27° \cdot \cos 23° - \sin 157° \cdot \cos 153°}$.

A) 1; B) –1; C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Esaplań: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

A) 1; B) –1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin\alpha = 0{,}6$ bolsa, $\mathrm{tg}2\alpha$ nı tabıń. $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A) 3,42; B) $3\dfrac{3}{7}$; C) $\dfrac{7}{24}$; D) $-\dfrac{7}{24}$.

13. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{5}$ bolsa, $\sin 2\alpha$ nı tabıń.

A) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$.

14. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ bolsa, $\cos 2\alpha$ nı tabıń.

A) $\dfrac{4}{3}$; B) $-\dfrac{4}{3}$; C) $\dfrac{3}{4}$; D) $-\dfrac{3}{4}$.

15. Ápiwayılastırıń: $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) -1; B) 1; C) 0,5; D) $-\frac{1}{2}$.

16. Ápiwayılastırıń: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$; B) $\frac{1}{3}\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}$ bolsa, $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$ nı esaplań.

A) 0,59; B) 0,49; C) –0,49; D) 0,2.

18. $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$ bolsa, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ nı tabıń.

A) $\frac{81}{49}$; B) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; C) $\frac{49}{81}$; D) $-1\frac{32}{49}$.

19. Esaplań: $\sin 100^\circ\cdot\cos 440^\circ+\sin 800^\circ\cdot\cos 460^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) –1; D) 0.

20. Ápiwayılastırıń: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$; B) $-2\sin 4\alpha$; C) $\sin 4\alpha$; D) $2\cos 2\alpha$.

21. $8x^2-6x+1=0$ teńlemesiniń korenleri $\sin\alpha$ hám $\sin\beta$ bolıp, α, β lar I sherekte bolsa, $\sin(\alpha+\beta)$ nı tabıń.

A) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; C) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; D) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. $6x^2-5x+1=0$ teńlemesiniń korenleri $\cos\alpha$ hám $\cos\beta$ bolıp, α, β lar I sherekte bolsa, $\cos(\alpha+\beta)$ nı tabıń.

A) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$; B) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. x ti tabıń: $2(x+\sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$.

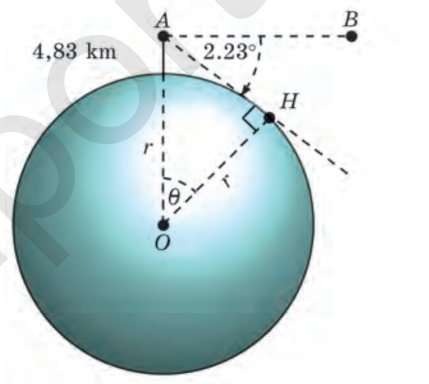
24. $x^2 - 7x + 12 = 0$ teńlemesiniń korenleri $\mathrm{tg}\alpha$ hám $\mathrm{tg}\beta$ bolsa, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ nı tabıń:

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

Másele. (Beruniy máselesi.) Baqlawshı teńiz qáddinen 4,83 km biyikliktegi tawdıń tóbesinde turıp, okean gorizontına aǵıw múyeshi 2,23° ekenin ólshedi. Jerdiń radiusın tabıń.

Orta ásirlerdiń ullı enciklopedistshi ilimpazı Abu Rayxan Muhammed ibn Ahmad Beruniy (970-1048 j). Jer sharınıń radiusın úlken anıqlıqta ólshegen bolıp, máseleniń tómende keltirilgen sheshiw usılı oǵan tiyisli.



73-súwret.

△ Jerdi shar dep oylayıq. r arqalı Jerdiń radiusın, A arqalı tawdıń tóbesin hám H arqalı A noqattan shıqqan tuwrısında jatıwshı gorizont noqatın 73-súwrette kórsetilgendey etip belgileyik. O noqat Jerdiń orayı hám B noqat A noqatınan shıǵıwsh $\overline{A}$ ǵa perpendikulyar bolǵan gorizontal sızıqtıń noqatı bolsın. Múyesh $\angle AOH$ ni θ arqalı belgileyik.

A noqat teńiz qáddinen 4,83 km biyiklikte bolǵanı ushın $OA = r + 4{,}83$. Bunnan tısqarı, $OH = r$. $\overline{AB}$ sızıq $\overline{A}$ ǵa perpendikulyar bolǵanı ushın $\angle OAB = 90°$ hám sonlıqtan $\angle OAH = 90° — 2{,}23° = 87{,}77°$. Jer qáddin súwrettegidey sheńber sıpatında qarasaq, $\overline{AH}$ bul sheńber urınıwshı hám demek, $\overline{AH}$ hám $\overline{H}$ óz ara perpendikulyar boladı, nátiyjede $\Delta OHA = 90°$. $\angle OAH$ múyeshler qosındısı180°

bolǵanlıqtan $\theta = 180° - 90° - 87{,}77° = 2{,}23°$. Demek, $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r + 4{,}83}$, bunnan $\frac{r}{r + 4{,}83} = \cos 2{,}23^{\circ}$.

Bul teńlemeni r ǵa salıstırmalı túrde sheshemiz:

$$r = (r + 4{,}83)\cos 2{,}23° \Rightarrow r - r\cos 2{,}23° = 4{,}83\cos 2{,}23° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4{,}83\cos 2{,}23°}{1 - \cos 2{,}23°} \Rightarrow r = 6372{,}91.$$

Sonı aytıp ótiwimiz kerek, payda etilgen nátiyje Jerdiń negizgi ortasha radiusı 6371 km ge júdá jaqın.

Juwabı: $r = 6372{,}91$ km. ▲

Máseleler

1. Baqlawshı Jer joldası Jer betinen h(km) aralıqta sheńber boylap háreket etsin. D joldastan Jer betiniń baqlaw múmkin bolǵan aralıǵınıń uzınlıǵı dep oylayıq(74-súwret).

1) Oraylıq múyesh θ (radianlarda) hám *h* biyiklikti baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;

2) baqlanıwı múmkin bolǵan aralıqtıń *d* uzınlıǵı menen θ baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;

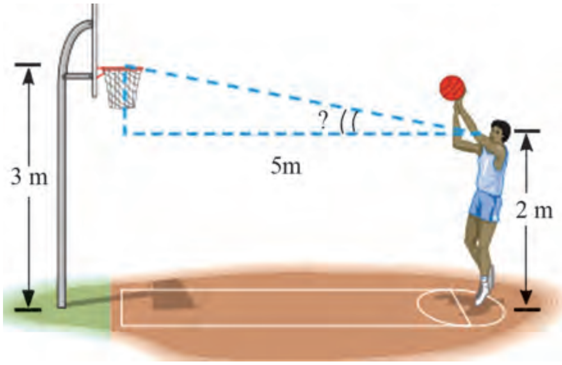
3) *d* hám *h* tı baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;

4) egerde *d* = 4000 km bolsa, Jer joldası qanday biyiklikte bolıwı kerek?

5) egerde Jer joldası 100 km biyiklikte bolsa, *d* qanday boladı?

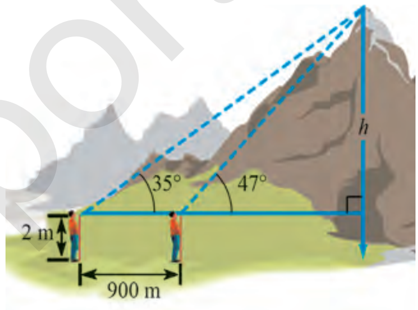
74-súwret

2. Basketbol sebetinen 5 metr aralıqta turǵan basketbolshınıń kózleri poldan 2 metr biyiklik dárejesinde, bunda sebetshe dóńgelegi poldan 3 metr biyiklikte jaylasqan(75-súwret). Onıń kózlerinen sebetshe dóńgeleginiń orayına qaray múyeshi qanday?



75- súwret

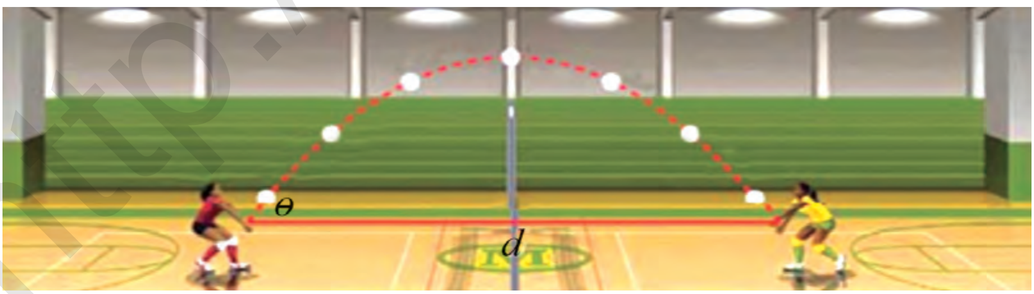
3. Marksheyder (kánlerdi rejelewshi hám olardan durıs paydalanıw boyınsha qánige) tawdıń biyikligin ólshew maqsetinde aralıqları 900 metr bolǵan eki noqattan kóteriliw múyeshlerin ólshedi (76-súwret). Nátiyjede birinshi múyesh 47° hám ekinshisi 35° ekenligi anıqlandı. Egerde teodolit (múyeshti ólshewshi ásbap) tiń biyikligi 2 metr bolsa, tawdıń biyikligin tabıń.



76 *súwret.*

4. Volleybol oyınında kóteriliw múyeshi θ hám baslanǵısh tezligi v m/sek penen atılǵan top

$$d = \frac{v}{9,75}\sin 2(\theta)$$ formulaǵa tiykarlanıp d gorizontal aralıqqa ushıp baradı. Egerde $\theta = 60°$ tezlik 12 m/sek bolsa, d nı tabıń (77-súwret).

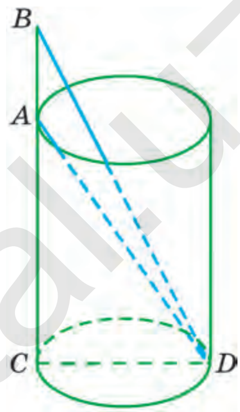


77 *súwret*

Tariyxıy máseleler

Abu Rayxan Beruniy máseleleri

1. Qudıq cilindr formasında bolıp, onıń túbi qudıqtıń ernegindegi A noqatınan α múyeshi astında, qudıqtıń diywalı dawamındaǵı B noqatınan β múyeshi astında kórinedi (78-súwret). Eger $AB=a$ bolsa, qudıqtıń tereńligin tabıń.



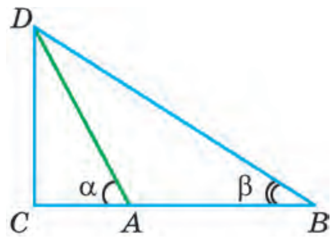
78- súwret

Berilgeni:

$\angle CAD=\alpha,\ \angle ABD=\beta,\ \ AB=a.$

Tabıw kerek: $AC=?$

2. Minara jerdegi A noqatınan α múyesh astında, al B noqatınan β múyeshi astında kórinedi (79-súwret). Eger $AB=a$ bolsa, minaranıń biyikligin tabıń.



79-súwret

Berilgeni:

$\angle CAD=\alpha,\ \angle ABD=\beta,\ AB=a.$

Tabıw kerek: $CD=?$

Ǵ*iyosiddin Jamshid al-Koshiy* máselesi:

3. Qálegen α múyeshi ushın

$$\sin\left(45^{o}\ \frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

bolatuǵınlıǵın dálilleń.

Ataqlı matematik Abulvafo Muhammed al-Buzjaniy (940-998) máselesi:

4. Qálegen α hám β ushın,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

bolatuǵının dálilleń.

Tariyxıy mağlıwmatlar

Mirzo Ulug‘bek (1394–1449)

Matematikanıń, atap aytqanda trigonometriyanıń rawajlanıwına ullı ilimpazlar Muhammed al-Xorezmiy, Ahmad Farǵoniy, Abu Rayxan Beruniy, Mırza Uluǵbek, Ali Qusshı, Giyosiddin Jamshid al-Koshiyler úlken úles qosqan. Juldızlardıń aspan sferasındaǵı koordinataların anıqlaw, planetalardıń hárekettin baqlaw, Ay hám Quyashtıń tutılıwın aldınala aytıp beriw hám basqa ilimiy, ámeliy áhmiyetke iye máseleler anıq esaplawlardı, bul esaplawlarǵa tiykarlanǵan kesteler dúziwdi talap etiletuǵın edi. Mine usınday astronomiyalıq (trigonometriyalıq) kesteler Shıǵısta „Zij“ ler dep atalǵan.

Muhammed al-Xorezmiy, Abu Rayxan Beruniy, Mırza Uluǵbek sıyaqlı ilimpazlardıń matematikalıq miynetleri menen birge „Zij“ leri de dúnyaǵa tanılǵan. Olar latın hám basqa tillerge awdarma islegen hám Evropada matematikanıń, astronomiyanıń rawajlanıwına salmaqlı tásirin tiygizgen.

Beruniydiń „Qonuni Másudiy“ miynetinde sinuslar kestesi 15 minut aralıq penen, tangensler kestesi 1° aralıq penen 10^{-8} ge shekemgi dállikte berilgen. Júdá dál „Zij” lerden biri Mırza Uluǵbektiń „Zij“- „Ziji Ko´rganiy“ den ibarat. Bunda sinuslar kestesi 1 minut aralıq penen, tangensler kestesi 0° tan 45° qa shekem 1 minutlıq aralıq penen, al 46° tan 90° qa shekem 5 minutlıq aralıq penen 10^{-8} ge shekemgi dállikte berilgen.

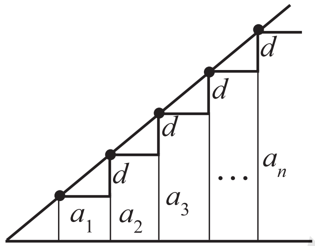
Giyosiddin Jamshid al-Koshiy „Vatar va sinus haqida risola“ sında $\sin 1^0$ tı útirden soń 17 tańba dálliginde esaplaydı:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Sheńberdiń uzınlıǵı, oǵan ishley hám sırtlay sızılǵan durıs .... – kópmúyeshliklerdiń perimetrleriniń orta arifmetikalıq shamasına teń dep, n=28 bolǵanda Jamshid al-Koshiy „Aylana haqida risola“ miynetinde 2π ushın tómendegi nátiyjeni aladı.

$$2\pi = 6{,}2831853071795865...$$

IV BAP. SANLÍ IZBE-IZLIKLER. PROGRESSIYALAR



28-§. SANLI IZBE-IZLIKLER

Kúndelikli turmısta hár túrli buyımlardıń jaylasıw tártibin kórsetiw ushın olar nomerlep barıladı. Máselen, hárbir kóshede jaylasqan úyler nomerlenedi. Kitapxanada kitap oqıwshılarınıń abonementleri nomerlenedi hám olardı berilgen nomerler tártibinde arnawlı kartotekalarǵa salıp qoyıladı.

Bankte amanatshılardıń esap beti nomeri boyınsha ondaǵı qarjınıń muǵdarın kóriwge boladı. Meyli, №1 esap betinde a_1 swm, №2 esap betinde a_2 swm hám taǵı basqa, dep alayıq. Nátiyjede

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$$

sanlı izbe-izlikti payda etemiz, bul jerde N- barlıq esap betleriniń sanı. Bunda 1 den N ǵa shekem bolǵan hárbir natural n sanǵa a_n sanı sáykes etip qoyılǵan.

Matematikada *sheksiz* sanlı izbe-izlik úyreniledi.

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

a_1 – sanı izbe-izliktiń birinshi aǵzası, a_2 – sanı izbe-izliktiń ekinshi aǵzası, a_3 – sanı izbe-izliktiń úshinshi aǵzası delinedi hám taǵı basqa. a_n – sanı izbe-izliktiń n-(jámi) aǵzası dep, natural n sanı bolsa, onıń nomeri dep ataladı. Máselen, natural sanlar kvadratlardan ibarat 1, 4, 9, 16, 25, ...,

n^2, $(n+1)^2$, ... sanlı izbe-izlik ushın $a_1=1$ izbe-izliktiń birinshi aǵzası; $a_n=n^2$ izbe-izliktiń n-aǵzası; $a_{n+1}=(n+1)^2$ sanlı izbe-izliktiń $(n+1)$-aǵzası.

Sanlı izbe-izlikler kóbinese, jámi n-aǵzanıń formulası járdeminde beriledi. Máselen, $a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, ...)$ formula járdeminde $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ sanlı izbe-izlikler berilgen.

1-másele. Sanlı izbe-izlik $a_n=n(n-2)$ formula menen berilgen. Onıń júzinshi aǵzasın esaplań.

$$\triangle\ a_{100}=100\cdot(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

2-másele. Sanlı izbe-izlik $a_n=2n+3$ formula menen berilgen. 1) onıń 43 ke teń bolǵan aǵzasınıń nomerin anıqlań; 2) 50 sanı izbe-izliktiń aǵzası bolatuǵını yaki bolmaytuǵının anıqlań.

△**1)** Shárt boyınsha $2n+3=43$, bunnan $n=20$.

2) Egerde 50 sanı izbe-izliktiń n- nomerli aǵzası bolsa, onda $2n+3=50$, bunnan $n=23{,}5$. Payda bolǵan n nıń mánisi natural san bolmaǵanı ushın, ol izbe-izliktiń aǵzası bola almaydı. Sonlıqtan 50 sanı izbe-izliktiń aǵzası emes. ▲

Bazıda izbe-izlik sonday formula menen beriledi, bunda onıń geybir nomerinen baslap qálegen aǵzasın aldıńǵı bir yaki bir neshe aǵzaları járdeminde esaplawǵa múmkin boladi. Izbe-izliktiń bunday etip beriliw usılı *rekurrent* (latınsha *recuro* – qaytıw) usılı dep ataladı.

3-masala. Sanlı izbe-izlik $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$ rekurrent formula hám $b_1=1$, $b_2=3$ shártler járdeminde berilgen. Bul izbe-izliktiń besinshi aǵzasın esaplań.

△ $b_3=b_2+b_1=3+1=4.$

$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$

$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$

Juwabı: $b_5=11.$ ▲

Shınığıwlar

349. Natural sanlar kvadratlardan ibarat 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... sanlı izbe-izlik berilgen.
1) Sanlı izbe-izliktiń úshinshi, altınshı, n-aǵzaların aytıń.
2) Sanlı izbe-izliktiń 4, 25, n^2, $(n+1)^2$ ge teń bolǵan aǵzalarınıń nomerlerin kórsetiń.

350. $n-$aǵzanıń formulası menen berilgen izbe-izliktiń birinshi úsh aǵzasın esaplań:
1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;
4) $a_n = \dfrac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \dfrac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Awızeki). Sanlı izbe-izlik $x_n = n^2$ formula menen berilgen. Sanlı izbe-izliktiń 100; 144; 225 ge teń bolǵan aǵzalarınıń nomeri qanday? 48, 49, 169 sanları usı izbe-izliktiń aǵzaları bola ma?

352. Izbe-izlik $a_n = n^2 - 2n - 6$ formula menen berilgen.
1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9
Sanları izbe-izliktiń aǵzaları bola alama?

353. 1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$
rekurrent formula hám $a_1=2$ shárt penen berilgen izbe-izliktiń aldıńǵı tórt aǵzasın tabıń.

354. Sanlı izbe-izlik n-aǵzanıń formulası $a_n = (n-1)(n+4)$ menen berilgen. Egerde
1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ bolsa, n nı tabıń.

355. $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ rekurrent formula hám $a_1=256$ shárt penen berilgen izbe-izliktiń birinshi tórt aǵzasın tabıń.

356. $a_1 = 1$ shárt hám
1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2}{3}}$;
rekurrent formula menen berilgen izbe-izliktiń dáslepki altı aǵzasın jazıń.

357. Sanlı izbe-izlik $a_{n+2}=a_n^2-a_{n+1}$ rekurrent formula hám $a_1=2$, $a_2=3$, shárt penen berilgen. Izbe-izliktiń besinshi aǵzasın esaplań.

358. n- aǵzasınıń formulası menen berilgen sanlı izbe-izliktiń, $(n+1)$-, $(n+2)$- hám $(n+5)$-, aǵzaların jazıń:

1) $a_n=-5n+4$; | 2) $a_n=2(n-10)$; | 3) $a_n=2\cdot 3^{n+1}$; | 4) $a_n=7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

29- §. ARIFMETIKALÍQ PROGRESSIYA

Tómendegi máseleni qarayıq.

Másele. Oqıwshı sınaqtan ótiwi ushın tayarlıq kórip, hár kúni 5 sınaq máselelerin sheshiwdi jobalastırdı. Hár kúni sheshiliwi jobalastırılǵan sınaq máseleleriniń sanı qalay ózgerip baradı?

Jobalastırılǵan máseleler sanı hár kún sayın tómendegishe ózgerip baradı:

1- kún	2- kún	3- kún	4- kún...
5	10	15	20 ...

Nátiyjede tómendegi izbe-izlikti payda etemiz:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots .$$

a_n arqalı n- kúnde sheshiliwi kerek bolǵan barlıq máseleler sanın belgileyik. Mısalı:

$$a_1=5,\ a_2=10,\ a_3=15,\ \ldots .$$

Payda bolǵan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

sanları *sanlı izbe-izlik* dep ataladı.

Bul izbe-izlikte ekinshisinen baslap, onıń hárbir aǵzası aldıńǵı aǵzaǵa birdey 5 sanınıń qosılǵanına teń. Bunday izbe-izlik *arifmetikalıq progressiya* dep ataladı.

Anıqlama. Eger $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sanlı izbe-izliginde barlıq natural n ushın

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(bunda d – qanday da bir san) teńligi orınlansa, izbe-izlik *arifmetikalıq progressiya* dep ataladı.

Bul formuladan $a_{n+1} - a_n = d$ ekenligi kelip shıǵadı. d sanı *arifmetikalıq progressiyanıń ayırması* dep ataladı.

Mısallar.

1) Sanlardıń 1, 2, 3, 4 ..., n, ... natural qatarı arifmetikalıq progressiyanı dúzedi. Bul progressiyanıń ayırması $d = 1$.

2) Pútin teris sanlardıń –1, –2, –3, ..., $-n$, ... izbe-izligi, ayırması $d = -1$ bolǵan arifmetikalıq progressiya boladı.

3) 3, 3, 3, ..., 3, ... izbe-izligi ayırması $d=0$ bolǵan arifmetikalıq progressiyadan ibarat.

1-másele. $a_n = 1{,}5 + 3n$ formulası menen berilgen izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.

△ $a_{n+1} - a_n$ ayırması barlıq n ushın birdey (n ge ǵárezli emes) ekenligin kórsetiw talap etiledi.

Berilgen izbe-izliktiń (n+1)-aǵzasın jazamız:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Sonlıqtan

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Demek, $a_{n+1} - a_n$ ayırması n ge ǵárezli emes. ▲

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq, $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$,bunnan

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n > 1.$$

Solay etip, arifmetikalıq progressiyanıń ekinshi aǵzasınan baslap, hárbir aǵzası oǵan qońsılas bolǵan eki aǵzanıń arifmetikalıq ortasına teń. “Arifmetikalıq” progressiya degen atama da usınıń menen túsindiriledi.

Eger a_1 hám d berilgen bolsa, onda arifmetikalıq progressiyanıń qalǵan aǵzaların $a_{n+1} = a_n + d$ formulası boyınsha esaplaw múmkin ekenligin atap ótemiz. Bunday usıl menen progressiyanıń birneshe dáslepki aǵzasın esaplaw qıyınshılıq tuwdırmaydı: biraq, máselen a_{100} ushın birqansha esaplawlar talap etiledi. Ádette, bunıń ushın n-aǵza formulasınan paydalanıladı.

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ hám t.b.}$$

Ulıwma,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (1)$$

sebebi, arifmetikalıq progressiyanıń n- aǵzası, onıń birinshi aǵzasına d sanın $(n - 1)$ márte qosıw nátiyjesinde payda etiledi.

(1) formula *arifmetikalıq progressiyanıń n-aǵzasınıń formulası* dep ataladı.

2-másele. Eger $a_1 = -6$ hám $d = 4$ bolsa, arifmetikalıq progressiyanıń júzinshi aǵzasın tabıń.

△ (1) formula boyınsha: $a_{100} = -6 + (100 - 1)\cdot 4 = 390$. ▲

3-másele. 99 sanı 3, 5, 7, 9, ... arifmetikalıq progressiyanıń aǵzası. Usı aǵzanıń nomerin tabıń.

△ Meyli, n – izlengen nomer bolsın. $a_1 = 3$ hám $d = 2$ bolǵanlıqtan $a_n = a_1 + (n - 1)d$ formulasına muwapıq: $99 = 3 + (n - 1)\cdot 2$. Bunnan $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Juwabı: $n = 49$. ▲

4-másele. Arifmetikalıq progressiyada $a_8 = 130$ hám $a_{12} = 166$. n-aǵzanıń formulasın tabıń.

△ (1) formuladan paydalanıp, tabamız:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

a_8 hám a_{12} lerdiń berilgen mánislerin ornına qoyıp, a_1 hám d ǵa qarata teńlemeler sistemasın payda etemiz.

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Ekinshi teńlemeden birinshi teńlemeni alıp, mınaǵan iye bolamız:

$$4d = 36, \ d = 9.$$

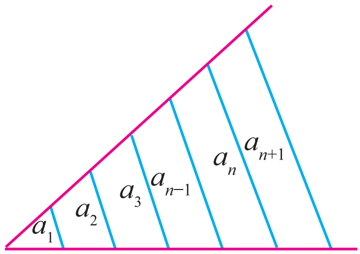
Demek, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Progressiyanıń ağzasınıń formulasın jazamız:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Juwabı: $a_n = 9n + 58$. ▲

5-másele. Múyeshtiń bir tárepine, onıń tóbesinen baslap teń kesindiler ajıratıldı. Bul kesindilerdiń aqırğı ushlarınan parallel tuwrılar júzgiziledi (80-súwret). Usı tuwrılardıń múyeshtiń tárepleri arasındağı a_1, a_2, a_3, ... kesindileriniń uzınlıqları arifmetikalıq progressiya dúzetuğınlığın dálilleń.



80-súwret.

△ Ultanları a_{n-1} hám a_{n+1} bolğan trapeciyada onıń orta sızığı a_n ge teń. Sonlıqtan,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Bunnan $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ yamasa

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Izbe-izliktiń hárbir ağzası menen onnan aldıńğı ağzasınıń ayırması birdey bolğanlıqtan bul izbe-izlik arifmetikalıq progressiya boladı. ▲

Shınığıwlar

359. (Awızeki.) Arifmetikalıq progressiyanıń birinshi ağzasın hám ayırmasın aytıń:

1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Eger:

1) $a_1 = 2$ hám $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ hám $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ hám $d = -1$ bolsa arifmetikalıq progressiyanıń aldıńğı bes ağzasın jazıń.

361. n-ağzasınıń formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuğının dálilleń.

1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Arifmetikalıq progressiyada:

1) eger $a_1 = 2$, $d = 3$ bolsa, a_{15} nı tabıń;
2) eger $a_1 = 3$, $d = 4$ bolsa, a_{20} nı tabıń;

3) eger $a_1 = -3,\ d = -2$ bolsa, a_{18} nı tabıń,

4) eger $a_1 = -2,\ d = -4$ bolsa, a_{11} nı tabıń.

363. Arifmetikalıq progressiyanıń n-aǵzasınıń formulasın jazıń:

1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. –22 sanı 44, 38, 32, ... arifmetikalıq progressiyasınıń aǵzası. Usı sannıń nomerin tabıń.

365. 12 sanı –18, –15, –12, ... arifmetikalıq progressiyasınıń aǵzası bola ma?

366. –59 sanı 1, –5 ... arifmetikalıq progressiyasınıń aǵzası. Usı sannıń nomerin tabıń. -46 sanı arifmetikalıq progressiyasınıń aǵzası bola ma?

367. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1 = 7,\ a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4,\ a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8,\ a_{10} = 64$ bolsa, onıń ayırmasın tabıń.

368. Arifmetikalıq progressiyanıń ayırması 1,5 ke teń. Eger:

1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$ bolsa, a_1 nı tabıń.

369. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $d = -3,\ a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10,\ a_{22} = -5{,}5$;
3) $a_3 = -1,\ a_9 = 17$ bolsa, onıń birinshi aǵzasın tabıń.

370. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_3 = 13,\ a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7,\ a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11,\ a_{13} = 29$ bolsa, onıń n-aǵzasınıń formulasın tabıń.

371. n nıń qanday mánislerinde 15, 13, 11, ... arifmetikalıq progressiyanıń aǵzaları teris boladı?

372. Arifmetikalıq progressiyada $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$ bolsa, n nıń qanday mánislerinde $a_n < 2$ teńsizligi orınlanadı?

373. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_8 = 126,\ a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64,\ a_{10} = -50$;

3) $a_8 = -7,\ a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5,\ a_{10} = -2{,}5$

bolsa, onıń tóǵızınshı aǵzasın hám ayırmasın tabıń.

30-§. ARIFMETIKALÍQ PROGRESSIYANÍŃ DÁSLEPKI *n* AǴZASÍNÍŃ QOSÍNDÍSÍ

1-másele. 1 den 100 ge shekemgi barlıq natural sanlardıń qosındısın tabıń.

△ Bul qosındını eki usıl menen jazamız:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100,$$

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1.$$

Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qosamız:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101}_{\text{100 ta qo shiluvchi}}$$

Sonlıqtan da $2S = 101 \cdot 100$, bunnan $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Endi qálegen

$$a_1, a_2, ... , a_n, ...$$

arifmetikalıq progressiyanı qaraymız S_n – usı progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısı bolsın:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

***Teorema.* Arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısı tómendegige teń:**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \qquad \textbf{(1)}$$

○ S_n nı eki usıl menen jazıp alamız:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq, bul teńliklerdi tómendegishe jazıw múmkin:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n - 1)d), \qquad (2)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n - 1)d). \qquad (3)$$

(2) hám (3) teńliklerdi aǵzama-aǵza qosamız:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ qosılıwshı}}$$

Demek, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, bunnan $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n$.

2-másele. Dáslepki n natural sannıń qosındısın tabıń.

△ Natural sanlardıń

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...,\ n,\ ...$$

izbe-izligi ayırması $d = 1$ bolǵan arifmetikalıq progressiyalardan ibarat. $a_1=1$ hám $a_n = n$ bolǵanlıqtan (1) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Solay etip,

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$ ▲

3-másele. Eger $38 + 35 + 32 + ... + (-7)$ qosındısınıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń.

△ Shárt boyınsha, $a_1=38$, $d=-3$, $a_n=-7$. Endi $a_n=a_1+(n-1)d$ formulasın qollanıp, $-7=38+(n-1)(-3)$ payda etemiz, bunnan $n=16$.

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n$ formulası boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248.$$ ▲

4-másele. Qosındısı 153 ke teń bolıwı ushın 1 den baslap neshe natural sanlardı izbe-iz qosıw kerek?

△ Natural sanlar qatarı – ayırması $d=1$ bolǵan arifmetikalıq progressiya boladı. Shártke muwapıq $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Dáslepki n aǵzanıń qosındısınıń formulasın tómendegishe ózgertemiz:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_1+(n-1)\mathrm{d}}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n.$$

Berilgenlerden paydalanıp, n belgisizine qarata teńleme payda etemiz:

$$153 = \frac{2 \cdot 1+(n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

bunnan,

$$306 = 2n + (n-1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Bul teńlemelerdi sheship, tómendegige iye bolamız:

$$n_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1-35}{2},$$

$$n_1 = -18, \; n_2 = 17.$$

Qosılıwshılardıń sanı teris bolıwı múmkin emes, sonlıqtan $n = 17$. ▲

Shınıǵıwlar

374. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1=1, \; a_n=20, \; n=50$; 3) $a_1=-1, \; a_n=-40, \; n=20$;
2) $a_1=1, \; a_n=200, \; n=100$; 4) $a_1=2, \; a_n=100, \; n=50$

bolsa, onıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

375. 2 den 98 ge shekem bolǵan barlıq natural sanlar qosındısın tabıń (98 de qosındıǵa kiredi).

376. 1 den 133 ge shekem bolǵan barlıq natural sanlar qosındısın tabıń (133 te qosındıǵa kiredi).

377. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1=-5, \; d=0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}, \; d=-3$; 3) $a_1=36, \; d=-2{,}5$

bolsa, onıń dáslepki on eki aǵzasınıń qosındısın tabıń.

378. 1) eger $n = 11$ bolsa, 9; 13; 17; ...;
2) eger $n = 12$ bolsa, –16; –10; –4; ...
arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

379. Eger:
1) $3 + 6 + 9 + ... + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + ... + (-60)$
yqosındısınıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń.

380. Barlıq eki hám úsh tańbalı sanlardıń qosındısın tabıń.

381. Arifmetikalıq progressiya n-aǵzasınıń formulası menen berilgen. Eger: 1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$ bolsa, S_{50} di tabıń.

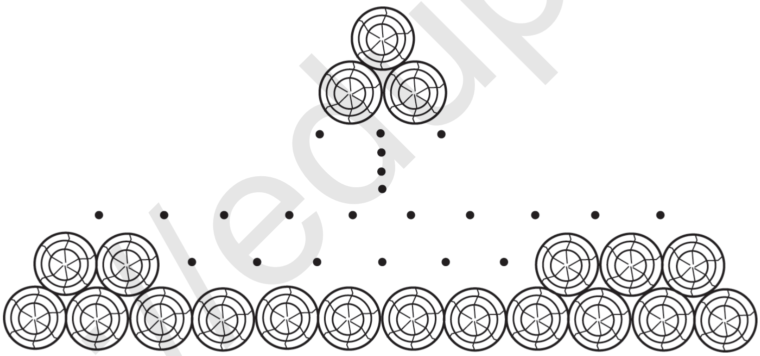
382. Qosındı 75 ke teń bolıwı ushın 3 ten baslap neshe natural sandı izbe-iz qosıw kerek?

383. Eger arifmetikalıq progressiyada:1) $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$ bolsa, a_n hám d nı tabıń.

384. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_7=21$, $S_7=205$; | 2) $a_{11}=92$, $S_{11}=22$; | 3) $a_{20}=65$, $S_{20}=350$ bolsa, a_1 hám d nı tabıń.

385. Imaratlar qurıwǵa arnalǵan bórenelerdi saqlawda olardı 81-súwrette kórsetilgendey etip taqlaydı. Eger taqlamlardıń ultanında 12 bórene turǵan bolsa, hárbir taqlamda neshe bórene boladı?



81-súwret.

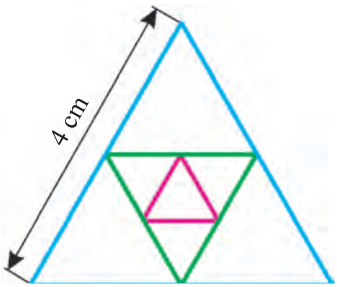
386. Arifmetikalıq progressiyada $a_3 + a_9 = 8$. S_{11} di tabıń.

387. Eger arifmetikalıq progressiyada $S_5=65$ hám $S_{10} = 230$ bolsa, onıń birinshi aǵzasın hám ayırmasın tabıń.

388. Arifmetikalıq progressiya ushın $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ teńlik orınlanatuǵının dálilleń.

31-§. GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYA

Tárepi 4 cm bolǵan teń tárepli durıs úshmúyeshlikti qaraymız. Tóbeleri berilgen úshmúyeshliktiń tárepleriniń ortalarınan ibarat bolǵan úshmúyeshlik jasaymız (82-súwret). Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetine muwapıq ekinshi úshmúyeshliktiń tárepi 2 cm ge teń. Soǵan uqsas jasawlardı dawam ettirip, tárepleri 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ cm hám t.b. bolǵan úshmúyeshliklerdi payda etemiz. Usı úshmúyeshlikler tárepleriniń uzınlıqlarınıń izbe-izligin jazamız:



82-súwret.

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots .$$

Bul izbe-izlikte, ekinshisinen baslap, onıń hárbir aǵzası, aldıńǵı aǵzanı birdey $\frac{1}{2}$ sanǵa kóbeytkenge teń. Bunday izbe-izlikler *geometriyalıq progressiyalar* dep ataladı.

Anıqlama. ***Eger***

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

sanlı izbe-izliginde barlıq natural n ushın

$$b_{n+1} = b_n q$$

teńligi orınlansa, bunday izbe-izlik geometriyalıq progressiya dep ataladı, $b_n \neq 0$, q – nolge teń bolmaǵan bazı bir san.

Bul formuladan $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ ekenligi kelip shıǵadı. q sanı *geometriyalıq progressiyanıń bólimi* dep ataladı.

Mısollar.

1) 2, 8, 32, 128, ... – bólimi $q = 4$ bolǵan geometriyalıq progressiya;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – bólimi $q = \frac{2}{3}$ bolǵan geometriyalıq progressiya;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – bólimi $q = -12$ bolǵan geometriyalıq progressiya;

4) 7, 7, 7, 7, ... – bólimi $q = 1$ bolǵan geometriyalıq progressiya.

1-másele. $b_n = 7^{2n}$ formulası menen berilgen izbe-izlik geometriyalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.

△ Barlıq n lerde $b_n = 7^{2n} \neq 0$ ekenligin atap ótemiz. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tiyindisi barlıq n ler ushın n ge ǵárezli bolmaǵan birdey sanǵa teńligin dálillew talap etiledi. Haqıyqatında da,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

yaǵnıy $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tiyindisi n ge ǵárezli emes. ▲

Geometriyalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

bunnan

$$b^2_{n+1} = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n > 1.$$

! **Eger progressiyanıń barlıq aǵzaları oń bolsa, onda $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ boladı, yaǵnıy geometriyalıq progressiyanıń ekinshi aǵzasınan baslap hárbir aǵzası, oǵan qońsılas bolǵan eki aǵzanıń geometriyalıq ortasına teń. "Geometriyalıq" progressiya degen atama usınıń menen túsindiriledi.**

Eger b_1 hám q berilgen bolsa, onda geometriyalıq progressiyanıń qalǵan aǵzaların $b_{n+1} = b_n q$ rekkurent formulası boyınsha esaplaw múmkinligin atap ótemiz. Biraq, n úlken bolǵanda bunday esaplaw kóp miynet talap etpeydi. Ádette, n-aǵzanıń formulasınan paydalanıladı.

Geometriyalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ va h.k.}$$

Ulıwma,

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad (1)$$

sebebi, geometriyalıq progressiyanıń n-aǵzası, onıń birinshi aǵzasın q sanına (n-1) márte kóbeytiw menen payda etiledi.

(1) formula geometriyalıq progressiyanıń *n-aǵzasınıń formulası* dep ataladı.

2-másele. Eger $b_1 = 81$ hám $q = \frac{1}{3}$ bolsa, geometriyalıq progressiyanıń jetinshi aǵzasın tabıń.

△ (1) formulaǵa muwapıq:

$$b_7 = 81 \cdot (\tfrac{1}{3})^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \ ▲$$

3-másele. 486 sanı 2, 6, 18, ... geometriyalıq progressiyanıń aǵzası. Usı aǵzasınıń nomerin tabıń.

△ Meyli, n – izlengen nomer bolsın. $b_1 = 2$, $q = 3$ bolǵanlıqtan $b_n = b_1 q^{n-1}$ formulasına muwapıq:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \ 243 = 3^{n-1}, \ 3^5 = 3^{n-1},$$

bunnan $n-1=5$, $n=6$. ▲

4-másele. Geometriyalıq progressiyada b_6=96 hám b_8=384 n-aǵzasınıń formulasın tabıń.

△ $b_n = b_1 q^{n-1}$ formulasına muwapıq: $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. b_6 hám b_8 diń berilgen mánislerin orınlarına qoyıp, tómendegini payda etemiz: $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Bul teńliklerdiń ekinshisin birinshisine bólemiz:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

bunnan $4 = q^2$ yamasa $q^2 = 4$. Aqırǵı teńlikten q=2 yamasa q=–2 ekenin tabamız.

Progressiyanıń birinshi aǵzasın tabıw ushın $96 = b_1 q^5$ teńliginen paydalanamız:

1) $q = 2$ bolsın. Sonda $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96 = b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$.

Demek, $b_1 = 3$ hám $q = 2$ bolǵanda n-aǵzanıń formulası

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

boladı.

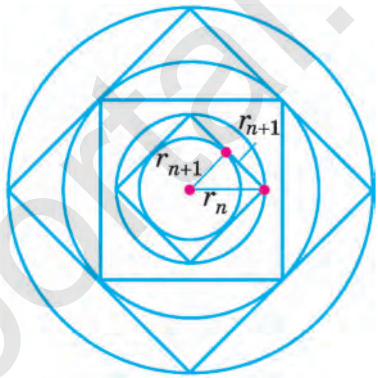
2) $q=-2$ bolsın. Bul jaǵdayda $96=b_1(-2)^5$, $96=b_1(-32)$, $b_1=-3$. Demek, $b_1=-3$ hám $q=-2$ bolǵanda n-aǵzanıń formulası

$$b_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$$

boladı.

Juwabı: $b_n=3\cdot 2^{n-1}$ yamasa $b_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$. ▲

5-másele. Sheńberge kvadrat ishley sızılǵan, al kvadratqa ekinshi sheńber ishley sızılǵan. Ekinshi sheńberge ekinshi kvadrat ishley sızılǵan, al oǵan úshinshi sheńber ishley sızılǵan hám t.b. (83-súwret). Sheńberlerdiń radiusları geometriyalıq progressiya dúzetuǵınlıǵın dálilleń.



83-súwret.

△ n-sheńberdiń radiusı r_n bolsın. Sonda Pifagor teoremasına muwapıq

$$r_{n+1}^2+r_{n+1}^2=r_n^2,$$

bunnan

$$r_{n+1}^2=\frac{1}{2}r_n^2, \text{ yaǵnıy } r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_n.$$

Demek, sheńberlerdiń radiuslarınıń izbe-izligi bólimi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bolǵan geometriyalıq progressiyanı dúzedi. ▲

Shınıǵıwlar

389. (Awızeki.) Tómendegi geometriyalıq progressiyanıń birinshi aǵzası hám bólimi nege teń:

1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ;
3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1=12$, $q=2$; 2) $b_1=-3$, $q=-4$; 3) $b_1=16$, $q=-2$

bolsa, onıń dáslepki bes aǵzasın jazıń.

391. n-aǵzasınıń formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik geometriyalıq progressiya bolatuǵının dálilleń:

1) $b_n=3\cdot 2^n$; 2) $b_n=5^{n+3}$; 3) $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n=\frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 3$ hám $q = 10$ bolsa, b_4 ti;

2) $b_1 = 4$ hám $q = \frac{1}{2}$ bolsa, b_7 ni;

3) $b_1 = 1$ hám $q = -2$ bolsa, b_5 ti;

4) $b_1 = -3$ hám $q = -\frac{1}{3}$ bolsa, b_6 ni esaplań.

393. Geometriyalıq progressiyanıń n-aǵzasınıń formulasın jazıń:

1) 4, 12, 36, ...; | 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...; | 3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;

4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ; 5) 16, 8, 4, 2, ... ; 6) –9, 3, –1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Geometriyalıq progressiyada astınan sızılǵan aǵzanıń nomerin tabıń:

1) 6, 12, 24, ... , <u>192</u>, ...; 2) 4, 12, 36, ... , <u>324</u>, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , <u>128</u>, ...

395. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

bolsa, onıń bólimin tabıń.

396. 2, 6, 18, ... geometriyalıq progressiyası berilgen.

1) usı progressiyanıń segizinshi aǵzasın esaplań;

2) izbe-izliktiń 162 ge teń aǵzasınıń nomerin tabıń.

397. Eger oń aǵzalı geometriyalıq progressiyada:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

bolsa, onıń jetinshi aǵzasın hám bólimin tabıń.

398. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$ bo'lsa,
bolsa, onıń besinshi hám birinshi aǵzaların tabıń.

399. Amanatshı amanat bankine 2009-jıldıń 4-yanvarı kúni 300000 swm pul qoydı. Eger, amanat banki jılına toplaǵan qarjınıń 30% i muǵdarında payda berse, amanatshınıń pulı 2012-júldıń 4-yanvarına barıp qansha boladı?

400. Tárepi 4 cm bolǵan kvadrat berilgen. Onıń tárepleriniń ortaları, ekinshi kvadratlardıń tóbeleri boladı. Ekinshi kvadrattıń tárepleriniń ortaları, úshinshi kvadrattıń tóbeleri boladı hám t.b. Usı kvadrattıń maydanlarınıń izbe-izligi geometriyalıq progressiyanı dúzetuǵının dálilleń. Jetinshi kvadrattıń maydanın tabıń.

32-§. GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYANÍŃ DÁSLEPKI *n* AǴZASÍNÍŃ QOSÍNDÍSÍ

1-másele. Mına qosındını tabıń:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

△ Teńliktiń eki tárepin de 3 ke kóbeytemiz:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

(1) hám (2) teńliklerdi tómendegishe jazıp shıǵamız:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Qawsırmalar ishinde turǵan ańlatpalar birdey. Sonlıqtan bul teńliklerdiń ekinshisinen birinshisin alıp, tómendegige iye bolamız:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \ ▲$$

Endi, bólimi $q \neq 1$ bolǵan qálegen b_1, b_1q, ..., b_1q^n, ... geometriyalıq progressiyasın qaraymız: S_n – usı geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısı bolsın:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Teorema. Bólimi q≠1 bolǵan geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısı tómendegige teń:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad \textbf{(4)}$$

○ (3) teńliktiń eki tárepin de q ǵa kóbeytemiz:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n. \qquad (5)$$

(3) hám (5) teńliklerdi, olardaǵı birdey qosılıwshılardı ajıratıp, jazıp shıǵamız:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Qawsırmalar ishinde turǵan ańlatpalar teń. Sonlıqtan bul teńliklerdiń birinshisinen ekinshisin alıp, tómendegige iye bolamız:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Bunnan

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Eger $q = 1$ bolsa, onda

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{n\text{-qosılıwshı}} = b_1n, \text{ ya'ni } S_n = b_1n.$$

2-másele. 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... geometriyalıq progressiyanıń dáslepki bes aǵzasınıń qosındısın tabıń.

△ Bul progressiyada $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. (4) formula boyınsha tabamız:

$$S_5 = \frac{6\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = \frac{242}{27}. \ ▲$$

3-másele. Bólimi $q = \frac{1}{2}$ bolǵan geometriyalıq progressiyada dáslepki altı aǵzasınıń qosındısı 252 ge teń. Usı progressiyanıń birinshi aǵzasın tabıń.

△ (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Bunnan $252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right), 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, b_1 = 128$. ▲

4-másele. Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n ağzasınıń qosındısı –93 ke teń. Usı progressiyanıń birinshi ağzası –3 ke, al bólimi 2 ge teń. n di tabıń.

△ (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Bunnan $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

5-másele. 5, 15, 45, ..., 1215, ... – geometriyalıq progressiya. 5 + 15 + 45 + ... + 1215 qosındısın tabıń.

△ Bul progressiyada $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Dáslepki n ağzasınıń qosındısınıń formulasın tómendegishe túrlendiremiz:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Máseleniń shártinen paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645-5}{2} = 1820. ▲$$

Shınığıwlar

401. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$

bolsa, onıń dáslepki n ağzasınıń qosındısın tabıń.

402. Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki jeti ağzasınıń qosındısın tabıń:

1) 5, 10, 20, ... ; 2) 2, 6, 18, ... ; 3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $q = 2$, $S_7 = 635$ bolsa, b_1 hám b_7 ni tabıń;

2) $q = -2$, $S_8 = 85$ bolsa, b_1 hám b_8 ni tabıń.

404. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2;$
2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2;$
3) $S_n = 170, b_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2};$
4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

bolsa, onıń aǵzalarınıń sanı n nı tabıń.

405. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 847$ bolsa, n hám b_n nı tabıń;
2) $b_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$ bolsa, n hám b_n nı tabıń;
3) $b_1 = 2,\ b_n = 1458,\ S_n = 2186$ bolsa, n hám q nı tabıń;
4) $b_1 = 1,\ b_n = 2401,\ S_n = 2801$ bolsa, n hám q nı tabıń.

406. Sanlardıń qosındısınıń qosılıwshıları geometriyalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128;$ 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243;$

3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128;$ 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405.$

---

407. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_2 = 15,\ b_3 = 25;$ | 2) $b_2 = 14,\ b_4 = 686,$ | 3) $b_2 = 15,\ b_4 = 375,\ q > 0$
bolsa, b_5 hám S_4 ti tabıń.

408. Geometriyalıq progressiyanıń n-aǵzasınıń formulası menen berilgen:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ bolsa, S_5 tabıń;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bolsa, S_6 tabıń.

409. Birdeylikti dálilleń:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1,$

bunda n dáreje kórsetkishi hám ol 1 den úlken natural san.

410. Geometriyalıq progressiyada:

1) $b_3 = 135,\ S_3 = 195$ bolsa, b_1 hám q dı tabıń;

2) $b_1 = 12,\ S_3 = 372$ bolsa, q hám b_3 tı tabıń.

411. Geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 1$ hám $b_3 + b_5 = 90$ bolsa, q nı;
2) $b_2 = 3$ hám $b_4 + b_6 = 60$ bolsa, q nı;
3) $b_1 - b_3 = 15$ hám $b_2 - b_4 = 30$ bolsa, S_{10} dı;
4) $b_3 - b_1 = 24$ hám $b_5 - b_1 = 624$ bolsa, S_5 ti tabıń.

33- §. SHEKSIZ KEMEYIWSHI GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYA

84-súwrette berilgen kvadratlardı qaraymız. Birinshi kvadrattıń tárepi 1 ge teń, ekinshisiniki $\frac{1}{2}$ ge, al úshinshisiniki $\frac{1}{2^2}$ ge teń hám t.b. Solay etip, kvadrattıń tárepiniń bólimi $\frac{1}{2}$ bolǵan tómendegi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots . \qquad (1)$$

Bul kvadratlardıń maydanları bolsa, bólimi $\frac{1}{4}$ bolǵan tómendegi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

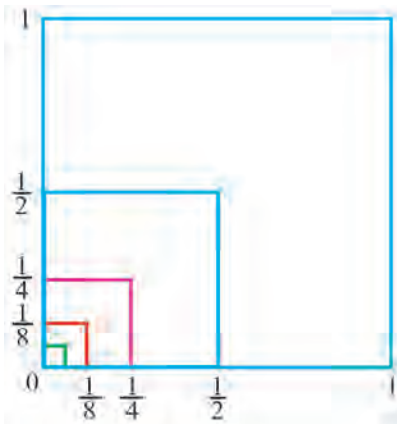
$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots . \qquad (2)$$

84-súwretten kórinip turǵanınday, kvadratlardıń tárepleri hám olardıń maydanları n nomeriniń artıwı menen barǵan sayın kemeyip, nolge jaqınlasıp baradı. Sonlıqtan (1) hám (2) progressiyalar sheksiz kemeyiwshi progressiyalar dep ataladı. Bul progressiyalardıń bólimleri birden kishi ekenligin atap ótemiz.

Endi tómendegi geometriyalıq progressiyanı qaraymız:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \ldots . \qquad (3)$$

Bul progressiyanıń bólimi $q = -\frac{1}{3}$, al, aǵzaları bolsa $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ hám t.b.



84-súwret.

n nomeriniń artıwı menen bul progressiyanıń aǵzaları nolge jaqınlasadı. (3) progressiya da *sheksiz kemeyiwshi progressiya* dep ataladı. Onıń bóliminiń moduli birden kishi ekenligin atap ótemiz: $|q|<1$.

! Bóliminiń moduli birden kishi bolǵan geometriyalıq progressiya *sheksiz kemeyiwshi* geometriyalıq progressiya dep ataladı.

1-másele. n-aǵzasınıń $b_n = \frac{3}{5^n}$ formulası menen berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi progressiya bolatuǵının dálilleń.

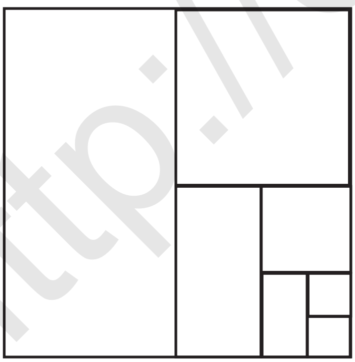
△ Shárt boyınsha $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, bunnan $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. $|q| < 1$ bolǵanlıqtan berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi boladı. ▲

85-súwrette tárepi 1 bolǵan kvadrat kórsetilgen. Onıń yarımın shtrixlaymız. Sońınan qalǵan bóleginiń yarımın shtrixlaymız hám t.b. Shtrixlanǵan tórtmúyeshliklerdiń maydanları tómendegi sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots .$$

Eger usınday jol menen payda etilgen barlıq tórtmúyeshliklerdi shtrixlap shıqsaq, onda kvadrat pútkilley shtrix penen qaplanadı. Barlıq shtrixlanǵan tórtmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qosındısı 1 ge teń dep esaplaw tábiyiy, yaǵnıy:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots=1.$$



85-súwret.

Bul teńliktiń shep jaǵında sheksiz sandaǵı qosılıwshınıń qosındısı bar. Dáslepki n qosılıwshınıń qosındısın qaraymız:

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}.$$

Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısınıń formulasına muwapıq:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}.$$

Eger n sheksiz ósip barsa, onda $\frac{1}{2^n}$ nolge barǵan sayın jaqınlasıp baradı (nolge umtıladı). Bul tómendegishe jazıladı:

$$n \to \infty \text{ da } \frac{1}{2^n} \to 0$$

(oqılıwı: n sheksizlikke umtılǵanda $\frac{1}{2^n}$ nolge umtıladı) yaki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(oqılıwı: n sheksizlikke umtılǵanda $\frac{1}{2^n}$ izbe-izliginiń limiti nolge teń).

Ulıwma, qálegen bir a_n izbe-izligi ushın $n\to\infty$ da $a_n - a \to 0$ bolsa, onda a_n izbe-izligi a sanına umtıladı (a_n izbe-izliginiń $n\to\infty$ daǵı limiti a ǵa teń) dep aytıladı hám $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ túrinde jazıladı.

$n\to\infty$ da $\frac{1}{2^n} \to 0$ bolǵanlıqtan $n\to\infty$ da $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to 1$, yaǵnıy $n\to\infty$ da $S_n\to 1$. Sonlıqtan da $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$ sheksiz qosındısı 1 ge teń dep esaplanadı.

Endi qálegen sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanı qaraymız:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ ...,\ b_1q^{n-1},\ ...,$$

bunda $|q| < 1$.

Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı dep $n\to\infty$ da onıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısı umtılatuǵın sanǵa aytıladı.

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ formulasınan paydalanamız. Onı tómendegishe jazamız:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.} \tag{4}$$

Eger n sheksiz ósse, $|q|<1$ bolǵanlıqtan $q^n\to 0$. Sonlıqtan $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ de $n\to\infty$ da nolge umtıladı. (4) formulada birinshi qosılıwshı n ge baylanıslı emes. Demek, $n\to\infty$ da S_n qosındısı $\frac{b_1}{1-q}$ sanına umtıladı.

Solay etip, sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń S qosındısı tómendegige teń:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

Ayırım jaǵdayda, $b_1 = 1$ bolǵanda, $S = \frac{1}{1-q}$ boladı. Bul teńlik, ádette mına kóriniste jazıladı:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Bul teńlik hám (5) teńlik tek $|q| < 1$ bolǵanda ǵana orınlı bolatuǵınlıǵın atap ótemiz.

2-másele. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$ sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

△ $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$ bolǵanlıqtan $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}, S = \frac{b_1}{1-q}$ formulası boyınsha:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}. \ ▲$$

3-másele. Eger $b_3 = -1,\ q = \frac{1}{7}$ bolsa, sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

△ $n = 3$ bolǵanda $b_n = b_1 q^{n-1}$ formulasın qollansaq, $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$ payda boladı, bunnan $b_1 = -49$.

(5) formula boyınsha S qosındısın tabamız:

$$S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}. \ ▲$$

4-másele. (5) formuladan paydalanıp, $a = 0,(15) = 0,151515\ldots$ heksiz periodlı onlıq bólshekti, ápiwayı bólshek túrinde jazıń.

△ Berilgen sheksiz bólshektiń juwıq mánisleriniń tómendegi izbe-izligin jazamız:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Juwıq mánislerdi usılayınsha jazıw berilgen periodlı bólshekti sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı túrinde súwretlew múmkinligin kórsetedi:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \ldots.$$

(5) formulaǵa muwapıq:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \ \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

412. Geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi bolatuǵının dálilleń:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$; 3) $-81, -27, -9, \ldots$;

4) $-16, -8, -4, \ldots$; 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$; 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$.

413. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$; 4) $b_5 = -9$, $b_9 = -\frac{1}{27}$

bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi bola ma? Usını anıqlań.

414. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$; 3) $-25, -5, -1, \ldots$;

4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots$; 5) $128, 64, 2, \ldots$; 6) $-81, -27, -9, \ldots$.

415. Eger sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{8}$; 2) $q = -\frac{1}{3}$, $b_1 = 9$;

3) $q = \frac{1}{3}$, $b_5 = \frac{1}{81}$; 4) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{8}$

bolsa, onıń qosındısın tabıń.

416. n- aǵzasınıń formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya bola ma?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) 100, –10, 1 ... ; 3) 98, 28, 8, ...

418. Eger sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

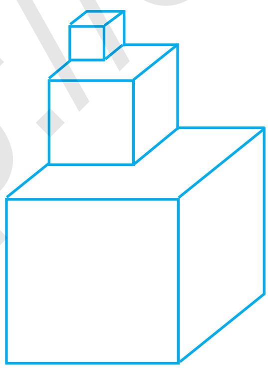
bolsa, onıń qosındısın tabıń.

419. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı 150 ge teń. Eger:

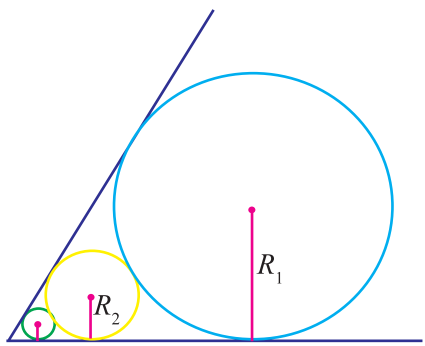
1) $q = \frac{1}{3}$ bo'lsa, b_1 ni; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

bolsa, q dı tabıń.

420. Qırı a bolǵan kubtıń ústine qırı $\frac{a}{2}$ bolǵan kub qoyıldı. Onıń ústine qırı $\frac{a}{4}$ bolǵan kub qoyıldı, sońınan onıń ústine qırı $\frac{a}{8}$ bolǵan kub qoyıldı hám t.b. (86-súwret). Payda bolǵan figuranıń biyikligin tabıń.



86-súwret.



87-súwret.

421. 60^0 lı múyeshke bir-birine urınıwshı sheńberler ishley sızılǵan (87-súwret). Birinshi sheńberdiń radiusı R_1 ge teń. Qalǵan sheńberlerdiń R_2, R_3, ..., R_n, ... radiusların tabıń hám olardıń sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya dúzetuǵının kórsetiń. $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ qosındısı birinshi sheńberdiń orayınan múyeshtiń tóbesine shekemgi aralıqqa teń ekenligin dálilleń.

422. Sheksiz periodlı onlıq bólshekti, ápiwayı bólshek túrinde jazıń:
1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

IV bapqa tiyisli shınıǵıwlar

423. Arifmetikalıq progressiyanıń ayırmasın tabıń, onıń tórtinshi hám besinshi aǵzaların jazıń:

1) $4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, ...;$ 2) $3\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2}, ...;$

3) $1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, ...;$ 4) $\sqrt{2}, \sqrt{2}-3, \sqrt{2}-6, ...$

424. n- aǵzasınıń $a_n = -2(1-n)$ formulası menen berilgen izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.

425. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1 = 6$, $d = \frac{1}{2}$ bolsa, a_5 ni; 2) $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$ bolsa, a_7 ni; 3) $a_1=4,8$, $d=1,2$ bolsa, a_{11} di esaplań.

426. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2$, $a_5 = 6$ bolsa, onıń dáslepki jigirma aǵzasınıń qosındısın tabıń.

427. Eger arifmetikalıq progressiyada:
1) $a_1=-2$, $a_n=-60$, $n=10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 11$
bolsa, onıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

428. Eger:
1) $-38 + (-33) + (-28) + ... + 12;$
2) $-17 + (-14) + (-11) + ... + 13$
qosındısınıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń.

429. Geometriyalıq progressiyanıń bólimin tabıń hám onıń tórtinshi, besinshi aǵzaların jazıń:

1) $3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$; 2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$; 3) $3, \sqrt{3}, 1, \ldots$;

4) $5, -5\sqrt{2}, 10, \ldots$; 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Geometriyalıq progressiyanıń n-aǵzası formulasın jazıń:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2}, 1, -2, \ldots$; 3) –27, –9, –3... .

431. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = 2$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{8}$, $q = 5$, $n = 4$;

3) $b_1 = -8$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$ bolsa, b_n dı tabıń.

432. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -4$, $n = 5$; 2) $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 10$;

3) $b_1 = 10$, $q = 1$, $n = 6$; 4) $b_1 = 5$, $q = -1$, $n = 9$

bolsa, onıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

433. Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6$; 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5$;

3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$, $n = 5$; 4) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, $n = 4$.

434. Berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi ekenligin dálilleń hám onıń qosındısın tabıń:

1) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$; 2) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \ldots$; 3) $7, 1, \frac{1}{7}, \ldots$.

---

435. Eger arifmetikalıq progressiyada $a_1 = 2\frac{1}{2}$ hám $a_8 = 23\frac{1}{2}$ bolsa, onıń ayırmasın tabıń.

436. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1 = 5$, $a_3 = 15$; 2) $a_3 = 8$, $a_5 = 2$; 3) $a_2 = 18$, $a_4 = 14$

bolsa, onıń dáslepki bes aǵzasın jazıń.

437. –10 hám 5 sanları arasına bir san jazıń, nátiyjede arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası payda bolsın.

438. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_{13} = 28$, $a_{20} = 38$; 2) $a_{18} = -6$, $a_{20} = 6$; 3) $a_6 = 10$, $a_{11} = 0$

bolsa, onıń on toǵızınshı hám birinshi aǵzaların tabıń.

ÓZIŃIZDI TEKSERIP KÓRIŃ!

1. Arifmetikalı progressiyada:: 1) $a_1 = 2,\ d = -3$; 2) $a_1 = -7,\ d = 2$ bolsa, a_{10} hám dáslepki on aǵzasınıń qosındısın tabıń.

2. Geometriyalıq progressiyada: 1) $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9},\ q = 3$ bolsa, b_6 hám dáslepki altı aǵzasınıń qosındısın tabıń.

3. 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $128,\ 32,\ 8 \ldots$, izbe-izligi sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya ekenligin dálilleń hám onıń aǵzalarınıń qosındısın tabıń.

439. x tiń qanday mınislerinde:

1) $3x,\ \frac{x+2}{2},\ 2x-1$; 2) $3x^2,\ 2,\ 11x$; 3) $x^2,\ 10x,\ 25$

sanları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları boladı?

440. Tómendegi sanlar arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası bolıwın kórsetiń:

1) $\sin(\alpha+\beta),\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+\beta),\ \cos\alpha\cos\beta,\ \cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos 2\alpha,\ \cos^2\alpha,\ 1$; 4) $\sin 5\alpha,\ \sin 3\alpha\cos 2\alpha,\ \sin\alpha$.

441. Qosındı 252 ge teń bolıwı ushın 5 ten baslap neshe izbe-iz taq sandı qosıw kerek?

442. Eger arifmetikalıq progressiyada:

1) $a_1 = 40,\ n = 20,\ S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3},\ n = 16,\ S_{16} = -10\frac{2}{3}$;
3) $a_1 = -4,\ n = 11,\ S_{11} = 231$ bolsa, a_n hám d nı tabıń.

443. Geometriyalıq progressiyada:

1) eger $b_1 = 4$ hám $q = -1$ bolsa, b_9 dı esaplań;
2) eger $b_1 = 1$ hám $q = \sqrt{3}$ bolsa, b_7 ni esaplań.

444. Eger geometriyalıq progressiyada:

1) $b_2 = \frac{1}{2},\ b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3,\ b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4,\ b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5},\ b_6 = -\frac{1}{125}$

bolsa, onıń birinshi aǵzasın tabıń.

445. 4 hám 9 sanları arasına sonday bir oń sandı qoyıń, nátiyjede geometriyalıq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası payda bolsın.

446. Eger izbe-izliktiń n-aǵzasınıń:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

formulası menen berilgen bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya bola ma?

447. Geometriyalıq progressiyada:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$

bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi ekenligin kórsetiń.

448. Dem alıwshı shıpakerdiń usınısı boyınsha birinshi kúni Quyash nurına 5 minut taplandı, al keyingi hár kún sayın taplanıwdı 5 minutqa arttırıp bardı. Eger ol taplanıwdı sárshembi kúninen baslaǵan bolsa, hápteniń qaysı kúni onıń Quyashqa taplanıwı 40 minutqa teń boladı?

449. Eger arifmetikalıq progressiyada $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ hám $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ bolsa, onıń birinshi aǵzasın hám ayırmasın tabıń.

450. Eger arifmetikalıq progressiyada $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ hám $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ onıń aǵzasın hám ayırmasın tabıń.

451. Saat 1 de 1 márte, 2 de 2 márte, ... 12 de 12 márte ses shıǵarıldı. Al saat tili náwbettegi hárbir saattıń yarımın kórsetkende, bir márte ses shıǵaradı. Bul saat bir sutka dawamında neshe márte ses shıǵaradı?

IV bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

1. Arifmetikalıq progressiyada $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101} di tabıń.

A) –9797; B) –9798; C) –7979; D) –2009.

2. Arifmetikalıq progressiyada $d = 4$, $S_{50} = 5000$ bolsa, a_1 di tabıń.

A) –2; B) 2; C) 100; D) 1250.

3. Arifmetikalıq progressiyada $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ bolsa, d di tabıń.

A) 4; B) 2; C) 3; D) 3,5.

4. Arifmetikalıq progressiyada $a_2 + a_9 = 20$ bolsa, S_{10} di tabıń.
A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.

5. 8 ge bólgende 7 qaldıq shıǵaratuǵın izbe-izliktiń 5-aǵzasın belgileń.
A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.

6. 701 sanı 1, 8, 15, 22, ... progressiyanıń neshinshi nomerli aǵzası?
A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.

7. 1002, 999, 996, ... progressiyanıń neshinshi nomerli aǵzasınan baslap, onıń aǵzaları teris sanlar boladı?
A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.

8. Arifmetikalıq progressiyada $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ bolsa, a_{100} di tabıń.
A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.

9. Arifmetikalıq progressiyada $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$ bolsa, n di tabıń.
A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.

10. Arifmetik progressiya $a_{12} + a_{15} = 20$ bolsa, S_{26} di tabıń.
A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.

11. 1 hám 11 sanları arasında sonday 99 sandı jaylastırıń, nátiyjede olar bul sanlar menen birgelikte arifmetikalıq progressiya payda etsin. Bul progressiya ushın S_{50} di tabıń.
A) $172\frac{1}{2}$; B) 495; C) 300; D) 178.

12. Arifmetikalıq progressiyada $a_1 = -20{,}7$, $d = 1{,}8$ qaysı nomerli aǵzadan baslap progressiyanıń barlıq aǵzaları oń boladı?
A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.

13. 7 ge eseli dáslepki neshe natural sandı qosqanda 385 kelip shıǵadı?
A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.

14. Geometriyalıq progressiyada $b_1 = 2$, $q = 3$ bolsa, S_6 di tabıń.
A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.

15. Geometriyalıq progressiyada $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$ bolsa, b_1 di tabıń.
A) $242\frac{2}{3}$; B) 81; C) $121\frac{1}{3}$; D) 240.

16. Geometriyalıq progressiyada $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ bolsa, q dı tabıń

A) 4; B) 2; C) 8; D) $\frac{1}{2}$.

17. Geometriyalıq progressiyada 6 aǵza bar. Dáslepki 3 aǵzasınıń qosındısı 26 ǵa, keyingi 3 aǵzasınıń qosındısı bolsa 702 ge teń. Progressiya bólimin tabıń.

A) 4; B) 3; C) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$.

18. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ bolsa, q dı tabıń.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{64}{65}$; C) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$.

19. Geometriyalıq progressiyada $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2-\sqrt{3}$ bolsa, S ti tabıń.

A) $2+\sqrt{3}$; B) 3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

1-másele. Erkin túsip atırǵan dene birinshi sekundta 4,9 m, al keyingi hárbir sekundta aldıńǵısına qaraǵanda 9,8 m ge kóplew túsip baradı. Dene 4 410 metr biyiklikten qansha waqıtta jerge túsedi?

△ Máseleniń shárti boyınsha, dene birinshi sekundta a_1=4,9, ekinshi sekundta $a_2=4{,}9+9{,}8$, úshinshi sekundta $a_3=a_2+9{,}8=a_1+2\cdot 9{,}8$ hám taǵı basqa n-sekundta $a_n=a_{n-1}+9{,}8=a_1+(n-1)9{,}8$ metr tómenge túsedi. Yaǵnıy hárbir sekundta túsip atırǵan aralıqlar arifmetikalıq progressiyanı dúzedi. Demek, dene n sekundta jerge túsedi dep alsaq, arifmetikalıq progressiyanıń n aǵzasınıń qosındısı formulasına muwapıq

$$4\,410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2\cdot 4{,}9 + (n-1)\cdot 9{,}8}{2}\cdot n.$$

Bunnan $4{,}9n^2=4\,410$, $n^2=900$, $n=30$ dı payda etemiz.

Juwabı: Dene 30 sekundta jerge túsedi. ▲

2-másele. Amanatshı b swm qarjısın bankke jılına p% ten qoydı hám n jıl ótkennen keyin barlıq puldı qaytarıp aldı. Egerde b=4 000 000, p=8 bolsa, amanatshı eki jıldan keyin qansha pul alǵan?

△ Baslanǵısh qoyılǵan qarjı b swm bolsa, bir jıldan keyin amanatshınıń qarjısı $b_1 = b \cdot (1 + \frac{p}{100})$ swm boladı. Keyingi jillar ushın tómendegi variantlardıń biri bolıwı múmkin:

1) Keyingi hár jıl ushın procent baslanǵısh qarjı b swmnan esaplanadı. Bunda ekinshi jıldan keyin $b_2 = b + 1 + \frac{bp}{100} + \frac{bp}{100} = b \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right)$ swm hám taǵı basqa, n-jıldan keyin $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$ swm boladı. Procentti esaplawdıń bunday usılı *ápiwayı procent* dep ataladı. Bunda, eger b=4 000 000, p=8, n=2 bolsa, onda $b = 4\,000\,000$, $p = 8$, $n = 2$ bo'lsa, u holda $b_2 = 4\,000\,000 \cdot 1{,}16 = {}$ $= 4\,640\,000$.

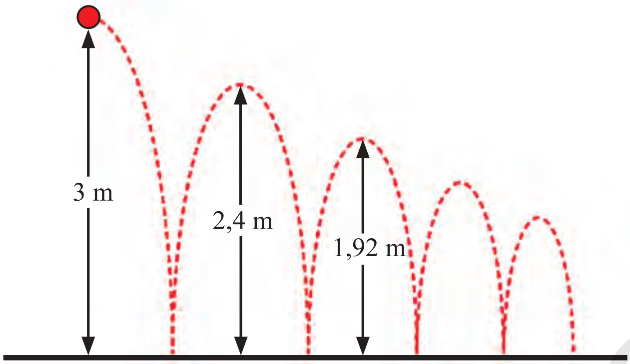
2) Keyingi hár jılı procent jıynalǵan puldan esaplanadı. Eki jıldan keyin $b_2 = b_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ swm hám taǵı basqa n jıldan keyin $b_n = b_{n\text{-}1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ boladı. Procentti esaplawdıń bunday usılı *quramalı procent* delinedi. Bunda, eger $b = 4\,000\,000$, $= 8$, $n = 2$ bolsa, onda b_2=4 000 000 ·1,08^2= 4 665 600 swm.

Juwabı: ápiwayı procent túrinde $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$ swm; 4 640 000,

quramalı procent túrinde $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ swm; 4 665 600 swm. ▲

Máseleler

1. Erkin túsiwshi dene birinshi sekundta 4,9 m jol basıp ótedi, keyingi hárbir sekundta bolsa, aldıńǵısınan 9,8 m ge kóp jol basadı. Túsip atırǵan dene besinshi sekundta qansha jol basıp ótedi?
2. Cirktiń sektorlarınıń birinde hárbir keyingi qatarda aldıńǵısına qaraǵanda orınlıqlar sanı birewge kóp. Egerde
   1) birinshi qatarda 8 orınlıq, qatarlar 22;
   2) birinshi qatarda 10 orınlıq, qatarlar 21 bolsa, usı sektorde neshe orın bar?
3. Turistler dáryanı jaǵalap 140 km júriwdi rejelestirdi. Birinshi kúni 5 km, hárbir keyingi kúni bolsa, onnan aldıńǵı kúnge qaraǵanda 2 km kóbirek júrgen bolsa, olar sayaxatta neshe kún boladı?
4. Ashıtqınıń kletkaları hárbir kletka ekige bóliniwi arqalı kóbeyedi. Eger baslanǵısh jaǵdayda 6 kletka bolsa, 10 ret bóliniwinen keyin kletkalar sanı neshew boladı?
5. Jıl dawamında zavod xızmetkeriniń aylıq is haqısı hár ay birdey muǵdarǵa kóbeytilip barıldı. Iyun, iuyl, avgustta alǵan aylıq is haqılarınıń ulıwma muǵdarı 9 900 000 swm, sentyabr, oktyabr, noyabr ushın alınǵan is haqılardıń qosındısı bolsa 10 350 000 swm boldı. Xızmetkerdiń jıl dawamında alǵan ulıwma is haqısın tabıń.
6. Hawa vannasın alıw jolı menen emlewde, birinshi kúni emleniw 15 min dawam etti, keyingi hárbir kúnde onı 10 min tan kóbeytip barıladı. Vanna alıw kóbi menen 1 saat 45 min dawam etiwi ushın kórsetilgen tártipte hawa vannasın alıw neshe kún dawam etedi?
7. Elestik top taslanǵanda jerge urılıp, jáne joqarıǵa shıqqanında hár saparı biyikligi 80% ke kóterilse, onda 3 metrden taslanǵan toptıń tómenge hám joqarıǵa basıp ótken ulıwma vertikal aralıqları qosındısın tabıń (88-súwret).



Tariyxıy máseleler

1. *Beruniy máselesi.* Eger aǵzaları oń bolǵan geometriyalıq progressiyanıń: aǵzalarınıń sanı taq bolsa, onda $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$; aǵzalar jup bolsa, $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ bolatuǵının dálilleń.
2. *Axmes papirusınan alınǵan másele* (biziń eramızǵa shekemgi 2000-jıllar). 10 ólshem ǵálleni 10 adamǵa sonday etip úlestiriń, nátiyjede bul adamlardıń biri menen onnan keyingisi (yaki aldıńǵısı) alǵan ǵálleniń parqı $\frac{1}{8}$ ólshemge teń bolsın.

Tariyxıy maǵlıwmatlar

"Áyyemgi xalıqlardan qalǵan estelikler" miynetinde Abu Rayxan Beruniy shaxmat oyınınıń dáslepki oylap tabılıwı haqqındaǵı ráwiyat penen baylanıslı birinshi aǵzası $b_1=1$ hám bólimi $q=2$ bolǵan geometriyalıq progressiyanıń dáslepki 64 aǵzasınıń qosındısın esaplaydı; shaxmat taxtasındaǵı r-kózgenekke sáykes sannan 1 sanı alınsa, ayırma r-kózgenekten aldıńǵı barlıq kózgeneklerge sáykes sanlardıń qosındısına teń bolatuǵının kórsetedi, yaǵnıy

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}$$

ekenin dálilleydi.

V BAP. ITIMALLÍQ TEORIYASÍ HÁM MATEMATIKALÍQ STATISTIKA ELEMENTLERI

34-§ HÁDIYSELER

Itimallıq teoriyası hám matematikalıq statistika kútilmegen hádiyseler arasındaǵı baylanıslardı, nızamlıqlardı úyreniw hám olardan kelip shıǵatuǵın juwmaqlardı ámeliy máseleler sheshiwde qollanıwǵa arnalǵan pán bolıp esaplanadı.

1. Júz beriwi múmkin bolmaǵan, anıq hádiyse hám kútilmegen hádiyseler.

Ómirde hádiyse dep, júz beretuǵın yaki júz bermeytuǵın erkin processlerge aytıladı. Bunnan tısqarı, insanlar tárepinen ámelge asırılatuǵın tájriybeler yaki sınaqlar, baqlawlar hám ólshew jumıslarınıń nátiyjeleri de hádiyseler bolıp esaplanadı. Barlıq hádiyselerdi júz beriwi múmkin bolmaǵan, anıq bolatuǵın hám kútilmegen hádiyselerge bóliwge boladı.

Júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiyse dep, berilgen sharayatlarda júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiysege aytıladı. Bularǵa mısallar keltireyik:

1) kóldiń suwı +30°C da muzlaydı;

2) Qaptalları 1 den 6 ǵa shekem nomerlengen kubikti taslanǵanda 8 sanınıń payda bolıwı.

Anıq hádiyse dep, berilgen sharayatlarda, álbette júz beriwi anıq bolǵan hádiysege aytıladı. Máselen: 1) qıstan keyin báhár keldi; 2) kubikti taslaǵanda altıdan úlken bolmaǵan (0 den basqa) san tústi.

Kútilmegen hádiyse dep, berilgen sharayatlarda júz beriwi de júz bermewi de múmkin bolǵan hádiysege aytıladı. Tómendegi hádiyseler kútilmegen hádiyselerge mısal bola aladı: 1) 1 den 50 ge shekem natural sanlar arasınan táwekel saylanǵan san 7 ge bólinedi; 2) taslanǵan tiyin gerb tárepi menen túsedi.

2. Birgelikte júz beriwi múmkin hám birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler.

Berilgen shártlerde bir waqıtta júz beriwi múmkin bolǵan eki hádiyse birgelikte júz beriwi múmkin delinedi, bir waqıttıń ózinde júz bermeytuǵın hádiyseler birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler delinedi. Máselen, „quyash shıqtı“ hám „kún suwıq“ birgelikte bolıwı múmkin hádiyseler, „kún battı“ hám „kún shıqtı“ hádiyseleri bolsa birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler bolıp esaplanadı. Kubik penen baylanıslı tómendegi hádiyselerdi qarayıq: 1) 3 ochko tústi; 2) 4 ochko tústi; 3) 3 ochkodan kóbirek tústi; 4) úsh ke eseli ochko tústi. Bul hádiyseler ishinde tómendegi úsh juplıq birgelikte júz beriwi múmkin hádiyseler: 1- hám 4-(3 sanı, 3 ke eseli bolǵanı ushın); 2- hám 3-(4 ochko 3 ochkodan úlken bolǵanı suhın); 3-hám 4-(máselen, 6 ochko). Tómendegiler bolsa, birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler: 1-hám 2-(bir waqıttıń ózinde eki túrli san túsiwi múmkin emes); 1- hám 3-(3 ochkodan joqarı, yaǵnıy 4,5,6 ochkoları 3 ochko menen bir waqıtta túse almaydı): 2- hám 4-(4 sanı 3 ke eseli emes).

3. Teńdey imkaniyatqa iye hádiyseler.

Tómendegishe hádiyseler toparlarına mısallardı qarap shıǵayıq:

Gerb tárepi *Cifrlı tárepi*

89-súwret.

1) tiyindi bir márte taslaǵanda „cifrlı tárepiniń túsiwi“ hám “gerbli tárepiniń túsiwi“ (89-súwret).

2) kubikti bir márte taslaǵanda „1 ochko túsiwi“ „2 ochkonıń túsiwi“, ..., “6 ochkonıń túsiwi“;

3) bir tárepi kók, qalǵan tárepleri qızılǵa boyalǵan kubik taslanǵanda „kók tárepi joqarıǵa qaray túsiwi“ hám „qızıl tárepi joqarıǵa qaray túsiwi“;

4) ishinde 10 aq hám bir qara shar bolǵan qutıdan bir shar alınǵanda onıń “aq shar shıǵıwı” hám “qara shar shıǵıwı”.

1- hám 2-mısallarda hádiyselerdiń geybirewiniń júz beriwi ushın hádiyselerdiń basqasına qaraǵanda bir ústinlik bar dep aytıwǵa bolmaydı (tiyin hám kubikler tuwrı bolsa álbette). Bunday hádiyseler teń imkaniyatlı hádiyseler dep ataladı.

3- hám 4- mısallarda teń imkaniyatlı bolmaǵan hádiyselerge mısallar berilgen. Rasında da, boyalǵan kubiktiń 5 tárepi qızıl, bir tárepi qara. Bunda qızıl tárepi túsiwi ushın qara tárepi túsiwine qaraǵanda imkaniyatları kóplew. Sol sıyaqlı, aq sharlar shıǵıw imkaniyatları qara shar shıǵıw imkaniyatlarınan kóplew.

Shınıǵıwlar

Shınıǵıwlarda shártler hám bul shártlerde júz berip atırǵan hádiyseler berilgen. Hárbir hádiyse ushın (awızeki) onıń júz beriwi múmkin bolmaǵan yaki anıq bolatuǵın, yaki kútilmegen ekenligin anıqlań **(452–456):**

452. Mekteptegi oqıwshılardan: 1) ekewiniń atı birdey; 2) hámmesiniń boyı birdey.

453. Algebra sabaqlıǵı tosınnan ashılıp, oń betindegi úshinshi sóz tabıldı. Bul sóz: 1) “itimallıq” sózi; 2)”!” belgisinen baslanadı.

454. IX klass (onda qızlar hám ul balalar da bar) jurnalındaǵı dizimnen dusmalıy bir oqıwshı saylap alındı: 1) ol qız bala; 2) saylanǵan oqıwshınıń jası 16 da; 3) saylanǵan oqıwshı 15 aylıq; 4) bul oqıwshınıń jası 3 ten úlken

455. Búgin Samarqandta barometr normal atmosfera basımın kórsetpekte. Bunda: 1) Samarqandta jasawshı hayaldıń qazanındaǵı suw $t = 70°C$ da qaynaydı; 2) hawa rayı -5°C ǵa túskende, kólmektegi suw muzladı.

456. EEki oyın kubigi taslanıp atır: 1) birinshi kubikte 4 ochko, ekinshisinde 6 ochko túsedi; 2) eki kubikte de túsken ochkolar qosındısı 1 ge teń; 3) eki kubikte de túsken ochkolar qosındısı 14 ke teń; 4) eki kúbiktiń hárbirinde 5 ochkodan túsedi; 5) eki kubikte túsken ochko-lar qosındısı 12 den úlken emes.

Berilgen hádiyseler juplıqlarınıń qaysıları birgelikte júz beriwin, qaysıları birgelikte júz bermewin kórsetiń (**457–459**):

457. Saodat hám Shuxrat oynaǵan shashka oyınında: 1) Saodat uttı; Shuxrat utıldı; 2) Saodat utıldı; Shuxrat utıldı.

458. Kubik taslandı. Onıń joqarǵı tárepi: 1) 5 ochkoni; 3 ochkonı; 2) 1 ochkonı; taq ochkonı kórsetti.

459. Domino toplamınan bir domino danası alındı, onda: 1) sanlarınan biri 4 ten úlken, ekinshisi 6 ǵa teń; 2) bir san 5 ten kishi emes, ekinshisi 5 ten úlken emes; 3) sanlardıń biri 5, eki san qosındısı 12 ge teń; 4) eki san 4 ten úlken, sanlardıń qosındısı 9 dan úlken emes.

460. Tómendegi: 1) "qar jawıp atır"; 2) "aspanda birde bir bult joq"; 3) "Hawa temperaturası $+37^0C$" hádiyselerinen múmkin bolǵan barlıq juplıqlardı dizip, olar arasında birgelikte júz beriwi múmkin bolǵan hám birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler juplıqların anıqlań.

461. Tómendegi hádiyseler: 1) "báhár keldi"; 2) "sabaq kestesi boyınsha búgin 6 sabaq boladı"; 3) "búgin 1-yanvar"; 4) "Tashkenttegi hawa temperaturası $+40^0C$" dan júz beriwi múmkin bolǵan barlıq juplıqlardı dizip, olar arasında birgelikte júz beriwi múmkin bolǵan hám birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler juplıqların anıqlań.

462. Tórt shırpı qutısınıń birewiniń ishi bos, qalǵanlarında shırpı shópleri bar. Dusmalıy túrde qutılardan biri ashıldı. "Shırpı qutısınıń ishi bos shıqtı" hám "shırpı qutısınıń ishi bos emes" hádiyseleri teńdey imkaniyatqa iye me?

463. Kubiktiń: 1) 1 tárepi; 2) 2 tárepi jasılǵa, qalǵan tárepleri bolsa, qızılǵa boyaldı. "Jasıl tárepi tústi" hám "qızıl tárepi tústi" hádiyseleri teńdey imkaniyatlı bola ma?

464. Birden altıǵa shekem nomerlengen 6 aq, 6 qızıl, 6 kók, 6 sarı sharlar bir qaltaǵa salındı hám aralastırıldı. Qaltadan dusmalıy túrde bir shar alındı. Tómendegi hádiyseler teń imkaniyatlı bola ma: 1) "tańlanǵan shar aq" hám "tańlanǵan shar kók"; 2) "tańlanǵan shar nomeri 5" hám "tańlanǵan shar nomeri 4"; 3) "tańlanǵan shar qızıl hám nomeri 2" hám "tańlanǵan shar sarı hám nomeri 6”; 4) “tańlanǵan shar qızıl” hám “tańlanǵan shar qızıl emes”; 5) “tańlanǵan shar nomeri 2 den úlken emes” hám “tańlanǵan shar nomeri 2 den úlken”?

35-§ HÁDIYSENIŃ ITIMALLÍǴÍ

Turmısta hár túrli hádiyselerge duslasqanda, kópshilik jaǵdaylarda júz beriwiniń isenimlilik dárejesine baha beremiz. Bunda bazı bir hádiyseler haqqında “bunday bolıwı múmkin emes”, dep aytsaq, basqa bir hádiyseler haqqında “bul álbette júz beredi” yaki “bul hádiyse júz beriwine isenimim kúshli” yaki “bul hádiyse júz beriwine isenimim az”dep aytamız. Hádiyseler júz beriwiniń isenimlilik dárejesin bahalaw itimallıq túsinigi menen baylanıslı.

XVII ásirde francuz alımları Blez Paskal (1623–1662) hám Pyer Ferma (1601–1665) arasında bir qatar matematikalıq máseleler boyınsha jazısqan xatlarında, birinshi ret itimallıq penen baylanıslı máselelerdi sheshiwdiń dáslepki ulıwma jandasıwları qáliplestı. Blez Paskal 1654-jılı 28-oktyabrda Pyer Fermaǵa jazǵan xatında tómendegishe oy juwırtadı:

“Oyınshı kubikti taslaǵanda qanday san túsetuǵının bilmeydi. Biraq, ol 1,2,3,4,5 hám 6 sanları teńdey imkaniyatta túsiwin biledi. Bunnan tısqarı, oyınshı tájriybe(kubik taslaw) nátiyjesinde kórsetilgen sanlardan birewiniń túsiwi, bul anıq hádiyse ekenligin de biledi. Egerde biz anıq bolatuǵın hádiyseniń júz beriw imkaniyatların 1 dep qabıl etsek, onda usı sanlardan biriniń, máselen 6(tap usılay basqa sanlardıń da)nıń shıǵıwı 6 ese kishi, yaǵnıy $\frac{1}{6}$ ge teń boladı”.

Ol yaki bul hádiyseniń nátiyjeli júz beriw imkaniyatın matematikler ***hádiyseniń itimallıǵı*** dep ataydı hám latınsha *probabilitas* – itimallıq sóziniń birinshi hárbine sáykes túrde P arqalı belgiledi.

Egerde A arqalı oyın kubigi bir ret taslanǵanda “5 ochko tústi” hádiysesi belgilense, onda A hádiyseniń itimallıǵı $P(A)$ arqalı belgilenedi, $P(A)=\frac{1}{6}$ túrinde jazıladı hám hádiyseniń ititmallıǵı $\frac{1}{6}$ dep oqıladı.

1-másele. Birdey kartochkalarǵa 1 den 20 ǵa shekem sanlar jazıldı (hárbir kartochkaǵa birewden san jazıldı). Kartochkalar stolǵa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Dusmalıy alınǵan kartochkadaǵı sannıń 7 bolıwı itimallıǵın tabıń.

△ Kartochkalar sanı 20 dana hám hárbir kartochkaǵa 1 den 20 ǵa shekem sanlar birewden jazılǵanı ushın tańlaw nátiyjesinde 20 teń imkaniyatlı hádiyseler júz beriwi múmkin (tájriybe nátiyjeleri): 1) 1 sanı shıqtı; 2) 2 sanı shıqtı; ...; 20) sanı shıqtı.

Bunda "geybir san shıqtı" hádiysesi anıq bolatuǵın hádiyse. Bul anıq bolatuǵın hádiyseniń itimallıǵı 1 ge teń hám A – "7 sanı shıqtı" hádiysesiniń itimallıǵı bolsa 20 ese kishi, yaǵnıy $P(A) = \frac{1}{20}$.

Juwabı: $\frac{1}{20}$ ▲.

Joqarıda kórip shıǵılǵan ***elementar hádiyselerden*** basqa quramalıraq hádiyselerdi de úyreniwge boladı. Máselen, 1-máseledegi taslanǵan kartochkadaǵı sannıń ápiwayı san bolıwınıń itimallıǵın tabıw kerek dep alayıq. A – "20 dan kishi bolmaǵan ápiwayı sannıń shıǵıwı" hádiysesin qarayıq. Bul hádiyse 8 túrli jaǵdayda (nátiyjede) júz beredi – yaǵnıy 2,3,5,7,11,13,17,19 ápiwayı sanlardıń birewi shıqqanda. Bul nátiyjeler A hádiyse ushın *qolaylılıq tuwdırıwshı imkaniyatlar* dep ataladı. Múmkin bolǵan barlıq nátiyjeler (olar 20) ishinde 8 i qolaylıq tuwdırıwshı imkaniyatlar boladı, sol sebepli A hádiyseniń itimallıǵı

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

! **Egerde geybir tájriybede n teń imkaniyatlı, óz ara jup birgelikte júz beriwi múmkin emes nátiyje bar bolıp, olardan *m* sı *A*** hádiyse ushın qolaylıq **tuwdırıwshı imkaniyatlar bolsa, onda $\frac{m}{n}$ qatnas A *hádiyseniń júz beriw itimallıǵı*** delinedi hám ol tómendegishe jazılad:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

2-másele. Kubikti bir ret taslaǵanda, taq sanlı ochko shıǵıwınıń itimallıǵın tabıń.

△ A – "taq sanlı ochko shıǵıwı" hádiysesine qolaylıq tuwdırıwshı 3 nátiyje (1 diń shıǵıwı, 3 tiń shıǵıwı hám 5 ochkonıń shıǵıwı)si bar bolıp, yaǵnıy m=3. Teń imkaniyatlı barlıq nátiyjeler sanı bolsa n=6, sonıń ushın.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Juwabı: $\frac{1}{2}$. ▲

3-másele. Qutıda 6 qızıl, 4 kók shar bar. Olardan biri dusmalıy saylanıp, qutıdan alındı. Alınǵan shardıń qızıl bolıw itimallıǵın tabıń.

Tájriybeniń 10 imkaniyatlı nátiyjeleri bar: 1-shar alındı, 2-shar alındı,..., 10-shar alındı, yaǵnıy n =10. Qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler sanı bolsa $m=6$. Sol sebepli

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Juwabı: $\frac{3}{5}$. ▲

Anıq hádiyse, júz beriwi múmkin emes hám kútilmegen hádiyselerdiń itimallıqların (1) formulaǵa tiykarlanıp, tómendegilerdi ayıtwǵa boladı:

Egerde A hádiyse anıq júz beretuǵın hádiyse bolsa, onda barlıq nátiyjeler, oǵan qolaylıq tuwdırıwshı boladı, yaǵnıy $m=n$. Onda $P(A)=\frac{m}{n}=1$.

Egerde A hádiyse júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiyse bolsa, onda oǵan qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler bolmaydı, yaǵnıy $m=0$. Demek, bunda $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Egerde A hádiyse kútilmegen hádiyse bolsa, onda oǵan qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler ushın $0<m<n$ shárt orınlanadı. Sol sebepli, bunday jaǵdayda $0<P(A)=\frac{m}{n}<1$.

Shınıǵıwlar

465. Tómende keltirilgen júz beriwi múmkin bolǵan barlıq elementlerden teń imkaniyatlı hádiyselerdi sanap ótiń: 1) tiyin taslaw; 2) kubikti taslaw; 3) tárepleriniń reńi aq, qızıl, sarı hám kók bolǵan tetraedrtı taslaw; 4) qáddi *A, B, C, D, E* hám *F* arqalı belgilerin 6 sektorǵa bólingen ruletkanıń strelkasın aylandırıw.

466. Domino oyınınıń tolıq komplektinen bir danası táwekel saylap alındı. Bul dananıń:

1) 6 hám 5 sanları; 2) 0 hám 1 sanları; 3) birdey sanlar; 4) hár túrli sanlar shıǵıwı itimallıǵın tabıń.

467. Qutıda 4 qızıl hám 5 kók shar bar. Táwekel bir shar alındı. Alınǵan shardıń:

1) qızıl; 2) kók; 3) jasıl; 4) qızıl yaki kók bolıwınıń itimallıǵı qanday?

468. Qutıda 3 kók, 4 sarı hám 5 qızıl shar bar. Táwekel bir shar alındı. Alınǵan shardıń:

1) kók; 2) sarı; 3) qızıl; 4) kók emes; 5) sarı emes; 6) qızıl emes bolıwınıń itimallıǵı qanday?

469. Birdey kartochkalarǵa 1 den 12 ge shekem sanlar jazıldı (hárbir kortochkaǵa birewden san jazıldı). Kartochkalar stolǵa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Táwekel alınǵan kartochkanıń:

1) 5; 2) jup; 3) 3 ke eseli; 4) 4 ke eseli; 5) 5 ke bóliniwshi; 6) ápiwayı san bolıwı itimallıǵı qanday?

470. Nigora dostısınıń telefon nomeriniń aqırǵı eki sanın esten shıǵardı hám onı táwekel terdi. Nigora óz dostısınıń telefonına túsiw itimallıǵı qanday?

471. Loteriyada 1000 bilet bolıp, onnan 30 ı utıslı. Bir bilet satıp alındı. Satıp alınǵan bilet:

1) utıslı; 2) utıs túspew itimallıǵı qanday?

472. Talaba imtixanǵa tayarlanıw barısında oǵan beriletuǵın 30 bilettiń birewine tayarlanıwǵa úlgermedi. Imtixanda talabaǵa bilgen bileti túsiwiniń itimallıǵı qanday?

473. Tiyin 6 ret izbe-iz taslanǵanda, hár saparı gerb tárepi menen tústi. Tiyin jáne bir ret taslansa, gerb tárepi túsiwi itimallıǵı qanday?

474. 52 lik kartalardan bir karta táwekel saylap alındı. Bul kartanıń
1) qıyıq altı; 2) segiz;
3) qızıl túrdegi valet; 4) sanlı atanaq;
5) taq sanlı qıyıq bolıwınıń itimallıǵı qanday?

36-§ KÚTILMEGEN HÁDIYSENIŃ SALÍSTÍRMALÍ JIYILIGI

Itimallıqtıń aldıńǵı paragraflarda berilgen anıqlaması *itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması* delinedi. Klassikalıq anıqlama sınaq yaki tájriybeniń, anıq ótkiziliwin talap etpeydi: al, hádiyseniń barlıq teń imkaniyatlı hám qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeleri teoriyalıq jaqtan anıqlanadı.

Bunday anıqlama boyınsha tájriybeniń elementar teń imkaniyatlı nátiyjeleri sanı shekli hám belgili san menen kórsetiledi. Biraq, tájriybede, yaǵnıy tabiyattanıwda, ekonomikada, medicinada, islep shıǵarıwda hám basqa tarawlardaǵı kútilmegen hádiyseler úyrenilgende, tez-tez sonday sınaqlar yaki tájriybeler ushıraydı, bunda olardaǵı júz beriwi múmkin bolǵan nátiyjeler sanın qamtıp alıwınıń múmkinshiligi bolmaǵan dárejede kóp. Ayırım waqıtları tájriybelerdi ámelde ótkizbegenshe, nátiyjelerdiń teń imkaniyatlı bolıwın anıqlaw qıyın yaki ulıwma ilajı joq. Máselen, firma islep shıǵarǵan kóplegen lampochkalardı tekserip kórmegenshe "jaramlı" yaki "jaramsız" lıǵı teń imkaniyatlı bolıwı yaki bolmawı haqqında túsinikke iye bolıw qıyın. Sonıń ushın, klassikalıq anıqlama menen bir qatarda, tájriybede itimallıqtıń statistikalıq anıqlamasınan da paydalanıladı. Bul anıqlama menen tanısıw ushın salıstırmalı jiyilik túsinigin kirgiziw kerek boladı.

! **Berilgen tájriybeler ishinde *A hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi* dep, usı hádiyse júz bergen tájriybeler sanı *M* nıń ótkizilgen barlıq tájriybeler sanı *N* ǵa qatnasına aytıladı. Bunda *M* sanı *A* hádiysesiniń *jiyiligi* dep ataladı.**

A hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi $W(A)$ arqalı belgilenedi. Bul jaǵdayda anıqlama boyınsha

$$W(A) = \frac{M}{N}. \tag{1}$$

1-másele. Klasta 30 oqıwshı bar. Ótkerilgen baqlaw jumısınan 6 oqıwshı 5 bahasın aldı. Klasta ótkizilgen baqlaw jumısınan alǵan ayrıqsha bahalardıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

△ "5 baha aldı" hádiysesi bolsa, bul hádiyse 6 ret júz berdi, yaǵnıy $M=6$. Ulıwma tájriybeler sanı $N=30$, sonıń ushın

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Juwabı: $\frac{1}{5}$. ▲

Francuz izertlewshisi Byuffon (1707-1788) tiyindi 4 040 márte taslap kórgen. Sonnan 2 048 márte taslaǵanında tiyinniń gerb tárepi túsken. Demek, bul jaǵdayda mına nátiyjeler qatarında gerb túsiwiniń salıstırmalı chastotas $W(A) = \frac{2\,048}{4\,040} \approx 0,5069$ ǵa teń. Ingliz matematigi Karl Pirson bolsa, tiyindi 24 000 márte taslaǵanında, gerb tárepi 12 012 márte túsken. Demek, tiyin taslawdıń bul tájriybelerinde gerb tárepi túsiwiniń salıstırmalı jiyiligi $W(A) = \frac{12\,012}{24\,000} = 0,5005$ ke teń.

Bul eki jaǵdaydaǵı nátiyjeni salıstırsaq, salıstırmalı jiyilikleriniń mánisleri, ulıwma alǵanda, anıq tájriybelerge hám olardıń sanına qaray ózgeriwi múmkinligin kóriwimizge boladı.

Biraq, kútilmegen hádiyseniń salıstırmalı chastotasınıń tiykarǵı qásiyeti sonnan ibarat, yaǵnıy tájriybeler sanı artıp barǵan sayın salıstırmalı jiyilik ta turaqlılasıp, geybir san átirapında terbelip turadı eken. Usı san kútilmegen hádiyseniń statistikalıq itimallıǵı súpatında qabıl etiledi. Máselen, tiyin taslanǵanda, bul san 0,5, yaǵnıy Byuffon tájriybesindegi de, Pirson tájriybesindegi payda bolǵan salıstırmalı jiyilikler 0,5 ke júdá jaqın sanlar bolıp shıqtı. Demek, tiyin taslanǵanda onıń statistikalıq itimallıǵı 0,5 ke teń.

Tiyin taslaw tájriybesine uqsas hár túrli proceslerdi úyreniw boyınsha kóp sanlı tájriybeler izertlewshiler tárepinen ótkizilgen hám olardıń nátiyjeleri tiykarında shveycariyalıq matematik ilimpaz Yakob Bernulli (1654–1705) úlken sanlar nızamın túsindirip berdi:

Tajriybeler sanı úlken bolǵanda hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi W(A) bul hádiyseniń itimallıǵı P(A)nan ámeliy jaqtan ózgeshelikke iye bolmawı, yaǵnıy úlken sanlı tájriybelerde P(A)=W(A) ekenligi haqqındaǵı dálildi *anıqlanǵan dep esaplaw múmkin.*

2- másele. Bir mámlekette shet elden kelgen turistler menen usı mámlekettiń ishinde sayaxatqa shıqqan mámleket puqaraları (ishki sayaxatshıları) haqqında tómendegi maǵlıwmatlar berilgen bolsın:

Jıllar	Turistlerdiń ulıwma sanı	
	Shet elli turistler sanı	Ishki turistler
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Keltirilgen jıllarda mámleket ishinde sayaxatqa shıqqan mámleket puqaraları sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

Mámleket ishinde sayaxatqa shıqqan puqaralar sanı:

$M = 403\,989 + 348\,953 + 316\,897 + 346\,103 + 351\,028 = 1\,766\,970$,

shet elli turistler sanı bolsa: $610\,623 + 746\,224 + 822\,558 + 774\,262 + 811\,314 =$ $= 3\,764\,981$.

Ulıwma sayaxatshılar sanı: $N = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5\,531\,951$.

Onda,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

Juwabı: $W \approx 0,3194$.

Shınıǵıwlar

475. Kesteniń aqırǵı bólegin toltırıń:

Qatar sanı	Tájriybe	Tájriybeler sanı(N)	A hádiyse	A hádiyseniń jiyiligi	A hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi $\left(W(A)=\frac{M}{N}\right)$
1	Tiyin taslaw	150	Cifrlı tárepi túsiwi	78	
2	Sportshı oq jaydan nıshanaǵa atıp atır	200	Nıshanaǵa tiyiw	182	
3	Kubik taslanıp atıı	400	4 túsiwi	67	

476. Bir qalada 920 adamnan jumısqa qalay jetip barıwı haqqında soralǵanda, olardıń: 350 i mashinada, 420 sı jámeyitlik transportta, 80 i velosipedte, 70 i piyada baratuǵınlıǵı belgili bolsa, 1) mashinada; 2) jámeyitlik transportta; 3) velosipedte; 4) piyada barıwshılar sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

477. Tayarlanǵan 5 000 qattı diskten 70 i jaramsız bolıp shıqtı. Jaramsız qattı disk shıǵıwınıń salıstırmalı jiyiligin tawıp, onı procentlerde kórsetiń

478. Jas basketbolshılar komandası toptı sebetke túsiriw shınıǵıwların ótkizdi. Nátiyjeler tómendegi kestede berilgen:

Sebetke taslanǵan toplar sanı (N)	10	50	100	250	500
Sebetke túsken toplardıń jiyiligi (M)	6	32	68	155	320
Sebetke túsken toplardıń salıstırmalı jiyiligi (W)					

Kesteniń aqırǵı qatarın toltırıń. Toplardıń sebetke túsiw itimallıǵı P nıń mánisi haqqında ne aytıwǵa boladı (onnan birge shekem anıqlıqta)?

37-§ TOSÍNNANLÍ SHAMA

Statistika hár túrli tosınnanlı shamalar haqqındaǵı maǵlıwmatlardı jıynaw, gruppalaw, maǵlıwmatlardı kesteler, diagrammalar, grafikler hám basqa kórinislerde kórgizbeli kórsetiw hám bul maǵlıwmatlardıń analızı menen shuǵıwlanatuǵın pán bolıp esaplanadı.

! *Tosınnanlı shama* **dep, baqlawlar yaki tájriybelerdi ótkiziw dawamında hár túrli mánislerdi tosınnan qabıl etiwi múmkin bolǵan** ólshemge **aytıladı. Bunday shamalar olardıń mánisleri tosınnan bolıwına baylanıslı dep aytıwımızǵa boladı.**

Máselen, kosmostan mektep sharbaǵına túsip atırǵan kosmik bóleksheler sanı, telefon stanciyasına kelip túsip atırǵan qońırawlar sanı, kesedegi shay molekulalarınıń tezligi, kubikti taslaǵanda qanday san shıǵıwı hám basqalar tosınnanlı shamalarǵa mısal bola aladı.

1-másele. Eki kubik taslandı. Eki kubikten túsetuǵın qanday ochkolar qosındısı, eń úlken itimallıq penen júz beriwin anıqlawǵa bola ma?

Hárbir qosındınıń payda bolıw itimallıǵın tabamız. Ulıwma nátiyjeler sanı, bul eki kubik taslanǵandaǵı túsiwinen payda bolatuǵın barlıq qosındılar sanı $6 \cdot 6 = 36$ ǵa teń. Qosındınıń ochkolar kestesin dúzemiz:

1-kubik	2- kubik					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Keste járdeminde hárbir anıq qosındı ushın qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler sanı m anıqlaymız:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ \ m_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Eki kubikti taslaǵanda ol yaki bul qosındınıń payda bolıw itimallıǵın tómendegi keste túrinde kórsetiwge boladı:

Ochkolar qosındısı	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Itimallıq $p = \frac{m}{n}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Kesteden ochkolar qosındısı 7 bolıwı eń úlken itimallıq $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ge iye bolıwı kórinip tur.

Juwabı: eń úlken itimallıqqa iye bolǵan ochkolar qosındısı 7.

1-máselede eki kubikti taslaǵandaǵı ochkolar qosındısı – tosınnanlı shama. Onı X arqalı belgileyik. Onda $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ sanları X tosınnanlı shamanıń mánisleri boladı. X tiń hárbir mánisine sáykes keliwshi P_1, P_2,..., P_{10}, P_{11} itimallıqlar mánisi tómendegi kestede kórsetilgen

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bul keste járdeminde, máselen, X shama birdey itimallıq penen qanday mánislerdi qabıl etiwin; X shamanıń qanday mánisi kóbirek itimallıq penen payda bolıwın hám taǵı basqa sorawlarǵa juwaptı ańsat ǵana anıqlawǵa boladı. Bul keste eki kubikti taslaǵandaǵı ochkolar qosındısınan ibarat bolǵan tosınnanlı shama X tiń itimallıǵı boyınsha *bólistiriliw kestesi* delinedi.

Tosınnanlı shama X tiń mánislerin hám hárbir mánisti qabıl etiw itimallıǵın ańlatıwshı keste *tosınnanlı shamalardıń itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesi* delinedi.

Itimallıqlar boyınsha bólistiriliw kesteleri, itimallıqlardı teoriyalıq jaqtan esaplaw nátiyjeleri tiykarında dúziledi.

Ámeliyatta, real tájriybeler ótkizilgennen keyin, tosınnanlı shamalar mánisleriniń jiyilikler yaki salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliwi dúziledi. Onnan keyin anıǵıraq bolıwı ushın bólistiriliw kesteleri *diagramma* yaki *jiyilikler poligonı* kórinisinde kórsetiledi. Maǵlıwmatlardı diagramma hám jiyilikler poligonı arqalı kórsetiw menen Siz 8-klass Algebra kursında tanıstıńız.

2- másele. Kompaniyalarda islewshi xızmetkerler sanın úyreniw maqsetinde 36 kompaniyadan, olarda isleytuǵın xızmetkerler sanı boyınsha maǵlıwmatlar alındı hám olar tómendegi kestege kirgizildi:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Bul maǵlıwmatlardı 1) jiyilikler (M) hám salıstırmalı jiyilikler (W) boyınsha bólistiriliw kestesi; 2) jiyilikler poligonı járdeminde kórsetiń.

△ 1) Kesteden kórinip turǵanınday, xızmetkerler sanın X arqalı belgilesek, ol tosınnanlı shama boladı. Kesteni úyrenip, bul tosınnanlı shamanıń mánisleri 23 ten 33 ge shekem mánislerdi qabıl etiwin kóremiz hám usı sanlardı kestede neshe márte keltirilgenin sanap, jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestesin dúzemiz:

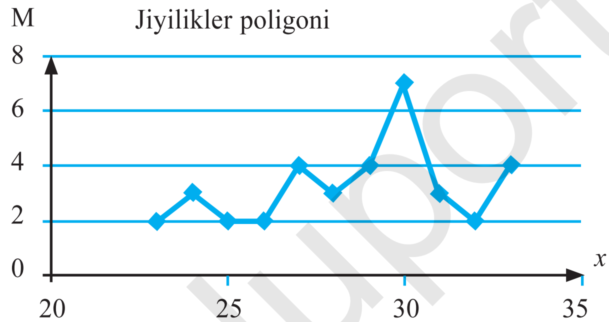
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Jiyiliklerdıń hárbirin kompaniyalar sanı $N=36$ ǵa bólip, salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestesine iye bolamız:

	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W=\frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Bunda barlıq jiyilikler qosındısı $N=36$ hám barlıq salıstırmalı jiyilikler qosındısı bolsa 1 ge teń ekenin esletip ótemiz.

2) Kompaniyalar xızmetkerleri sanınıń jiyilikler poligonın 90-súwretten kóriwimizge boladı:



90- súwret.

Geybir shamanıń barlıq mánisleri qosındısın tabajaq bolsa, L. Eyler tárepinen kirgizilgen $\sum$ belgisinen paydalanamız. Máselen, egerde M jiyilik M_1, $M_2,\dots,M_k$ mánislerdi qabıl etse, onda tómendegishe belgilewden paydalanamız:

$$M_1+M_2+\dots+M_k=\sum M.$$

tosınnanlı shamanıń barlıq jiyilikleriniń qosındısı, tájriybeler sanı N ǵa teń:

$$\sum M=N.$$

Hár qanday tosınnanlı shama ushın onıń salıstırmalı jiyilikleriniń qosındısı 1 ge teń.

$$\sum W=\sum\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}+\dots+\frac{M_k}{N}=$$
$$=\frac{M_1+M_2+\dots+M_k}{N}=\frac{\Sigma M}{N}=\frac{N}{N}=1.$$

Bul paragrafta kórilgen tosınnanlı shamalar bir-birinen ajıratılǵan mánislerdi qabıl etedi. Bunday ólshemler diskret (latın tilindegi *diskretus* – ajıratılǵan, bólingen sózinen) *ólshemler* dep ataladı.

Egerde tosınnanlı shama geybir aralıqtaǵı barlıq mánislerdi qabıl etiwi múmkin bolsa, onda bunday shama úzliksiz tosınnanlı shama dep ataladı. Úzliksiz tosınnanlı shamalarǵa mısal etip hawa temperaturasınıń ózgeriwi, úyden mektepke shekem barıwǵa ketetuǵın waqıt, ósip atırǵan terektiń boyı, bándirgide kútip turılǵan avtobustıń keliw waqtı hám taǵı basqalardı keltiriwge boladı.

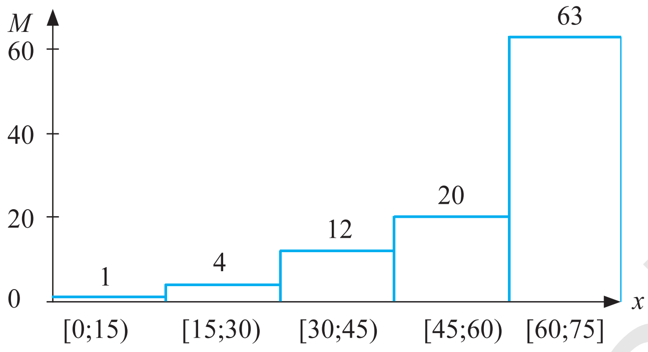
Úzliksiz tosınnanlı shamalar sheksiz kóp mánislerdi qabıl etse de, olardıń bólistiriliwin beriwge boladı. Bunıń ushın úzliksiz shama mánisleriniń ózgeriw aralıǵı bólimlerge bólinedi hám tosınnanlı shamanıń hárbir bólimge túsiwiniń jiyilikleri (yaki itimallıqları) esaplanadı.

Máselen, oqıwshı 100 kún sport zalına barǵanı hám hár saparı shınıǵıwlarǵa 1 saat 15 minuttan kóp bolmaǵan waqıt ketkenin jazıp barǵan bolsın. Onda ketken waqıtlardıń minutlar (0; 75) aralıǵında bóliniwin itibarǵa alıp, bul aralıqtı, máselen, 5 ke teń waqıt aralıqlarına bólip, shınıǵıwlarǵa ketken waqıtlardıń jiyilikler kestesine kirgiziwge boladı:

T (minut)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Bunda jiyilikler qosındısın esaplap, $\sum M = N = 100$ ekenligin kórimizge boladı.

Bul kestedegi maǵlıwmatlardı jiyilikler gistogramması – tekshe tárizli forma túrinde kórsetiwge boladı (91-súwret). Bunda hárbir tekshe tiykarı h uzınlıqqa iye bolsa, onda teksheniń biyikligin, $\frac{M}{h}$, bul jerde M hám X tosınnanlı shamanıń sáykes aralıqtaǵı jiyiligi. Onda bunday teksheniń beti $\frac{M}{h} \cdot h = M$ ge, gistogramma astındaǵı formanıń beti bolsa $\sum M = N$ ǵa teń boladı.

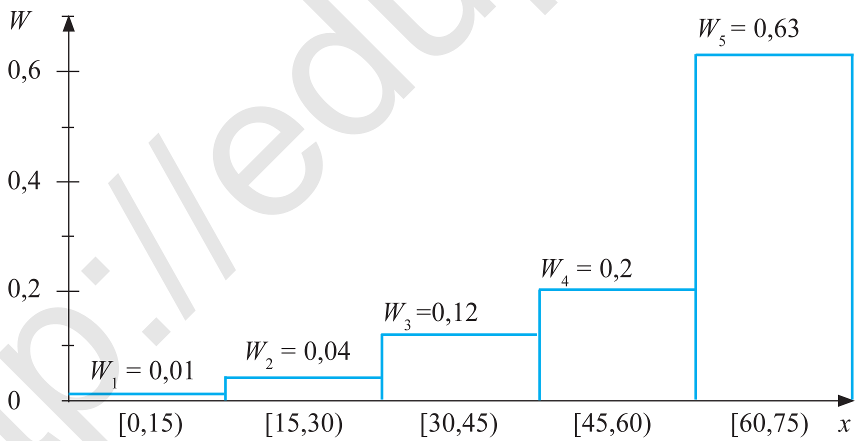


91-súwret.

Egerde jiyilikler járdeminde salıstırmalı jiyilikler anıqlansa:

T (minut)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W = \frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

onda olar járdeminde sızılǵan tekshe tárizli forma (92-súwret) tosınnanlı shamanıń *salıstırmalı jiyilikler boyınsha gistogramması* delinedi.



92-súwret.

Salıstırmalı jiyilikler gistogrammasınıń hárbir tekshesiniń beti W dıń sáykes mánisine teń boladı. Onda gistogamma astındaǵı formanıń beti birge teń boladı ($\sum W = 1$).

479. 1) Ápiwayı kubik; 2) eki tárepinde 1 ochko, eki tárepinde 2 ochko, eki tárepinde 3 ochko belgilengen kubik; 3) úsh tárepinde 1 ochko, eki tárepinde 2 ochko, bir tárepinde 3 ochko belgilengen kubik; 4) eki tárepinde 1 ochko, úsh tárepinde 2 ochko, bir tárepinde 3 ochko belgilengen kubik taslanǵanda túsetuǵın "ochkolar sanı"–X tosınnanlı shama mánisleriniń P itimallıqları boyınsha bólistiriliw kestesin dúziń.

480. Stolǵa eki tiyin taslanıp atır. Nátiyje "gerb tárepi" tússe shártli túrde 0 sanlı mánis, nátiyje "cifrlı tárepi" tússe 1 sanı mánisin beremiz. Tiyinler túskende berilgen sanlı mánisler qosındısı – X tosınnanlı shamanıń P itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesin dúziń.

481. Tárepleri 1,2,3,4 sanları menen belgilengen eki tetraedr bir waqıtta stolǵa taslanbaqta, bunda tetraedrdıń stolǵa tiyip turǵan tárepindegi ochko esapqa alınadı. Eki tetraedrdan túsetuǵın qanday ochkosı: 1) qosındısınıń; 2) kóbeymesiniń eń úlken itimallıǵı menen bolıwın anıqlawǵa bola ma?

482. Eki kubik taslandı. Eki kubikten túsetuǵın ochkolar kóbeymesiniń itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesin dúziń.

483. Kafeniń iyesi túste awqatlanıwshılarǵa óz waqtında xızmet etiw, usı waqıtta xızmet etiwshilerdiń sanın durıs belgilew hám tayarlanatuǵın awqatlarǵa jumsalatuǵın ǵárejetlerdi durıs rejelestiriw maqsetinde, onıń kafesinde túslik awqat jewshilerdiń sanın 50 kún dawamında kestege jazıp bardı:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Bul keste járdeminde kafede túslik awqatlanıwshılardıń sanı – X tosınnanlı shamanıń; 1) jiyilikler (M) hám salıstırmalı jiyilikler (W) boyınsha bólistiriliw kestesin; 2) jiyilikler poligonın dúziń.

484. Jabıq suw basseyinine júziwge kelgen ul hám qız balalardıń sanı bes ay dawamında dizimge alınıp, tómendegi keste dúzildi:

Aylar	Basseynge kelgen balalar	
	Qız balalar	Ul balalar
Aprel	311	357
May	284	404
Iyun	278	417
Iyul	340	412
Avgust	322	406

Basseynge kelgen ul balalar sanı – X tosınnanlı shamanıń jiyiligi, salıstırmalı jiyiligin tabıń hám jiyilikler gistogrammasın dúziń.

485. Mánisleri tómendegi telefon nomerlerinde qatnasqan sanlardıń X tosınnanlı shamanıń jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestesin dúziń:

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

486. Tómendegi bólistiriliw kestesinde berilgen X tosınnanlı shamanıń jiyilikler poligonı hám salıstırmalı jiyilikler poligonın dúziń:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. Kestede 9-klasstıń 16 ul balalarınıń ayaq kiyimleriniń ólshemleri jazılǵan:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

9-klass ul balalarınıń ayaq kiyiminıń ólshemi – X tosınnanlı shamanıń jiyilikler boyınsha hám salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestelerin dúziń.

38- §. KÚTILMEGEN MUǴDARLARDÍŃ SANLÍ XARAKTERISTIKALARÍ

Sizler 8-klass “Algebra” kursınıń maǵlıwmatlar analizine arnalǵan IV babında baslı toplam, tańlanba, orta mánisi, moda, mediana sıyaqlı túsinikler menen tanıstıńız. Tap usınday túsiniklerdi tosınnanlı shamalar ushın da qollanıwǵa boladı.

Statistikada maǵlıwmatlar toplamı sıpatında tosınnanlı shamalardıń sanlı mánisleri, olardıń chastotaların esapqa alıp, qaraladı. Bunda tosınnanlı shamalardıń barlıq mánisleri baslı toplam dep ataladı. Olardıń tańlap alınǵan bir bólimi bolsa tańlanba dep ataladı. Tańlanba *reprezentativ tańlanba* delinedi, egerde tańlanbada tosınnanlı shamanıń bas toplamdaǵı hám tek onıń mánisleri qatnassa, ondaǵı mánisleri jiyilikleriniń qatnası bas toplamındaǵı sıyaqlı bolsa.

Mısalı. X tosınnanlı shamanıń M jiyilikleri boyınsha bóliniwi tómendegidey etip berilgen bolsın:

X	– 3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

hám bul tosınnanlı shamanıń barlıq mánisleri (itibar beriń, olardıń sanı 17000) bas toplam dep qabıl etilgen bolsın. Támendegishe úsh tańlanbanı qarayıq:

1-keste

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

2-keste

X	–3	9	11
M	5	7	3

3-keste

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

1-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba reprezentativ tańlanba, sebebi, onda da -3, 5,9,11 mánisler hám tek usı mánisleri qatnasıp atır hám bas toplamda da bul tańlanbada da jiyilikler qatnası birdey: 5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5 : 2 : 7: 3.

2-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba reprezentativ tańlanba emes, sebebi, onda X tosınnanlı shamanıń 5 ke teń mánisi qatnaspaqta.

3-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba reprezentativ tańlanba emes, sebebi onda jiyilikler qatnası saqlanbaǵan: 5 000:2 000:7 000:3 000≠5:6:7:3.

Berilgen maǵlıwmatlardı, yaǵnıy, tosınnanlı shamalardıń mánislerin bazıda bir san menen ańlatıw yaki bahalawǵa bolatuǵınlıǵı belgili boldı. Bul san berilgen maǵlıwmatlar quramındaǵı sanlar yaki tosınnanlı shamalardıń mánisleri *oraylıq tendenciyasınıń ólshemi* dep te ataladı. Oraylıq tendenciya ólshemlerine mısal etip, moda, mediana hám ortasha mánis sıyaqlılardı keltiriwge boladı.

Tosınnanlı shamanıń qaralıp atırǵan tańlanbadaǵı jiyiliginiń eń úlken mánisi moda dep ataladı hám M_0 dep belgilenedi.

Máselen, tańlanba 8,9,2,4,8,6,3 den ibarat bolsa, onda onıń modası 8 ge teń. 5,6,11,3,3,5 tańlanbanıń modası bolsa eki – M_2=3, M_2=5. Egerde 1,3,7,20,6,11 tańlanbanı qarasaq, onıń modası joq.

Egerde tańlanba mánislerin ósip barıw tártibinde jazıp alsaq, onda tańlanbanı belgilengenniń san jaǵınan teńdey ekige bóliwshi san *mediana* dep ataladı hám M_e etip belgilenedi. Eger tártiplestirilgen tańlanbada berilgen sanlar sanı taq bolsa, onda mediana olardıń ortasında turǵan sanǵa teń. Eger tártiplespegen tańlanbada berilgen sanlar sanı jup bolsa, onda mediana ortada turǵan eki sannıń arifmetikalıq ortasına teń.

1-másele. Tosınnanlı shama mánisleri tańlanbasınıń medianasın tabıń:

1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8;

2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazıp shıǵamız: -5,0,2,5,4,8,8. tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazamız: 2,3,4,5,7,8. Berilgenler sanı taq. 5 sanınan shepte hám ońda úshewden san bar, yaǵnıy 5 tańlanbanıń orta sanı, sonıń ushın M_e=5.

2) Berilgen 8, 5, 3, 4, 7, 2 tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazamız: 2,3,4,5,7,8. Berilgenler sanı jup. Tańlanbanıń ortasında turǵan sanlar: 4 hám 5, sonıń ushın $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Juwabı: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Tańlanbalardı úyreniwde áhmiyetli bolǵan jáne bir túsinik – tańlanbanıń keńligi túsinigi menen de Sizler 8-klasta tanıstıńız. *Tańlanbanıń keńligi* dep, tosınnanlı shamanıń eń úlken mánisi menen eń kishi mánisiniń ayırmasına aytıladı hám ol R arqalı belgilenedi.

Tańlanbanıń keńligi tosınnanlı shamanıń mánisleriniń qanshelli jayılmalı ekenligin bildiredi.

Mısalı. 21, 27, 22, 8,9, 15, 19, 21 hám 190, 187, 198, 189, 195, 190 tańlanbalardıń keńligin salıstırıń.

1- tańlanbanıń eń úlken mánisi 27, eń kishi mánisi bolsa 8 ge teń. Demek, 1- tańlanbanıń keńligi $R_1 = 27 - 8 = 19$.

2- tańlanbanıń eń úlken mánisi 198, eń kishi mánisi 186. Nátiyjede, 2- tańlanbanıń keńligi $R_2 = 198 - 186 = 12$.

Demek, birinshi tańlanbanıń mánisleri, ekinshi tańlanbadaǵılarǵa qarǵanda jayılmalı túrde jaylasqan.

Tosınnanlı shama mánisleriniń *ortasha mánisi* (*yaki arifmetikalıq ortası*) dep, tańlanbadaǵı barlıq sanlar qosındısınıń olardıń sanına qarata aytılıwın esletip ótemiz. *X* tosınnanlı shamanıń barlıq mánisleriniń ortashası arqalı belgilenedi.

2-másele. Tómendegi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen tosınnanlı shama tańlanbasınıń ortashasın tabıń.

4-keste

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 10}{3 + 1 + 2 + 1 + 3} = \frac{9 + 4 + 10 + 7 + 30}{10} = 6.$$

Juwabı: 6.

Itimallıǵı boyınsha bólistiriliwi belgili bolǵan tosınnanlı shamanıń tańlanbasın túsindiriwshi túsiniklerdiń jáne biri – bul *matematikalıq kútilme* túsinigi bolıp esaplanadı.

Eger X tosınnanlı shamanıń X_1, X_2, ..., X_n mánislerin qabıl etiw itimallıqları, sáykes túrde, P_1, P_1, ...P_n bolsa, onda

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_nP_n \tag{1}$$

sanı X tosınnanlı shamanıń *matimatikalıq kútilmesi* dep ataladı.

Máselen, X tosınnanlı shamanıń itimallıqları boyınsha bólistiriliwi tómendegishe berilgen bolsın:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Onda bul tosınnanlı shamanıń matematikalıq kútilmesi:

$$E = 6\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Tosınnanlı shamanıń mánisi menen tańlanbanıń ortashası arasındaǵı ayırma *ortashasınan shetleniw* dep ataladı.

Máselen, tosınnanlı shamanıń mánisi X_1=35, ortashasınıń mánisi bolsa $\overline{\quad}$ = 32 bolsa, onda X_2 niń barlıq ortashadan shetleniwi $X_1 - \overline{\quad} = 35 - 32 = 3$.

Tańlanbanıń barlıq mánisleriniń ortashadan shetleniwleriniń qosındısı nolge teń bolatuǵının kórsetiw ańsat:

$$(X_1-\overline{\quad})+(X_2-\overline{\quad})+...+(X_n-\overline{\quad})=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\overline{\quad} =$$

$$=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} = 0.$$

Sonıń ushın, tosınnanlı shamanıń mánislerin ańlatıw ushın ortashadan shetleniwler qosındısı ornına ortasha shetleniwler kvadratlarınıń arifmetikalıq ortasınan paydalanıladı. Bunday ólshem *disperciya* (latınsha *dispersion* – shashılıw, jayılıw) dep ataladı.

Eger X tosınnanlı shama N hár túrli mánislerdi qabıl etse hám onıń ortashası $\overline{\quad}$ bolsa, onda onıń disperciyası tómendegi formula járdeminde tabıladı:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{N}. \qquad (2)$$

Demek, disperciya – tosınnanlı shama mánisleriniń ortashasınan shetleniwler kvadratlarınıń arifmetikalıq ortasına teń.

Egerde X tosınnanlı shamanıń X_1, X_2,..., X_k mánisleri sáykes túrde, M_1, M_2,..., M_k jiyilikleri menen tákirarlansa, onda onıń disperciyasın

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_{\mathrm{k}} - \bar{X})^2 Mk}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}. \qquad (3)$$

formula járdeminde esaplawǵa boladı, bunda

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_{\mathrm{k}} M_{\mathrm{k}}}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}.$$

Máselen, 4-kestedegi tosınnanlı shamanıń ortashası $\overline{X} = 6$ ekenligin anıqlaǵan edik. Endi usı shamanıń disperciyasın esaplayıq:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (Xk - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + Mk} =$$

$$= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3+1+2+1+3} =$$

$$= \frac{27+4+2+1+48}{10} = \frac{82}{10} = 8{,}2.$$

Egerde tosınnanlı shamanıń geybir ólshem (máselen, santimetr)ge iye bolsa, onda onıń ortashası $\overline{X}$ hám ortashasınan shetleniwi $X - \overline{X}$ hám X muǵdar menen birdey ólshem (santimetr)ge iye. Shetleniwlerdiń kvadratı hám disperciyası bolsa, X muǵdar ólsheminiń kvadratı (kvadrat santimetr) ólshemine iye. Ortashadan shetleniwdi bahalaw ushın X tosınnanlı shama menen birdey ólshemge iye bolǵan ólshemnen paydalanıw qolaylı. Sonıń ushın, disperciyadan alınǵan kvadrat koren, yaǵnıy $\sqrt{D}$ nıń mánislerinen paydalanıladı.

Disperciyadan alınǵan kvadrat koren *ortasha kvadrat shetleniw* delinedi hám σ menen belgilenedi, yaǵnıy $\sigma = \sqrt{D}$.

Máselen, 4-kestedegi tosınnanlı shamanıń disperciyası D=8,2 ekenligin esaplaǵan edik. Endi disperciyanıń usı mánisinen kalkulator járdeminde kvadrat korendi alsaq, ortasha kvadrat shetleniwin payda etemiz:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{8{,}2} \approx 2{,}86.$$

Disperciya hám ortasha kvadrat shetleniwdi statistikada tosınnanlı shama mánisleriniń ortasha mánisi átirapında jayılıwınıń ólshemleri dep te aytadı.

Shınıǵıwlar

488. Tosınnanlı shamalar *X* mánisleriniń bas toplamdaǵı tómendegi bólistiriliwi kestede keltirilgen:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Berilgen bas toplam ushın tómendegilerdiń qaysıları reprezentativ tańlanba boladı:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Tańlanbanıń modasın tabıń:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Tańlanbanıń medianasın tabıń:
1) 18, 13, 35, 19, 7;
2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11;
4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Tańlanbanıń keńligin tabıń:

1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Tańlanbanıń ortashasın tabıń:
1) 34, –10, 23, –18;
2) –3, 6, –19, –12, 1;
3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0,7, 0,6, 0,4;
4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Tańlanbanıń modası, medianası hám ortashasın tabıń:
1) 4, –3, 2, 0, 3, –2; 2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Tómendegi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen. X tosınnanlı shama mánisleri tańlanbasınıń arifmetikalıq ortasın tabıń:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Tómendegi kestede itimallıqları boyınsha bólistiriliwi berilgen. X tosınnanlı shama mánisleriniń matematikalıq kútilmesin tabıń:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Tańlanbanıń disperciyasın tabıń.
1) 9 cm, 11 cm, 8 cm, 10 cm; 2) 18 kg, 16 kg, 15 kg, 19 kg;
3) 8 s, 11 s, 8 s, 9 s, 9s; 4) 1 m, 9 m, 4 m, 8 m, 8 m.

497. Tómendegi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen. X tosınnanlı shama mánisleri toplamınıń disperciyasın tabıń.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Tańlanba elementleriniń ortasha mánisinen ortashadan kvadrat shetleniwin esaplań:
1) 4 g, 5 g, 8 g, 3 g, 5 g;
2) 9 cm, 12 cm, 7 cm, 10 cm, 12 cm.

499. Jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen X tosınnanlı shamanıń ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

V bapqa tiyisli shınıǵıwlar

500. (Awızeki). Tómendegi tájriybede júz beriwi múmkin bolǵan barlıq elementar hádiyselerdi aytıń: 1) dusmalıy túrde jıldaǵı aylar atı aytıladı; 2) eki tiyin taslanıp, túsip atırǵan tárepleri baqlanadı; 3) geybir 50 den kishi ápiwayı san aytıladı; 4) tawekel túrde eki tańbalı 3 ke eseli san aytıladı.

501. Qutıda 4 qara, 5 qızıl, 6 kók shar bar. Tawekel qutıdan bir shar alındı. Alınǵan shar: 1)qara; 2) qızıl; 3) kók; 4) qara emes; 5) qızıl emes; 6) kók emes; 7) jasıl; 8) yaki qara, yaki qızıl, yaki kók bolıwınıń itimallıǵın tabıń.

502. Táwekel 1 den 50 ge shekem bolǵan natural san aytıldı. Bul sannıń: 1) 7; 2) 7 emes; 3) 7 ge eseli; 4) 10 ǵa eseli; 5) ápiwayı san emes; 6) 30 dan úlken emes ekenliginiń itimallıǵın anıqlań.

503. Stolǵa kubik penen tiyin taslanbaqta. Bunda 1) kubikte 5, tiyin cifrlı tárepi menen; 2) kubikte shıqqan san ápiwayı, tiyin gerb tárepi menen túsiw itimallıǵın tabıń.

Tańlanbanıń keńligi, modası, medianası hám ortashasın tabıń (**504–507)**:

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Tańlanbanıń disperciyası hám ortasha kvadrat shetleniw anıqlań:
1) 6, 11, 8, 9; 2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4; 4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4; 6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen Z tosınnanlı shamanıń disperciyası hám ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

1)

Z	–1	0	2	4
M	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
M	1	2	3	1

510. Tańlanbalar disperciyaların salıstırıń:
1) 4, 5, 7, 5, 9 hám 6, 9, 7, 8; 2) –2, 2, 3 hám –3, –1, 1, 3, 4.

511. Itimallıq boyınsha bólingen kestesi:

1)

X	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

menen berilgen X tosınnanlı shamanıń matematikalıq kútilmesin tabıń.

V bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

1. Birdey kartochkalarǵa 1 den 15 ke shekem sanlar jazıldı (hárbir kartochkaǵa birewden san jazıldı). Kartoshkalar stolǵa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Tosınnan alınǵan kartochkadaǵı sannıń ápiwayı san bolıwı itimallıǵın tabıń.

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{3}{5}$.

2. Qutıda 3 aq hám 7 qara shar bar. Olardan biri tawekel saylanıp qutıdan alındı. Alınǵan shardıń aq bolıw itimallıǵın tabıń.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

3. Klastaǵı 27 oqıwshıdan 15 i ul bala. Klasqa bir ul bala hám eki qız bala kelip qosıldı. Bunda ul balalar sanı – X tosınnanlı shamanıń salıstırmalı jiyiligi qanshaǵa ózgeredi?

A) $\frac{1}{45}$ ge kóbeydi; B) $\frac{1}{45}$ ge kemeydi;

C) $\frac{2}{45}$ ge kóbeydi; D) $\frac{2}{45}$ ge kemeydi.

4. Tosınnanlı shama mánisleri tańlanbasınıń modası menen medianasınıń qosındısın tabıń: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

A) 14; B) 17; C) 16; D) 13 .

5. Tosınnanlı shama mánisleri tańlanbasınıń modası menen medianasınıń kóbeymesin tabıń: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.

6. Tómende jiyilikleri boyınsha bólistiliwi berilgen kesteden X tosınnanlı shama tańlanbasınıń oortashasın tabıń:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

A) $1\frac{5}{9}$; B) $1\frac{4}{9}$; C) $1\frac{1}{9}$; D) 1.

7. X tosınnanlı shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiliwiniń matematikalıq kútilmesin tabıń:

	–1	2	3	5	7
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

A) $\frac{25}{9}$; B) $\frac{26}{9}$; C) $\frac{29}{9}$; D) $\frac{30}{9}$.

8. X tosınnanlı shamanıń jiyilikleri boyınsha bólistiliwiniń ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.

9. X tosınnanlı shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiliwine qaray disperciyasın tabıń:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

1-másele. Utıslı loteriyada 5000 p.b. (pul birligi)de avtomobil, hárbiri 250 p.b. nen 4 televizor, hárbiri 200 p.b. nen 5 uyalı telefonı oynalmaqta. Barlıǵı bolıp, 7 p.b. nen 1000 bilet satıwǵa shıǵarılǵan. Bir bilet satıp alǵan loteriya qatnasıwshısınıń utısınıń bólistiriliw kestesin dúziń hám matematikalıq kútilmesin esaplań.

△ X – bir biletke taza túsken utıs bolsa, onda onıń mánisi:

bir de utıs shıqpasa, $0 - 7 = -7$;

uyalı telefonı shıqsa, $200 - 7 = 193$;

televizor utqan bolsa, $250 - 7 = 243$;

avtomobil utqan bolsa, $5\,000 - 7 = 4\,993$

pul birliginde boladı. 1 000 biletten 990 ına utıs shıqpawı hám utıslar sanı $5 + 4 + 1 = 10$ ekenligin esapqa alıp, itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması boyınsha tómendegige iye bolamız:

X – tosınnanlı shama

-7 mánisti qabıl etiw itimallıǵı $\dfrac{990}{1000} = 0{,}990$;

193 mánisti qabıl etiw itimallıǵı $\dfrac{4}{1000} = 0{,}004$;

243 mánisti qabıl etiw itimallıǵı $\dfrac{1}{1000} = 0{,}001$.

4 993 mánisti qabıl etiw itimallıǵı $\dfrac{5}{1000} = 0{,}005$;

Demek, X – tosınnanlı shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiriliw kestesi tómendegishe boladı:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Bólistiriliw kestesi tiykarında matematikalıq kútilmeni esaplawǵa boladı:

$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0,$

yaǵnıy, ortasha utıs nolge teń. Payda bolǵan nátiyje, loteriya biletlerin satıwdan túsken barlıq pul utıslarǵa ketiwin bildiredi.

Juwabı: bólistiriliw kestesi:

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

hám matematikalıq kútilmesi $E = 0$.▲

2-másele. Bir firmaǵa dilmashlıq ornına eki kandidat háreket etpekte. Olarǵa birdey sınaw múddeti belgilendi hám 125 betlik birdey tekstti awdarmalawǵa berildi. Olardıń hár kúni teksttiń neshe betin awdarmalaǵanı tómendegi kestede berilgen:

Hápte kúnleri	Kúnlik awdarmalanǵan betler sanı	
	1-kandidat (X)	2-kandidat (Y)
Dúyshembi	24	25
Seyshembi	26	31
Shárshembi	25	27
Piyshembi	23	22
Juma	27	20

Jumıs beriwshi kestedegi maǵlıwmatlardı talqılaǵanda, kandidatlardıń qaysı birin jumısqa alıwdı maqul kóredi?

△ Kandidattıń hárbiri 5 kúnde 125 betten awdarma isledi, demek, eki kandidattıń da ortasha miynet ónimdarlıǵı birdey:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (bet/kún)}.$$

Eki tosınnanlı shama X hám Y tiń de modası joq, medianaları bolsa birdey (25 hám 25). Kandidatlardan qaysı birin jumısqa alıw maqsetke muwapıq eken? Bul jaǵdayda miynet ónimdarlıǵınıń *turaqlılı*ǵın salıstırıw arqalı ámelge asırıwǵa boladı. Bunı bolsa shetleniwlerdegi kvadratlar qosındıların yaki disperciyalardı salıstırıw arqalı ámelge asırıw múmkin:

Hápte kúnleri	Tosınnanlı shamanıń mánisi		ortashadan shetleniwi $\overline{X} = \overline{Y} = 25$		Shetleniw kvadratları	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Dúyshembi	24	25	–1	0	1	0
Seyshembi	26	31	1	6	1	36
Shárshembi	25	27	0	2	0	4
Piyshembi	23	22	–2	–3	4	9
Juma	27	20	2	–5	4	25
Jámi	125	125	0	0	10	74

Kórinip turǵanınday, shetleniw kvadratlarınıń qosındısı X ushın 10, Y ushın 74, yaki disperciyanı esaplasaq:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdot\cdot\cdot+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdot\cdot\cdot+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Demek, X tosınnanlı shamanıń disperciyası Y tosınnanlı shamanıń disperciyasınan kishi. Ámeliy jaqtan bul nátiyje, ekinshi kandidattıń miynet ónimdarlıǵı turaqlı emesligin kórsetedi: bazı bir kúnleri ol imkaniyatlarınan tolıq paydalanbastan isledi, basqa kúnleri bolsa imkaniyatlar dárejesinen kóbirek paydalanıp islewge háreket etti. Bul bolsa, álbette, orınlanıp atırǵan jumıstıń sapasına da keri tásirin tiygiziwi múmkin. Kórinip turǵanınday, nátiyjede jumıs beriwshi birinshi kandidattı jumısqa alıwdı maqul kóredi.

Juwabı: jumıs beriwshi birinshi kandidattı jumısqa alıwdı maqul kóredi. ▲

3-másele. Eki mergen nıshanaǵa oq jaydan oq atqanda alatuǵın ochkoları – X hám Y tosınnanlı shamalardıń itimallıqları boyınsha bólistiriliw kestesinen belgili:

1-mergen ushın

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

2-mergen ushın

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Mergenlerdiń qaysı biri oq jaydan nıshanaǵa jaqsıraq atadı?

△ Mergenlerdiń qaysı biriniń nıshanaǵa tiyetuǵın ortasha ochkosı kóplew bolsa, sonı jaqsı gózlewshi deymiz. Sonıń ushın, X hám Y kútilmegen matematikalıq kútilmesin esaplaymız:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \cdots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \cdots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

yaǵnıy, eki mergenniń de nıshanaǵa tiygizgen ochkoları ortashası birdey.

Endi X hám Y lardıń disperciya hám ortasha kvadrat shetleniwlerin esaplap kóreyik:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \cdots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \cdots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Solay etip, nıshanaǵa tiyetuǵın ochkolardıń ortasha mánisleri teń $E(X) = E(Y)$ bolsa da, ekinshi mergen ushın disperciya birinshi mergenge qaraǵanda kishilew: $D(Y) < D(X)$, yaǵnıy ekinshi mergenniń nıshanaǵa tiyetuǵın ochkolarınıń "oray" $(E(Y) = 5{,}36)$ átirapındaǵı jayılması, birinshi mergendikine qaraǵanda kishilew. Basqasha aytqanda, onıń nátiyjeleri birinshi mergenniń nátiyjelerine qaraǵanda 5,36 dan uzaqlawǵa ketip qalmaǵan. Demek, ol birinshi mergenge qaraǵanda joqarılaw nátiyjelerge erisiwi ushın nıshananı jaqsılap gózlep, $E(Y)$ di oń tárepke (joqarılawǵa) kóshiriwge háreket etiwi kerek.

Juwabı: mergenlerdiń birinshisi nıshanaǵa jaqsılaw atadı. ▲

4- másele. Jarısta futbol komandası oyınshılarınıń qarsılas komanda dárwazasına kirgizgen toplarınıń sanı X tiń jiyilikler boyınsha bólistiriliwi berilgen:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

Barlıq kirgizilgen toplar sanınıń ortasha mánisinen ortasha kvadrat shetleniwin esaplań.

△ Aldın ortashanı esaplaymız:

$$\bar{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\dots+X_5M_5}{M_1+M_2+\dots+M_5}=$$

$$=\frac{0\cdot3+1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot1}{3+3+2+1+1}=\frac{0+3+4+3+4}{10}=\frac{14}{10}=1,4.$$

Keyingi esaplaw nátiyjeleri tómendegi kestede keltirilgen:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X-\bar{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X-\bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X-\bar{X})^2\cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Onda, disperciya hám ortasha kvadrat shetleniw tómendegishe esaplanadı:

$$D=\frac{(X_1-\bar{X})^2\mathrm{M}_1 1+(X_2-\bar{X})^2\mathrm{M}_2+\dots+(X_5-\bar{X})^2M_5}{M_1+M_2+\dots+M_5}=$$

$$=\frac{5,88+0,48+0,72+2,56+6,76}{10}=\frac{16,4}{10}=1,64,$$

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{1,64}\approx1,28.$$

Juwabı: $\sigma\approx128$. ▲

Shınıǵıwlar

1. Kóp jıllıq statistikalıq maǵlıwmatlar tiykarında 4 perzentli shańaraqlardaǵı ul balalar sanı –X tosınnanlıq shamanıń bólistiriliw nızamı tómendegi kestede berilgen bolsa, onıń matermatikalıq kútilmesi hám disperciyasın esaplań.

X	0	1	2	3	4

P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Eki gimnastikashınıń sport jarısındaǵı shıǵıwı 9 jyuriydiń 10 ballıq sistemada qoyǵan balları tómendegi kestede berilgen:

Gimnastikashınıń nomeri	Jyuriydiń nomeri hám qoyǵan balları								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Hárbir gimnastikashı alǵan balların, sáykes túrde, X hám Y tosınnanlı shamalar dep qaralsa, olardıń matematikalıq kútilmesi, disperciyası hám ortasha kvadrat shetleniwlerin esaplań hám salıstırıń.

3. Qarıydarlardıń ayaq kiyimlerge bolǵan talabın úyrenip atırǵan talaba, eki dúkanda hár kúni satılǵan ayaq kiyimler sanın 25 kún dawamında jazıp bardı. Egerde X_1 birinshi dúkanda, X_2 ekinshi dúkanda satılǵan ayaq kiyimler sanı bolsa, onda tómendegi kestelerde keltirilgen maǵlıwmatlar boyınsha X_1 hám X_2 tosınnanlı shamalardıń matematikalıq kútilmesi hám ortasha kvadrat shetleniwin esaplań. Alınǵan nátiyjelerdi salıstırıp, dúkanlardaǵı ayaq kiyim satılıwın salıstırıń.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

4. Cilindr kórinisindegi polattan islengen ǵolashalar partiyasınan alınǵan jigirma ǵolasha ultanları d diametrleri eki túrli ólshew ásbarları menen ólshendi. Birinshi ólshew ásbabında (1 mm ge shekem anıqlıqta) alınǵan nátiyjeler sheptegi, ekinshisinde alınǵan nátiyjeler bolsa ońdaǵı kestede keltirilgen:

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

d_1 hám d_2 tosınnanlı shamanıń disperciyaların salıstırıń.

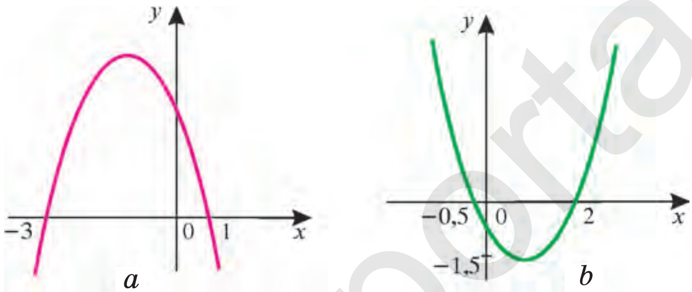
9 KLASS “ALGEBRA” KURSÍN TÁKIRARLAW USHÍN SHÍNÍǴÍWLAR

512. Funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Awızeki.) $y = ax^2 + bx + c$ funkciya grafiginen paydalanıp (93-súwret), onıń qásiyetlerin anıqlań.



93- súwret.

514. Funkciyanıń grafigin jasań hám qásiyetlerin anıqlań:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. Funkciyanıń grafigin bir koordinata tegisliginde jasań:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ hám $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ hám $y = 3x^2 - 2$.

Teńsizlikti sheshiń (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \le 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \le 0$; 6) $x^2 - 7 \ge 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\leq 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\geq 0$.

Teńsizlikti intervallar usılı menen sheshiń (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\leq 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\geq 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\leq 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\geq 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\geq 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\leq 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Trapeciyanıń maydanı 19,22 cm^2 den artıq. Onıń ortańǵı sızıǵı biyikliginen eki ese úlken. Trapeciyanıń orta sızıǵın hám biyikligin tabıń.

524. Parallelogrammnıń tárepi, usı túrepke túsirilgen biyiklikten 2 cm ge artıq. Eger parallelogrammnıń maydanı 15 cm^2 tan artıq bolsa, usı tárepiniń uzınlıǵın tabıń.

525. Teńsizlikti intervallar usılı menen sheshiń:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geq 2$.

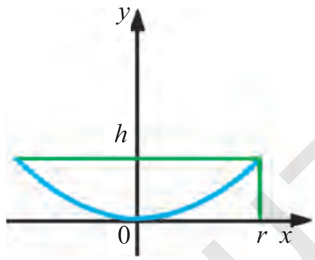
526. Eger x^2+px+q kvadrat úsh aǵzalı $x=0$ bolǵanda –14 ke teń mánisti, $x=-2$ bolǵanda –20 ǵa teń mánisti qabıl etse, usı kvadrat úsh aǵzalınıń p hám q koefficientlerin tabıń.

527. Eger $y = x^2 + px + q$ parabola:

1) abcissalar kósherin $x=-\frac{1}{2}$ hám $x=-\frac{1}{2}$ noqatlarında kesip ótse;
2) abcissalar kósheri menen $x=-7$ noqatta urınsa;
3) abcissalar kósherin $x=2$ ordinatalar kósherin $y=-1$ noqatında kesip ótse, $p-q$ di tabıń.

528. Eger parabola abcissalar kósherin 5 noqatta kesip ótse hám onıń tóbesi $\left(2\frac{3}{4};10\frac{1}{8}\right)$ noqatında bolsa, usı parabolanıń teńlemesin jazıń.

529. Teleskoptıń (reflektordıń) shaǵılıstırıwshı aynası kósher kesimi boyınsha parabola formasına iye (94-súwret). Usı parabolanıń teńlemesin jazıń.



94- súwret.

530. Eger $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciyanıń grafigi:
1) $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ hám $C(0;\ -6)$ noqatlarınan ótse;
2) $K(-2;0)$, $L(1;0)$, $M(0;\ 2)$ noqatlarınan ótse, onıń koefficientlerin tabıń.

531. Qálegen teris emes a hám b sanlar ushın
1) $a^2+b^2\le(a+b)^2$; 2) $a^3+b^3\le(a+b)^3$
teńsizliktiń durıs bolıwın dálilleń.

532. Funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=|x-1|$;

3) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$; 4) $y=\sqrt{x^2+4x+4}$.

533. Teńlemeniń haqıyqıy korenlerin tabıń:
1) $x^2-|x|-2=0$; 2) $x^2-4|x|+3=0$; 3) $|x^2-x|=2$;
4) $|x^2+x|=1$; 5) $|x^2-2|=2$; 6) $|x^2-26|=10$.

534. Sanlardı koren belgisi astınan shıǵarıń:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a\ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y>0$.

535. Ápiwayılastırıń:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

536. Anıqlamalardıń mánislerin salıstırıń:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ hám $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ hám $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Koren belgisi astınan kóbeytiwshini shıǵarıń:

1) $\sqrt{9a^2b}$, bunda $a<0, b>0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, bunda $a>0, b>0$;

539. Kóbeytiwshini koren belgisi astına alıń:

1) $x\sqrt{5}$, bunda $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, bunda $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, bunda $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, bunda $a<0$.

540. $y=-\frac{25}{x}$ funkciyasınıń grafigine:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1; 250)$

noqatı tiyisli bolıwı yaki bolmaytuǵının anıqlań.

541. $y=\sqrt{1-2x}$ funkciya grafigine: 1) $C\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2};1\right)$; E (–4;

3) noqatı tiyisli bolıwı yaki bolmaytuǵının anıqlań.

542. Funkciyanıń grafigin jasań:

1) $y=x^2+6x+10$; 2) $y=-x^2-7x-6$.

543. $P(1;0)$ noqatın: 1) $A(0;1)$; 2) $B)$ $(0;-1)$; 3) $C(-1;0)$; 4) $D(1;0)$ noqatına ótkeretuǵın bir neshe burıw múyeshlerin kórsetiń.

544. Esaplań: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Sannıń oń yaki teris ekenligin anıqlań:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

546. Berilgen: $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-0{,}28$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Esaplań: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Kóbeytiwshilerge jikleń:

1) $\sin 2\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha-\sin 2\alpha$; 4) $1-\sin 2\alpha-\cos^2\alpha$.

548. Agar 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$ hám $\sin\frac{\alpha}{2}<0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$ hám $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ bolsa $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ı esaplań.

549. Eger

1) $a_1=10$, $d=6$, $n=23$; 2) $a_1=42$, $d=\frac{1}{2}$, $n=12$;

3) $a_1=0$, $d=-2$, $n=7$; 4) $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{2}{3}$, $n=18$

bolsa, arifmetikalıq progressiyanıń n- aǵzasın hám dáslepki n aǵzasınıń qosındısın esaplań.

550. Eger $a_1=2$, $a_n=120$, $n=20$ bolsa, arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

551. n-aǵzası $a_n=\frac{1-2n}{3}$ formula menen berilgen izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının esaplań.

552. Eger geometriyalıq progressiya ushın:

1) $b_1=5$ hám $q=-10$ bolsa, b_4 ti tabıń;

2) $b_4=-5000$ hám $q=-10$ bolsa, b_1 di tabıń.

553. Eger:

1) $b_1=3$, $q=2$, $n=5$; 2) $b_1=1$, $q=5$, $n=4$ bolsa, geometriyalıq progressiyanıń n-aǵzasın hám dáslepki n aǵzasınıń qosındısın esaplań.

554. Eger: 1) $b_1=\frac{1}{4}$, $q=2$, $n=6$; 2) $b_1=\frac{1}{5}$, $q=-5$, $n=5$ bolsa, geometriyalıq progressiyanıń dáslepki n aǵzasınıń qosındısın tabıń.

555. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots$; 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots$; 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$.

556. Koren belgisi astınan kóbeyiwshini shıǵarıń:

1) $\sqrt{20a^4b}$, bunda $a<0$, $b>0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, bunda $a<1$;

557. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, bunda $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, bunda $b>a$.

558. Bólimindegi irracionallıqtı joq etiń:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

559. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}} - \dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Teńlemeni sheshiń:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}^{2}\alpha}{1+\mathrm{ctg}^{2}\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\mathrm{ctg}^{2}\alpha}{\mathrm{ctg}^{2}\alpha}$; 3) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^{2}-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^{2}$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^{2}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Teńlemeni sheshiń:

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Birdeylikti dálilleń:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha$.

564. Birdeylikti dálilleń:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

565. Arifmetikalıq progressiyada $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Progressiyanıń dáslepki on jeti aǵzasınıń qosındısın tabıń.

566. Geometriyalıq progressiyada $q=3$, $S_6=1\ 820$ bolsa, b_1 hám b_5 ti tabıń.

567. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı $\frac{8}{5}$ ge teń, ekinshi aǵzası $-\frac{1}{2}$ ge teń. Úshinshi aǵzasın tabıń.

Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

568. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

569. Eger: 1) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$ bolsa, $\sin\alpha$ hám $\cos\alpha$ nı esaplań..

JUWAPLAR

2. 2) $x_1 = 0, x_2 = 1$; 4) x tiń berilgen funkciyasınıń mánisi –5 ke teń bolatuǵın haqıyqıy mánisleri joq. **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$. $x_2 = -1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2) nolleri joq; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) nolleri joq; **6.** 2) $p = 3, q = -4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$. **9.** B hám C. **12.** 2) $(\sqrt{5}; 5), (-\sqrt{5}; 5)$; 4) $(0; 0)$, $(2; 4)$; 6) $(1; 1)$. **13.** 2) Awa; **14.** 2) Awa; 4) yaq; **16.** 1) $x < -3, x > 3$; 2) $-5 \leq x \leq 5$; 3) $x \leq -4, x \geq 4$; 4) $-6 < x < 6$. **20.** 2) $(-3; -4{,}5)$, $(2; -2)$. **21.** 2) awa; 4) yaq. **22.** 1) ósiwshi; 2) kemeyiwshi; 3) ósiwshi;4) ósiwshi; de, kemeyiwshi de bolmaydı. **23.** 3 m/s^2. **26.** 2) $(0; -5)$; 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2)Yoq; 4) yoq. **29.** 2) $(1; 0)$, $(0{,}5; 0)$, $(0; -1)$; 4) $(0; 0)$, $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **30.** $y = x^2 - 2x + 3$. **32.** 2) $k = -10$. **34.** 1) $y = 2(x-3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1{,}5)^2 + 3{,}5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) $(1; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(0; 14)$. **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 hám 5. **42.** Diywalǵa parallel tárepi 6 m; qalǵan tárepleri 3 m den. **43.** Yaq. **44.** 2) $x = 1$ de $y = -5$ eń kishi mánis; 4) $x = 1$ de $y = -2$ eń kishi mánis. **45.** 1) $a > 0, b > 0, c > 0$; 2) $a < 0, b > 0$, $c < 0$. **46.** 1) 5 s den keyin eń úlken biyiklik 130 m ge teń; 2) $(5 + \sqrt{26})$s. **48.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **50.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7, x > -1$. **51.** 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **52.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **53.** 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. **56.** oń mánisleri $x < -3$, $x > 2$ aralıqlarda, teris mánisler $-3 < x < 2$ intervalda. **58.** 2) $x \leq -1$, $x \geq 4$; 4) $-1 < x < 4$. **59.** 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \leq -0{,}25$; $x \geq 1$. **60.** 2) $x = 7$; 4) sheshimleri joq. **61.** 2) sheshimleri joq; 4) sheshimleri joq; 6) x – qálegen haqıyqıy san. **62.** 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$; $x > 0$. **64.** 2) $x < -\frac{5}{3}$ $x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x – qálegen haqıyqıy san; **65.** 2) x – qálegen haqıyqıy san, 4) $x \neq \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$. **66.** 2) sheshimleri joq; 4) $-0{,}5 < x < 3$. **67.** **2)** $x = 1$; 4) x – qálegen haqıyqıy san. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5$, $x > 2\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0$, $x > 9$; 4) –3

$< x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x < < 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \le x < 7$; 6) $-2 \le x < -1$, $x \ge 3$. **76.** 2) $x < 0{,}5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \le x \le -1$, $4 \le x \le 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \le x < 2$, $x \ge 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5$, $x > 2$; 3) $-1 < x \le -\frac{2}{5}$. **81.** 2) $x = 2$ da $y = 1$; $x = 0$ hám $x = 4$ da $y = 5$; $x = -1$ va $x = 5$ da $y = 10$; $x = -2$ va $x = 6$ da $y = 17$. **82.** 1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -11$, $y(3) = 4$; 2) $x = -\frac{1}{2}$ da $y = -3$; $x = -1$ da $y = -2$; $x = \frac{3}{2}$ da $y = 13$; $x = \frac{4}{3}$ da $y = 19$. **84.** 2) $x \le 2$, $x \ge 5$; 4) $-2 \le x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = 1$; 2) $x = 2$ da $y = -2$; $x = 0$ hám $x = 4$ da $y = 0$; $x = -2$ va $x = 6$ da $y = 2$; $x = -4$ va $x = 8$ da $y = 4$. **86.** 2) $x \ne -1$; 5) $-1 \le x \le 1$, $x \ge 4$; 6) $-5 \le x \le 1$, $x > 2$. **87.** 2) Awa; 4 awa. . **93.** 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2)taq; 4) jup ta, taq ta bolmaydı. **99.** 2)taq; 4) taq; **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110**. 2) $x \le 3$; 4) $y < < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2) Kubtıń qırı 7 dm den artıq. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **117.** $x = \frac{7}{3}\cdot$ **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **121.** 2) $x = 2{,}25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x = 4$. **124.** 2) $2 \le x \le 3$; 4) $1 < x \le$ ≤ 2; 6) $x \ge 1$. **125.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; 4) x tiń bunday mánisi joq. **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 m hám 150 m. **131.** 2) $p = 1$, $q = 0$. **132.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2$, $x > 4$; 4) $x < 3$, $x > 4$. **134.** 2) $x < -6$, $x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}$, $x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) sheshimlerge iye emes; 4) sheshimlerge iye emes; 6) sheshimleri joq. **137.** 2) $x < -1$, $1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4 < x \le 7$; 6) $x \ge 2$, $-\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** 12 km/h tan kem emes. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$. **143.** 2) $(-1; -1)$; $(1; 1)$. **144**. 2) $x > 2$; 4) $x \le -2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}\cdot$ **147.** 2)

x – qálegen san; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < -7$, $-3 \le x < -1$, $x \ge 3$. **148.** 2) kemeyedi; 4) kemeyedi. **149.** 2) taq; 4) jup ta, taq ta bolmaydı.. **150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1$, $x > 9$; 2) $-1 < x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154.** 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 hám 13. **160.** 4 hám 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 m, 200 m. **165.** 2) (4; 5) hám (5; 4). **166.** 2) (1; –2) hám (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) va (5; 2); 4) (1; 3) hám (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) hám (–20; –4); 4) (3; 6) hám (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) hám (9; 1). **176.** 2) sistema sheshimge iye emes. **177.** 2) $-9 \le x \le 3$; 4) $-6 \le x \le 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ hám $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \le -2$ hám $1 \le x \le 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) va (4; 4); 2) (2; –2) hám (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) hám (6; –5); 4) (–1; 10) hám (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) hám (2; 3); 4) (2; 6) hám (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) hám (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) hám (1; 5). **200.** 2) (–2; 1) hám (2; 1); 4) (–1; 4) hám (24; 0,6). **201.** 2) (4; $\sqrt{3}$) hám (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) hám (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ va $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Boyı 1,2 cm hám eni 0,8 cm. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **214.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{\circ}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 m. **219.** 2 rad. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ cm². **221.** 2 rad. **222.** 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) ekinshi sherek; 4) tórtinshi sherek; 6) ekinshi sherek; **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, -1, -2, \ldots$. **227.** 2) ekinshi sherek; 4) tórtinshi sherek; **228.** 2) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 4) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 6) $x = \frac{5}{3}\pi$ $k = 2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **231.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1$,

$\pm 2, ...$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1; 6) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) -1; 4) -1; 6) 1.

235. 2) 0; 4) -1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **241.** 2) $x=2\pi k-1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 4) $x=k\pi-1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3}+1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **242.** 2) ekinshi sherek; 4) ekinshi sherek; 6) ekinshi sherek; **243**. 2) oń; 4) oń; 6) oń; **244.** 2) teris; 4) teris; 6) oń; **245.** 2) oń; oń; 4) teris, teris; 6) teris, teris; 8) oń; oń; **246.** 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{ctg}\alpha>0$. **247.** 2) $\sin 3>0$, $\cos 3<0$, $\mathrm{tg}3<0$; 4) $\sin(-1{,}3)<0$, $\cos(-1{,}3)>0$, $\mathrm{tg}(-1{,}3)<0$. **248.** 2) teris; 4) oń; 6)oń; 8) teris. **249.** Eger $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ yaki $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, sina hám cosa belgileriniń sáykes keledi; eger $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ yaki $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, sinπ hám cosπ sanları qarama-qarsı belgilerge iye boladı.**250.** 2) teris; 4) oń; **251.** 2) $\cos 1{,}3>\cos 2{,}3$. **252.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **253.** 2) ekinshi sherek. **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) orınlanadı; 4) orınlanbaydı. **257.** 2) orınlanbaydı. **258.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, ...$. **266.** 1) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x=\pi k$,

$k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **276.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) $-2\cos\alpha$. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) $\cos3\beta$; 4) -1. **284.** $-\sin\alpha - \sin\beta$. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) $-\sin\alpha - \cos\beta$; 4) $\sin\alpha - \cos\beta$. **288.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta) = \frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta$. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) $2\mathrm{ctg}\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) $\cos6\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **312.** 2) $\cos2\alpha$. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos-}$. **317.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ **318.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin2\alpha$. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320**. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2) $2\sin\alpha$. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$ · **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **328.** 2) úshinshi sherek; 4) ekinshi sherek; 6) ekinshi sherek; **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **330.** 2) 2; 4) -1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) $\sin2\alpha$; 4) $\mathrm{tg}2\alpha$. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) $\cos0 > \sin5$. **340.** 2) oń; 4) teris. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.** $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin2 = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos2\alpha = -\frac{1}{9}$. **344.** 2) $\mathrm{tg}\alpha$.

345. 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) cos4α. **350**. 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) boladı; 4) boladı; **354.** 2) $n=9$. **360.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) −42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.** Awa, $n = 11$. **366.** $n = 11$, yaq. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) −13. **369.** 2) −100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) −192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$ $d = \frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78tosıq. **388.** 44. **389.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **392.** 2) −3, 12, −48, 192, −768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. . **400.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ yaki $b_5 = -6$, $\beta_1 = -30\frac{3}{8}$.. **401.** 659100 swm. **402.** 0,25 cm². **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) −400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = =4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ yoki $q = -6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ yaki $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ yaki $S_5 = 521$. **415.** 2) awa; 4) awa; **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. **417.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) yaq; 4)awa;. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6+4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** 2a. **423.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot R_1$.. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **427.** $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) −1080. **429.** 143. **430.** 2) −22. **431.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **432.** 2) $b_n = -0{,}5\cdot(-2)^{n-1}$. **433.** 2) $b_n = \frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$. **437.**

$24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. **441.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$; 4) $x_2 = -4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) −27; 4) $-\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) yaq; 4) awa. **450.** Shárshembi kúni. **451.** $a_1 = 8$ $d = = -3$ yoki $a_1 = 2$, $d = 3$. **452.** $a_1 = 5$, $d = -5$ yoki $a_1 = -5$, $d = 5$. **453.** 180 ret. **453.** 2) Júz beriwi múmkin emes. **454.** 2)Kútilmegen; 4) anıq hádiyse. **457.** 2) birgelikte júz bermeytuǵın. **462.** teń imkaniyatlı emes. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$; **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4%. **482.** 2) múmkin, 4 ochko. **488.** 3 tańlanba. **489.** 2) 11; 4) 5 hám7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 kg², 4) 6m². **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 va 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15 < x < 2$; 4) $x \le 12$, $x \ge 12$. **517.** 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$. **518.** 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0{,}1$; 6) $x \le \frac{1}{8}$, $x \ge 2$. **519.** 2) $x = -12$; 4) x – qálegen haqıyqıy san; 6) sheshimge iye emes. **520.** 2) $-0{,}7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \le x \le 1$. **521.** 2) $x \le -2$, $x = 1$; 4) $x \le -\frac{1}{3}$, $0 \le x \le 2$. **522.** 2) $-0{,}5 \le x < 2$. **523.** Biyiklik 3,1 cm den kóp, ortasha sızıǵı 6, 2 cm den zıyat. **524.** 5 cm den artıq. **525.** 2) $x < -7$, $-1 \le x \le 2$; 4) $-1 \le x < \frac{1}{3}$., $x > \frac{1}{3}$. **526**. $p = 5$, $q = -14$. **527.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **528.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **529.** $y = \frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. **531.** *Kórsetpe.* 1) $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ sıyaqlı belgilep hám $ABC = 1$ teńlikti esapqa alıp, berilgen teńsizlikti $A^3 + B^3 + C^3 \ge 3ABC$ kórinisinde jazıń, onı $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \ge 0$ kórinisine túrlendiriń. ($A^2 + B^2 + C^2 \ge AB + AC + BC$ teńsizlik usı $A^2 + B^2 \ge 2AB$, $A^2 + C^2 \ge 2AC$, $B^2 + C^2 \ge 2BC$ teńsizliklerdi qosıw arqalı payda etiledi; 2) arifmetikalıq ortası hám geometriyalıq ortası muǵdarlarınan tiyisli teńsizliklerdi qosıń: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \ge 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2b$; 3) teńsizliktiń shep bóleginen oń bólegin alıń hám payda bolǵan bólshektiń alımın mınaday kóriniste jazıń:$(a+b)(a-b)^2+(b+\tilde{n})(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2$; 1) $x_{1,2}=\pm 2$; 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 3) $x_{3,4}=\pm 3$; 3) $x_1=-1, x_2=2$; 4) $x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1=0, x_{2,3}=\pm 2$; 6) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=\pm 6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) Yaq. **541.** 2) Yo‘q. **544.** –1. **545.** 2) Teres. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha=\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12}=47,5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1=5$. **553.** 2) $b_4=125, S_4=156$; 4) $b_4=81$, $S_5=61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0,1(5-\sqrt{5})5+\sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **560.** 2) $x=61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x=\frac{}{2}+\pi n, x=n+2n, n\in \boldsymbol{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1=5, b_5=405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 yoki 20, 13, 6. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$.

«Ózińizdi tekseriń kóriń» tapsırmalarınıń juwapları

I bap. **1.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **2.** $-1 < x < 1$ bolǵanda $y > 0$; $x < -1$ bolǵanda $y < 0$; $x > 1$. **3.** 1) $x > 0$ bolǵanda funkciya ósedi; $x < 0$ bolǵanda funkciya kemeyedi. **4.** 1) $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 0$. **5.** 1) $x \neq 1$; 2) $-3 \leq x \leq 3$. **6.** 1) $x = 28$; 2) $x = 1$.

III bap. **1.** 1) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

IV bap. **1.** 1) $a_{10} = -25$, $S_{10} = -115$. **2.** 1) $b_6 = \frac{1}{8}$, $S_6 = 7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q = \frac{1}{3}$, $S = 1{,}5$.

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máselelerdiń juwapları

I bap. **1.** Tezlik 60,01 km/saat tan aspawı kerek. **2.** $n \leq 30$. **3.** 2 mln. 10 m. **4.** 125. 5. 1) 135; 2) 17739; 3) ≈ 4,9 ayda.

II bap. **1.** 2) 20 qatar. **2.** Birinshi brigadirde 8, ekinshisinde 12 jumısshı. 12 ta ishchi. **3.** 2) 16%. **4.** 2) 4 *l* hám 12 *l*. **5.** Shamalsız hawa-rayında.

III bap. **1.** 4) ≈335,42 km; 5) ≈2243,3 km. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 m. **4.** ≈12,8 m.

IV bap. **1.** 420. **2.** 10 km. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 swm. **5.** 27 metr.

V bap. **1.** $E(X) = 26$, $D(X) = 0{,}9964$. 2. $E(X) \approx 8{,}94$, $E(Y) \approx 8{,}93$, $D(X) \approx 0{,}07$, $D(Y) \approx 0{,}03$, $G(X) \approx 0{,}071$, $\sigma(Y) \approx 0{,}76$. 3. $E(X_1) = E(X_2) = 3{,}36$, $\sigma(X_1) \approx 1{,}47$, $\sigma(X_2) \approx 1{,}41$. 4. $E(d_1) = 60$, $D(d_1) = 1{,}2$, $E(d_2) = 60{,}02$, $D(d_2) = 0{,}76$.

MAZMUNÍ

IV bap. SANLÍ IZBE-IZLIKLER. PROGRESSIYALAR

V bap. ITIMALLIQ TEORIYASÍ HÁM MATEMATIKALIQ STATISTIKA ELEMENTLERI

Alimov Sh. A.

A 51 Algebra: Ulıwma orta bilim beriw mekteplerinin 9-klası ushın sabaqlıq/ Sh.A.Alimov, A.R.Xalmuxamedov, M.A. Mirzaxmedov. – 4-basılımı. – Tashkent: „O‘qituvchi“ BPDÚ, 2019. – 240 b.

ISBN 978-9943-5750-7-3

UO‘K: 512(075.3)=512.121
KBK 22.14ya72

Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov, Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Qoraqalpoq tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik
Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4-nashri

«O‘QITUVCHI» nashriyot-matbaa ijodiy uyi.
Toshkent – 2019

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MChJ da tayyorlandi.

Awdarmashı G. Nizanova
Redaktor G. Nizanova
Bezewshi dizayner R. Zaparov
Korrektor G. Nizanova
Kompyuterde betlewshi H. Safaraliyev
Tekstin teriwshi S. Niyazova

Baspa licenziyası AI № 012. 20.07.2018.
Original-maketten basıwǵa ruqsat etilgen waqtı 27.07. 2019. Formatı 70×90 1/16.
Times garniturası. Ofset baspa usulında basıldı. Shartli b.t. 17,55. Esap-b. t. 16,6.
Nusqası 11 915. Buyurtpa № 19-188.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administratsiyası janındaǵı Málimleme hám ǵalaba kommunikatsiyalar agentliginiń „O‘qituvchi“ baspa-poligrafiyalıq dóretiwshilik úyi. Tashkent – 206, Yunusobod rayonı, Yangishahar kóshesi, 1-úy. Shártnama №.74-19.

Original-maketten Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administratsiyası janındaǵı Málimleme hám ǵalaba kommunikatsiyalar agentliginiń „O‘zbekiston“ baspa-poligrafiyalıq dóretiwshilik úyi baspaxanasında basıp shıǵarıldı. Tashkent qalası, A. Nawayı kóshesi, 30-úy.

Ijaraǵa berilgen sabaqlıqtıń jaǵdayın kórsetiwshi keste

T/n	Oqıwshınıń atı familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alınǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi	Sabaqlıqtıń qaytıp tapsırılǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

Sabaqlıq ijaraǵa berilgende hám, oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp alınǵanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishi bahalawǵa muwapıq toltırıladı

Jańa	Sabaqlıqtıń paydalanıwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Muqabası pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, koshpegen, betlerinde jazıw hám sızıwlar joq.
Qanaatlanarlıq	Muqaba jazılgen, bir qansha sızılıp, shetleri jelingen, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajırlıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlanarlıq ońlanǵan. Kóshken betleri qayta ońlanǵan, ayırım betleri sızılǵan.
Qanaatlandırmaydı	Muqaba sızılǵan, ol jırtılǵan, tiykarǵı bólimnen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırarsızliq ońianǵan. Betleri jırtılǵan, betleri jetispeydi, sızıp, boyap taslanǵan, sabaqlıqtı tiklewge bolmaydı.