

Ш.А. Алимов, О.Р. Холмухамедов,
М.А. Мирзаахмедов

А Л Г Е Б Р А

КИТОБИ ДАРСӢ БАРОИ ДОНИШОМУӢЗОНИ
СИНФИ 9-УМИ МАКТАБӢОИ
ТАЪЛИМИ МИЁНАИ УМУМӢ

Нашри чорум

*Вазорати таълими халқи Республикаи Ўзбекистон
ба нашр тавсия кардааст*

ХОНАИ ЭҶОДИИ ТАБЪИ НАШРИ „О‘ЎҚИТУВЧИ“
ТОШКАНД-2019

Муқарризон:

Ф.С. Раҳимова – омӯзгори фанни математикаи ДТАТ ба номи Ал-Хоразмӣ;

Г.А. Фозилова – омӯзгори фанни математикаи мактаби рақами 274-уми ноҳияи Юнусободи, шаҳри Тошканд;

Д.Ш. Абраев – омӯзгори фанни математикаи мактаби рақами 326-уми Олмазори шаҳри Тошканд.

Аломатҳои шартии китоб:



– матне, ки донишдони он муҳим ва дар хотир доштани он ғоиданок аст (аз ёд кардан шарт нест)



– аломате, ки ҳатмӣ будани ҳалли масъалаҳоро ифода мекунад

33, 34...

– масъалаҳои мураккаб



– оғози ҳалли масъала



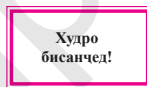
– анҷоми ҳалли масъала



– оғози асосноккунии тасдиқи математикӣ ё баровардани формула



– ҷудо кардани маводи асосӣ



– кори мустақилона барои санҷиши дониш аз рӯи мавод;



– масъалаҳои амалӣ-таъбиқӣ ва алоқаи фанҳо



– анҷоми асосноккунии ё баровардани формула



– масъалаҳои таърихӣ



– маълумотҳои таърихӣ

Аз ҳисоби Бунёди мақсадноки китоби республика чоп шудааст.

ТАКРОРИ МАВЗЎЪҲОИ СИНФҲОИ 8

Донишомӯзони азиз! Бо мақсади ба хотир овардани донишҳои дар „Алгебра“-и синфи 8 омӯхташуда якчанд мисолҳоро ба диққати шумоён ҳавола мекунем.

1. Графики функцияи

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 4x - 1$; 4) $y = -2x - 5$ -ро кашед. График дар кадом чоряк меҳабад? Координатаҳои нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои Ox ва Oy ёбед.

2. $y = kx + b$ графיקи функцияи аз нуқтаҳои $A(0; -7)$, $B(2; 3)$ мегузарад. k ва b -ро ёбед.

3. Хати рост аз нуқтаҳои $A(0; 5)$, $B(1; 2)$ мегузарад. Муодилаи ҳамин хати ростро нависед.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 7x + 4y = 29; \\ 5x + 2y = 19; \end{cases} & 2) \begin{cases} 5x - 4y = 13; \\ 2x - y = 4. \end{cases} \end{array}$$

5. Ба 3-то асп ва 4-то гов дар як рӯз 27 кг ғола дода мешавад. Ёме, ки дар як рӯз ба 9 асп ғола дода мешавад аз ёми ба 5 гов додешаванда 30 кг зиёд аст. Ба як асп ва як гов дар 1 рӯз чӣ қадар ғола дода мешавад?

6. Китоб ва дафтар якҷоя 5800 сӯм меистад. 10% нархи китоб аз 35% нархи дафтар 220 сӯм қимат аст. Китоб ва дафтар алоҳида-алоҳида чанд сӯм меистанд?

7. Нобаробариҳо ҳал кунед:

$$1) 3(x-4) + 5x < 2x + 3; \quad 2) |5-2x| \leq 3; \quad 3) |3x-4| \geq 2.$$

8. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 4(2-x) > 7-5x, \\ 15-4x < 3; \end{cases} & 2) \begin{cases} 2(3-2x) > 8-5x, \\ 10-x > 2. \end{cases} \end{array}$$

9. Ҳалли хурдтарини бутуни нобаробарии $\frac{3x+4}{2} - \frac{1-x}{3} < \frac{7x-3}{2} - \frac{3-x}{3}$ -ро ёбед.

10. Ҳисоб кунед:

1) $\sqrt{121 \cdot 0,04 \cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7} \cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32} + \sqrt{8})^2$.

11. Содда кунед:

1) $(8\sqrt{63} + 3\sqrt{28} - 5\sqrt{112}) : 2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3} + \frac{7}{\sqrt{11}-2}$;
2) $(15\sqrt{1,2} + \frac{1}{3}\sqrt{270} - 2\sqrt{30})$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Муодиларо ҳал кунед (12—14):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2} = x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;

3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. Масофаи 240 км-ро як автомобил нисбат ба автомобили дуюм 1 соат тезтар тай кард. Агар суръати як автомобил аз суръати автомобили дигар 20 км/соат зиёд бошад, суръати ҳар як автомобилро ёбед.

16. 1) Фарқи ду адад ба 2,5 ва фарқи квадратҳои онҳо ба 10 баробар бошад, ин ададҳоро ёбед. 2) Ду ададҳо ёбед, ки суммааш ба 1,4 суммай квадратҳояш ба 1 баробар бошад.

17. $x^2-8x+3=0$ агар решаҳои муодилаи x_1 ва x_2 бошад,

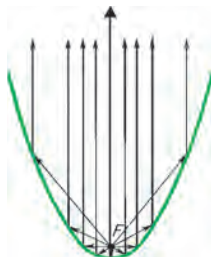
1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; 4) $x_1^2 - x_2^2$ - ро ёбед.

18. Ададро то садякӣ яклухт кунед. Саҳви нисбии яклухткуниро ёбед:

1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Ададро дар шакли стандартӣ нависед:

1) 437,105; 2) 91,352; 3) 0,000 000 85; 4) 0,000 079.



§ 1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

Шумо дар синфи VIII бо функцияи хаттии $y = kx + b$ ва графики он шинос шудед. Дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника бисёр вақт функцияҳои дучор меоянд, ки онҳоро функцияҳои квадратӣ меноманд.

1) Масоҳати квадрати тарафаш x бо формулаи $y = x^2$ ҳисоб карда мешавад.

2) Агар ҷисм ба боло бо суръати v партофта шуда бошад, масофаи s он то сатҳи Замин дар лаҳзаи вақт t аз рӯи формулаи $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$ муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо s_0 – масофа аз ҷисм то сатҳи Замин дар лаҳзаи вақти $t = 0$.

Дар ин мисолҳо функцияҳои намуди $y = ax^2 + bx + c$ муоина шудаанд. Дар мисоли якум $a = 1$, $b = c = 0$, буда, x ва y тағйирёбандаҳо мебошанд.

Дар мисоли дуюм $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$ буда, тағйирёбандаҳо бо ҳарфҳои t ва s ишорат шудаанд.



Таъриф . Функцияи намуди $y = ax^2 + bx + c$, ки ин ҷо a, b ва c – ададҳои ҳақиқии додашуда, $a \neq 0$, x – тағйирёбандаи ҳақиқӣ аст, функцияи квадратӣ номида мешавад.

Масалан, функцияҳои зерин квадратӣ мебошанд:

$$y = x^2,$$

$$y = -2x^2,$$

$$y = x^2 - x,$$

$$y = x^2 - 5x + 6,$$

$$y = -3x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Масъалаи 1. Қимати функцияи

$$y(x) = x^2 - 5x + 6$$

-ро ҳангоми $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$ будан, ёбед.

$$\triangle y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20;$$

$$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6;$$

$$y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0. \blacktriangle$$

Масъалаи 2. Дар кадом қиматҳои x функцияи квадратии $y = x^2 + 4x - 5$ қимати ба: 1) 7 ; 2) -9 ; 3) -8 ; 4) 0 баробар бударо мегирад?

$\triangle$ 1) Мувофиқи шарт $x^2 + 4x - 5 = 7$ аст. Ин муодиларо ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -6.$$

Пас, $y(2) = 7$ ва $y(-6) = 7$.

2) Мувофиқи шарт $x^2 + 4x - 5 = -9$, аст, ки аз ин ҷо

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) Мувофиқи шарт $x^2 + 4x - 5 = -8$ аст, ки аз ин ҷо $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Ин муодиларо ҳал карда, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ ҳосил мекунем.

4) Мувофиқи шарт ин аст, ки аз ин ҷо $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ аст. $\blacktriangle$

Дар ҳолати охирин қиматҳои x , ки дар онҳо функцияи $y = x^2 + 4x - 5$ қимати баробари 0-ро мегирад, яъне $y(1) = 0$ ва $y(-5) = 0$ аст, ёфта шудаанд. Чунин қиматҳои x -ро сифрҳои функцияи квадратӣ меноманд.

Масъалаи 3. Сифрҳои функцияи $y = x^2 - 3x$ -ро ёбед.

$\triangle$ Муодилаи $x^2 - 3x = 0$ -ро ҳал намуда, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ -ро ҳосил мекунем. $\blacktriangle$

Машқҳо

1. (Шифохӣ.) Кадоме аз функцияҳои зерин квадратӣ мебошанд:

$$1) y = 2x^2 + x + 3; \quad 2) y = 3x^2 - 1; \quad 3) y = 5x + 1;$$

$$4) y = x^3 + 7x - 1; \quad 5) y = 4x^2; \quad 6) y = -3x^2 + 2x?$$

2. Қимати ҳақиқии x -ро ёбед, ки дар онҳо функцияи квадратии

$$y = x^2 - x - 3 \text{ қимати ба: } 1) -1; \quad 2) -3; \quad 3) -\frac{13}{4}; \quad 4) -5$$

баробар бударо қабул кунад.

3. Дар кадом қиматҳои ҳақиқии x функсияи $y = -4x^2 + 3x - 1$ қимати ба 1) -2 ; 2) -8 ; 3) $-0,5$; 4) -1 баробар бударо қабул мекунад?
4. Муайян намоед, ки кадоме аз ададҳои -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{3}$ сифрҳои функсияи квадратӣ мебошанд:
 1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
 4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?
5. Сифрҳои функсияи квадратино ёбед:
 1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$; 3) $y = 12x^2 - 17x + 6$;
 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$; 5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.
6. Агар сифрҳои функсияи квадратино $y = x^2 + px + q$, x_1 ва x_2 маълум бошанд, коэффисиентҳои p ва q -ро ёбед:
 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$;
 3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.
7. Қиматҳои x -ро ёбед, ки дар онҳо функсияҳои $y = x^2 + 2x - 3$ ва $y = 2x + 1$ қиматҳои баробарро қабул мекунад.

§ 2.

ФУНКСИЯИ $y = x^2$

Функсияи $y = x^2$, яъне функсияи квадратино $y = ax^2 + bx + c$ -ро ҳангоми $a = 1$, $b = c = 0$ будан, дида мебароем. Барои сохтани графикаи ин функсия чадвали қиматҳои зерин тартиб медиҳем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

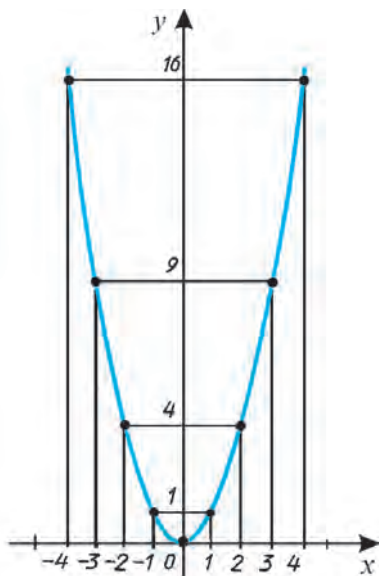
Нуқтаҳои дар чадвал овардашударо сохта ва онҳоро бо хати қави раван пайваст намуда, графикаи функсияи $y = x^2$ -ро ҳосил мекунем (расми 1).



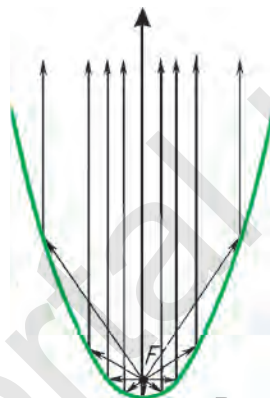
Ҳақиқат қави графикаи функсияи $y = x^2$ парабала номида мешавад.

Ҳосиятҳои функсияи $y = x^2$ -ро дида мебароем.

1) Қимати функсияи $y = x^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан *мусбат* ва $x = 0$ будан ба *сифр* баробар аст. Пас, парабалаи $y = x^2$ аз ибтидои координатаҳо



Расми 1.



Расми 2.

мегузарад ва нуктаҳои дигари парабола болотари тири абсисса воқеъ аст. Мегӯянд, ки параболаи $y = x^2$ дар нуктаи $(0;0)$ ба тири абсисса мерасад.

2) Графики функсияи $y = x^2$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ аст, чунки $(-x)^2 = x^2$ мебошад. Масалан, $y(-3) = y(3) = 9$ (расми 1). Ҳамин тариқ, тири ординатаҳо тири симметрии парабола мебошад. Нуктаи буриши параболаро бо тири симметрияш қуллаи парабола меноманд. Барои параболаи $y = x^2$ ибтидои координатаҳо қулла мебошад.

3) Ҳангоми $x \geq 0$ будан, ба қимати калонтари x қимати калонтари y мувофиқ меояд. Масалан, $y(3) > y(2)$ аст. Мегӯянд, ки функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $x \geq 0$ афзуншаванда мебошад (расми 1).

Ҳангоми $x \leq 0$ будан, ба қимати калонтари x қимати хурдтари y мувофиқ меояд. Масалан, $y(-2) < y(-4)$ аст. Мегӯянд, ки функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $x \leq 0$ камшаванда мебошад (расми 1).

Масъала. Координатаҳои нуктаҳои буриши параболаи $y = x^2$ ва хати ростии $y = x + 6$ -ро ёбед.

△ Координатаҳои нуктаи буриш ҳалли системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases} \text{ мебошад.}$$

Аз ин система $x^2 = x + 6$, яъне, $x^2 - x - 6 = 0$ -ро ҳосил мекунем, ки аз ин ҷо $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ аст. Қиматҳои x_1 ва x_2 -ро ба яке аз муодилаҳои система гузошта, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$ -ро меёбем.

Ҷавоб: (3; 9), (-2; 4). ▲

Парабола дорои хосиятҳои зиёди шавқангез аст, ки дар техника истифода мешаванд. Масалан, дар тири симметрияи парабола нуктаи F ҳаст, ки онро конун (фокус)-и парабола меноманд (расми 2). Агар дар ин нукта манбаи рӯшноӣ воқеъ бошад, тамоми нурҳои аз парабола инъикосёфта ба таври параллел мераванд. Ин хосият ҳангоми сохтани прожекторҳо, локаторҳо ва дигар асбобҳо истифода бурда мешавад.

Конуни параболаи $y = x^2$ нуктаи $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ мебошад.

Машқҳо

8. Графики функсияи $y = x^2$ -ро дар қоғази миллиметрӣ созед.

Аз рӯи график тақрибан:

1) қимати тақрибии y -ро ҳангоми $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = 1,9$; $x = -2,3$;

$x = -1,5$ будан ёбед;

2) агар $y = 2$; $y = 3$; $y = 4,5$; $y = 6,5$ бошад, қимати тақрибии x -ро ёбед.

9. Графики функсияи $y = x^2$ -ро насохта, муайян намоед, ки кадоме аз ин нуктаҳо ба он тааллуқ дорад: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$.

10.. (Шифохӣ.) Нуктаҳои нисбат ба тири ордината ба нуктаҳои $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ симметрӣ бударо муайян намоед. Оё ин нуктаҳо ба графики функсияи $y = x^2$ мутааллиқанд?

11.. (Шифохӣ.) Қиматҳои функсияи $y = x^2$ -ро муқоиса намоед:

1) $x = 2,5$ ва $x = 3\frac{1}{3}$;

2) $x = 0,4$ ва $x = 0,3$;

3) $x = -0,2$ ва $x = -0,1$;

4) $x = 4,1$ ва $x = -5,2$

12.. Координатаҳои нуктаҳои буриши параболаи $y = x^2$ ва хати ростро ёбед:

1) $y = 25$;

2) $y = 5$;

3) $y = -x$;

4) $y = 2x$;

5) $y = 3 - 2x$;

6) $y = 2x - 1$.

13. Оё нуқтаи A нуқтаи буриши параболаи $y = x^2$ ва хати ростии додашуда мебошад:

1) $y = -x - 6$, $A(-3; 9)$; 2) $y = 5x - 6$, $A(2; 4)$?

14. Оё тасдиқи зерин дуруст аст? Функцияи $y = x^2$ дар:

1) порчаи $[1; 4]$; 2) дар интервали $(2; 5)$;

3) дар интервали $x > 3$; 4) дар порчаи $[-3; 4]$?

15. Дар ҳамвории координатӣ параболаи $y = x^2$ ва хати ростии $y = 3$ -ро созед. Дар кадом қиматҳои x нуқтаҳои парабола: болотари хати рост воқеанд; поёнтарин хати рост воқеанд?

16. Дар кадом қиматҳои x қиматҳои функцияи $y = x^2$: 1) аз 9 калонтаранд; 2) аз 25 калонтар нестанд; 3) аз 16 хурдтар нестанд; 4) аз 36 хурдтаранд?

§ 3.

ФУНКСИЯИ $y = ax^2$

Масъалаи 1. Графики функцияи $y = 2x^2$ -ро созед.

△ Чадвали қиматҳои функцияи $y = 2x^2$ -ро тартиб медиҳем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

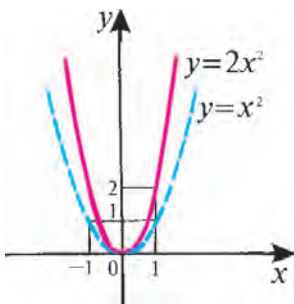
Нуқтаҳои ёфтасударо месозем ва аз онҳо хати қави раванро мегузаронем (расми 3). ▲

Графикҳои функцияҳои $y = 2x^2$ ва $y = x^2$ -ро муқоиса менамоем (расми 3). Дар ҳама ҷағҳа қимати x қимати функцияи $y = 2x^2$ назар ба қимати функцияи

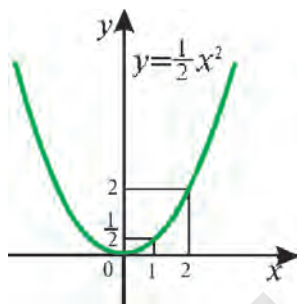
$y = x^2$ 2 маротиба калонтар аст. Ин чунин маъно дорад, ки ҳама ҷағҳа нуқтаи графикҳои функцияи $y = 2x^2$ -ро аз нуқтаи графикҳои функцияи $y = x^2$ -и дорои ҳама ҷағҳа абсисса ординатаашро 2 маротиба калон карда, пайдо кардан мумкин аст. Мегӯянд, ки графикҳои функцияи $y = 2x^2$ ба воситаи аз тире Ox қад-қад тире Oy 2 маротиба ёзондани графикҳои функцияи $y = x^2$ ҳосил мешавад.

Масъалаи 2. Графики $y = \frac{1}{2}x^2$ функцияро созед.

△ Чадвали қиматҳои функцияи $y = \frac{1}{2}x^2$ -ро тартиб медиҳем:



Расми 3.



Расми 4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Нуктаҳои ёфташударо сохта, аз онҳо хати қачи равон мегузаронем (расми 4).▲

Графикҳои функсияҳои $y = \frac{1}{2}x^2$ ва $y = x^2$ -ро муқоиса менамоем.

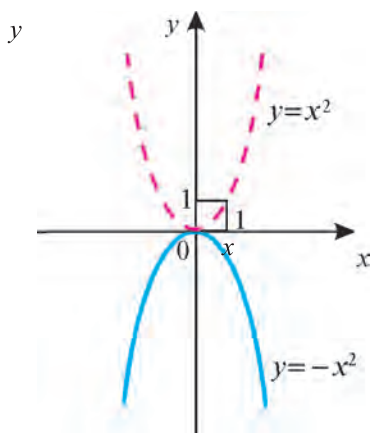
Ҳар як нуктаи графики $y = \frac{1}{2}x^2$ -ро аз нуктаи графики функсияи $y = x^2$ -и дорои худи ҳамон абсисса ординатаашро ду маротиба хурд карда, пайдо кардан мумкин аст.

Мегӯянд, ки графики функсияи $y = \frac{1}{2}x^2$ ба воситаи ба тири Ox қад-қад ба тири Oy 2 маротиба фишурдани графики функсияи $y = x^2$ ҳосил мешавад.

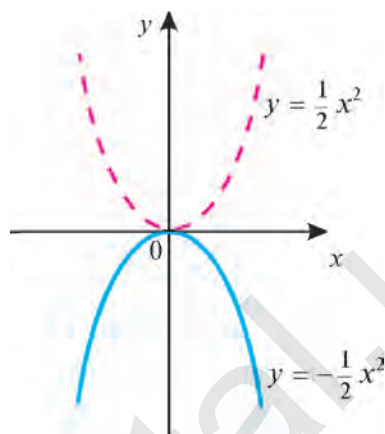
Масъалаи 3. Графики функсияи $y = -x^2$ -ро созед.

▲Функсияҳои $y = -x^2$ ва $y = x^2$ -ро муқоиса менамоем. Дар худи як қимати x қиматҳои ин функсияҳо аз рӯи модулиҳо баробаранд ва аз рӯи аломат муқобиланд. Пас, графики функсияи $y = -x^2$ -ро ба воситаи симметрияи графики функсияи $y = x^2$ нисбат ба тири Ox сохтан мумкин аст (расми 5).▲

Мисли ҳамин, графики функсияи $y = \frac{1}{2}x^2$ ба графики функсияи $y = \frac{1}{2}x^2$ нисбат ба тири Ox симметрӣ аст (расми 6).



Расми 5.



Расми 6.

! Графики функцияи $y = ax^2$ -ро дар қимати дилхохи $a \neq 0$ низ парабола меноманд. Ҳангоми $a > 0$ будан, шохаҳои парабола ба боло, ҳангоми $a < 0$ будан, ба поён равона шудаанд.

Қайд менамоем, ки конуни параболаи $y = ax^2$ дар нуқтаи $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ воқеъ мебошад.

Хосиятҳои асосии функцияи $y = ax^2$ -ро, ки ин ҷо $a \neq 0$ аст, номбар мекунем.

1) агар $a > 0$ бошад, функцияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан, қиматҳои мусбатро мегирад;

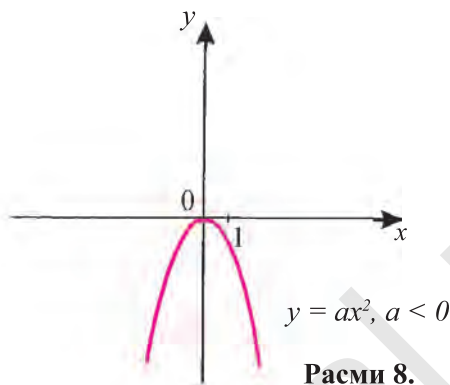
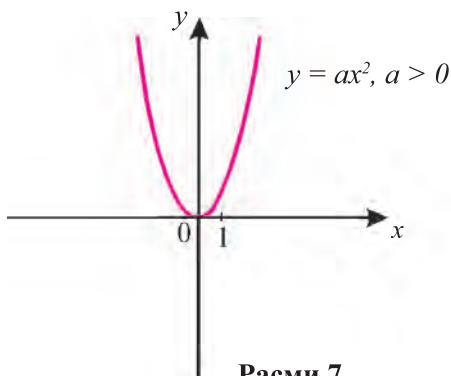
агар $a < 0$ бошад, функцияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан, қиматҳои манфиро мегирад,

қимати функцияи $y = ax^2$ танҳо ҳангоми $x = 0$ будан, ба 0 баробар аст.

2) Параболаи $y = ax^2$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ аст;

3) агар $a > 0$ бошад, функцияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \geq 0$ будан, меафзояд ва ҳангоми $x \leq 0$ будан, кам мешавад;

агар $a < 0$ бошад, функцияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \geq 0$ будан, кам мешавад ва ҳангоми $x \leq 0$ будан, меафзояд.



Ҳамаи ин хосиятҳоро аз график ба таври аёнӣ дидан мумкин аст (расмҳои 7–8).

Машқҳо

17. Дар қоғази миллиметрӣ графики функсияи $y = 3x^2$ -ро созед.

Аз рӯи график:

- 1) қиматҳои тақрибии y -ро ҳангоми $x = -2, 8; -1, 2; 1, 5; 2, 5$ будан ёбед;
- 2) қиматҳои тақрибии x -ро ҳангоми $y = 9; 6; 2; 8; 1, 3$ будан, ёбед.

18. (Шифоҳӣ). Самти шохаҳои параболаро муайян кунед:

- 1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Графики функсияҳои зеринро дар як ҳамвории координатӣ созед:

- 1) $y = x^2$ ва $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ ва $y = -3x^2$;
- 3) $y = 3x^2$ ва $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ ва $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Графикҳоро истифода карда, ошкор намоед, ки кадоме аз ии функсияҳо дар фосилаи $x \geq 0$ меафзоянд.

20. Координатаҳои нуқтаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед:

- 1) $y = 2x^2$ ва $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ ва $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Оё функцияи

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

дар фосилаи $x \leq 0$ камшаванда аст?

22. Муайян намоед, ки функцияи $y = -2x^2$:

1) дар порчаи $[-4; -2]$; 3) дар интервали $(3; 5)$;

2) дар порчаи $[-5; 0]$; 4) дар интервали $(-3; 2)$

афзуншаванда ё камшаванда аст.

23. Масофаи ҳангоми ҳаракати собитшитоиб тайкардаи ҷисм аз рӯи

формулаи $s = \frac{at^2}{2}$ ҳисоб карда мешавад, ки ин ҷо s — масофа ба ҳисоби метр; a — шитоиб ба ҳисоби м/с^2 ; t — вақт ба ҳисоби сония. Агар ҷисм дар 8 с масофаи баробари 96 м бударо тай карда бошад, шитоиб a -ро ёбед.

§ 4. ФУНКСИЯИ $y = ax^2 + bx + c$

Масъалаи 1. Графики функцияи $y = x^2 - 2x + 3$ -ро созед ва онро бо графики функцияи $y = x^2$ муқоиса намоед.

△ Чадвали қиматҳои функцияи $y = x^2 - 2x + 3$ -ро тартиб медиҳем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

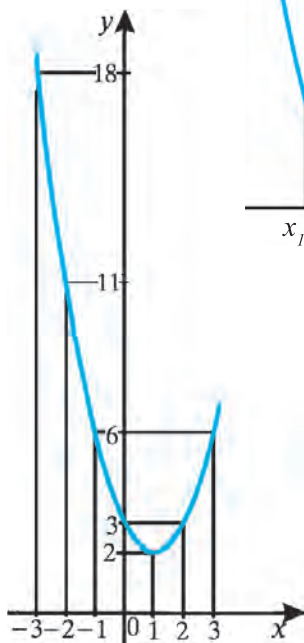
Нуқтаҳои ёфташударо месозем ва аз онҳо хати қави раванро мегузаронем (расми 9).

Барои муқоиса кардани графикҳо усули ҷудо кардани квадрати пурраро истифода намуда, формулаи $y = x^2 - 2x + 3$ -ро табдил медиҳем.

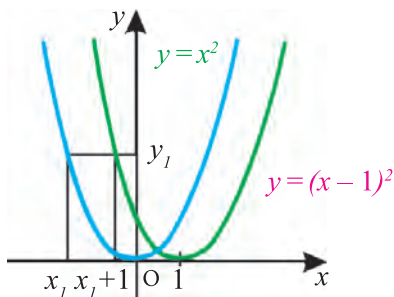
$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Аввал графики функцияҳои $y = x^2$ ва $y = (x - 1)^2$ -ро муқоиса менамоем.

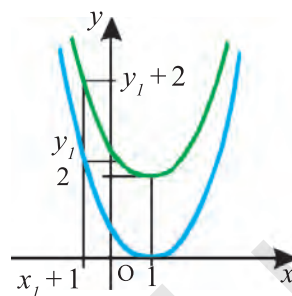
Мебинем, ки агар $(x_1; y_1)$ нуқтаи параболai $y = x^2$, яъне $y_1 = x_1^2$ бошад, нуқтаи $(x_1 + 1; y)$ ба графики функцияи $y = (x - 1)^2$ тааллуқ дорад, чунки $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$ аст. Пас, графики функцияи $y = (x - 1)^2$ параболаест, ки аз параболai $y = x^2$ дар натиҷаи ба тарафи рост ба як воҳид кӯчондан ҳосил мешавад (расми 10).



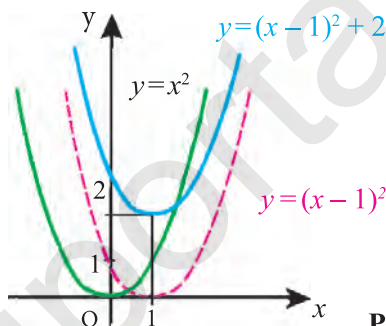
Расми 9.



Расми 10.



Расми 11.



Расми 12.

Акнун графики функцияҳои $y = (x-1)^2$ ва $y = (x-1)^2 + 2$ -ро муқоиса менамоем. Дар ҳар як қимати x қимати функцияи $y = (x-1)^2 + 2$ аз қимати функцияи $y = (x-1)^2$ ду воҳид калонтар аст. Пас, графики функцияи $y = (x-1)^2 + 2$ параболаест, ки он дар натиҷаи параболаи $y = (x-1)^2$ -ро ду воҳид ба боло кӯчондан пайдо шудааст (расми 11).

Пас, графики функцияи $y = x^2 - 2x + 3$ параболаест, ки он аз параболаи $y = x^2$ дар натиҷаи як воҳид ба рост ва ду воҳид ба боло кӯчондан ҳосил мешавад (расми 12). Тири симметрияи параболаи $y = x^2 - 2x + 3$ хати ростии ба тири ординатаҳо параллел ва аз қуллаи парабола - нуқтаи (1;2) гузаранда мебошад. ▲

Графики функцияи $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ параболаест, ки дар натиҷаи кӯчондани параболаи $y = ax^2$ ҳосил мешавад:

агар $x_0 > 0$ бошад, қад-қадии тири абсиссаҳо ба бузургии x_0 ба тарафи рост, агар $x_0 < 0$ бошад, ба бузургии $|x_0|$ ба тарафи чап кӯчонида;

агар $y_0 > 0$ бошад, қад-қадии тири ординатаҳо ба бузургии y_0 ба боло, агар $y_0 < 0$ бошад, ба бузургии $|y_0|$ ба поён кӯчонида.

Функсияи квадратии дилхоҳи $y = ax^2 + bx + c$ -ро ба воситаи чудо кардани квадрати пурра ба намуди

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

яъне, ба намуди $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ навиштан мумкин аст, ки ин ҷо

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Ҳамин тарик, графики функсия, $y = ax^2 + bx + c$ параболаест, ки дар натиҷаи қад-қад тирҳои координатаҳо кӯчондани параболаи $y = ax^2$ ҳосил мешавад. Баробарии $y = ax^2 + bx + c$ -ро муодилаи парабола меноманд. Координатаҳои қуллаи (x_0, y_0) параболаи $y = ax^2 + bx + c$ -ро аз рӯи формулаҳои

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

ёфтан мумкин аст. Тири симметрии параболаи $y = ax^2 + bx + c$ хати ростест, ки ба тири ординатаҳо параллел буда, аз қуллаи парабола мегузарад.

Агар $a > 0$ бошад, шохаҳои параболаи $y = ax^2 + bx + c$ ба боло равона шудаанд, вале агар $a < 0$ бошад — ба поён.

Масъалаи 2. Координатаҳои қуллаи параболаи $y = 2x^2 - x - 3$ -ро ёбед.

△ Абсиссаи қуллаи парабола:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \text{ мебошад.}$$

Ординатаи қуллаи парабола

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8} \text{ мебошад.}$$

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{4}; -3\frac{1}{8} \right)$. ▲

Масъалаи 3. Муодилаи параболаеро навишед, ки аз нуқтаи $(-2; 5)$ мегузарад ва нуқтаи $(-1; 2)$ қуллааш мебошад.

△ Азбаски қуллаи парабола нуқтаи $(-1; 2)$ мебошад, бинобар ин муодилаи параболаро ба намуди $y = a(x + 1)^2 + 2$ навиштан мумкин аст.

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Мувофиқи шарт нуқтаи $(-2; 5)$ ба парабола тааллуқ дорад ва пас,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

мебошад, ки аз ин ҷо $a = 3$ -ро ҳосил мекунем.

Хулоса, парабола бо муодилаи

$$y = 3(x+1)^2+2 \text{ ва ё } y = 3x^2+6x + 5$$

муайян карда мешавад. ▲

Машқҳо

Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед (24–26):

24. (Шифохӣ.)

1) $y = (x - 3)^2 - 2$;

2) $y = (x + 4)^2 + 3$;

3) $y = 5(x+2)^2-7$;

4) $y = -4(x-1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2+4x+1$;

2) $y = x^2-6x-7$;

3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;

4) $y = -3x^2+18x-7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$;

2) $y = -x^2 - 5$;

3) $y = 3x^2 + 2x$;

4) $y = -4x^2 + x$;

5) $y = -3x^2 + x$;

6) $y = 2x^2 - x$.

27. Дар тири Ox нуқтаеро ёбед, ки аз он тири симметрияи парабола мегузарад:

1) $y = x^2 + 3$;

2) $y = (x + 2)^2$;

3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$;

4) $y = (x - 2)^2 + 2$;

5) $y = x^2 + x + 1$;

6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. Оё тири симметрияи параболаи $y = x^2 - 10x$ аз нуқтаҳои

1) $(5; 10)$; 2) $(3; -8)$; 3) $(5; 0)$; 4) $(-5; 1)$ мегузарад?

29. Координатаҳои нуқтаҳои буриши парабола ва тирҳои координатаҳоро ёбед.

1) $y = x^2 - 3x + 2$;

2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;

3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;

4) $y = 3x^2 - 4x$

30. Маълум аст, ки парабола аз нуқтаи $(-1; 6)$ мегузарад ва нуқтаи $(1; 2)$ қуллаи он мебошад. Муодилаи ин параболаро нависед.

31. (Шифохӣ.) Оё нуқтаи $(1; -6)$ ба параболаи $y = -3x^2 + 4x - 7$ тааллуқ дорад? $(1; 8)$ нуқта-чӣ?
32. Агар нуқтаи $(-1; 2)$ ба параболаи: 1) $y = kx^2 + 3x - 4$; 2) $y = -2x^2 + kx - 6$ таалуқ дошта бошад, қимати k -ро ёбед.
33. Бо ёрии гардаи (шаблони) параболаи $y = x^2$ график созед.
 1) $y = (x + 2)^2$; 2) $y = (x - 3)^2$;
 3) $y = x^2 - 2$; 4) $y = -x^2 + 1$;
 5) $y = -(x - 1)^2 - 3$; 6) $y = (x + 2)^2 + 1$.
- 34.. Муодилаи параболаи аз параболаи $y = 2x^2$ ҳосилшударо нависед:
 1) ба воситаи тири Ox 3 воҳид ба тарафи рост кӯчонидан;
 2) ба воситаи тири Oy 4 воҳид ба боло кӯчонидан;
 3) ба воситаи тири Ox 2 воҳид ба тарафи чап ва баъд қад-қади тири Oy 1 воҳид ба поён кӯчонидан;
 4) ба воситаи тири Ox 1,5 воҳид ба тарафи рост ва баъд қад-қади тири Oy 3,5 воҳид ба боло кӯчонидан.

§ 5. СОХТАНИ ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

Масъалаи 1. Графики функцияи $y = x^2 - 4x + 3$ -ро созед.

△ 1. Координатаҳои қуллаи параболаро ҳисоб менамоем:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2,$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Нуқтаи $(2; -1)$ -ро месозем.

2. Аз нуқтаи $(2; -1)$ хати рост ба тири ординатаҳо параллел бударо мегузаронем, ки он тири симметрияи парабола мебошад (расми 13, а)

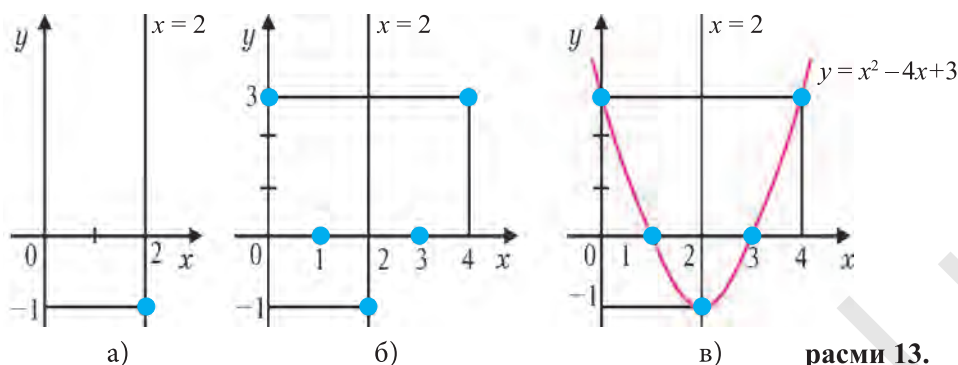
3. Муодилаи

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

-ро ҳал намуда, сифрҳои функцияро меёбем: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Нуқтаҳои $(1; 0)$ ва $(3; 0)$ -ро месозем (расми 13, б).

4. Дар тири Ox ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи $x = 2$ симметрӣ буда, масалан нуқтаҳои $x = 0$ ва $x = 4$ -ро мегирем. Қимати функцияро дар ин нуқтаҳо меёбем: $y(0) = y(4) = 3$.

Нуқтаҳои $(0; 3)$ ва $(4; 3)$ -ро месозем (расми 13, б).



расми 13.

5. Аз нуқтаҳои сохташуда параболаро мегузaronем (расми 13, в). ▲

Графики функцияи квадратии дилхоҳи $y = ax^2 + bx + c$ -ро аз рӯи худи ҳамин схема сохтан мумкин аст:

1. Аз рӯи формулаҳои $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ киматҳои x_0 , ва y_0 -ро ҳисоб намуда, қуллай параболаро (x_0, y_0) сохта мешавад.

2. Аз қуллай параболаро хати рост ба тири ординатаҳо параллел сохта мешавад, ки он тири симметрияи параболаро мебошад.

3. Сифрҳои функция (агар мавҷуд бошанд) ёфта шуда, дар тири абсиссаҳо нуқтаҳои мувофиқи параболаро сохта мешаванд.

4. Ду нуқтаи дилхоҳи параболаро, ки нисбат ба тири он симметрӣ мебошанд, сохта мешаванд. Барои ин дар тири Ox ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи x_0 ($x_0 \neq 0$) симметрӣ гирифта шуда, киматҳои мувофиқи функцияи ҳисоб карда мешаванд (ин киматҳо баробаранд). Масалан, нуқтаҳои параболаро дар абсиссаҳои $x = 0$ ва $x = 2x_0$ -ро сохтан мумкин аст (ординатаҳои ин нуқтаҳо ба c баробаранд).

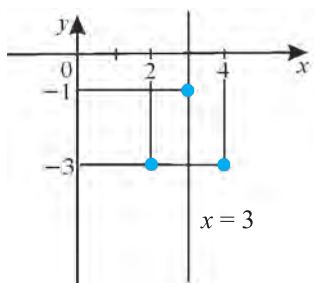
5. Аз нуқтаҳои сохташуда параболаро гузаронида мешавад. Қайд менамоем, ки барои дақиқтар сохтани график боз якчанд нуқтаи параболаро сохтан муфид аст.

Масъалаи 2. Графики функцияи $y = -2x^2 + 12x - 19$ -ро созед.

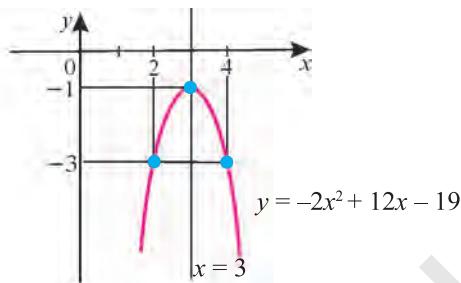
▲ 1. Координатаҳои қуллай параболаро ҳисоб менамоем:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, \quad y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Нуқтаи $(3; -1)$ -ро, ки қуллай параболаро мебошад, месозем (расми 14).



Расми 14.



Расми 15.

2. Аз нуқтаи $(3; -1)$ қуллаи симметрияи параболаро мегузаронем (расми 14).

3. Муодилаи $-2x^2 + 12x - 19 = 0$ ҳал намуда, боварӣ ҳосил мекунем, ки решаҳои ҳақиқӣ надорад ва бинобар ин парабола тири Ox -ро бурида намегузарад.

4. Дар тири Ox ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи $x = 3$ симметрӣ буда, масалан нуқтаҳои $x = 2$ ва $x = 4$ -ро мегирем. Қимати функсияро дар ин нуқтаҳо меёбем:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

Нуқтаҳои $(2; -3)$ ва $(4; -3)$ -ро месозем (расми 14).

5. Аз нуқтаҳои сохташуда парабола мегузаронем (расми 15).

Масъалаи 3. Графики функсияи $y = -x^2 + x + 6$ -ро созед ва муайян кунед, ки ин функсия дорои кадом хосиятҳо аст.

△ Барои сохтани график сифрҳои функсияро меёбем: $-x^2 + x + 6 = 0$, ки аз ин ҷо $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Координатаҳои қуллаи параболаро ин тавр ёфтан мумкин аст :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

Азбаски $a = -1 < 0$ аст, бинобар ин шохаҳои парабола ба поён равона шудаанд.

Боз якчанд нуқтаи параболаро меёбем: $y(-1) = 4$, $y(0) = 6$, $y(1) = 6$, $y(2) = 4$. Параболаро месозем (расми 16).

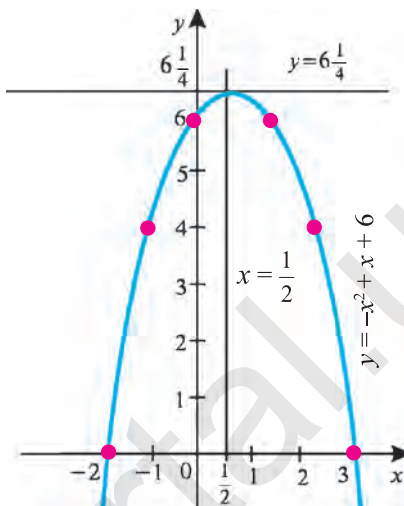
Бо ёрии график хосиятҳои зерини функсияи $y = -x^2 + x + 6$ -ро ҳосил мекунем:

1) дар қиматҳои дилхоҳи x қиматҳои функсия хурдтар аз $6\frac{1}{4}$ ё баробари он мебошад.

2) ҳангоми $-2 < x < 3$ будан, қиматҳои функсия мусбатанд, ҳангоми $x < -2$ ва $x > 3$ будан, манфӣанд, ҳангоми $x = -2$ ва $x = 3$ будан, ба сифр баробаранд;

3) дар фосилаи $x \leq \frac{1}{2}$ функсия меафзояд, дар фосилаи $x \geq \frac{1}{2}$ кам мешавад;

4) ҳангоми $x = \frac{1}{2}$ будан, функсия қимати калонтарини ба $6\frac{1}{4}$ баробар бударо мегирад;



Расми 16.

5) графики функсия нисбат ба хати рости $x = \frac{1}{2}$ симметрӣ аст. ▲

Қайд менамоем, ки функсияи $y = ax^2 + bx + c$ қимати калонтарин ё хурдтаринро дар нуқтаи $x_0 = -\frac{b}{2a}$ мегирад; нуқтаи x_0 абсиссаи қуллаи парабол мебошад.

Қимати функсияро дар нуқтаи x_0 аз рӯи формулаи $y_0 = y(x_0)$ ёфтан мумкин аст. Агар $a > 0$ бошад, функсия дорои қимати хурдтарин мебошад, вале агар $a < 0$ бошад, функсия дорои қимати калонтарин мебошад.

Масалан, функсияи $y = x^2 - 4x + 3$ ҳангоми $x = 2$ будан, қимати хурдтаринро дорад, ки он ба -1 баробар аст (расми 13, в); функсияи $y = -2x^2 + 12x - 9$ ҳангоми $x = 3$ будан, қимати калонтаринро мегирад, ки он ба -1 баробар аст (расми 15).

Масъалаи 4. Суммаи ду адади мусбат ба 6 баробар аст. Агар суммаи квадратҳои онҳо хурдтарин бошад, ин ададҳо ёбед. Қимати хурдтарини суммаи квадратҳои ин ададҳо ба чӣ баробар аст;

▲ Адади якумро бо ҳарфи x ишорат менамоем, он гоҳ адади дуюм ба $6-x$ баробар мешавад, суммаи квадратҳои онҳо бошад ба $x^2 + (6-x)^2$ баробар мешавад. Ин ифодаро табдил медиҳем:

$$x^2 + (6-x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Масъала ба ёфтани қимати хурдгарини функсияи $y = 2x^2 - 12x + 36$ оварда шуд. Координатаҳои қуллаҳои ин параболаро меёбем.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \quad y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Хулоса, ҳангоми $x = 3$ будан, функсия қимати хурдтаринро мегирад, ки он ба 18 баробар аст.

Ҳамин тариқ, адади якум ба 3, адади дуум низ ба $6-3=3$ баробар аст. Қимати суммаи квадратҳои ин ададҳо ба 18 баробар аст ▲

Машқҳо

35. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;

2) $y = x^2 + 3x + 5$;

3) $y = -x^2 - 2x + 5$;

4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Координатаҳои нуқтаҳои буриши парабол ва тирҳои координатаҳоро ёбед:

1) $y = x^2 - 3x + 5$;

2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;

3) $y = -2x^2 + 6$;

4) $y = 7x^2 + 14$.

Графики функсияро созед ва аз рӯи график: 1) қиматҳои x -ро ёбед, ки дар онҳо қиматҳои функсия мусбатанд; манфӣанд; 2) фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣи функсияро ёбед; 3) муайян намоед, ки дар кадом қимати x функсия қимати калонтарин ё хурдтаринро мегирад ва онро ёбед (**37–38**):

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$;

2) $y = -x^2 + x + 2$;

3) $y = -x^2 + 6x - 9$;

4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$;

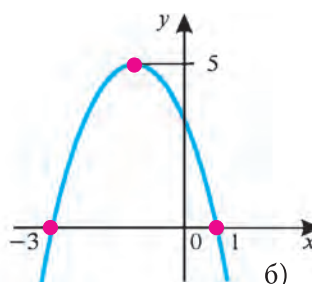
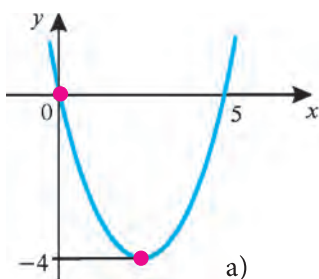
2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

3) $y = -2x^2 + 3x + 2$;

4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Аз рӯи графики додашудаи функсияи квадратӣ (расми 17) хосиятҳои онро муайян намоед.

40. Адади 15-ро ба намуди суммаи ду адад чунон ифода намоед, ки ҳосили зарби онҳо калонтарин гардад.



Расми 17.

41. Суммаи ду адад ба 10 баробар аст. Агар суммаи кубҳои онҳо хурдтарин бошад, ин ададҳоро ёбед.
42. Майдони шаклан росткунҷаи ба девори хона ҳамчаворро аз се тараф бо панҷараи 12 м ихота кардан талаб карда мешавад. Андозаҳои майдон чӣ гуна шавад, масоҳати он аз ҳама калон мешавад?
43. Дар секунҷа суммаи асос ва баландии ба ин асос фурувардашуда ба 14 баробар аст. Оё чунин секунҷа дорои масоҳати ба 25 см^2 баробар шуда метавонад?
44. Графикро насохта, муайян намоед, ки дар кадом қимати x функсия қимати калонтарин (хурдтарин) дорад; ин қиматро ёбед:
- 1) $y = x^2 - 6x + 13$;
 - 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
 - 3) $y = -x^2 + 4x + 3$;
 - 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.
45. Аломати коэффисиентҳои муодилаи $y = ax^2 + bx + c$ -ро муайян намоед, агар шохаҳои парабола ба:
- 1) боло равон шуда, абсиссаи қулла манфӣ ва ординатааш мусбат бошад;
 - 2) поён равон шуда, абсисса ва ординатаи қуллааш манфӣ бошанд.
46. Аз баландии 5 м аз камон бо суръати ибтидоии 50 м/с ба боло ба таври вертикалӣ тир холӣ карда шуд. Баъд аз t сония баландии тири баромада бо ҳисоби метр аз рӯи формулаи

$h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$ ҳисоб карда мешавад, ки ин ҷои $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Баъд аз чанд сония тир: 1) ба баландии калонтарин мебарояд ва он ба чӣ баробар аст? 2) ба замии меафтад?

Масъалаи 1. Тарафҳои росткунча ба 2 дм ва 3 дм баробаранд. Ҳар як тарафҳои онро ба десиметрҳои микдорашон баробар зиёд намуданд, ки дар натиҷа масоҳати росткунча аз 12 дм^2 зиёд шуд. Ҳар як тараф чӣ тавр тағйир ёфт;

△ Бигзор ҳар як тарафи росткунча x десиметрӣ зиёд карда шуд.

Он гоҳ тарафҳои росткунҷаи нав $(2 + x)$ ва $(3 + x)$ десиметр, масоҳати он $(2 + x)(3 + x)$ десиметри квадратӣ мешаванд. Мувофиқи шартӣ масъала $(2 + x)(3 + x) > 12$ мешавад, ки аз ин ҷо $x^2 + 5x + 6 > 12$ ва ё $x^2 + 5x - 6 > 0$ ҳосил мешавад.

Қисми чапи ин нобаробарию ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Азбаски мувофиқи шартӣ масъала $x > 0$ аст, бинобар ин $x + 6 > 0$ мебошад.

Ҳар ду қисми нобаробарию ба адади мусбати $x + 6$ тақсим намуда, $x - 1 > 0$, яъне, $x > 1$ -ро ҳосил намудем.

Ҷавоб: Ҳар як тарафи росткунҷаро ба аз 1 десиметр зиёд дароз намуданд. ▲

Дар нобаробарии $x^2 + 5x - 6 > 0$ бо ҳарфи x адади номаълум ишора карда шудааст. Ин мисоли нобаробарии квадратӣ мебошад.



Агар дар қисми чапи нобаробарӣ сеаъзогии квадратӣ ва дар қисми росташ сифр истад, чунин нобаробарию нобаробарии квадратӣ меноманд.

Масалан, нобаробариҳои,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \quad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

квадратӣ мебошанд.

Хотиррасон мекунем, ки ҳалли нобаробарии якномаълума гуфта, ҳамон қимати номаълумро меноманд, ки дар он нобаробарӣ ба баробарии ададии дуруст табдил меёбад.

Ҳал кардани нобаробарӣ – ин ёфтани тамоми ҳалҳои он ё муқаррар кардани мавҷуд набудани ҳалҳо мебошад.

Масъалаи 2. Нобаробарию ҳал намоед:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ Муодилаи квадратии $x^2 - 5x + 6 = 0$ ду решаи гуногун дорад:
 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Пас, сеаъзогии квадратии $x^2 - 5x + 6$ -ро ба зарбкунандаҳо чудо кардан мумкин аст:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Бинобар ин, нобаробарии мазкурро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

Агар зарбкунандаҳо аломатҳои якхела дошта бошанд, ҳосили зарби ду зарбкунандаҳо мусбат аст.

1) Ҳолатеро мебинем, ки ҳарду зарбкунандаҳо мусбатанд, яъне
 $x - 2 > 0$ ва $x - 3 > 0$.

Ин ду нобаробарӣ системаи $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$ -ро ташкил медиҳанд. Ин

системаро ҳал намуда, $\begin{cases} x > 2, \\ x > 3 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки аз ин ҷо
 $x > 3$ аст.

Пас, ҳамаи ададҳои $x > 3$ ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$ мебошанд

2) Акнун ҳолати маиғӣ будани ҳар ду зарбкунандаро дида мебароем, яъне $x - 2 < 0$ ва $x - 3 < 0$.

Ин ду нобаробарӣ системаи: $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$ -ро ташкил медиҳанд

Системаро ҳал намуда, $\begin{cases} x < 2, \\ x < 3 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки аз ии ҷо $x < 2$

аст. Пас, ҳамаи ададҳои $x < 2$ низ ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$ мебошанд.

Ҳамин тариқ, ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$, пас нобаробарии аввалаи $x^2 - 5x + 6 > 0$ низ ададҳои $x < 2$ ва ададҳои $x > 3$ мебошанд.

Ҷавоб : $x < 2$, $x > 3$. ▲



Умуман, агар муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ ду решаи гуногун дошта бошад, барои ҳалли нобаробариҳои квадратии $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c < 0$ қисми ҷаби нобаробарии квадратиро ба зарбкунандаҳо чудо карда, ба ҳалли системаи нобаробариҳои дараҷаи якум овардан мумкин аст.

Масъалаи 3. Нобаробарио ҳал намоед: $-3x^2 - 5x + 2 > 0$

△ Барои кулайтар гузаронидани ҳисоб нобаробарии мазкурро ба намуди нобаробарии квадратии дорои коэффисиенти якуми мусбат ифода менамоем. Барои ин ҳар ду қисми онро ба -1 зарб мезанем:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

Решаҳои муодилаи $3x^2 + 5x - 2 = 0$ -ро меёбем:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Сеаъзогии квадратио ба зарбкунандаҳо ҷудо карда, ҳосил намудем:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) < 0.$$

Аз ин ҷо ду системаро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3} > 0, \\ x + 2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3} < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Системаи якумро ба намуди:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x < -2, \end{cases}$$

навиштан мумкин аст, ки аз ин ҷо ҳал надоштани он аён аст.

Системаи дуюмро ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$$\text{ки аз ин ҷо } -2 < x < \frac{1}{3}.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки ҳалҳои нобаробарии $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) < 0$ яъне нобаробарии $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ ҳамаи ададҳои фосилаи $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$ мебошад.

Ҷ а в о б : $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

Машиқҳо

47. (Шифохӣ.) Нишон диҳед, ки кадоме аз нобаробариҳои зерин квадратӣ мебошанд:

- 1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \leq 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \leq 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Нобаробариҳоро ба намуди нобаробариҳои квадратӣ оред:

- 1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Шифохӣ.) Кадоме аз ададҳои 0; -1; 2 ҳалҳои нобаробарии зерин мебошанд:

- 1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3,5x + 2 \geq 0$;
3) $x^2 - x - 2 \leq 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

Нобаробариҳоро ҳал намоед (50—52):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$;
3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

53. Нобаробариҳоро ҳал намоед:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \leq 0$;

3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Графики функсияро созед. Аз рӯи график чунин қиматҳои x -ро ёбед, ки дар онҳо функсия қиматҳои мусбат; манфӣ; баробари сифрро қабул мекунад.

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1,5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. Маълум аст, ки ададҳои x_1 ва x_2 (ин ҷо $x_1 < x_2$ аст) сифрҳои функсияи $y = ax^2 + bx + c$ мебошанд. Иббот намоед, ки агар адади дар байни x_1 ва x_2 воқеъ буда, яъне $x_1 < x_0 < x_2$ бошад, нобаробарии $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ ҷой дорад.

§ 7. БО ЁРИИ ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ ҲАЛ НАМУДАНИ НОБАРОБАРИИ КВАДРАТӢ

Хотиррасон менамоем, ки функсияи квадратӣ ба воситаи формулаи $y = ax^2 + bx + c$ (ин ҷо $a \neq 0$) аст, муайян карда мешавад.

Бинобар ин, ҳал кардани нобаробарии квадратӣ бо ёфтани сифрҳои функсияи квадратӣ ба фосилаҳое, ки дар онҳо функсияи квадратӣ қиматҳои мусбат ё манфиро мегирад, оварда мешавад.

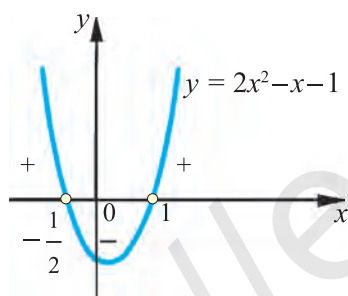
Масъалаи 1. Нобаробарии:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0. \text{ -ро бо ёрии график ҳал намоед.}$$

△ Графики функсияи квадратии $y = 2x^2 - x - 1$ параболаест, ки шохаҳои ба боло равона шудаанд.

Нуктаҳои буриши ин парабола ва тири Ox -ро меёбем. Барои ин муодилаи квадратии $y = 2x^2 - x - 1 = 0$ -ро ҳал менамоем. Решаҳои ин муодила

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$



Расми 18.

мебошанд.

Ҷавоб : $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

Графики ин функцияро ҳангоми ҳал кардани нобаробариҳои дигар, ки аз нобаробарии додашуда танҳо бо аломати нобаробарӣ фарқ мекунанд, низ истифода кардан мумкин аст.

1) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 < 0$ ададҳои фосилаи $-\frac{1}{2} < x < 1$, яъне $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ мебошанд.

2) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 > 0$ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x < -\frac{1}{2}$ ва $x > 1$ мебошанд.

3) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 \geq 0$ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x \leq -\frac{1}{2}$ ва $x \geq 1$ мебошанд.

Масъалаи 2. Нобаробарии:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

△ Ангори графики функсияи $y = 4x^2 + 4x + 1 = 0$ -ро месозем.

Шохаҳои ин парабола ба боло равон шудаанд. Муодилаи $4x^2 + 4x + 1 = 0$ дорои як решаи $x = -\frac{1}{2}$ мебошад ва аз ҳамин сабаб парабола дар нуқтаи $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

ба тири

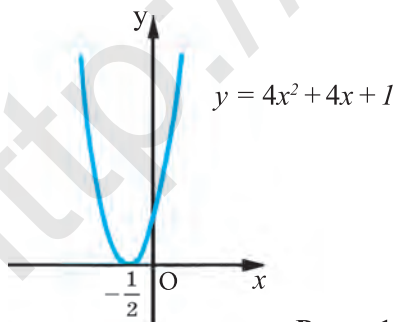
Ох мерасад. Графики ин функсия дар расми 19 тасвир ёфтааст. Барои ҳал кардани ин нобаробарӣ муқаррар кардан лозим аст, ки дар кадом қиматҳои x қиматҳои функсия мусбатанд.

Ҳамин тариқ, нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 > 0$ -ро ҳамон қиматҳои x қонғ менамоянд, ки дар онҳо нуқтаҳои парабола болои тири Ох воқеъ мебошанд. Аз расми 19 аён аст, ки чунин қиматҳо аз тамоми ададҳои ҳақиқии x , ғайр аз $x = -0,5$ иборатанд.

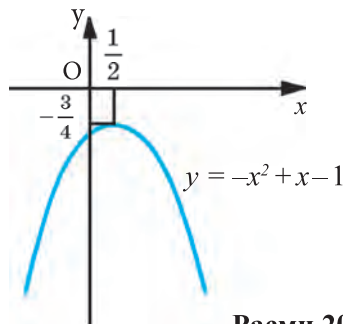
Ҷавоб: $x \neq -0,5$. ▲

Аз расми 19 инчунин аён аст, ки

1) ҳалҳои нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошанд;



Расми 19.



Расми 20.

2) нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ дорои як ҳалли $x = -\frac{1}{2}$ аст;

3) нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 < 0$ ҳал надорад.

Агар пешакӣ $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ буданаш ба эътибор гирифта шавад, ин нобаробариро шифохӣ ҳал кардан мумкин аст.

Масъалаи 3. Нобаробарии $-x^2 + x - 1 < 0$ -ро ҳал намоед.

△ Ангораи графики функцияи $y = -x^2 + x - 1$ -ро месозем. Шохаҳои ин парабола ба поёи равона шудаанд. Муодилаи $-x^2 + x - 1 = 0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад, бинобар ин парабола тири Ox -ро намебурад. Пас, ин парабола поёнтари тири Ox воқеъ аст (расми 20). Ин чунин маъно дорад, ки қиматҳои функцияи квадратӣ дар тамоми қиматҳои x манфӣ мебошанд, яъне нобаробарии $-x^2 + x - 1 < 0$ дар тамоми қиматҳои ҳақиқии x ҷой дорад. ▲

Аз расми 20 инчунин аён аст, ки тамоми қиматҳои ҳақиқии x ҳалҳои нобаробарии $-x^2 + x - 1 \leq 0$ мебошанд, вале нобаробариҳои $-x^2 + x - 1 > 0$ ва $x^2 + x - 1 \geq 0$ ҳал надоранд.

Ҳамин тавр, барои бо ёрии график ҳал кардани нобаробарии квадратӣ зарур аст, ки:

1) аз рӯи аломати коэффисиенти якуми функцияи квадратӣ самти шохаҳои парабола муайян карда шавад;

2) решаҳои ҳақиқии муодилаи квадратии мувофиқ ёфта шавад ё муқаррар карда шавад, ки онҳо вучуд надоранд;

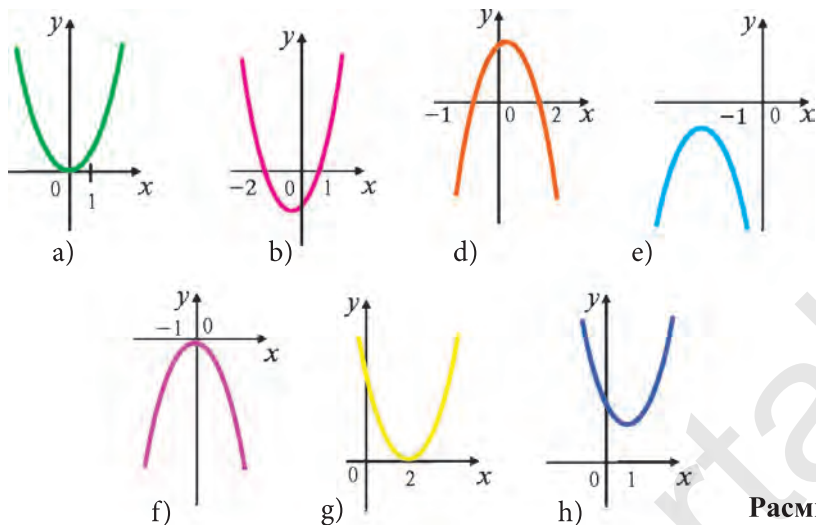
3) нуктаҳои буриш ё расиш бо тири Ox -ро агар онҳо вучуд дошта бошанд, истифода бурда, ангораи графики функцияи квадратӣ сохта шавад;

4) аз рӯи график фосилаҳое, ки дар онҳо қиматҳои матлуби функция воқеъ мебошанд, муайян карда шаванд.

Машқҳо

56. Графики функцияи $y = x^2 + x - 6$ -ро созед. Аз рӯи график қиматҳои x -ро ёбед, ки дар онҳо функция: қиматҳои мусбатро мегирад; қиматҳои манфиро мегирад.

57. (Шифохӣ.) Графики функцияи $y = ax^2 + bx + c$ -ро истифода намуда (расми 21) нишон диҳед, ки дар кадом қиматҳои x функция қиматҳои мусбат; манфӣ; баробари сифро мегирад.



Расми 21.

Нобаробариҳои квадратиро ҳал намоед : (58–62):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
 3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.
59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
 3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$;
 3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.
61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
 3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
 5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.
62. 1) $5 - x^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
 3) $-2,1x^2 + 10,5x < 0$; 4) $-3,6x^2 - 7,2x < 0$.

63. (Шифохӣ.) Нобаробариҳо ҳал кунед:

- 1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
 3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
 5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

(Шифохӣ.) Нобаробариҳои квадратӣ ҳал кунед: (64–66):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
 3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
 5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$; 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
 3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
 5) $2x^2 - x \geq 0$; 6) $3x^2 + x \leq 0$.
66. 1) $x(x+1) < 2(1-2x-x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
 3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x-1) < 3(x+1)$.
67. Тамоми қиматҳои x -ро ёбед, ки дар онҳо функсия қиматҳои аз сифр калонтар набударо мегирад:
 1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
 3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.
68. 1) Нишон диҳед, ки ҳангоми $q > 1$ будан, ҳамаи қиматҳои ҳақиқии x ҳалҳои нобаробарии $x^2 - 2x + q > 0$ мебошанд;
 2) нишон диҳед, ки ҳангоми $q > 1$ будан, нобаробарии $x^2 + 2x + q \leq 0$ ҳалҳои ҳақиқӣ надорад.
69. Тамоми ҳалҳои r -ро ёбед, ки дар онҳо нобаробарии $x^2 - (2+r)x + 4 > 0$ дар ҳамаи қиматҳои ҳақиқии x ҷой дорад.

§ 8. УСУЛИ ИНТЕРВАЛҲО

Ҳангоми ҳалли нобаробариҳо бисёр вақт усули интервалҳо истифода бурда мешавад. Ин усулро ба воситаи мисолҳо мефаҳмонем.

Масъала1. Муайян намоед, ки дар кадом қиматҳои x сеъзогоии $x^2 - 4x + 3$ қиматҳои мусбат ва дар кадомашон қиматҳои манфӣ қабул мекунад.

△ Решаҳои муодилаи $x^2 - 4x + 3 = 0$ -ро меёбем.

$$x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Бинобар ин, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

Нуктаҳои $x = 1$ ва $x = 3$ (расми 22) тири ададиро ба се фосила ҷудо мекунанд:
 $x < 1$; $1 < x < 3$; $x > 3$.

Чун фосилаҳои $1 < x < 3$, фосилаҳои $x < 1$, $x > 3$ низ интервалҳо номида мешаванд.



Расми 22.

Қад-қадӣ тири ададӣ аз рост ба чап ҳаракат намуда, мушоҳида мекунем, ки дар интервали $x > 3$ сеъззогии $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ қиматҳои мусбатро мегиранд, чунки дар ин ҳолат ҳар ду зарбкунандаи $x - 1$ ва $x - 3$ мусбат мебошанд.

Дар интервали оянда, яъне $1 < x < 3$ ин сеъззогӣ қиматҳои манфиро мегирад ва ҳамин тариқ, ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 3$ аломаташро иваз мекунад. Ин аз он сабаб рӯй медиҳад, ки дар ҳосили зарби

$(x - 1)(x - 3)$ ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 3$ зарбкунандаи якум $x - 1$ аломаташро иваз намекунад, вале зарбкунандаи дуюм $x - 3$ аломаташро иваз мекунад.

Ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 1$ сеъззогӣ боз аломаташро иваз мекунад, чунки дар ҳосили зарби $(x - 1)(x - 3)$ зарбкунандаи якум $x - 1$ аломаташро иваз мекунад, вале зарбкунандаи дуюм $x - 3$ аломаташро иваз намекунад.

Пас, ҳаёми аз рӯи тири ададӣ аз рост ба чап аз як интервал ба интервали ҳамсоя ҳаракат кардан, аломатҳои ҳосили зарби $(x - 1)(x - 3)$ иваз мешаванд.

Ҳамин тавр, масъалаи оид ба аломати сеъззогии квадратии $x^2 - 4x + 3$ -ро бо усули зерин ҳал кардаи мумкин аст.

Дар тири ададӣ решаҳои муодилаи $x^2 - 4x + 3 = 0$ яъне, нуқтаҳои $x = 1$, $x = 3$ -ро қайд мекунем. Онҳо тири ададиро ба се интервал ҷудо мекунанд (расми 22). Дар интервали $x > 3$ мусбат будани қиматҳои сеъззогии

$x^2 - 4x + 3$ -ро ба назар гирифта, дар интервалҳои дигар аломатҳои онро аз рӯи тартиби ивазшавӣ мегузорем (расми 23). Аз расми 23 аён аст, ки ҳангоми $x < 1$ ва $x > 3$ будан, $x^2 - 4x + 3 > 0$ аст ва ҳангоми $1 < x < 3$ будан, $x^2 - 4x + 3 < 0$ аст. ▲



Расми 23.

Тарзи муоинашударо усули интервалҳо меноманд. Ии усул ҳангоми ҳал кардани нобаробариҳои квадратӣ ва баъзе нобаробариҳои дигар истифода бурда мешавад.

Масалан, масъалаи 1-ро ҳал карда, мо амалан бо усули интервалҳо нобаробариҳои $x^2 - 4x + 3 > 0$ ва $x^2 - 4x + 3 < 0$ -ро ҳал намудем.

Масъалаи 2. Нобаробарии $x^3 - x < 0$ -ро ҳал намоед.

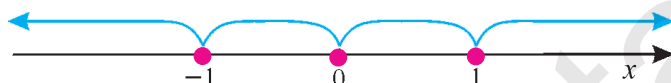
△ Бисёрраъзогии $x^3 - x$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:
 $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$.

Пас, нобаробариро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

Нуқтаҳои -1 , 0 ва 1 -ро дар тири адади қайд мекунем. Ин нуқтаҳо тири адади ро ба чор интервал ҷудо мекунанд (расми 24).

$$x < -1; \quad -1 < x < 0; \quad 0 < x < 1; \quad x > 1$$



Расми 24.

Ҳангоми $x > 1$ будан, ҳамаи зарбкунандаҳои ҳосили зарби $(x+1)x(x-1)$ мусбатанд ва аз ҳамин сабаб дар интервали $x > 1$ нобаробарии

$(x + 1)x(x - 1) > 0$ ҷой дорад. Ҳангоми гузариш ба интервали ҳамсоя иваз шудани аломати ҳосили зарбро ба назар гирифта, аломати ҳосили зарби $(x + 1)x(x - 1)$ -ро барои ҳар як интервал меёбем (расми 25).



Расми 25.

Ҳамин тариқ, ҳамаи қиматҳои x , ки мутааллиқӣ интервалҳои $x < -1$ ва $0 < x < 1$ мебошанд, ҳалҳои нобаробарӣ мебошанд.

Ҷавоб: $x < -1$, $0 < x < 1$. ▲

Масъалаи 3. Нобаробарии $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ ҳал намоед.

△ Ин нобаробариро бо намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \quad (1)$$

Азбаски ҳангоми ҳамаи $x \neq -3$ нобаробарии $(x + 3)^2 > 0$ ҷой дорад, бинобар ин, ҳангоми $x \neq -3$ будан, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии (1) ва нобаробарии

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \quad (2)$$

мувофиқ меоянд.

Қимати $x = -3$ ҳалли нобаробарии (1) намебошад, чунки ҳангоми $x = -3$ будан, қисми чапи нобаробарӣ ба 0 баробар аст. Нобаробарии (2)-ро бо усули интервалҳо ҳал намуда, $x < 2$, $x > 3$ -ро ҳосил мекунем (расми 26).



Расми 26.

Ҳалли нобаробарии аввала набудани $x = -3$ -ро ба назар гирифта, ба таври комил ҳосил менамоем:

$$x < -3; \quad -3 < x < 2; \quad x > 3. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 4. Нобаробарио ҳал намоед:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x - 4} \geq 0.$$

$\triangle$ Сурат ва махрачи касрро ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \quad (3)$$

Дар тири ададӣ нуқтаҳои -3 ; -1 ; 1 ; 4 -ро, ки дар онҳо сурат ё махраҷ ба сифр табдил меёбад, қайд менамоем. Ин нуқтаҳо хати рости ададиро ба 5 интервал ҷудо мекунанд (расми 27).



Расми 27.

Ҳангоми $x > 4$ будан, ҳамаи зарбкунандаҳои сурат ва махрачи каср мусбатанд ва аз ҳамин сабаб каср мусбат аст. Ҳангоми гузариш аз як интервал ба интервали дигар каср аломаташро иваз менамояд, бинобар ин аломатҳои касрро ҷуноне, ки дар расми 27 нишон дода шудааст, ҷойгир кардан мумкин аст. Қиматҳои $x = -3$ ва $x = 1$ нобаробарии (3)-ро қоне менамоянд, вале ҳангоми $x = -1$ ва $x = 4$ будан, каср маъно надорад. Ҳамин тариқ, нобаробарии додашудаи ҳақиқӣ зерин дорад:

$$x \leq -3; \quad -1 < x \leq 1; \quad x > 4. \quad \blacktriangle$$

Машқҳо

70. (Шифоҳӣ.) Нишои диҳед, ки қимати $x = 5$ ҳалли нобаробарӣ мебошад.

$$1) (x-1)(x-3) > 0; \quad 2) (x+2)(x+5) > 0;$$

$$3) (x-7)(x-10) > 0; \quad 4) (x+1)(x-4) > 0.$$

Нобаробариҳоро бо усули интервалҳо ҳал намоед (**71–77**):

- 71.** 1) $(x+2)(x-7) > 0$; 2) $(x+5)(x-8) < 0$;
 3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) < 0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right) > 0$.
- 72.** 1) $x^2+5x > 0$; 2) $x^2-9x > 0$; 3) $2x^2-x < 0$;
 4) $x^2+3x < 0$; 5) $x^2+x-12 < 0$; 6) $x^2-2x-3 > 0$.
- 73.** 1) $x^3-16x < 0$; 2) $4x^3-x > 0$;
 3) $(x^2-1)(x+3) < 0$; 4) $(x^2-4)(x-5) > 0$.
- 74.** 1) $(x-5)^2(x^2-25) > 0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49) < 0$;
 3) $(x-3)(x^2-9) < 0$; 4) $(x-4)(x^2-16) > 0$.
- 75.** 1) $\frac{x-2}{x+5} > 0$; 2) $\frac{x-4}{x+3} < 0$; 3) $\frac{1,5-x}{3+x} \geq 0$;
 4) $\frac{3,5+x}{x-7} \leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} < 0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} \geq 0$.
- 76.** 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2} \leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1} \geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4} > 0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2} < 0$.

- 77.** 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1) > 0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12) > 0$;
 3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2) \leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15) \leq 0$.

Нобаробариҳоро ҳал намоед (**78–80**):

- 78.** 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1} > 0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2} < 0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2} \leq 0$;
 4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6} \geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3} \geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1} \leq 0$.
- 79.** 1) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} > \frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2-x}{x+3} < \frac{5-x}{x}$.
- 80.** 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64} < 0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4} > 0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2} \geq 0$.

§ 9. СОҲАИ МУАЙЯНКУНАНДАИ ФУНКСИЯ

Шумо дар синфи 8 бо мафҳуми функсия шинос шудед. Ҳамин мафҳумро хотиррасон мекунем.



Агар барои ҳар як қимати a -и аз ягон маҷмӯи ададҳо гирифташуда адади u мувофиқ гузошта шуда бошад, дар он маҷмӯъ функсияи $y(x)$ дода шудааст, мегӯянд. Дар ин ҳолат x тағйирёбандаи озод ё ки аргумент, u бошад, тағйирёбандаи ғайриозод ё ки функсия номида мешавад.

Барои шумо функсияи хаттии $y=kx+b$ ва функсияи квадрати $y=ax^2+bx+c$ шиносанд. Барои ин функсияҳо адади дилхоҳи ҳақиқӣ қимати аргумент шуда метавонад.

Акнун барои ҳар як адади ғайриманфӣ x функсияи ададии $\sqrt{x}$ мувофиқ гузорандаро, яъне функсияи $y=\sqrt{x}$ -ро дида мебароем. Барои ин функсия аргумент метавонад фақат ададҳои ғайриманфиро қабул кунад: $x \geq 0$. Дар ин маврид функсия дар тамоми маҷмӯи ададҳои ғайриманфӣ муайян номида мешавад ва ин маҷмӯъ барои функсияи $y=\sqrt{x}$ соҳаи муайянкунанда номида мешавад.



Умуман, соҳаи муайянкунандаи функсия гуфта маҷмӯи ҳамон қиматҳоро меноманд, ки аргументи он метавонад қабул кунад.

Масалан, функсияи бо формулаи $y = \frac{1}{x}$ додашуда ҳангоми $x \neq 0$ будан муайян аст, яъне соҳаи муайянкунии ин функсия — маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ аз сифр фарқкунанда мебошад..



Агар функсия бо формула дода шуда бошад, он гоҳ функсияро дар тамоми қиматҳои аргумент, ки формулаи додашуда ба маъно соҳиб аст (яъне дар ифодаи дар қисми ростии формула истода ҳамаи амалҳои нишондодашуда иҷрошаванда), муайяншуда номидан қабул гардидааст.

Ёфтани соҳаи муайянкунандаи функсияи бо формула додашуда — ин ёфтани тамоми қиматҳои аргумент мебошад, ки дар он формула ба маъно соҳиб аст.

Масъалаи 1. Соҳаи муайянкунандаи функсияро ёбед:

- 1) $y(x) = 2x^2 + 3x + 5$; 2) $y(x) = \sqrt{x-1}$;
 3) $y(x) = \frac{1}{x+2}$; 4) $y(x) = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$.

△ Азбаски ифодаи $2x^2 + 3x + 5$ дар қиматҳои дилхоҳи x ба маъно соҳиб аст, бинобар ин функсия дар тамоми x -ҳо муайяншуда мебошад

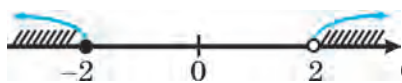
Ҷавоб: x – адади дилхоҳ

2) Ифодаи $\sqrt{x-1}$ ҳангоми $x-1 \geq 0$ будан, ба маъно соҳиб аст, яъне функсия ҳангоми $x \geq 1$ будан, муайяншуда мебошад.

Ҷавоб: $x \geq 1$.

3) Ифодаи $\frac{1}{x+2}$ ҳангоми $x+2 \neq 0$ будан, ба маъно соҳиб аст, яъне функсия ҳангоми $x \neq -2$ будан, муайяншуда мебошад

Ҷавоб: $x \neq -2$.

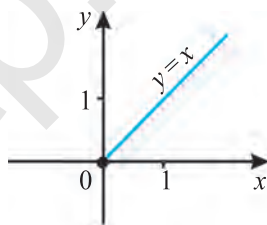


Расми 28.

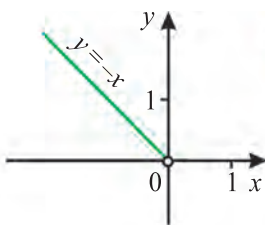
4) Ифодаи $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ ҳангоми $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ будан ба маъно соҳиб аст. Ин нобаробариро ҳал карда ҳосил мекунем (расми 28). 1) $x \leq -2$ ва $x > 2$, функсия ҳангоми $x \leq -2$ ва $x > 2$ будан, муайяншуда мебошад.

Ҷавоб: $x \leq -2$, $x > 2$. ▲

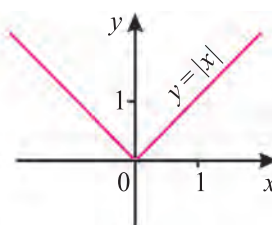
Хотиррасон мекунем, ки дар ҳамвории координатӣ графики функсия гуфта, маҷмӯи нуктаҳоеро меноманд, ки абсиссаҳои он ба қиматҳои тағйирёбандаи новобастаи аз соҳаи муайянкунандаи функсия гирифташуда ва ординатаҳои он, ба қиматҳои мувофиқи функсия баробар.



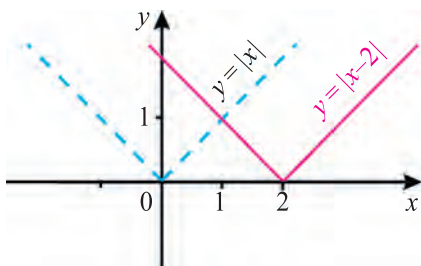
Расми 29



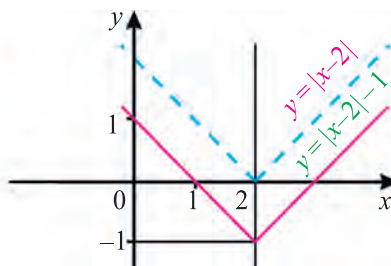
Расми 30.



Расми 31.



Расми 32.



Расми 33.

Масъалаи 2. *у Соҳаи муайянкундаи функсияи $y = |x|$ -ро ёбед ва графики онро созед.*

△ Хотиррасон мекунем: $|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бошад,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бошад.} \end{cases}$

Ҳамин тавр, ифодаи $|x|$ дар x -ҳои ҳақиқии ихтиёрӣ ба маъно соҳиб аст, яъне соҳаи муайянкундаи функсияи $y = |x|$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

Агар $x > 0$ бошад, дар он ҳолат $|x| = x$ аст, бинобар ин ҳангоми $x > 0$ будан, графики функсияи $y = |x|$ биссектрисаи кунҷи якуми координати мешавад (расми 29).

Агар $x < 0$ бошад, он гоҳ $|x| = -x$ мешавад, бинобар ин барои x -ҳои манфӣ графики функсияи $y = |x|$ биссектрисаи кунҷи дуюми координатӣ мешавад (расми 30).

Графики функсияи $y = |x|$ дар расми 31 тасвир шудааст. ▲

Барои x -и ихтиёрӣ $|-x| = |x|$ аст. Бинобар ин графики функсияи $y = |x|$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ ҷойгир шудааст.

Масъалаи 3. Графики функсияи $y = |x-2|-1$ -ро созед.

△ Графики функсияи $y = |x-2|$ аз графики функсияи $y = |x|$ ҳангоми онро дар тири Ox 2 воҳид ба тарафи рост кӯчонидан ҳосил мешавад (расми 32).

Барои ҳосил кардани графики функсияи $y = |x-2|-1$ графики функсияи

$y = |x-2|$ -ро як воҳид ба поён кӯчонидан кифоя (расми 33).▲

Машиқҳо

81. Функция бо формулаи $y(x) = x^2 - 4x + 5$ дода шудааст

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$ ро ёбед;

2) агар $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$ бошад, қимати x -ро ёбед.

82. Функция бо формулаи $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$ дода шудааст:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$ -ро ёбед. 2) агар $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$ бошад, қимати x -ро ёбед

Соҳаи муайянкунандаи функцияро ёбед (**83–84**):

83. (Шифохӣ).

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$;

2) $y = 2 - x - 3x^2$;

3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y = \frac{3}{5-x^2}$;

5) $y = \sqrt[4]{6-x}$;

6) $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$;

2) $y = \sqrt[6]{x^2 - 7x + 10}$;

3) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 5}$;

4) $y = \sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$;

5) $y = \sqrt{\frac{3x-2}{4-x}}$.

85. Функция бо формулаи $y(x) = |2-x| - 2$ дода шудааст:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$ -ро ёбед

2) агар $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$ бошад, қимати x -ро ёбед.

86. Соҳаи муайянкунандаи функцияро ёбед:

1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$;

2) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

3) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

4) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}$;

5) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;

6) $y = \sqrt[8]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$.

87. Оё нуктаи $(-2; 1)$ мутааллиқи графики мешавад:

1) $y = 3x^2 + 2x + 29$;

2) $y = |4 - 3x| - 9$;

3) $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$;

4) $y = |\sqrt{2 - x} - 5| - 2$?

88. Графики функцияро созед:

1) $y = |x + 3| + 2$;

2) $y = -|x|$;

3) $y = 2|x| + 1$;

4) $y = 1 - |1 - x|$;

5) $y = |x| + |x - 2|$;

6) $y = |x + 1| - |x|$.

89. Функцияи $y = ax^2 + bx + c$ аз нуқтаҳои $A(0; 1)$, $B(1; 2)$, $C(\frac{5}{6}; 1)$ мегузарад. 1) a , b , c -ро ёбед; 2) дар кадом қиматҳои x $y = 0$ мешавад 3) графики функцияро созед

§ 10. АФЗУНШАВӢ ВА КАМШАВИИ ФУНКСИЯ

Шумо бо функцияҳои $y = x$ ва $y = x^2$ шинос ҳастед. Ин функцияҳо ҳолатҳои хусусии функцияи дараҷагӣ, яъне

$$y = x^r \quad (1)$$

(дар ин ҷо r — адади додашуда) мебошад. Бигзор r адади натуралӣ бошад, яъне $r = n = 1, 2, 3, \dots$. Дар ин ҳол функцияи дараҷагии нишондиҳандааш натуралии $y = x^n$ -ро ҳосил мекунем.

Ин функция дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, яъне дар тамоми тири ададӣ муайяншуда мебошад. Одатан, маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ бо ҳарфи R ишорат карда мешавад. Ҳамии тавр, функцияи дараҷагии нишондиҳандааш натуралии $y = x^n$ барои $x \in R$ муайяншуда мебошад.

Агар дар (1) $r = -2k$, $k \in N$ бошад, он гоҳ функцияи $y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$

ҳосил мешавад. Ин функция дар тамоми қиматҳои x , ки аз сифр фарқ мекунад, муайяншуда мебошад. Графики он нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад. Агар $r = -(2k - 1)$, $k \in N$ бошад, он гоҳ

функцияи $y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}$ -ро ҳосил мекунем. Хосиятҳои он ба шумо,

шинос буда, ба хосиятҳои функцияи $y = \frac{1}{x}$ монанд аст. Бигзор p ва

q ададҳои натуралӣ ва $r = \frac{p}{q}$ касри ихтисорнашаванда бошад. Соҳаи

муайянкунандаи функцияи $y = \sqrt[q]{x^p}$ ҷуфт ё тоқ будани p ва q нигоҳ

карда, гуногун мешавад. Масалан, функцияҳои $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt[3]{x}$ барои $x \in \mathbf{R}$ ихтиёрӣ муайяншуда мебошад. Функцияи $y = \sqrt[4]{x^3}$ бошад, дар қиматҳои ғайриманфӣ x , яъне дар қиматҳои $x \geq 0$ муайяншуда аст.

Аз курси «Алгебра»-и синфи 8 маълум аст, ки ҳар як адади ирратсионалиро бо касри даҳии охиринок, яъне бо адади ратсионалӣ наздик кардаи мумкин аст. Дар амалиёт амалҳо бо ададҳои ирратсионалӣ таваассути наздикшавии ратсионалии онҳо иҷро карда мешавад. Ии амалҳо тарзе дохил карда мешавад, ки хосиятҳои баробарӣҳо ва нобаробарӣҳо барои ададҳои ратсионалӣ, ҳамчунин барои ададҳои ирратсионалӣ низ пурра нигоҳ дошта мешаванд.

Бигзор ададҳои ратсионалии, $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ барои адади ирратсионалии γ наздикшавии ратсионалӣ бошад. Дар ии ҳолат дар мавриди адади мусбат будани x дараҷаҳои ратсионалии x , яъне ададҳои x^r , x^{r^2} , $\dots$, x^{r^R} , наздикшавии дараҷаи x^r мебошанд. Дараҷаи бо ии тарз муайяншуда, дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ номида мешавад. Бинобар ин, барои $x > 0$ функцияи $y = x^r$ -ро, ки r – нишондиҳандаи дараҷаи ихтиёрӣ мебошад, муайян кардаи мумкин аст. Функцияи дараҷагӣ барои қиматҳои x , ки формулаи (1) маъио дорад, муайяншуда мебошад. Масалан, соҳаи муайянкунандаи функцияҳои $y = x$ ва $y = x^2$ ($r = 1$ ва $r = 2$) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад; соҳаи муайянкунандаи функцияи $y = \frac{1}{x}$ ($r = -1$) маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии аз сифр фарқкунанда мебошад; соҳаи муайянкунандаи функцияи $y = \sqrt{x}$ ($r = \frac{1}{2}$) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ғайриманфӣ мебошад.



Хотиррасон менамоем, ки агар ба қимати калони аз ягон фосила гирифтаи аргумент қимати калони функция мувофиқ ояд, яъне барои x_1, x_2 -и ихтиёрии ба ҳамон фосила мутааллиқ, аз нобаробарии $x_2 > x_1$ нобаробарии $y(x_2) > y(x_1)$ барояд, функцияи $y(x)$ дар ин фосила афзуншаванда ном дорад.



Агар барои x_1, x_2 -и ихтиёрии ба ягон фосила мутааллиқ аз нобаробарии $x_2 > x_1$ $y(x_2) < y(x_1)$ барояд, функцияи $y(x)$ дар ин фосила камшаванда номида мешавад.

Масалан, функцияи $y = x$ дар тири адади меафзояд. Функцияи $y = x^2$ дар фосилаи $x \geq 0$ меафзояд, дар фосилаи $x \leq 0$ кам мешавад.

Афзоиш ё камшавии функсияи дараҷагии $y = x^r$ аз ишораи нишондиҳандаи дараҷа вобаста аст.

! Агар $r > 0$ бошад, он гоҳ функсияи дараҷагии $y = x^r$ дар фосилаи $x \geq 0$ меафзояд.

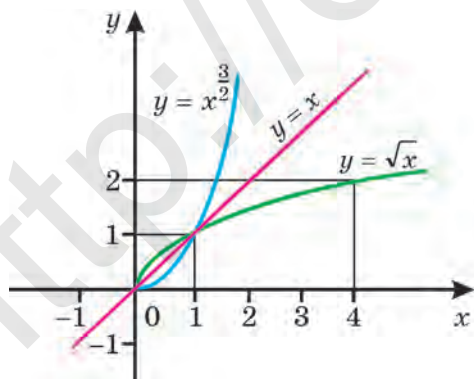
○ Бигзор $x_2 > x_1 \geq 0$ бошад. Нобаробарии $x_2 > x_1$ дараҷаи мусбати $r > 0$ бардошта ҳосил мекунем: $x_2^r > x_1^r$, яъне $y(x_2) > y(x_1)$. ●

Масалан, $y = \sqrt{x}$ ва $y = x^{\frac{3}{2}}$ дар фосилаи $x \geq 0$ меафзоянд. Графики ин функсияҳо дар расми 34 тасвир шудаанд. Чӣ тавре аз расм мебинем, графики функсияи $y = \sqrt{x}$ дар фосилаи $0 < x < 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар боло, дар фосилаи $x > 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар поён меҳабад.

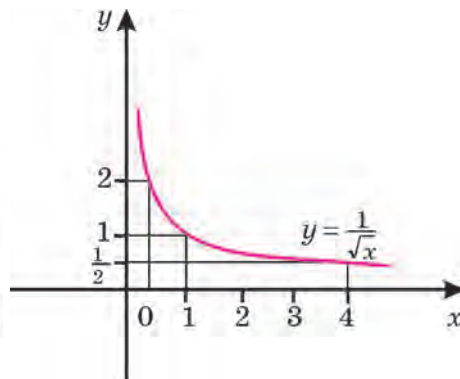
Агар $0 < r < 1$ бошад, графики функсияи $y = x^r$ айнан ба ҳамин ҳосият соҳиб мешавад.

Графики функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $0 < x < 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар поён, дар фосилаи $x > 1$ бошад, аз графики функсияи $y = x$ дар боло меҳабад. Агар $r > 1$ бошад, графики функсияи $y = x^r$ айнан ба ҳамин ҳосият соҳиб мешавад.

! Агар $r < 0$ бошад, он гоҳ функсияи дараҷагии $y = x^r$ дар фосилаи $x > 0$ кам мешавад.



Расми 34.



Расми 35.

○ Бигзор $x_2 > x_1 > 0$ бошад. Нобаробарии $x_2 > x_1$ -ро ба дараҷаи манфӣ бардошта, аз рӯи хосияти нобаробариҳои қисмҳои чап ва рост $x_2^{-1} < x_1^{-1}$, яъне $y(x_2) < y(x_1)$ -ро ҳосил мекунем. ●

Масалан, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, яъне функсияи $y = x^{-\frac{1}{2}}$ дар фосилаи $x > 0$ кам мешавад. Графики ин функсия дар расми 35 тасвир шудааст.

Масъалаи 1. Муодилаи $x^{\frac{3}{4}} = 27$ -ро ҳал кунед.

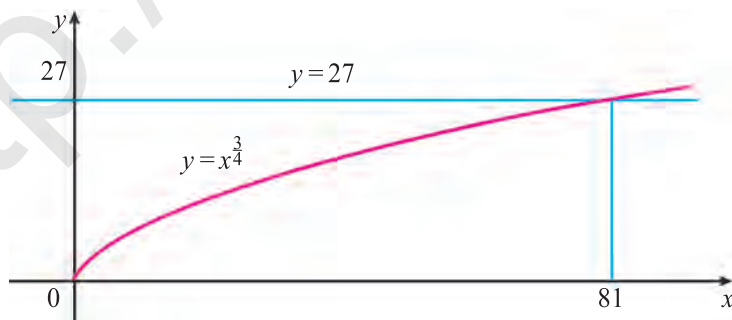
△ Функсияи $y = x^{\frac{3}{4}}$ дар фосилаи $x \geq 0$ муайяншуда мебошад.

Бинобар ин муодилаи додашуда фақат решаҳои ғайриманфиро соҳиб шуда метавонад. Яке аз чунин решаҳо: $x = 27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{3^3}\right)^4 = 3^4 = 81$

Муодила ба дигар решаҳо соҳиб нест, чунки функсияи $y = x^{\frac{3}{4}}$ ҳангоми $x \geq 0$ меафзояд ва бинобар ин, агар $x > 81$ бошад, он гоҳ $x^{\frac{3}{4}} > 27$, агар $x < 81$ бошад, он гоҳ $x^{\frac{3}{4}} < 27$, мешавад (расми 36). ▲

Азбаски муодилаи $x^r = b$ (ин ҷо $-r \neq 0$, $b > 0$) ҳамеша соҳиби решаи мусбати $x = b^{\frac{1}{r}}$ аст ва решаи ягона будани он монанди ҳамин исбот карда мешавад. Пас, функсияи $y = x^r$ (ин ҷо $r > 0$) ҳангоми $x > 0$ будан, ҳамаи қиматҳои мусбатро қабул мекунад.

Ин бошад, сарфи назар аз афзоиши бомароми функсияи $y = x^{\frac{3}{4}}$ (расми 36), аз тири Ox ба қадри имкон дуршавии графики он ва чӣ



Расми 36.

гунагии адади мусбати b , буришашро бо хати рости $y=b$ мефаҳмонад.

Масъалаи 2. Дар фосилаи $x > 1$ афзоиши функсияи $y = x + \frac{1}{x}$ -ро исбот кунед.

△ Бигзор $x_2 > x_1 > 1$ бошад, $y(x_2) > y(x_1)$ буданастро нишон медиҳем. Фарқи $y(x_2) - y(x_1)$ -ро дида мебароем:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1) \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

Азбаски $x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ аст, пас $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$, $x_1 x_2 > 0$ мебошад. Бинобар ин $y(x_2) - y(x_1) > 0$, яъне $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Машиқҳо

90. Графики функсияро созед. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиро ёбед.

- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $y = 2x + 3$; | 2) $y = 1 - 3x$; | 3) $y = x^2 + 2$; |
| 4) $y = 3 - x^2$; | 5) $y = (1 - x)^2$; | 6) $y = (2 + x)^2$. |

91. (Шифохӣ). Функсияи

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; | 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; | 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; | 4) $y = x^{\sqrt{3}}$ |
|----------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------|

дар фосилаи $x > 0$ афзун мешавад ё кам?

92. Ҳангоми $x > 0$ будан, тарҳи графики функсияро кашед:

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; | 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; | 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; | 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$. |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|

93. Решаи мусбати муодиларо ёбед:

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; | 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; | 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; | 4) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; |
| 5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; | 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; | 7) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$; | 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$. |

94. Дар коғази миллиметрӣ графики функсияи $y = \sqrt[4]{x}$ -ро кашед.

Аз рӯи график:

- қимати x -ро ҳангоми $y = 0,5$; 1 ; 4 ; $2,5$ будан;
- қиматҳои тақрибии $\sqrt[4]{1,5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2,5}$; $\sqrt[4]{3}$ -ро ёбед.

95. Координатаҳои нуктаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед

- 1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ ва $y=625$; 2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ ва $y=64$;
3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ ва $y=216$; 4) $y = x^{\frac{7}{3}}$ ва $y=128$.

96. 1) Дар фосилаи $0 < x < 1$ камшавии функсияи $y = x + \frac{1}{x}$ -ро исбот кунед.

2) Дар фосилаи $x \geq 0$ камшавӣ ва дар фосилаи $x \leq 0$ афзуншавии функсияи $y = \frac{1}{x^2+1}$ -ро исбот кунед.

3) Дар фосилаҳои $x \leq 1$ ва $x \geq 1$ афзуншавӣ ва дар порчаи $-1 \leq x \leq 1$ камшавии функсияи $y = x^3 - 3x$ -ро исбот кунед;

4) Дар фосилаи $x \geq 1$ афзуншави ва дар порчаи $-1 \leq x \leq 1$ камшавии функсияи $y = x - 2\sqrt{x}$ -ро исбот кунед.

97. Графики функсияро созед, фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиро ёбед:

1) $y = \begin{cases} x+2, & \text{агар } x \leq -1 \text{ бошад,} \\ x^2, & \text{агар } x > -1 \text{ бошад,} \end{cases}$

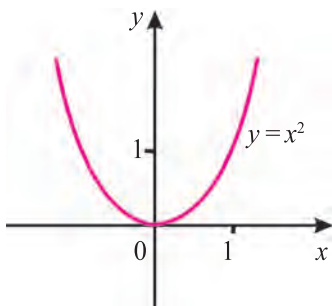
2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бошад,} \\ 2-x^2, & \text{агар } x > 1 \text{ бошад,} \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -x-1, & \text{агар } x < -1 \text{ бошад,} \\ -x^2+1, & \text{агар } x \geq -1 \text{ бошад,} \end{cases}$

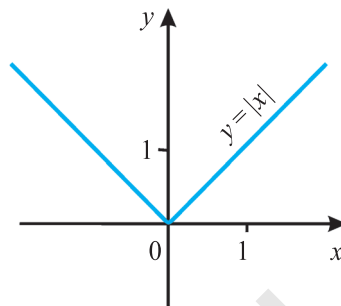
4) $y = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бошад,} \\ -x^2+2x, & \text{агар } x \geq 1 \text{ бошад.} \end{cases}$

§ 11. ФУНКСИЯҲОИ ҶУФТ ВА ТОҚ

Шумо нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ будани графики функсияҳои $y = x^2$ ва $y = |x|$ (расмҳои 37 ва 38)-ро медонед. Ин гуна функсияҳо функсияҳои ҷуфт номида мешаванд.



Расми 37.



Расми 38.



Агар барои x -и ихтиёрии аз соҳаи муайянкунандаи функсияи $y(x)$ гирифташуда $y(-x) = y(x)$ бошад, ин функсия функсияи чуфт номида мешавад.

Масалан, функсияҳои $y = x^4$ ва $y = \frac{1}{x^2}$ функсияҳои чуфт мебошанд, чунки барои x -и ихтиёрӣ $(-x)^4 = x^4$ ва барои $x \neq 0$ -и ихтиёрӣ $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ аст.

Масъалаи 1. Ба ибтидои координатаҳо симметрӣ будани графики функсияи $y = x^3$ -ро исбот кунед ва графики онро созед.

△ 1) Соҳаи муайянкунандаи функсияи $y = x^3$ — маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ.

2) Қиматҳои функсияи $y = x^3$ ҳангоми $x > 0$ будан, мусбат, ҳангоми $x < 0$ будан, манфӣ, ҳангоми $x = 0$ будан, ба сифр баробар аст.

○ Фарз мекунем, ки нуктаи $(x_0; y_0)$ мутааллиқи графики функсияи $y = x^3$, яъне $y_0 = x_0^3$ бошад. Нуктае, ки нисбат ба ибтидои координатаҳо ба нуктаи $(x_0; y_0)$ симметрӣ аст, координатаҳои $(-x_0; -y_0)$ -ро соҳиб аст. Ин нукта низ ба графики функсияи $y = x^3$ мутааллиқ аст, чунки ҳар ду қисми баробарии дурусти $y_0 = x_0^3$ -ро ба -1 зарб карда, ҳосил мекунем: $-y_0 = -x_0^3$ ва ё $-y_0 = (-x_0)^3$. ●

Ин хосият барои сохтани графики функсияи $y = x^3$ имконият медиҳад: аввал график барои $x \geq 0$ сохта мешавад, баъдан акси симметриаш нисбат ба ибтидои координатаҳо ҳосил карда мешавад.

3) Функсияи $y = x^3$ дар тамоми соҳаи муайянкунанда меафзояд.

Ин аз хосияти афзуншавии функсияи дараҷагии нишондихандааш

(расми 39). Функцияҳои графикҳояшон нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ функцияҳои тоқ номида мешаванд. Ҳамин тавр, $y = x^3$ -функцияи тоқ аст.

Масалан, $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ функцияҳои тоқ мебошанд, чунки барои

Нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ будани соҳаи муайянкунандаи функцияҳои чуфт ва тоқро хотиррасон мекунем.

Расми 39.

△ 1) Соҳаи муайяни онҳамаи ададҳои иқбӣ мебошад.

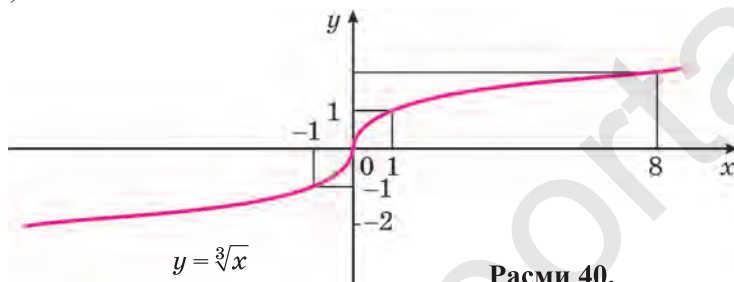
2) Функция тоқ аст, чунки барои x -и ихтиёрӣ $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) Ҳангоми $x \geq 0$ будан функция мувофиқи хосияти функцияи дараҷагии

нишондиҳандааш мусбат меафзояд, чунки ҳангоми $x \geq 0$ будан $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) Ҳангоми $x > 0$ будан қимати функция мусбат аст; $y(0) = 0$.

5) Якчанд нуқтаҳои ба график мутааллиқ, масалан $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(8; 2)$ -ро ёфта, барои қиматҳои $x \geq 0$ як қисми графикро месозем ва баъдан бо ёрии симметрия барои $x < 0$ қисми дуюми графикро месозем (расми 40). ▲



Расми 40.

Таъкид мекунем, ки функцияи $y = \sqrt[3]{x}$ барои x -ҳои ихтиёрӣ, функцияи $y = x^{\frac{1}{3}}$ бошад, фақат барои $x \geq 0$ муайяншуда мебошад.

Машқҳо

Ҷуфт ё тоқ будани функцияро муайян кунед (98–99):

98. 1) $y = 2x^4$; 2) $y = 3x^5$; 3) $y = x^2 + 3$; 4) $y = x^3 - 2$.

99. 1) $y = x^{-4}$; 2) $y = x^{-3}$; 3) $y = x^4 + x^2$; 4) $y = x^3 + x^5$.

100. Ангори графики функцияро кашед:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^5$; 3) $y = -x^2 + 3$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$.

101. На ҷуфт ва на тоқ будани функцияро нишон диҳед:

1) $y = \frac{x+2}{x-3}$; 2) $y = \frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

102. Ҷуфт ё тоқ будани функцияро муайян кунед

1) $y = x^4 + 2x^2 + 3$; 2) $y = x^3 - 2x + 1$; 3) $y = \frac{3}{x^3} + \sqrt[3]{x}$;

4) $y = x^4 + |x|$; 5) $y = |x| + x^3$; 6) $y = \sqrt[3]{x-1}$.

103. Аз симметрия истифода намуда, графики функцияи чуфтро созед:

1) $y = x^2 - 2|x| + 1$; 2) $y = x^2 - 2x$.

104. Аз симметрия истифода намуда, графики функцияи тоқро созед:

1) $y = x|x| - 2x$; 2) $y = x|x| + 2x$.

105. Хосиятҳои функцияро муайян намоед ва графики онро созед:

1) $y = \sqrt{x-5}$; 2) $y = \sqrt{x} + 3$; 3) $y = x^4 + 2$; 4) $y = 1 - x^4$;

106. Графики функцияро созед:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бошад,} \\ x^3, & \text{агар } x < 0 \text{ бошад;} \end{cases}$	2) $y = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x > 0 \text{ бошад,} \\ x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бошад;} \end{cases}$
3) $y = \begin{cases} -x^3, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бошад,} \\ -x^2, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бошад;} \end{cases}$	4) $y = \begin{cases} x^4, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бошад,} \\ -x^2 + 2x, & \text{агар } x \geq 1 \text{ бошад,} \end{cases}$

Дар кадом қиматҳои аргумент мусбат будани қимати функцияро муайян кунед. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиашро нишон диҳед.

107. Функцияи y дода шудааст. Агар:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^2 + x$; 4) $y = x^2 - x$.

бошад ҳангоми $x > 0$ будан, графики ин функцияро созед. Барои $x < 0$ графики ҳар яке аз функцияҳои додашударо чунон созед, ки графики сохтасуда: а) графики функцияи чуфт; б) графики функцияи тоқ бошад. Ҳар як функцияи ҳосилшударо бо ёрии як формула нависед.

108. Муодилаи тири симметрияи графики функцияро нависед:

1) $y = (x+1)^6$; 2) $y = x^6 + 1$; 3) $y = (x-1)^4$.

109. Координатаҳои маркази симметрияи графики функцияро нишон диҳед:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x+1)^3$; 3) $y = x^5 - 1$.

§ 12. НОБАРОБАРИҶ ВА МУОДИЛАҶОИ ДАРАҶА ИШТИРОКНАМУДА

Ҳангоми ҳал кардани муодила ва нобаробариҳои гуногун аз хосиятҳои функсияи дараҷагӣ истифода мебаранд.

Масъалаи 1. Нобаробарии $x^5 > 32$ -ро ҳал кунед.

△ Функсияи $y = x^5$ дар тамоми қиматҳои ҳақиқии x муайяншуда ва афзоянда мебошад. Азбаски $y(2) = 32$ мебошад, ҳангоми $x > 2$, $y(x) > 32$ ва $x < 2$ будан $y(x) < 32$ мешавад.

Ҷавоб: $x > 2$. ▲

Масъалаи 2. Нобаробарии $x^4 \leq 81$ -ро ҳал кунед.

△ Функсияи $y = x^4$ ҳангоми $x \leq 0$ будан, камшаванда ва ҳангоми $x \geq 0$ будан афзуншаванда аст. Муодилаи $x^4 = 81$ ду решаи ҳақиқии: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ -ро соҳиб аст. Бинобар ин нобаробарии $x^4 \leq 81$ ҳангоми $-3 \leq x \leq 3$ ва $x \geq 0$ будан, ба ҳалҳои $0 \leq x \leq 3$ доро аст (расми 41).

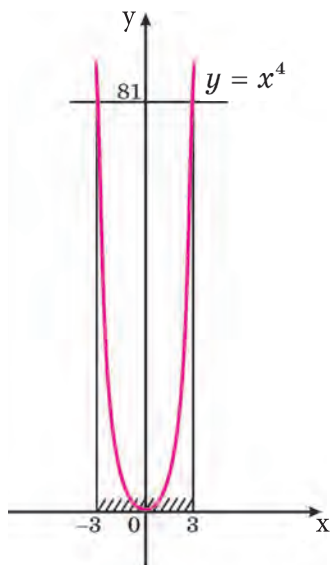
Ҷавоб: $-3 \leq x \leq 3$. ▲

Масъалаи 3. Бо ёрии графикҳои функсияҳо муодилаи $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ -ро ҳал кунед.

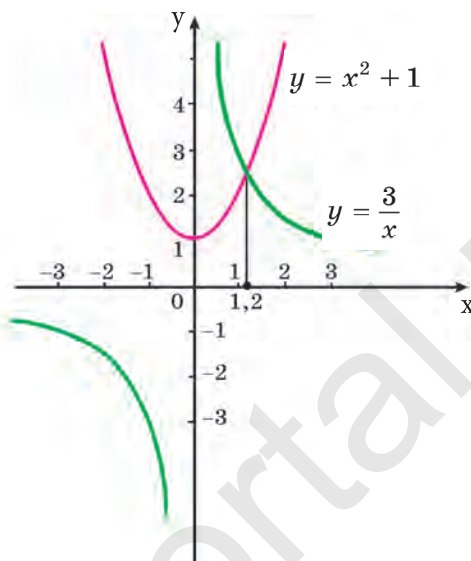
Дар як ҳамвории координатӣ графики функсияҳои $y = \frac{3}{x}$ ва $y = x^2 + 1$ -ро месозем (расми 42).

△ Ҳангоми $x < 0$ будан, муодилаи $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ дорои решаҳо нест, чунки $\frac{3}{x} < 0$, лекин $x^2 + 1 > 0$. Ҳангоми $x > 0$ будан, ин муодила дорои ҳалли ягонаи ба абсисаи нуқтаи буриши ин функсияҳо баробар соҳиб аст.

Аз расми 42 аён аст, ки $x_1 \approx 1,2$ аст. Муодила ба дигар решаҳои мусбат соҳиб нест, чунки ҳангоми $x > x_1$ будан, функсияи $y = \frac{3}{x}$ кам мешавад ва $y = x^2 + 1$ бошад, меафзояд ва аз ин сабаб графикҳои ин функсияҳо



Расми 41.



Расми 42.

ҳангоми $x > x_1$ будан, якдигарро намебуранд. Пас, онҳо ҳангоми $0 < x < x_1$ будан низ якдигарро намебуранд.

Ҷавоб: $x_1 \approx 1,2$. ▲

Масъалаи 4. Муодилаи $\sqrt{2-x^2} = x$ -ро ҳал кунед.

△ Фарз мекунем, ки x -решаи муодилаи додашуда бошад, яъне x – чунин ададест, ки муодилаи (1)-ро ба баробарии дуруст табдил медиҳад. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$2 - x^2 = x^2. \quad (2)$$

Аз ин ҷо $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Пас фарз мекунем, ки муодилаи (1) ба решаҳо соҳиб аст, мо доништа гирифтем, ки ин решаҳо танҳо ададҳои 1 ва -1 буданашон мумкин аст. Месанҷем, ки ин ададҳо решаи муодилаи (1) мебошанд ё не. Ҳангоми $x = 1$ будан, муодилаи (1) ба баробарии дуруст табдил меёбад: $\sqrt{2-1^2} = 1$. Бинобар ин $x=1$ решаи муодилаи (1) мебошад.

Ҳангоми $x=-1$ будан, қисми чапи муодилаи (1) ба $\sqrt{2-(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ баробар, қисми росташ бошад, ба -1 баробар аст, яъне $x=-1$ решаи муодилаи (1) шуда наметавонад. .

Ҷавоб: $x=1$. ▲ Дар масъалае, ки дида баромадем, муодилаи (1) бо роҳи ҳар ду қисмашро ба квадрат бардоштан ҳал карда шуд. Дар ин ҳолат муодилаи (2) ҳосил шуд.

Муодилаи (1) танҳо дорои як реша аст: $x=1$ Муодилаи (2) бошад ду реша дорад: $x_{1,2}=\pm 1$, яъне ҳангоми аз муодилаи (1) ба муодилаи (2) гузаштан, решаҳои бегона номидашаванда пайдо шуд. Маълум мешавад, ки ҳангоми $x=-1$ будан, муодилаи (1) ба баробарии нодурусти $1=-1$ табдил меёбад, ҳангоми ҳар ду қисми баробарии нодурустро ба квадрат бардоштан баробарии иборат аз $1^2 = (-1)^2$ ҳосил мешавад.



Ҳамин тавр, ҳангоми ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардоштан, мумкин аст решаҳои бегона найдо шаванд.

Бинобар ин, ҳангоми бо роҳи ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардоштан, ҳал кардан, санҷиш бояд гузаронид.

Муодилаи (1) — мисоли муодилаи ирратсионалӣ мебошад.

Ба муодилаҳои ирратсионалӣ мисолҳо меорем

$$\sqrt{3-2x} = 1-x; \sqrt{x+1} = 2-\sqrt{x-3}.$$

Ҳалли якчанд муодилаҳои ирратсионалиро дида мебароем

Масъалаи 5. Муодиларо ҳал кунед.: $\sqrt{5-2x} = 1-x$.

▲ Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат мебардорем

$$5-2x = x^2 - 2x + 1$$

ва ё $x^2=4$, аз ин ҷо. $x_1=2$, $x_2=-2$. Решаҳои ёфташударо месанҷем. Ҳангоми $x=2$ будан, қисми чапи муодилаи додашуда ба $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$ баробар аст, қисми росташ ба $1-2=-1$ баробар аст. Азбаски $1\neq -1$ аст, пас $x=2$ решаи муодилаи додашуда шуда наметавонад. Ҳангоми $x=-2$ будан, қисми чапи муодила ба $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$ баробар аст, қисми росташ ба $1-(-2)=3$ баробар аст. Бинобар ин, $x=-2$ решаи муодилаи додашуда мебошад.

Ҷавоб: $x=-2$. ▲

Масъалаи 6. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x-2} + 3 = 0$.

△ Муодиларо дар шакли $\sqrt{x-2} = -3$ менависем.

Решаи арифметики манфӣ буда наметавонад, бинобар ин муодила дорои решаҳо нест.

Ҷавоб: Решаҳо надорад. ▲

Масъалаи 7. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} = 4$.

△. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем: :
 $x-1 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x} + 11-x = 16$

Аъзоҳои монандашро ислоҳ намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем: $2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x} = 6$ ёки $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x} = 3$

Ҳар ду қисми муодилаи охириро ба квадрат бардорем.

$$(x-1)(11-x) = 9 \text{ ёки } x^2 - 12x + 20 = 0,$$

аз ин ҷо $x_1 = 2$, $x_2 = 10$.

Санҷиш нишон медиҳад, ки ҳар яке аз ададҳои 2 ва 10 решаи муодилаи додашуда буда метавонад.

Ҷавоб: $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. ▲

Масъалаи 8. Нобаробариро ҳал кунед $\sqrt{5-x} \leq 7+x$.

△ Нобаробарӣ дар қиматҳои x -и $-7 \leq x \leq 5$ маъно дорад. Агар нобаробарӣ ҳал дошта бошад, ҳал ба порчаи $[-7; 5]$ тааллуқ доштаниш лозим аст. Ҳар ду қисми нобаробариро ба квадрат бардошта баъд аз содда кардан, нобаробарии $x^2 + 15x + 44 \geq 0$ -ро ҳосил мекунем. Ҳалли он бошад, $x \leq -11$, $x \geq -4$ мебошад. Қисми умумии ин фосилаҳо бо фосилаи $[-7; 5]$ $-4 \leq x \leq 5$, яъне порчаи $[-4; 5]$ мебошад.

Ҷавоб: $-4 \leq x \leq 5$. ▲

Машиқҳо

110.: Нобаробариҳоро ҳал кунед:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $x^7 > 1$; | 2) $x^3 \leq 27$; | 3) $y^3 \geq 64$; | 4) $y^3 < 125$; |
| 5) $x^4 \leq 16$; | 6) $x^4 > 625$; | 7) $x^5 \leq 243$; | 8) $x^6 \geq 64$. |

- 111.** 1) Агар маълум бошад, ки масоҳати квадрат аз 361см^2 калон аст, тарафи он чӣ қадар шуданаш мумкин аст?
2) Агар ҳаҷми куб аз 343дм^3 калон бошад, тегаи он чӣ гуна мешавад?

112. (Шифохӣ.) Нишон диҳед, ки адади 7 решаи муодила шуда метавонад:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Шифохӣ.) Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Муодиларо ҳал кунед (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;

4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;

3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;

4) $\sqrt{0,4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

118. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;

4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Фаҳмонед, ки чаро муодилаҳои додашуда дорои решаҳо нестанд:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;

4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Муодиларо ҳал кунед: (120–122):

120. 1) $\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 2x - 5$; 2) $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3x + 8$;

3) $2x = 1 + \sqrt{x^2 + 5}$; 4) $x + \sqrt{13 - 4x} = 4$.

121. 1) $\sqrt{x + 12} = 2 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4 + x} + \sqrt{x} = 4$.

122. 1) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3x + 4} = 3$; 2) $\sqrt{4x - 3} + \sqrt{5x + 4} = 4$;

3) $\sqrt{x - 7} - \sqrt{x + 17} = -4$; 4) $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1} = 1$.

123. Дар кадом қиматҳои x функсияҳо қиматҳои яхжеларо қабул мекунанд:

1) $y = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$, $y = \sqrt{19 - 2\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt{7 + \sqrt{x}}$, $y = \sqrt{11 - \sqrt{x}}$?

124. Нобаробарию ҳал кунед:

1) $\sqrt{x - 2} > 3$; 2) $\sqrt{x - 2} \leq 1$; 3) $\sqrt{2 - x} \geq x$;

4) $\sqrt{2 - x} < x$; 5) $\sqrt{5x + 11} > x + 3$; 6) $\sqrt{x + 3} \leq x + 1$.

Машиқҳо доир ба боби I

125. Дар кадом қимати x қимати функсияи квадратии $y = 2x^2 - 5x + 3$ ба: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) -1 баробар мешавад, ёбед.

126. Нобаробарию ҳал кунед:

1) $x^2 \leq 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \geq 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатаҳо ёбед:

1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;

3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Координатаи қуллаи параболаро ёбед:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;

3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Графики функцияро созед ва аз рӯи график хосиятҳои онро муайян кунед:

1) $y = x^2 - 5x + 6$;

2) $y = x^2 + 10x + 30$;

3) $y = -x^2 - 6x - 8$;

4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Периметри росткунча ба 600 м баробар аст. Барои масоҳати росткунча калонтарин шудан дарозӣ ва барои бояд он чӣ гуна бошад?

131. Функцияи квадрати $y = x^2 + px + q$ дода шудааст: 1) ҳангоми $x = 0$ қимати 2, ҳангоми $x = 1$ қимати 3-ро қабул кунад, коэффитсиентҳои p ва q -ро ёбед:

2) ҳангоми $x = 0$ будан қимати 0, ҳангоми $x = 2$ қимати 6-ро қабул кунад, коэффитсиентҳои p ва q -ро ёбед:

132. Дар кадом қиматҳои x функцияҳо қиматҳои баробарро қабул мекунад:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ ва $y = |7 - x|$;

2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ ва $y = |3x - 3|$?

Нобаробариро ҳал кунед: **(133–137):**

133. 1) $(x - 5,7)(x - 7,2) > 0$;

2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;

3) $(x - 2,5)(3 - x) < 0$;

4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$;

2) $x^2 > 36$;

3) $4 > x^2$;

4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$;

2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;

3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$;

4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$;

2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;

3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$;

4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;

5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$;

6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$;

2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;

3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$;

4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$;

5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;

6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$;

7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$;

8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Нобаробари ро ҳал кунед: **(138–139)**:

138. 1) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x^2 \geq 1 - x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1) \leq (x+1)^2$;

3) $x(1-x) > 1,5-x$; 4) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \geq x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3} > 0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2} < 0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1} \leq 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} > 0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2} \leq 0$.

140. Қайқ дар муддати аз 4 соат зиёд набуда, ба равиши чараён 22,5 км шино карда, ба қафо баргаштани лозим аст. Агар суръати чараёни дарё 3 км/соат бошад, қайқ нисбат ба об бо кадом суръат ҳаракат мекунад?

141. Графики функсияҳоро дар як системаи координатӣ созед ва дар кадом қимати x қимати яке аз функсияҳо аз дуюмаш калон (хурд) шуданашро муайян кунед натиҷаро, нобаробариҳои дахлдорро ҳал карда, санҷед:

1) $y = 2x^2$, $y = 2 - 3x$;

2) $y = x^2 - 2$, $y = 1 - 2x$;

3) $y = x^2 - 5x + 4$, $y = 7 - 3x$;

4) $y = 3x^2 - 2x + 5$, $y = 5x + 3$.

Координатаҳои нуқтаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед: **(142–143)**:

142. 1) $y = x^2$, $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 2x$; 3) $y = 3x$, $y = \frac{3}{x}$.

143. 1) $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

144. Нобаробари ро ҳал кунед:

1) $x^4 \leq 81$; 2) $x^5 > 32$; 3) $x^6 > 64$; 4) $x^5 \leq -32$.

Муодилаҳоро ҳал кунед: **(145–146)**:

145. 1) $\sqrt{3-x} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} = 7$; 3) $\sqrt{3-11x} = 2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1} = x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$; 3) $\sqrt{2-2x} = x+3$.

147. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

1) $y = \sqrt[5]{x^3 + x - 2}$; | 2) $x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15}$; | 3) $x = \sqrt[6]{6 - x - x^2}$;

4) $y = \sqrt[4]{13x - 22 - x^2}$; | 5) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 7}}$; | 6) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 8x + 7}}$.

148. Дар фосилаи додашуда афзуншавӣ ё камшавии функсияро муайян кунед:

1) $y = \frac{1}{(x-3)^2}, x > 3$

2) $y = \frac{1}{(x-2)^3}, x < 2$

3) $y = \sqrt[3]{x+1}, x \geq 0$

4) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x < -1$

Худро санҷида бинед!

1. Бо ёрии графики функсияи $y = -x^2 + 2x + 3$ дар кадом қимати x , қимати функсия ба 3 баробар мешавад, муайян кунед:

2. Аз рӯи графики функсияи $y = 1 - x^2$ дар кадом қимати x функсия қимати мусбат; манфӣ қабул мекунад ёбед:

3. Функсияи 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ дар кадом фосила меафзояд? кам мешавад. Графики онро созед:

4. Нобаробариро бо усули интервалҳо ҳал кунед:

1) $x(x-1)(x+2) \geq 0$;

2) $(x+1)(2-x)(x-3) \leq 0$.

5. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

1) $y = \frac{8}{x-1}$;

2) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{4 - 2x}$.

6. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{x-3} = 5$;

2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$;

3) $y = \sqrt{32-x^2} = x$.

149. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

1) $y = x^6 - 3x^4 + x^2 - 2$; 2) $y = x^5 - x^3 + x$;

3) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; 4) $y = x^7 + x^5 + 1$.

150. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $(3x+1)^4 > 625$; 2) $(3x^2+5x)^5 \leq 32$; 3) $(x^2-5x)^5 > 216$.

151. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3} = x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2} = x+4$;

3) $\sqrt{x+11} = 1+\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+19} = 1+\sqrt{x}$.

152. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $\sqrt{x^2-8x} > 3$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 2$; 3) $\sqrt{3x-2} > x-2$;

4) $\sqrt{2x+1} \leq x-1$; 5) $\sqrt{3-x} > 1-x$; 6) $\sqrt{4x-x^2} > 4-x$.

Машиқҳои санҷишӣ (тест) доир ба боби I.

Дар ҳар як машиқи санҷишӣ 4-то "ҷавоб" дода шудааст. Аз 4-то "ҷавоб" фақат яктояш дуруст, боқимондааш нодуруст. Аз хонандагон машиқҳои санҷиширо иҷро карда ёки бо ёрии дигар мулоҳизаҳо ёфтани (қайди) ин гуна ҷавобҳо талаб карда мешавад.

1. Чунин қимати a -ро ёбед, ки абсиссаи яке аз нуқтаҳои буриши параболai $y = ax^2$ ва хати ростии $y = 5x + 1$ $x = 1$ бошад

A) $a = 6$; Б) $a = -6$; В) $a = 4$; Г) $a = -4$.

Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатӣ ёбед (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4$.

A) $(-1; 3)$; Б) $(3; 1)$; В) $(1; 3)$; Г) $(0; 4)$.

3. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

A) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(\frac{1}{2}; 0)$, $(0; 1)$; Б) $(-\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(1; 0)$;

В) $(0; \frac{1}{3})$, $(0; \frac{1}{2})$, $(0; 1)$; Г) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; -1)$.

Координатаи қуллаи параболаро ёбед (4–5):

4. $y = x^2 - 4x$.

- А) (0; 4); Б) (4; 2); В) (2; -4); Г) (-4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

- А) (-3; -4); Б) (-5; -1); В) (-1; -5); Г) (3; 4).

6. Муодилаи параболai тири абссисарo дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ ва ординатарo дар нуқтаи $y=\frac{1}{2}$ бурида гузарандарo нависед:

А) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$;

Б) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$;

В) $y = x^2 - 3x + 2$;

Г) ҷавоби дуруст нест

Парабола дар кадом чоракҳо ҷойгир шудааст (7–8):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

А) I, II, III;

Б) II, III, IV;

В) I, III, IV;

Г) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

А) III, IV;

Б) I, II, III;

В) II, III, IV;

Г) I, II.

9. Ҳосили ҷамъи ду адади мусбат ба 160 баробар аст. Агар ҳосили ҷамъи кубҳои ин ададҳо хурдтарин бошад, ин ададҳоро ёбед:

А) 95; 65;

Б) 155; 5;

В) 75; 85;

Г) 80; 80.

10. Қимати хурдтарини функсияи $y=x^2-4x+3$ -ро ёбед:

А) -1 Б) 1;

В) 7;

Г) -8.

Нобаробариро ҳал кунед: (11–15):

11. $2x^2 - 8 \leq 0$.

А) $-2 \leq x \leq 2$;

Б) $-2 \leq x$;

В) $x \geq 2$;

Г) $0 \leq x \leq 4$.

12. $3x^2 - 9 \geq 0$.

А) $x < \sqrt{3}$;

Б) $x > \sqrt{3}$;

С) $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$;

Д) $x \geq 3$.

13. $6x^2 + 5x - 6 > 0$.

А) $x > \frac{2}{3}$;

Б) $x < \frac{3}{2}$;

С) $x < -\frac{3}{2}, x > \frac{2}{3}$;

Д) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-3x-10} \leq 0.$

A) $-2 < x \leq 2$; Б) $-2 < x < 5$; В) $x \neq -2, x \neq 5$; Г) $-2 < x < 0$.

15. $\frac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \geq 0.$

A) $-2 < x < 3$; Б) $x < -2; -1 \leq x \leq 1, x > 3$;

В) $-1 \leq x < 3$; Г) $x \neq -2, x \neq 3$.

16. Ҳосили чамъи ҳамаи ҳалҳои бутуни нобаробарии $x^2+6x+5 < 0$ - ро ёбед:

A) 10; Б) 9; В) -9; Г) -10.

17. Дар кадом қимати a дар дилхоҳ қимати x нобаробарии $ax^2+4x+9a < 0$ ҳақ дорад?

A) $a < -\frac{2}{3}$; Б) $a > \frac{2}{3}$; С) $a < -1$; Д) $a > 1$.

18. Дар кадом қимати a дар дилхоҳ қимати x нобаробарии $ax^2-8x+2a < 0$ ҳақ дорад?

A) $-8 < a < 8$; Б) $a \geq 8$; В) $a < 8$; Г) $a < -8$.

19. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{-x^2+3x-2}$ -ро ёбед:

A) $1 \leq x \leq 2$; Б) $1 < x < 2$; В) $x \geq 2, x \leq 1$; Г) $-2 \leq x \leq -1$.

20. Кадоме аз функсияҳои зерин ҳақиқат аст:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + |x|$; 3) $y = -3 + \frac{5}{x^4}$; 4) $y = x^2 - \frac{3}{x}$.

A) 1, 2; Б) 3, 4; В) 2, 3; Г) 1, 4.

21. Кадоме аз функсияҳои зерин тоқ аст:

1) $y = 6x$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = 4x+7$; 4) $y = 2x^3-10$.

A) 1, 2; Б) 2, 3; В) 3, 4; Г) 1, 4.



Масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъалаи 1. Автомобили сабук бо суръати тағйирнаёбандаи v ҳаракат карда истодааст. То хати Stop 50 м масофа мондан чароғи сабзӣ светофор ба хомӯш даргирифтани сар кард. Баъд аз ним сония вақт гузаштан ронанда ба тормоздиҳӣ сар кард ва то ба хати Stop нарасида автомобил боз истод. Аз қоидаҳои ҳаракати роҳ маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии автомобили бо суръати $v_0 = 50$ км/соат ҳаракаткунанда ба $S_0 = 23,5$ м баробар аст. Дар ин ҷо роҳи тормоздиҳӣ гуфта роҳи аз аввали тормоздиҳӣ то истодан тайкардаи автомобилро меноманд. Бо суръати v -и ҳангоми хомӯш дар гирифтани светофор соҳиббудаи автомобил баҳо диҳед.

△ Автомобил баъд аз светофор хомӯш дар гирифтани то саршавии тормоздиҳӣ масофаи $0,5 v$ -ро, пас аз курси физика маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии kv^2 -ро тай мекунад, дар ин ҷо:

$$k = \frac{s_0}{v_0^2} = \frac{23,5}{13,88^2} \approx 0,12.$$

Пас, масофаи умумии роҳи тайкарда бо суръати 50 км/соат ба 13,88 м/с буданаширо ба ҳисоб гирем ва аз 50 метр зиёд нашуданро ба эътибор гирифта

$$0,5v + 0,12v^2 \leq 50,$$

яъне $0,12v^2 + 0,5v - 50 \leq 0$ -ро ҳосил мекунем (1)

△ Барои ин нобаробариро ҳал кардан аввал сифрҳои сеаъзогии $0,12v^2 + 0,5v - 50$ -ро меёбем:

$$0,12v^2 + 0,5v - 50 = 0, \text{ аз ин ҷо } 12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Муодиларо ҳал мекунем:

$$v_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 12(-5000)}}{2 \cdot 12} = \frac{-25(1 \pm \sqrt{97})}{12},$$

аз ин ҷо $v_1 = \frac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ ва $v_2 = \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Дар ин ҳол ҳалли нобаробарии (1) аз ададҳои фосилаи $v_1 \leq v \leq v_2$ иборат аст. Мувофиқи моҳияти масъала $v > 0$, пас, суръати баҳодиханда аз фосилаи $0 < v \leq v_2$ берун нахобиданаш лозим, яъне $v \leq \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18,43$ м/с ёки аз 66,35 км/соат зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: Суръат аз 66,35 км/соат зиёд нашуданаш лозим. ▲

Масъалаи 2. Фарз мекунем, ки дар бозор n -дона маҳсулот ҳаст ва ҳар донаи он бо p ченаки пулӣ фурӯхта мешавад. Мониторинг нишондод, ки агар талаб ба ин маҳсулот зиёд шавад нархи он меафзояд ва адади шумораи оварда мешуда бо формулаи $n = 40p$ меафзояд. Аз тарафи дуюм адади маҳсулоти ба бозор дохилшуда ва ба харидор таклиф кардашуда афзояд, нархи маҳсулот бо мутаносибии чаппа кам шуда рафтаниш маълум аст:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Шарти ба адади маҳсулоти ба бозор дохил шудаистодаро муайян кунед.

▲ Барои шarti дар масъала пурсидашударо муайян кардан, аз шarti нархи таклифшуда $\frac{150}{n-40}$ аз нархи ба талаб вобаста $\frac{n}{40}$ кам нашуданаш лозим истифода мебарем:

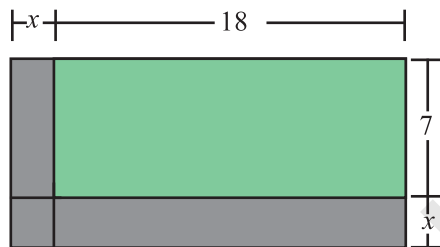
$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

$$\text{Аз ин ҷо } n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

-ро ҳосил менамоем. Ҳалли ин нобаробари $-60 \leq n \leq 100$. Мувофиқи моҳияти масъала, адади маҳсулоти ба бозор дохилшаванда адади натуралӣ ва он аз 100 зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: $n \leq 100$. ▲

Масъалаи 3. Шумо ба ду тарафи боғи росткунҷашакли бараш 7 м ва дарозияш 18 м аз санг пайраҳа сохтанатон лозим аст (расми 43). Лекин шумо маблағи ба сангфарш кардани 54 метри квадратӣ мерасидаро чудо карда метавонед. Бари ин пайраҳа аз ҳама зиёд чӣ қадар шуданаш мумкин аст?



Расми 43.

△ Равшан аст, ки барои ёфтани ҳалли масъала ба фарқи масоҳати умумӣ $(x+18) \cdot (x+7)$ метри квадратӣ ва масоҳати росткунҷа $18 \cdot 7 = 126$ метри кв. масоҳати пайраҳа аз 54 метри кв. калон нашуданашро ба эътибор гирифтани лозим:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \quad (1)$$

Аз ин ҷо

$$x^2 + 25x - 54 \leq 0 \quad (2)$$

ҳосил мешавад. Сифрҳои сеаъзогии квадратӣ $x_1 = -27$ ва $x_2 = 2$. Ҳалли нобаробарии (2) ададҳои фосилаи $-27 \leq x \leq 2$ иборат аст. Лекин мувофиқи моҳияти масъала бари пайраҳа адади манфӣ ёки сифр шуда наметавонад. Аз ҳамин сабаб бари пайраҳа адади қонёқунандаи нобаробарии $0 < x \leq 2$ шуда метавонад. Пас, бари пайраҳа аз 2 метр зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: бари пайраҳаи аз ҳама зиёд ба 2 метр баробар аст. ▲

Масъалаҳо

1. Автомобили боркаш бо суръати тағйирнаёбандаи v ҳаракат карда истодааст. То хати Stop 50 м масофа мондан чароғи сабзи светофор ба ҳомӯшдаргирифтани сар кард. Баъд аз ним сония вақт гузаштан ронанда ба тормоздиҳӣ сар кард ва то ба хати Stop нарасида автомобил боз истод. Аз қоидаҳои ҳаракати роҳ маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии автомобили бо суръати $v_0 = 50$ км/соат ҳаракаткунанда

ба $S_0 = 28,9$ м баробар аст. Суръати автомобили боркашро ҳангоми саршавии хомӯшдаргирифтани светофор ёбед ва то 0,01 яклухт кунед.

2. Фарз мекунем, ки дар бозор n -дона як навъи маҳсулот ҳаст ва ҳар донаи он бо p ченаки пулӣ фурухта мешавад. Мониторинг нишондод, ки агар талаб ба ин маҳсулот зиёд шавад нархи он меафзояд ва маҳсулоти оварда мешуда бо формулаи $n = 60p$ меафзояд. Аз тарафи дуюм адади маҳсулоти ба бозор дохилшуда ва ба харидор таклиф кардашуда афзояд, нархи маҳсулот бо мутаносибии чаппа кам шуда рафтаниш маълум аст:

$$p = \frac{60}{n - 40}.$$

Шарти ба адади маҳсулоти ба бозор дохилкардашударо муайян кунед:

3. Фарз мекунем, ки компания барои реклама x (100 ҳазорҳо) сӯм сарфкарда, дар натиҷаи он P Ҷоида мебинад. Дар ин ҷо $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Ба реклама чи қадар пул сарф кунад, дар натиҷа Ҷоида аз ҳама зиёд мешавад?
4. Ҷоидаи моҳонаи корхонаи хурди маҳсулот истеҳсолкунанда бо модели $P = 250n - n^2$ (дар ҳазорҳо сум) ифода карда шудааст, Ҷӯем дар ин ҷо n – адади маҳсулоти кор карда баромада ва фурухташуда. Барои гирифтани Ҷоидаи калон корхонаи хурд ҳар моҳ чандто маҳсулот кор карда баромада фурухтаниш лозим?
5. Дар яке аз бешазорҳои сербориши Америкаи Чанубӣ навъи ноёби ҳашарот ёфта шуд ва мутахассиси гирду атрофро омӯзанда ҳашаротҳоро ба ҳудуди ҳимоя кардашуда гузаронид. Баъд аз гузаронидан шумораи ҳашаротҳо дар t моҳ бо қонунияи

$$P(t) = 45(1 + 0,6t)(3 + 0,02t)$$

зиёд шуда рафта бошад:

- 1) ҳангоми $t = 0$ адади ҳашаротҳо чандто буд?
- 2) баъд аз 10 сол адади онҳо чандто мешавад?
- 3) Кай адади онҳо 549 то мешавад?



Абӯрайҳон Берунӣ
(973–1048)

Функсия вожаи лотинӣ буда, аз калимаи „functio“ гирифта шуда, маънои „содир шудан“, „ичро кардан“-ро ифода мекунад.

Нахустин таърифҳои функсия дар асарҳои Г. Лейбнитс (1646-1716), И. Бернулли (1667- 1748), Н.И. Лобачевский (1792- 1856) дода шудаанд.

Ҳарчанд таърифи имрӯзаи функсияро надонанд ҳам, олимони қадим дар байни ададҳои тағйирёбанда зарурати ҷой доштани вобастагӣҳои функционалиро дарк мекарданд.

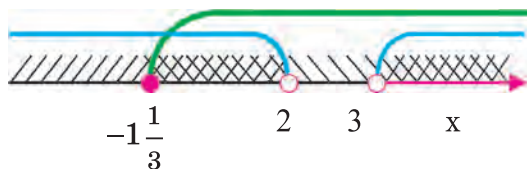
Ҷор ҳазор сол муқаддам олимони Бобулистон барои ёфтани масоҳати доираи радиусаш r , хато бошад ҳам формулаи $S=3r^2$ -ро ихтироъ кардаанд.

Нахустин маълумотҳо дар бораи дараҷаи ададҳо дар катибаҳои қадимаи Бобулистон, ки ба мо расидаанд, мавҷуданд. Хусусан, дар онҳо ҷадвалҳои квадрат, кубҳои ададҳои натуралӣ дода шудаанд.

Ҷадвалҳои квадратҳо, кубҳои ададҳо, ҷадвалҳои логарифмҳо, ҷадвалҳои тригонометрӣ, ҷадвали решаҳои квадратӣ бо усули ҷадвали вобастагӣҳои байни ададҳо дода шудаанд.

Олими барҷаста Абӯрайҳон Берунӣ низ дар асарҳои худ аз мафҳуми функсия, хосиятҳои он истифода намудааст. Дар мақолаи шашуми асари машҳури „Қонуни Масъудӣ“-и Абӯрайҳон Берунӣ ба фосилаҳои тағйирёбандагии аргумент ва функсия, ишораҳо, қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия таъриф дода шудааст.

БОБИ II. СИСТЕМАҲОИ НОБАРОВАРИҲО ВА МУОДИЛАҲО



§ 13. ҲАЛ КАРДАНИ СИСТЕМАҲОИ ОДДИТАРИНЕ,КИ МУОДИЛАИ ДАРАҶАИ ДУЮМРО ДАРБАР МЕГИРАД

Масъалаи 1. Гипотенузаи сскунҷаи росткунҷа ба $\sqrt{13}$ см, масоҳати он ба 3 см^2 баробар аст. Катетҳои сскунҷаро ёбед.

△ Бигузур катетҳо ба x ва y сантиметр баробаранд. Теоремаи Пифагор ва формулаи масоҳати сскунҷаи росткунҷаро истифода карда, шарти масъаларо ин тавр менависем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Ба муодилаи якуми система муодилаи дуюмро ба 4 зарб карда, ҷамъ мекунем ва ҳосил мекунем: $x^2 + y^2 + 2xy = 25$, ки аз ин ҷо $(x + y)^2 = 25$ ёки $x + y = \pm 5$. Азбаски x ва y ададҳои мусбатанд, бинобар ин $x + y = 5$ мешавад. Аз ин муодила y -ро ба воситаи x ифода менамоем ва ба яке аз муодилаҳои система, масалан ба муодилаи дуюм мегузорем::

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$5x - x^2 = 6, \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Ин қиматҳоро бо формулаи $y = 5 - x$ гузошта, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$ -ро меёбем. Дар ҳар ду ҳолат яке аз катетҳо ба 2 см, катети дигар ба 3 см баробар аст.

Ҷавоб: 2 см, 3 см. ▲

Масъалаи 2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ *Аз рӯи теоремае, ки ба теоремаи Виет ҷанпа аст, ададҳои x ва y решаҳои муодилаи квадратии*

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

мебошанд. Ин муодиларо ҳал намуда, $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. -ро пайдо мекунем. Пас, ҳалҳои система ду ҷуфт ададҳои зерин мебошанд: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ ва $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Ҷавоб: $(5; -2)$, $(-2; 5)$. ▲

Масъалаи 3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

△ Ин системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Ин муодиларо содда намуда ҳосил мекунем: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, аз ин ҷо $x_1 = 1$, $x_2 = 8,6$. Қиматҳои x -ро ба формулаи $y = 3x - 6$ гузошта, $y_1 = -3$, $y_2 = 19,8$ -ро меёбем.

Ҷавоб: $(1; -3)$, $(8,6; 19,8)$. ▲

Масъалаи 4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Муодилаи якуми системаро ба намуди зер менависем:
 $(x-y)(x+y) = 16$.

Дар ин ҷо $x-y=2$ -ро гузошта, $x+y=8$ ҳосил мекунем. Ҳамин тавр,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Ин системаро ба тарзи ҷамъкунӣ ҳал карда, $x=5$, $y=3$ -ро меёбем.

Ҷавоб: (5; 3). ▲

Машқҳо

153. Системаи муодилаҳои дараҷаи якуми дуномаълумаро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед **(154–158):**

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

- 156.** 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 11; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = -11, \\ xy = 18. \end{cases}$
- 157.** 1) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 - y^2 = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x + y = 7. \end{cases}$
- 158.** 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = 7. \end{cases}$

159. Суммаи ду адад ба 18, ҳосили зарби онҳо ба 65 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

160. Миёнаи арифметикии ду адад ба 20, миёнаи геометрии онҳо ба 12 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

161. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**161–163**):

- 1) $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$
- 162.** 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10. \end{cases}$
- 163.** 1) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

164. Майдони росткунчашакро бо девори дарозиаиш 1 км ихота кардан даркор аст. Агар масоҳати ин майдон ба 6 га баробар бошад, дарозӣ ва бари он чиқадарӣ шуданаш даркор аст?

§ 14. УСУЛҲОИ ГУНОГУНИ ҲАЛЛИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

Масъалаи 1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Муодилаҳои системаро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда, ҳосил мекунем: $2x + 2y = 8$, аз ин ҷо $y = 4 - x$. Ин ифодаро, ба муодилаи дилхоҳи система масалан ба муодилаи дуюм мегузорем:

$$\begin{aligned} x + 4 - x - 2x(4 - x) &= -2, \\ 4 - 8x + 2x^2 &= -2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

аз $y = 4 - x$ будан $y_1 = 3$, $y_2 = 1$.

Ҷавоб: (1; 3), (3; 1). ▲

Масъалаи 2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Аз муодилаи якуми система $y^2 = x - 3$. Ин ифодаро ба муодилаи дуюми система мегузорёем: $x(x - 3) = 28$, $x^2 - 3x - 28 = 0$,

Аз ин ҷо

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -4.$$

аз $y^2 = x - 3$ будан y -ро меёбем:

1) Агар $x = 7$ бошад, дар ин ҳол $y^2 = 7 - 3$, $y^2 = 4$, аз ин ҷо $y = 2$ ёки $y = -2$;

2) Агар $x = -4$ бошад, дар ин ҳол $y^2 = -4 - 3 < 0$, пас, решаҳои ҳақиқӣ надорад.

Ҷавоб: (7; 2), (7; -2). ▲

Ҳаминро гуфтан ҷоиз аст, ки агар дар муодилаи якум x -ро бо воситаи y ифода карда ба муодилаи дуюм гузорем, барои ҳалли муодилаи биквадратӣ оварда мерасонад.

Масъалаи 3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Агар $(x; y)$ ҳалли система бошад, он гоҳ $x \neq 0$ ва $y \neq 0$.

Муодилаи дуёми системаро чунин менависем: $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$.

Дар муодилаи ҳосилшуда қимати $x+y=12$ -ро гузошта

$$\frac{12}{xy} = \frac{3}{8} \text{ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо } xy = 32.$$

Ҳалли системаи додашуда ба ҳалли системаи зерин оварда мерасонад:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Дар асоси теоремаи ба теоремаи Виет чаппа ҳосил мекунем: $x_1=4$, $y_1=8$; $x_2=8$, $y_2=4$.

Ҷавоб: $(4; 8)$, $(8; 4)$. ▲

Масъалаи 4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Муодилаи дуёми системаро ба намуди $xy(x-y) = 2$ навишта мегирем. Равшан аст, ки $x \neq 0$, $y \neq 0$, ва $x-y \neq 0$, дар ин ҳол муодилаи якуми системаро ба муодилаи дуюм тақсим карда, ҳосил мекунем

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x-y)} = \frac{7}{2};$$

$$2(x^2 + xy + y^2) = 7xy,$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Муодилаи ҳосилшударо ҳамчун ба сифати муодилаи квадратӣ нисбат ба x ҳисобида, решаҳояшро муайян мекунем:

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{4}.$$

Аз ин ҷо $x_1 = 2y$ ёки $x_2 = \frac{y}{2}$.

Ба муодилаи дуҷуми система ифодаи x бо y ифода кардашударо гузошта, ҳосил мекунем:

1) агар $x = 2y$ бошад, дар ин ҳол $4y^3 - 2y^3 = 2$, аз ин ҷо $y^3 = 1$ ва $x = 2$;

2) агар $x = \frac{y}{2}$ бошад, дар ин ҳол $\frac{y^3}{4} - \frac{y^2}{2} = 2$, аз ин ҷо $y^3 = -8$, $y = -2$

ва $x = -1$.

Ҷавоб: $(2; 1)$, $(-1; -2)$.

Масъалаи 5. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 7, \\ x^3 + 8y^3 = 35. \end{cases}$$

Формулаи суммаи кубҳоро истифода бурда муодилаи дуҷуми системаро ба намуди зерин навишта мегирем:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 35.$$

Ин муодиларо ба муодилаи якуми система тақсим карда, меёбем:
 $x + 2y = 5$.

Дар ин муодила $2y$ -ро бо воситаи x ифода кунем: $2y = 5 - x$ ва ба муодилаи дуҷуми система мегузорем:

$$x^3 + (5 - x)^3 = 35,$$

$$\begin{aligned}
 x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 &= 35, \\
 15x^2 - 75x + 90 &= 0, \\
 x^2 - 5x + 6 &= 0, \\
 x_1 &= 3, \quad x_2 = 2.
 \end{aligned}$$

Мувофиқан, қиматҳои y -ро меёбем:

1) $2y = 5 - 3$, аз ин ҷо $y_1 = 1$, 2) $2y = 5 - 2$, аз ин ҷо $y_2 = \frac{3}{2}$.

Ҷавоб: $(3; 1)$, $(2; \frac{3}{2})$.

Масъалаи 6. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ истифода мебарем $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Дар ин ҳол муодилаи дуоми

система намуди $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$ -ро мегирад. Ду тарафи ин муодиларо ба t зарб

мезанем:

$$t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0.$$

Аз ин ҷо $t_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$.

Аз сабаби $t > 0$ будан $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$ ёки $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$, аз ин ҷо $x = \frac{9}{4}y$.

Ба ҷои x -и муодилаи якуми система гузошта ҳосил мекунем:

$$\frac{9}{4}y - y = 5, \quad \frac{5}{4}y = 5, \quad y = 4, \text{ аз ҳамин сабаб } x = 9.$$

Ҷавоб: $(9; 4)$.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: (165–175):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$
166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$
167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$
168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$
169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8y^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$
170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$
171. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

$$172. \quad 1) \begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$$

$$173. \quad 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$$

$$174. \quad 1) \begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$$

$$175. \quad 1) \begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

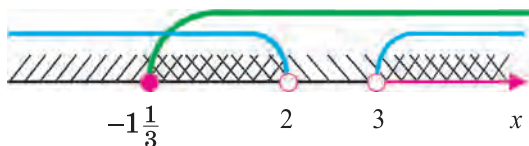
§ 15. СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ ДАРАҶАИ ДУЮМИ ЯКНОМАЉУМА

Масъалаи 1. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Нобаробарии якум нобаробарии квадратӣ ва дуумаш бошад нобаробарии хаттӣ мебошад. Ҳалли нобаробарии якум, ки дар параграфи 6 масъалаи 2 нишон дода будем аз ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x < 2$ ва $x > 3$ иборат буд. Ҳалли нобаробарии дуум ададҳои фосилаи $x \geq -1\frac{1}{3}$ мебошад. Дар як тири ададӣ ҳалҳои нобаробариҳои якумро ва дуумро тасвир кунем. Равшан аст, ки ададҳои дар як вақт нобаробариҳои

системаро қонёқунанда аз фосилаҳои $-1\frac{1}{3} \leq x < 2$ ва $x > 3$ ва $x < 3$ иборат аст (расми 44).



Расми 44.

Ҷавоб: $-1\frac{1}{3} \leq x < 2, x > 3$. ▲

Масъалаи 2. Нобаробариро ҳал кунед:

$$|x^2 - x - 1| < 1.$$

△ Нобаробарии $|x^2 - x - 1| < 1$ ба нобаробарии дучандаи $-1 < x^2 - x - 1 < 1$ баробарқувва аст. Ин бошад ба ду системаи нобаробариҳои зерин баробарқувва мебошад:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

ё ки

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

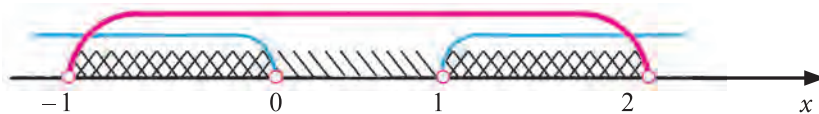
Сараввал системаи нобаробарии якумро ҳал мекунем:

$$D = (-1)^2 - 4(-2) = 9 > 0, \text{ пас } x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, x_2 = \frac{1+3}{2} = 2. \text{ Аз ин ҷо ҳал}$$

аз ададҳои фосилаи $-1 < x < 2$ иборат аст.

Нобаробарии дуюмро ҳал мекунем: $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Ҳалли ин нобаробарӣ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x < 0$ ва $x > 1$ мебошад.

Ҳалҳои ду нобаробариро дар як тири ададӣ тасвир мекунем (расми 45).



Расми 45 .

Аз ин ҷо ҳалли система аз ҳамаи ададҳои дар фосилаҳои $-1 < x < 0$ ва $1 < x < 2$ хобида иборат аст.

Ҷавоб: $-1 < x < 0$, $1 < x < 2$. ▲

Масъалаи 3. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

$$y = \sqrt{3x^2 - x - 14} + \sqrt{-x}.$$

▲ Аз шарти адади тахти решаи квадратӣ манфӣ нашуданаш, соҳаи муайянии функсия аз ҳалли системаи нобаробарии зерин иборат мешавад:

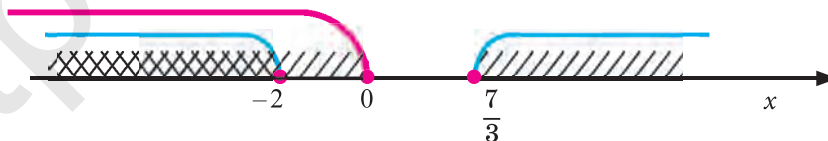
$$\begin{cases} 3x^2 - x - 14 \geq 0, \\ -x \geq 0. \end{cases}$$

Нобаробарии якумро ҳал мекунем. Дискриминанти сеаъзогии квадратии $3x^2 - x - 14$ -ро меёбем:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14) = 169, \text{ пас } x_1 = \frac{1 - 13}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{1 + 13}{6} = \frac{7}{3}.$$

Аз сабаби шохаҳои сеаъзогии квадратӣ ба боло раван будан, ҳалли нобаробарии якум аз фосилаҳои $x \leq -2$ ва $x \geq \frac{7}{3}$ иборат аст.

Равшан аст, ки нобаробарии дуюмро ба -1 зарб карда, ҳалли он аз ҳамаи ададҳои бутуни аз фосилаи $x \leq 0$ гирифташуда иборат бударо дидан мумкин аст. Ҳалҳои нобаробариҳои якум ва дуюмро дар як тири ададӣ тасвир мекунем (расми 46).



Расми 46.

Аз $x \leq -2$ будани ҳалли система бармеояд

Ҷавоб: $x \leq -2$. ▲

Машқҳо

176. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$1) \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ 4x + 9 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leq 0, \\ 2x + 7 < 0. \end{cases}$$

177. Нобаробариҳо ҳал кунед:

$$1) |x^2 - 6x| < 27; \quad 2) |x^2 + 6x| \leq 27; \\ 3) |x^2 + 4x| < 12; \quad 4) |x^2 - 4x| \leq 12.$$

Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед: (178–181):

$$178. \quad 1) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + x + 6 > 0. \end{cases}$$

$$179. \quad 1) \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$$180. \quad 1) \begin{cases} 7x - x^2 > 0, \\ 36 - x^2 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8x + x^2 < 0, \\ 49 - x^2 > 0. \end{cases}$$

$$181. \quad 1) \begin{cases} -x^2 + x + 20 \leq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + 4x < 0, \\ -x^2 + x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

182. Соҳаи муайяни функсияро ёбед:

$$1) y = \sqrt{-x^2 - 6x - 8} + \sqrt{\frac{1}{3}x + 2}, \quad 2) y = \sqrt{x - x^2} - \sqrt{-x^2 + 12x - 35}.$$

§ 16. ИСБОТИ НОБАРОБАРИҲОИ СОДДА

Усулҳои гуногуни исботи нобаробариҳо мавҷуд аст. Истифодаи баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки миёнаи арифметикӣ ададҳои мусбати a ва b аз миёнаи геометрии ин ададҳо хурд намебошад.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

△ Нобаробарио бевосита ба таъриф асос карда исбот мекунем, дар ин ҷо исботи $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ талаб карда мешавад. Тарафи чапи ин нобаробарио табдил дода, зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Дар муносибати (1) аломати баробарӣ ҳангоми $a=b$ будан дуруст буданаширо таъкид менамоем ▲

Масъалаи 2. Исбот кунед ки миёнаи геометрии ду адади мусбати a ва b аз миёнаи гармоникӣ ин ададҳо хурд намебошад:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (2)$$

△ Барои исботи ин нобаробарӣ аз исботи нобаробарии (1) ва инчунин агар суръати қаср тағйир наёфта маҳраҷаш хурд шавад қимати қаср қалон мешавад, истифода бурда исбот мекунем

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

Масъалаи 3. Барои ҳар гуна адади мусбати a нобаробарии

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (3)$$

-ро исбот кунед.

△ Ин нобаробарио бо усули баръакс фарз кардан исбот мекунем. Барои ин дар ягон қимати мусбати a нобаробарӣ иҷро намешавад гуфта фарз мекунем, яъне нобаробарии зерин ҷой дорад.

$$a + \frac{1}{a} < 2$$

Ду тарафи нобаробариро ба a зарб карда ҳосил мекунем:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

яъне $a^2 + 1 - 2a < 0$ ёки $(a - 1)^2 < 0$, ин бошад ,нобаробарии нодуруст, чунки квадратӣ ҳар як адади ҳақиқӣ (аз ҷумла $(a - 1)^2$) манфӣ намебошад. Зиддияти ҳосилшуда нобаробарии (3)-ро дар ҳар як қимати мусбати a нобаробарии дуруст буданаширо нишон медиҳад. ▲

Масъалаи 4. Фурӯшанда себҳоро дар тарозуи содда бар кашида истодааст. Харидор 1 кг себ харид, баъд аз фурӯшанда ҷои себ ва санги тарозуро иваз карда баркашиданро илтимос карда, боз 1 кг себ гирифт. Агар тарозу рост карда нашуда кӣ зарар мебинад?

△ Фарз мекунем китфҳои тарозу ба a ва b баробар аст (расми 47). Аз расм дида мешавад, ки $a \neq b$. Дар навбати якум харидор x кг себ гирифт.

Аз курси физика маълум аст, ки $x \cdot b = 1 \cdot a$, аз ин ҷо $x = \frac{a}{b}$. Дар дафъаи дуюм харидор y кг себ гирифт. Аз шarti мувозанатӣ $y \cdot a = 1 \cdot b$, аз ин ҷо

$y = \frac{b}{a}$. Ҳамин тавр, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ себ харида гирифтааст. Аз миёнаи арифметикӣ

ва миёнаи геометрии ададҳои $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ истифода бурда нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

аз ин ҷо $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Ҷавоб: фурӯшанда зарар мебинад ▲

183. Барои ададҳои дилхоҳи ҳақиқии a, b, x чой доштани нобаробариҳои зеринро исбот кунед:

$$1) \frac{a^2 + 1}{2} \geq a; \quad 2) \frac{b^2 + 16}{4} \geq b; \quad 3) \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1; \quad 4) \frac{2x}{4x^2 + 9} \leq \frac{1}{6}.$$

184. Агар $ab > 0$ бошад, нобаробариҳо исбот кунед:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \quad 2) (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

185. Агар $a \geq -1$, $a \neq 0$ бошад, нобаробариҳо исбот кунед:

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a + 1}.$$

186. $a \geq 0$, $b \geq 0$ ва $a \neq b$ бошад, дар ин ҳол кадоми аз $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ ва $2\sqrt{2(a+b)}\sqrt{ab}$ калон аст?

187. Нобаробариҳо исбот кунед:

$$(a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 6) > 96a^2,$$

дар ин ҳолат $a > 0$.

188. Агар $a > 0$ бошад, нобаробариҳо исбот кунед :

$$\frac{a + 4}{2} + \frac{a + 9}{2} > 5\sqrt{a}.$$

189. Агар a, b, c, d ададҳои мусбат бошад, дар ин ҳол

$$\frac{a + c}{2} + \frac{b + d}{2} \geq \sqrt{(a + b)(c + d)}$$

нобаробариҳо исбот кунед:

190. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$ ва $c > 0$ бошад, дар ин ҳол $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ -ро исбот кунед:

191. Агар $a > 0$, $b > 0$ бошад, дар ин ҳол $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ -ро исбот кунед:

192. Агар $a > 0$, $b > 0$ ва $c > 0$ бошад, дар ин ҳол нобаробарии $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$ -ро ҳақиқатан исбот кунед:

Машиқҳо оид ба боби II

193. Ифодаи додашударо ба намуди сеаъзогии квадратии як тағйирёбанда дошта нависед:

1) $2y^2 - xy + 3$, агар $y = 3x + 1$;

2) $2xy + 3x^2 - 7$, агар $x = 2y + 1$ бошад.

194. Системаи муодилаҳоро бо усули гузориш ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Системаи муодилаҳоро бо истифодаи теоремаи ба теоремаи Виет ҷаппа ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (196–198):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$
197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$
198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (199–204):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \frac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \frac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$
200. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$
201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

$$202. \quad 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$$

$$203. \quad 1) \begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$$

$$204. \quad 1) \begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

205. 1) Адади дурақама аз ҳосили чамъи рақамҳояш се маротиба калон аст, квадрати ҳосили чамъи рақамҳояш бошад аз адади додашуда се маротиба калон аст. Ин ададро ёбед.

2) Адади дурақама аз ҳосили чамъи рақамҳояш 4 маротиба калон буда, квадрати ҳосили чамъи рақамҳояш $\frac{3}{2}$ қисми адади додашударо ташкил медиҳад. Ин ададро ёбед.

206. 1) Нисбати тарафҳои квадрат 5:4 аст. Агар тарафҳои ҳар як квадратро 2 см кӯтоҳ кунем, он гоҳ фарқи масоҳатҳои квадратҳои ҳосилшуда ба 2,8 см² баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед.

2) Нисбати дарозии росткунча ба бари он 3:2 аст. Агар онҳоро 1 см зиёд кунем, масоҳати росткунча нави ҳосилшуда аз масоҳати росткунчаи якум 3 см² калон мешавад. Дарозӣ ва бари росткунчаи якумро ёбед:

207. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$1) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$$

- 208.** 1) Агар $xy = 9$ ва $x > 0$ бошад, қимати хурдтарини $x + y$ -ро ёбед:
 2) Агар $ab = 8$ ва $b > 0$ бошад, дар ин ҳол қимати хурдтарини $2a+b$ -ро ёбед
- 209.** Қимати хурдтарини ифодаро ёбед:
- 1) $4x + \frac{81}{25x}, (x > 0);$ 2) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}, x > 0;$
- 3) $\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}, (y > 0);$ 4) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}.$
- 210.** Агар $x + y = 10$ ва $x > 0, y > 0$ бошад, дар ин ҳол қимати калонтарини xy -ро ёбед:
- 211.** Агар $2x + y = 6$ ва $x > 0, y > 0$ бошад, дар ин ҳол қимати калонтарини xy -ро ёбед:
- 212.** Нобаробариро исбот кунед: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$

Машқҳои санҷишӣ(тест) оид ба боби II

- 1.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$
- А) $x = -4, y = -1;$ Б) $x = 1, y = -4;$
 В) $x = 4, y = -1;$ Г) $(1; 4)$ ва $(4; 1).$
- 2.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$
- А) $x = 3, y = 1;$ Б) $x = 5, y = -1;$
 В) $x = 4, y = 0;$ Г) $x = 1, y = 3.$
- 3.** Фарқи ду адад ба 3 ва ҳосили зарби онҳо ба 28 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед:
- А) 7 ва 4; Б) 5 ва 2;
 В) 14 ва 2; Г) 11 ва 8.

4. Периметри росткунча ба 30 м ва масоҳаташ ба 56 м^2 баробар аст. Дарозии он аз бараш чанд метр дароз аст.

А) 1,2 м; Б) 1 м; В) 2 м; Г) 2,5 м.

5. Масофаи 60 км-ро велосипедрони якум нисбат ба дуюм 1 соат дертар тай мекунад. Агар суръати велосипедрони якум нисбат ба дуюм 5 км/соат кам бошад, суръати ҳар яки онҳоро ёбед:

А) 20 км/соат, 25 км/соат; Б) 10 км/соат, 15 км/соат;
В) 15 км/соат, 20 км/соат; Г) 12 км/соат, 17 км/соат.

6. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:
$$\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$$

А) (0,6; 4) ва (12; 0,2); Б) (0,4; 6) ва (0,12; 2);
В) (4; 0,6) ва (12; 0,2); Г) (4; 0,2) ва (12; 0,6).

7. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:
$$\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$$

А) (6; 4) ва (4; 3); Б) (-3; 6) ва (6; -3);
В) (6; 3) ва (3; -6); Г) (6; 3) ва (6; -3)

8. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед :

$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

А) (-10; 5) ва (2; 5); Б) (-10; 2) ва (5; 5);
В) (5; -10) ва (-10; 2); Г) (5; 5) ва (-2; 10).

9. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$

А) $(4; \frac{1}{2})$ ва $(-2; -1)$; Б) $(-2; \frac{1}{2})$ ва $(4; -1)$;
В) (4; 1) ва $(-4; -2)$; Г) $(-2; -1)$ ва $(2; 1)$.

10. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\frac{y+5}{x-2}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

А) $(-1; 12)$; Б) $(12; -1)$; В) $(-1; 11)$; Г) $(11; -1)$.

11. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

А) $-4 < x < \frac{2}{3}$; Б) $-4,5 < x < \frac{2}{3}$; В) $x > -4,5$; Г) $x < \frac{2}{3}$.

12. Нобаробариҳоро ҳал кунед: $|x^2 + x - 1| \leq 1$.

А) $-2 \leq x \leq 1$, $2 < x \leq 3$; Б) $-2 \leq x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$;

В) $-1 \leq x \leq 0$, $1 < x \leq 2$; Г) $x \leq -2$, $x \geq 1$.



Масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъала. Ду мошини боркаш якҷоя кор карда борро дар 6 соат кашондана ш лозим аст. Мошини дуюм аз сабаби ба саршавии кор дер мондана ш, то омадани он мошини якум $\frac{3}{5}$ қисми борро кашонида шуда буд. Бори боқимондари танҳо мошини дуюм кашонид ва ҳамагӣ 12 соат вақт сарф шуд. Ҳар як мошина алоҳида-алоҳида борро дар чӣ қадар вақт ба манзил мерасонад?

△ Бори мошинҳои боркаш ба манзил мерасондари 1 гуфта қабул мекунем. Фарз мекунем мошини якум танҳо ҳудаш барои кашондани бор х соат ва мошини дуюм танҳо ҳудаш у соат вақт сарф мекунад. Дар ин ҳол мошини якум дар як соат $\frac{1}{x}$ қисми бор ва мошини дуюм $\frac{1}{y}$ қисми борро мекашонад.

Дар якчоягӣ ҳар ду мошин дар як соат $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ қисми борро мекашонад ва мувофиқи шарт масъала борро дар 6 соат ба манзил мерасонад. Аз ҳамин сабаб, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1$.

Лекин дар асл мошини якум ба кашонидани аз $\frac{3}{5}$ қисми бор аз $\frac{3}{5}$ ҳисса вақти худро сарф намуд, барои кашондани қисми боқимондаи бор мошини дуюм $\frac{2}{5}$ қисми вақти худро сарф намуд. Дар ин ҳолат барои кашондани бор 12 соат вақт сарф шудаашро ба ҳисоб гирем, муодилаи дуюмро ҳосил мекунем:

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12.$$

Масъала ба ҳалли системаи зерин оварда расонд:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1, \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12. \end{cases}$$

Системаро содда карда, баъд бо усули гузориш ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 6x + 6y = xy, \\ 3x + 2y = 60, \end{cases}$$

$$3x = 60 - 2y, \quad 120 - 4y + 6y = (20 - \frac{2}{3}y)y,$$

$$60 + y = 10y - \frac{1}{3}y^2,$$

аз ин ҷо, $y^2 - 27y + 180 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{27}{2} \pm \sqrt{\frac{729}{4} - 180} = \frac{27}{2} \pm \frac{3}{2}, \quad y_1 = 15, \quad y_2 = 12.$$

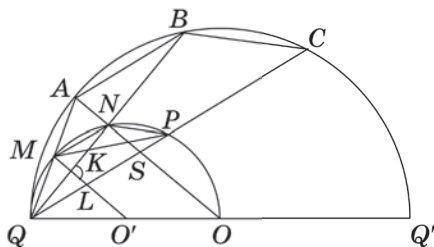
Аз формулаи $x = -20 - \frac{2}{3}y$ истифода бурда ҳосил мекунем
 $x_1 = 10, x_2 = 12.$

Ҷавоб: 10 соат ва 15 соат – агар мошинҳо имкониятҳои бардоштани бори гуногун дошта бошад; 12 соат ва 12 соат – агар мошинҳои боркаш имкониятҳои бардоштани бори якхела дошта бошад. ▲

Масъалаҳо

1. 1) Дар зали тамошои якум 420- то, дар зали дуюм 480- то ҷой ҳаст. Дар зали дуюм нисбат ба зали якум 5 қатор кам, лекин дар ҳар як қатор нисбат ба қаторҳои зали якум ҷойҳо 10- то зиёд аст. Дар ҳар як қатори зали якум чандтоғӣ ҷойи нишаст аст?
- 2) Дар зали сурх 320- то, дар зали кабуд 360 то ҷой ҳаст. Дар зали сурх нисбат ба зали кабуд 2- то қатор зиёд аст. Лекин дар ҳар як қатораи нисбат ба қаторҳои зали кабуд 4- тоғӣ ҷой кам. Дар зали сурх чандто қатор ҳаст.
2. 1) Дуто насос якҷоя қор қарда ҳавзи 80 м^3 ҳаҷм доштаро дар вақти муайян бо об пур мекунад. Агар танҳо бо насоси якуми самаранокиаш $1\frac{1}{3}$ маротиба зиёд шуда, ҳавзро барои пур кардан аз 2 соат зиёдтар вақт сарф мешуд. Агар танҳо бо насоси дуҷуми самаранокиаш дар як соат 1 м^3 кам шуда, ҳавзро бо об пур кунем нисбат ба вақти ҳавзро бо об пур кардан сарфшуда $3\frac{1}{3}$ маротиба зиёд вақт сарф мешуд (нисбат ба вақти ҳавзро ду насос якҷоя бо об пур қарда сарфшуда) самаранокии ҳар як насосро ёбед?
- 2) Ду бригадаи шумораи коргаронаш гуногун лекин малақаҳои якхела дошта, детал тайёр мекунам ва ҳар як коргар дар як рӯз ду дона детал тайёр мекунад. Аввал танҳо бригадаи якум меҳнат қарда 32 дона детал, баъд бригадаи дуюм танҳо меҳнат қарда 48 дона детал тайёр қарданд. Барои тайёр қардани ин деталҳо 4 рӯз вақт сарф шуд. Пас ду бригада якҷоя 6 рӯз қор қарда, 240 дона детал тайёр қарданд. Дар ҳар як бригада чандтоғӣ коргар ҳаст?

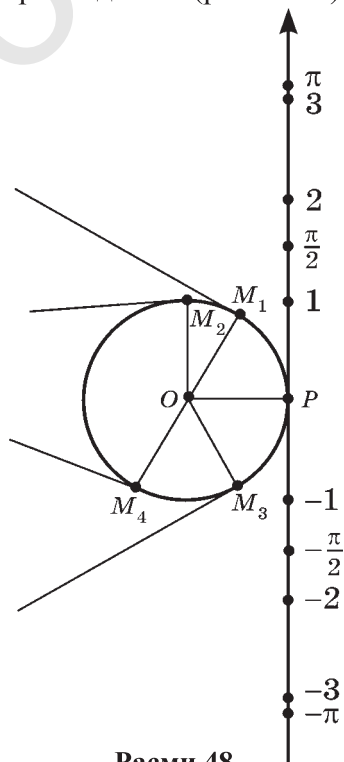
3. 1) Нисфи маҳсулот бо фоидаи 10%, нисфи боқимонда бо фоидаи 20% фурӯхта шуд. Агар фоидаи умумии аз фурӯхтани ҳамаи маҳсулот. 12% ро ташкил диҳад, фоидаи чоряки боқимондаи маҳсулот чанд фоизро ташкил медиҳад.
- 2) Фирмаи савдо ба дӯконҳо маҳсулотҳоро бо нархи иловагӣ оварда мерасонад: ба $\frac{3}{5}$ ҳиссаи маҳсулот 5% нархи изофа, ба нисфи маҳсулоти боқимонда 4% нархи изофа гузошта мефурӯшанд. Агар нархи изофаи ба ҳамаи маҳсулот гузошташуда 7% -ро ташкил диҳад ба нисфи дуҷуми маҳсулот ба ҳисоби фоиз чӣ қадар нархи изофа гузошта шудааст?
4. 1) Омехтаи ду модда ҳаст. Агар ба ин омехта аз моддаи дуюм 3 кг ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳол миқдори он дар омеха ду маротиба зиёд мешавад, агар ба омехтаи ибтидоӣ аз моддаи якум 3 кг ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳол миқдори моддаи дуюм ба ҳисоби фоиз ду маротиба кам мешавад. Массай дар омехтаи ибтидоӣ будаи ҳар як моддаро ёбед.
- 2) Омехтаи ду моеъ мавҷуд аст. Агар ба ин омехта аз моеъи якум 8 литр ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳолат концентратсияи он ду маротиба зиёд мешавад, агар ба омехтаи аввала аз моеъи дуюм 8 л рехта шавад, дар ин ҳолат концентратсияи моеъи якум 1,5 маротиба кам мешавад. Ҳаҷми ҳар як моеъи омехтаро ёбед.
5. Самолёт аз A ба B ба равиши шамоли α аз B ба A ба муқобили шамоли парвоз кард, суръати шамоли бетағйир монд. Дафъаи дигар самолёт рейсро бо маршрути пешина дар обу ҳавои бешамоли амалӣ гардонд. Дар ҳар ду ҳолат ҳам мотори самолёт бо як ҳел тавоноӣ қарор кард. Дар қадом ҳолат ба парвози умумӣ вақт камтар сарф мешавад?
6. Ду тракторчи майдони киштро дар p рӯз шудгор мекунанд. Агар тракторчи якум нисфи майдони киштро ва дуҷумаш нисфи дуҷуми боқимондашро шудгор кунад, дар ин ҳол q рӯз сарф мешавад. Исбот кунед, ки $q \geq 2p$ аст.



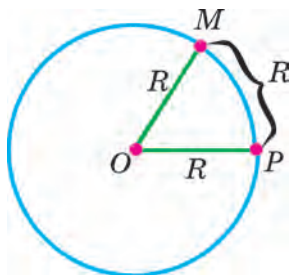
§ 17. ЧЕНАКИ РАДИАНИИ КУНЧ

Фарз мекунем, ки хати рости вертикалӣ ба давраи марказаш дар нуқтаи O ва радиусаш ба 1 баробар ба нуқтаи P расанда аст (расми 48). Ин хати ростро тири ададии ибтидоияш нуқтаи P гуфта, самти болоиашро дар хати рост самти мусбат ҳисоб мекунем. Дар тири адади ба сифати воҳиди ченаки дарозӣ радиуси даврано мегирем. Дар хати рост якҷаид нуқтаҳои: $\pm 1, \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3, \pm \pi$ (ёдовар мешавем, ки π адади ирратсионалии тақрибан ба $3,14$ баробар аст)-ро қайд мекунем.

Ии хати ростро дар нуқтаи P -и давра маҳкамкардашуда ва ба сифати риштаи наёзанда тасаввур карда, онро фикран ба давра мепечонем. Дар ин вақт, нуқтаҳои координатии, масалан $1, \frac{\pi}{2}, -1, -2$ -и хати рости ададӣ(тир) ба чунин нуқтаҳои M_1, M_2, M_3, M_4 -и давра мегузаранд, ки дарозии камони PM_1 ба 1 , дарозии камони ба PM_2 ба $\frac{\pi}{2}$ баробар мешавад ва ғайра.



Расми 48



Расми 49.

Ҳамии тавр, ба ҳар як нуқтаи хати рост ягон нуқтаи давра мувофиқ гузошта мешавад. Барои он ки ба нуқтаи хати росте, ки координаташ ба 1 баробар аст, нуқтаи M_1 мувофиқ гузошта шудааст, кунчи POM_1 -ро кунчи воҳидӣ ҳисобидан мумкин аст ва бо ченаки ин кунҷ чен кардани кунҷҳои дигар табиӣ мебошад. Масалан, кунчи POM_2 ба $\frac{\pi}{2}$, кунчи POM_3 ба -1 ва кунчи POM_4 -ро ба -2 баробар ҳисобидан лозим аст. Ин тавр чен кардани кунҷҳо

дар математика ва физика ба таври васеъ истифода карда мешавад. Дар ин маврид кунҷҳоро дар ченаки радианӣ чен карда шудааст, меноманд. POM_1 бошад кунчи ба 1 радиан (1 рад) баробар номида мешавад. Ба радиуси давра баробар будани дарозии камони PM_1 -ро хотиррасон мекунем. (расми 48)

Акнун давраи ихтиёрии радиуси R -ро дида мебароем ва дар он камони PM -и дарозиаш ба R баробар ва кунчи POM -ро қайд мекунем. (расми 49)



Кунчи марказии ба камони дарозиаш ба радиуси давра баробар тақя кардари, кунчи ба 1 радиан баробар меноманд.

Дар ин ҳолат, кунчи ба 1 радиан баробар камони дарозиаш ба R баробарро дар ҳам мекашад, мегуянд.

Ченаки градусии кунчи ба 1 радиан баробарро ҳисоб мекунем. Азбас- ки камони дарозиаш πR (нимдавра) кунчи марказии 180° -ро мекашад, пас камони дарозиаш ба R баробар кунчи π маротиба хурд бударо мекашад, яъне

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

Азбаски $\pi \approx 3,14$ аст, пас $1 \text{ рад} \approx 57,3$ мешавад.

Агар кунҷ аз α радиан иборат бошад, он гоҳ ченаки градусии он ба зерин баробар мешавад:

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^\circ.$$

(2)

Масъалаи 1. Ченаки градусии кунҷҳои ба 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад баробарро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$1) \pi \text{ рад} = 180^\circ; \quad 2) \frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ; \quad 3) \frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 135^\circ. \quad \blacktriangle$$

Ченаки радиании кунҷи ба 1° -ро меёбем. Азбаски кунҷи 180° ба π рад баробар аст, пас мешавад.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

мешавад.

Агар кунҷ аз α градус иборат бошад, он гоҳ ченаки радиании он ба

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад} \quad (2)$$

баробар мешавад.

Масъалаи 2. Ченаки радиании кунҷи ба 1) 45° ; 2) 15 баробар бударо ёбед. △

Аз рӯи формулаи (2) меёбем:

$$1) 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ рад} = \frac{\pi}{4} \text{ рад}; \quad 2) 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}. \quad \blacktriangle$$

Ченаки градусӣ ва радиании кунҷҳоеро, ки бисёртар вомехӯранд, меорем

Градус	0	30	45	60	90	180
Радян	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Одатан агар ченаки кунҷ бо радианҳо дода шуда бошад, номи „рад“ партофта мешавад.

Ченаки радиании кунҷ барои ҳисоб кардани дарозии камонҳои давра қулай аст. Азбаски кунҷи ба 1 радиан баробар камони дарозиаш ба радиуси R баробарро мекашад, пас кунҷи α радиан камони дарозиаш зеринро мекашад:

$$l = \alpha R \quad (3)$$

Масъалаи 3. Мили акрабаки дақиқаи соати бурчи шахр дар доираи радиусаш $R \approx 0,8$ м ҳаракат мекунад. Мили ин акрабак дар давоми 15 дақиқа чӣ қадар масофаро тай мекунад?

△ Акрабаки соат дар давоми 15 дақиқа ба кунчи ба $\frac{\pi}{2}$ радиан баробар тоб меҳӯрад. Аз рӯи формулаи (3) бошад, агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бошад, меёбем:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3,14}{2} \cdot 0,8 \text{ м} \approx 1,3 \text{ м}.$$

Ҷавоб: 1,3 м ▲

Формулаи (3) ҳангоми радиуси давра $R = 1$ будан, намуди оддиро соҳиб мешавад. Дар ин ҳолат дарозии камон ба бузургии кунчи марказии бо он камон кашидашуда баробар мешавад, яъне $l = \alpha$. Истифодабарии ченаки радианӣ дар математика, физика, техника ва дар дигар фанҳо аз ин ҷиҳат қулай мебошад.

Масъалаи 4. Сектори доиравии радиусаш ба R баробар кунчи α рад-ро соҳиб аст. Масоҳати ин сектор ба $S = \frac{R^2}{2} \alpha$ баробар буданаширо исбот кунед, ки дар ин ҷо $0 < \alpha < \pi$.

△ Масоҳати сектори доиравии π радианӣ (нимдоира) ба $\frac{\pi R^2}{2}$ баробар аст. Бинобар ин масоҳати сектори 1 радиан π маротиба хурд аст, яъне $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Аз ин рӯ масоҳати сектори α радиан ба $\frac{R^2}{2} \alpha$ баробар аст. ▲

Машқҳо

213. Ченаки радиании кунҷҳои дар градусҳо ифодашударо ёбед:

- 1) 40° ; 2) 120° ; 3) 105° ; 4) 150° ;
5) 75° ; 6) 32° ; 7) 100° ; 8) 140° .

214. Ченаки градусии кунҷҳои дар радианҳо ифодашударо ёбед:

- 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;
6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Ададҳоро то саҳеҳии 0,01 нависед:

- 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π ; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$.

216. Ададҳоро муқоиса кунед:

- 1) $\frac{\pi}{2}$ ва 2; 2) 2π ва 6,7; 3) π ва $3\frac{1}{5}$;
4) $\frac{3}{2}\pi$ ва 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ ва $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ ва $-\sqrt{10}$.

217. (Шифохӣ.) Ченаки градусӣ ва радиании кунҷҳои: а) секунҷаи баробартараф; б) секунҷаи росткунҷаи баробарпахлу; в) квадрат; г) шашкунҷаи мунтазамро муайян кунед.

218. Кунҷи марказии 0,9 рад камони дарозиаш 0,36 м-ро дарҳам кашад, радиуси давраро ёбед.

219. Агар радиуси давра ба 1,5 см баробар бошад, бузургии кунҷи марказии камони дарозиаш 3 см кашида истодаро ёбед.

220. Камони сектори доиравино кунҷи $\frac{3\pi}{4}$ рад дар ҳам кашида меистад. Агар радиуси доира ба 1 см баробар бошад, масоҳати секторро ёбед.

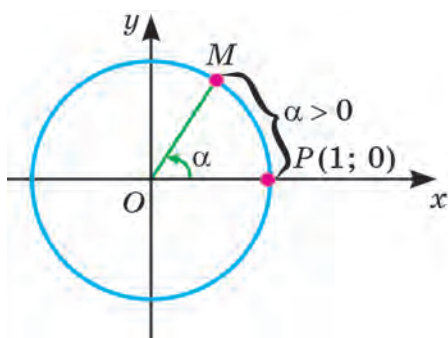
221. Радиуси доира ба 2,5 см, масоҳати сектори доиравӣ бошад, ба $6,25 \text{ см}^2$ баробар аст. Кунҷи камони ҳамон сектори доиравӣ кашидаистодаро ёбед.

§ 18.

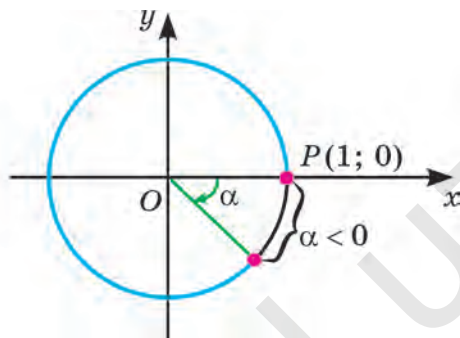
ДАР АТРОФИ ИБТИДОИ КООРДИНАТАҲО ЧАРХ ЗАНОНИДАНИ НУҚТА

Дар параграфи аввала аз усули нишондиҳандаи мувофиқати нуқтаҳои хати рости ададӣ ба нуқтаҳои давра истифода карда шуд. Акнун чигунагии мувофиқати байни ададҳои ҳақиқиро бо нуқтаҳои давра ҳаёмои чархзании нуқтаҳои давра нишон медиҳем.

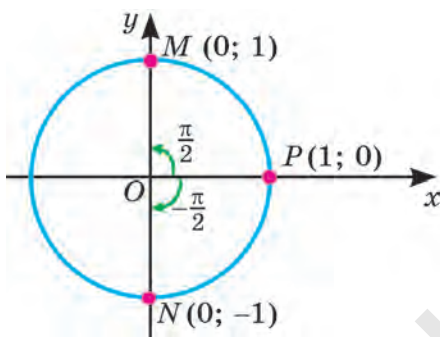
Дар ҳамвори координатӣ давраи радиусаш ба 1 баробар ва марказаш дар ибтидои координатаҳо бударо дида мебароем. Он давраи воҳидӣ номида мешавад. Мафҳуми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи α радиан чархзании нуқтаи давраи воҳидиро дохил мекунем (дар ии ҷо α — адади ҳақиқии дилхоҳ).



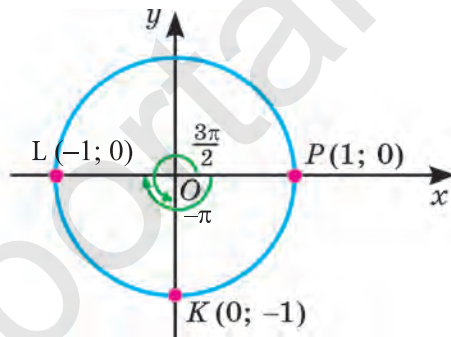
Расми 50.



Расми 51.



Расми 52.



Расми 53.

1. Бигзор, $\alpha > 0$ бошад. Нуктаи муқобили ҳаракати акрабаки соат қад-қади давраи воҳидӣ аз нуктаи P роҳи дарозиаш ба a баробарро тай намояд (расми 50). Нуктаи охирини роҳро бо M ишорат мекунем.

Дар ин ҳолат нуктаи M ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи a радиан чарх занонидани нуктаи P ҳосил мешавад.

2. Бигзор, $\alpha < 0$ бошад. Дар ин ҳолат ҳаракат ба кунҷи a радиан тобхӯриро мувофиқи самти акрабаки соат ва роҳи дарозиаш $|a|$ -ро тай намудани нуктаи мефаҳмонад (расми 51).

Ба 0 радиан чарх задан ин дар ҷои худ мондани нукта аст.

Мисолҳо:

1) Ҳангоми ба кунҷи $\frac{\pi}{2}$ рад чархзании нуктаи $P(1; 0)$ нуктаи координатаҳояш $(0; 1)$ -и M ҳосил карда мешавад (расми 52).

2) Ҳангоми ба кунҷи $-\frac{\pi}{2}$ рад чархзании нуктаи $P(1; 0)$ нуктаи $N(0; -1)$ ҳосил мешавад (расми 52).

3) Ҳангоми ба кунчи $\frac{3\pi}{2}$ рад чархзании нуктаи $P(1;0)$ нуктаи $K(0; -1)$ ҳосил мешавад. (расми 53).

4) Ҳангоми ба кунчи $-\pi$ рад чархзании нуктаи $P(1; 0)$ нуктаи $L(-1; 0)$ ҳосил мешавад (расми 53).

Дар курси геометрия кунҷҳои аз 0° то 180° дида баромада шудааст.

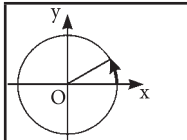
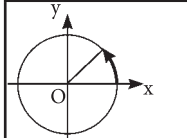
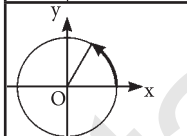
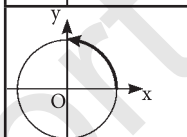
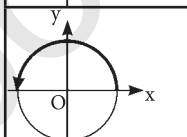
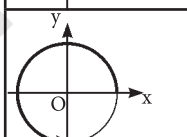
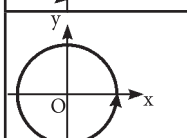
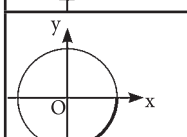
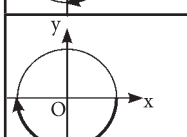
Аз чархзании нуктаҳои давраи воҳидӣ дар атрофи ибтидои координатаҳо истифода бурда, кунҷҳои аз 180° калон, ҳамчунин, кунҷҳои манфиро низ дида баромадан мумкин аст. Чархзании кунҷхоро ҳам бо градусҳо ва ҳам бо радианҳо ифода кардан мумкин аст. Масалан, чархзании нуктаи $P(1; 0)$ ба кунчи $\frac{3\pi}{2}$ чархзании онро ба 270°

мефаҳмонад; чархзанӣ ба кунчи $-\frac{\pi}{2}$ ин -90° мебошад.

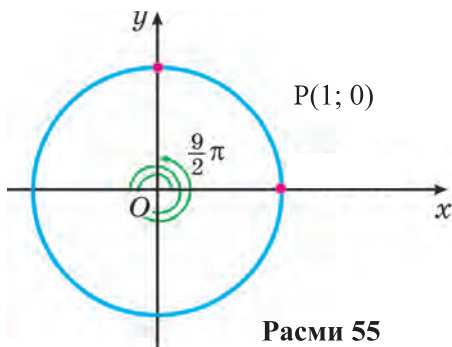
Ҷадвали чархзании радианӣ ва градусии баъзе кунҷхоро меорем (расми 54).

Таъкид карда мегузарем, ки чархзании нуктаи $P(1; 0)$ ба кунчи 2π , яъне 360° ин ба мавқеи аввалааш баргаштани он аст (ба ҷадвал нигаред). Ин нуктаро ба -2π , яъне -360° , чарх занонем, он боз ба мавқеи аввала бармегардад.

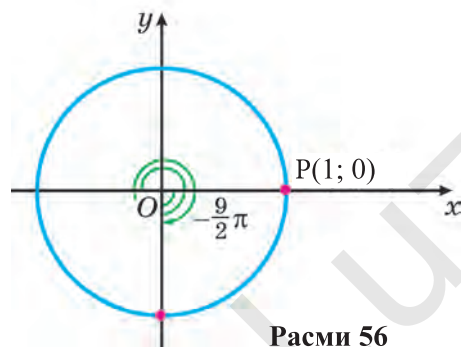
Мисолхоро оид ба чархзании нукта ба кунҷҳои аз 2π калон ва аз -2π хурд дида мебароем. Масалан, ҳангоми ба кунчи $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ чарх задан, нукта

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

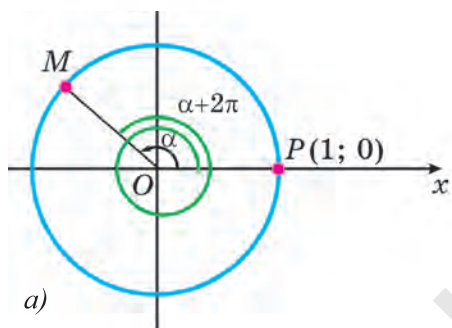
Расми 54.



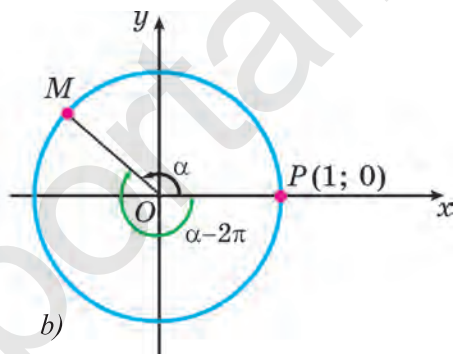
Расми 55



Расми 56



a)



b)

Расми 57.

муқобили самти акрабаки соат ду маротиба пурра чарх мезанад ва боз роҳи $\frac{\pi}{2}$ -ро тай мекунад (расми 55).

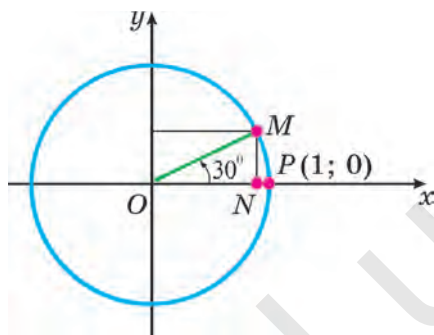
Ҳангоми ба кунчи $-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ чарх задан, нуқта мувофиқи самти акрабаки соат ду маротиба пурра чарх мезанад ва боз дар ҳамои самт роҳи ба $\frac{\pi}{2}$ баробарро тай мекунад (расми 56).

Таъкид мекунем, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;0)$ ба кунчи $-\frac{9\pi}{2}$ айнан чархзании онро ба кунчи $-\frac{\pi}{2}$ ҳосил мекунад (расми 56).

Умуман, агар ба кунчи $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ дар ин ҷо k – адади бугун) бошад, он гоҳ ҳангоми ба кунчи α чарх занонидан, нуқтаи айнан ҳангоми ба кунчи α_0 чарх занонидан ҳосил мешавад.

Ҳамин тавр, барои ҳар як адади ҳақиқии a нуқтаи ягонаи давраи воҳидӣ, ки ҳангоми ба кунҷи a рад чарх занонидани нуқтаи $(1; 0)$ ҳосил мешавад, мувофиқ меояд.

Лекин, айнан барои як нуқтаи M -и давраи воҳидӣ (ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ нуқтаи M ҳосил мешаванд) ададҳои ҳақиқии ниҳоят бисёри $a + 2\pi k$ мувофиқ меояд, k — адади бутун (расми 57).



Расми 58.

Масъалаи 1. Ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ ба кунҷи: 1) 7π ;

2) $-\frac{5\pi}{2}$ координатаҳои нуқтаи ҳосилшударо ёбед.

△ Азбаски $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$ мебошад, пас ҳангоми ба 7π чарх занонидан, ҳамон нуқтаи ҳангоми ба π чарх занонидан ҳосилшуда, яъне нуқтаи координатааш $(-1; 0)$ ҳосил мешавад.

2) Азбаски $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ мебошад, пас ҳангоми ба $-\frac{5\pi}{2}$ чарх задан ҳамон нуқтаи ҳангоми ба $-\frac{\pi}{2}$ чарх задан ҳосилшуда, яъне нуқтаи координатааш $(0; -1)$ ҳосил мешавад. ▲

Масъалаи 2. Ҳамаи кунҷҳои чархзанандаеро нависед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $(1; 0)$ нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ҳосил мешавад.

△ Аз секунҷаи росткунҷаи (расми 58) ба $\frac{\pi}{6}$ баробар будани кунҷи $\angle NOM$ бармеояд, яъне яке аз кунҷҳои чархзанандаи мувофиқ ба $\frac{\pi}{6}$ баробар аст. Бинобар ин ҳамаи кунҷҳои чархзанӣ, ки ҳангоми чархзании нуқтаи

$(1; 0)$ нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ҳосил мешавад, чунин ифода карда мешавад:

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, дар ин ҷо k — адади бутуни ихтиёрӣ, яъне $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ▲

Машқҳо

- 222.** Координатаҳои нуқтаҳоеро ёбед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ -и давраи воҳидӣ ба кунчи:
- 1) 90° ; 2) $-\pi$; 3) 180° ; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 270° ; 6) 2π
- ҳосил мешавад.
- 223.** Дар давраи воҳиди нуқтаҳоеро, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ ба кунчи
- 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;
- 5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi$; 6) $-\pi - 2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4} - 4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3} + 6\pi$
- ҳосил мешавад, қайд кунед
- 224.** Чоряки координатаҳои нуқтаи ҷойгиршударо муайян кунед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ ба кунчи:
- 1) $2,1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) 727° ; 6) 460°
- ҳосил мешавад.
- 225.** Координатаҳои нуқтаеро, ки ҳангоми ба кунчи:
- 1) 3π ; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π ;
- 5) 540° ; 6) 810° ; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) 450°
- гардонидани нуқтаи $P(1; 0)$ ҳосил мешавад, ёбед.
- 226.** Ҳамаи кунҷҳои, чархзаниро, ки барои ҳосил кардани нуқтаҳои $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$ аз чархзании нуқтаи $P(1; 0)$, лозим мешавад, нависед.
- 227.** Нуқтаи $P(1; 0)$ дода шудааст. Чоряки координатаҳоеро, ки ҳангоми ба кунчи: 1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8 чархзанӣ, нуқтаи ҳосилшуда ҷойгир мешавад, муайян кунед.
-
- 228.** Агар:
- 1) $a = 6,7\pi$; 2) $a = 9,8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;
- 4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$
- бошад, адади x -ро, ки баробарии $a = x + 2\pi k$ -ро иҷро мекунад (дар ин ҷо $0 \leq x \leq 2\pi$) ва адади натуралии k -ро ёбед.

229. Дар давраи воҳидӣ нуқтаеро созед, ки он ҳангоми ба кунчи:

- 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$;
 5) $4,5\pi$; 6) $5,5\pi$; 7) -6π ; 8) -7π

чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ ҳосил мешавад.

230. Координатаҳои нуқтаеро ёбед, ки ҳангоми ба кунчи:

- 1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$

(дар ин ҷо k – адади бутун) чархзании нуқтаи $P(1; 0)$ ҳосил мешавад.

231. Ҳамаи кунҷҳои чархзаниро, ки барои ҳосил кардани нуқтаҳои:

- 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

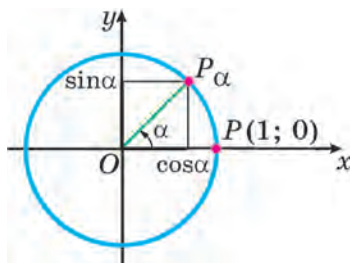
аз чархзании нуқтаи $(1; 0)$ лозим аст, нависед.

§ 19. ТАЪРИФИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶ

Дар курси геометрия синус, косинус ва тангенс кунчи дар градусҳо ифодаёфта дохил карда шуда буд. Ин кунҷ дар фосилаи аз 0° то 180° дида баромада шудааст. Синус ва косинуси кунчи ихтиёрӣ ба таври зерин таъриф дода мешаванд:



Таърифи 1. Синуси кунчи α гуфта, ординатаи нуқтаеро меноманд, ки он ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунчи α чарх занонидани нуқтаи $(1; 0)$ ҳосил мешавад (ишорат карда мешавад: $\sin \alpha$).





Косинуси кунчи α гуфта, абсиссаи нуктаеро меноманд, ки он ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунчи α чарх занонидани нуктаи (1; 0) ҳосил мешавад (ишорат карда мешавад: $\cos \alpha$).

Дар ин таърифҳо кунчи α ҳам дар градусҳо, ҳам дар радианҳо ифода шуданашон мумкин аст.

Масалан, ҳангоми нуктаи (1; 0)-ро ба кунчи $\frac{\pi}{2}$ яъне 90° чарх занонидан, нуктаи (0; 1) ҳосил мешавад. Ординатаи нуктаи (0; 1) ба 1 баробар аст, бинобар ин

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

абсиссаи ин нукта ба 0 баробар аст, бинобар ин

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Таъкид мекунем, ки ҳангоми кунҷ дар фосилаи аз 0° то 180° будан, таърифҳои синус ва косинус ба таърифҳои синус ва косинуси курси геометрия маълум мувофиқ меояд. Масалан,

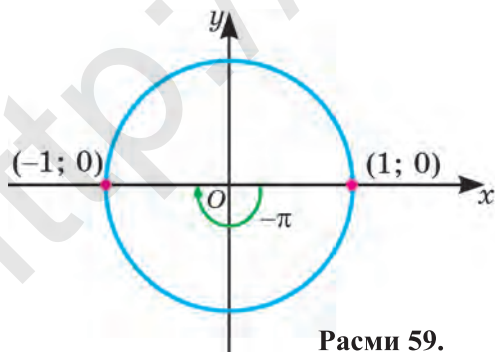
$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \pi = \cos 180^\circ = -1.$$

Масъалаи 1. $\sin(-\pi)$ ва $\cos(-\pi)$ -ро ёбед.

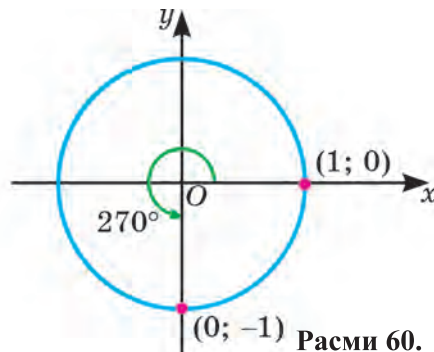
△ Ҳангоми ба кунҷи $-\pi$ чарх занонидани нуктаи (1; 0) нуктаи (-1; 0) ҳосил мешавад (расми 59). Бинобар ин, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$. ▲

Масъалаи 2. $\sin 270^\circ$ ва $\cos 270^\circ$ -ро ёбед.

△ Ҳангоми ба кунҷи 270° чарх занонидан нуктаи (1; 0) ба нуктаи (0; -1) мегузарад (расми 60). Бинобар ин, $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$. ▲



Расми 59.



Расми 60.

Масъалаи 3. Муодилаи $\sin t = 0$ -ро ҳал кунед.

△ Ҳал кардани муодилаи $\sin t = 0$ ин муайян кардани ҳамаи кунҷҳои мебошад, ки синуси он ба 0 баробар аст.

Дар давраи воҳиди ординатааш ба сифр баробар ду нуқтаи: $(1; 0)$ ва $(-1; 0)$ мавҷуд аст. Ин нуқтаҳо ҳангоми нуқтаи $(1; 0)$ -ро (расми 59) ба кунҷҳои $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ ва ғайра, ҳамчунин ба кунҷҳои $-\pi, -2\pi, -3\pi$ ва ғайра чарх занонидан ҳосил мешаванд.

Бинобар ин ҳангоми $t = k\pi$ будан (дар ин ҷо k — адади дилхоҳи бутун) $\sin t = 0$ мешаванд. ▲

Маҷмӯи ададҳои бутун бо ҳарфи Z ишора карда мешаванд. Барои ишора кардани он, ки адади k ба Z тааллуқ дорад, аз навишти $k \in Z$ («адади k мутааллиқ ба Z » хонда мешавад) истифода мебаранд. Бинобар ин ҷавоби масъалаи 3-ро чунин навиштан мумкин аст: $t = \pi k, k \in Z$.

Масъалаи 4. Муодилаи $\cos t = 0$ -ро ҳал кунед.

△ Дар давраи воҳидӣ ду нуқтаи абсиссааш ба сифр баробар мавҷуд аст: $(0, 1)$ ва $(0, -1)$ (расми 61).

Ин нуқтаҳо ҳангоми нуқтаи $(1; 0)$ -ро ба кунҷҳои $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ва ғайра, ҳамчунин ба кунҷҳои $\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi$ ва ҳоказо, яъне ҳангоми ба кунҷи $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (дар ин ҷо $k \in Z$) чарх занонидан ҳосил мешаванд.

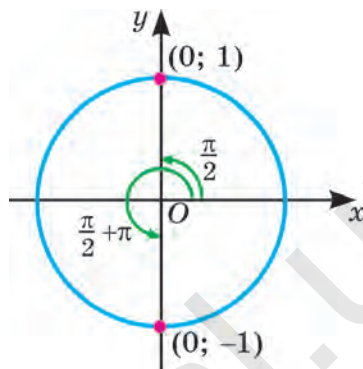
Ҷавоб: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. ▲

Масъалаи 5. Муодиларо ҳал кунед: 1) $\sin t = 1$; 2) $\cos t = 1$.

△ 1) Нуқтаи $(0; 1)$ -и давраи воҳидӣ ординатаи ба як баробарро соҳиб аст. Ин нуқта ҳангоми нуқтаи $(1; 0)$ -ро ба кунҷи $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ чарх занонидан ҳосил мешавад.

2) Ҳангоми нуқтаи $(1; 0)$ -ро ба кунҷи $2k\pi, k \in Z$ чарх занонидан, нуқтаи абсиссааш ба воҳид баробарро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ бошад, $\sin t = 1, t = 2\pi k$ бошад, $\cos t = 1, k \in Z$. ▲



Расми 61.



Таърифи 3. Тангенс кунчи α гуфта, нисбати синуси кунчи α -ро бар косинуси он меноманд (чун $\operatorname{tg} \alpha$ ишорат карда мешавад).

Ҳамин тавр, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Масалан, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Баъзан аз котангенс кунчи α истифода мебаранд (он чун $\operatorname{ctg} \alpha$ ишорат карда мешавад) ва бо формулаи $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ муайян карда мешавад.

Масалан

$$\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Таъкид кардан лозим аст, ки синус ва косинусҳо барои кунчи ихтиёри таъриф дода шуда, қиматҳои онҳо дар фосилаи аз -1 то 1 ҷойгир аст; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ танҳо, барои кунҷҳои $\cos \alpha \neq 0$, яъне ғайр аз кунҷҳои $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ аз фарқкунандаи дилҳо муайян карда шудааст.

Қадвали қиматҳои аксар вохӯрандаи синус, косинус, тангенс ва котангенсро меорем.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Вучуд надорад	0	Вучуд надорад	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Вучуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Вучуд надорад	0	Вучуд надорад

Масъалаи 6. Ҳисоб кунед:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

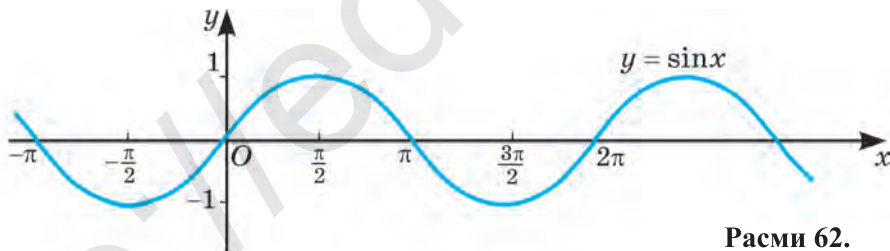
△Аз ҷадвал истифодабурда, ҳосил мекунем:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2,5. \quad \blacktriangle$$

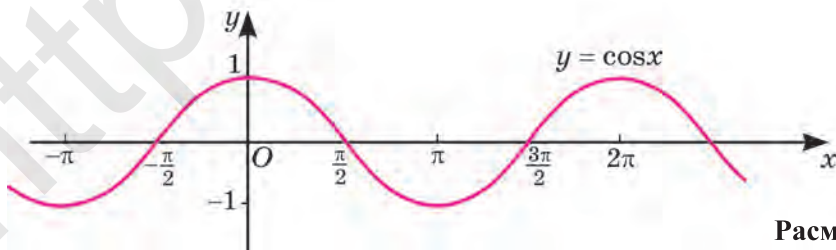
Қиматҳоро барои кунҷҳои ба ин ҷадвал дохилнашудаи синус, косинус, тангенс ва котангенс аз ҷадвали ҷоррақамаи математикии В. М. Брадис, ҳамчунин бо ёрии микрокалькулятор ёфтан мумкин аст.

Агар барои ҳар як адади ҳақиқии x адади $\sin x$ мувофиқ гузошта шуда бошад, он гоҳ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ функсияи $y = \sin x$ додашуда мебошад. Функсияҳои $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ ҳамин гуна муайян карда мешаванд. Функсияи $y = \cos x$ барои $x \in \mathbb{R}$ -и муайяншуда, функсияи $y = \operatorname{tg} x$ барои $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функсияи $y = \operatorname{ctg} x$ бошад, барои $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ муайяншуда мебошанд. Графики функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ дар расмҳои 62 ва 63 тасвир шудаанд.

Функсияҳои $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функсияҳои *тригонометрӣ* номида мешавад.



Расми 62.



Расми 63.

Машқҳо

232. Ҳисоб кунед:

$$1) \sin \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \cos \frac{2\pi}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}; \quad 4) \sin(-90^\circ);$$

$$5) \cos(-180^\circ); \quad 6) \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad 7) \cos(-135^\circ); \quad 8) \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$

233. Агар :

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \quad 5) \sin \alpha = -0,6; \quad 6) \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

бошад, дар давраи воҳидӣ нуқтаи ба кунчи α мувофиқояндаро тасвир кунед.

Ҳисоб кунед (**234–236**):

234. 1) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$; 3) $\sin \pi - \cos \pi$;
4) $\sin 0 - \cos 2\pi$; 5) $\sin \pi + \sin 1,5\pi$; 6) $\cos 0 - \cos \frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; 2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$; 3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$;
4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$; 5) $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin \frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 10\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;
3) $\left(2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$; 4) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

237. Муодиларо ҳал кунед:

$$1) 2\sin x = 0; \quad | \quad 2) \frac{1}{2}\cos x = 0; \quad | \quad 3) \cos x - 1 = 0; \quad | \quad 4) 1 - \sin x = 0.$$

238. (Шифохӣ.) Оё $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ ба:

$$1) 0,49; \quad 2) -0,875; \quad 3) -\sqrt{2}; \quad 4) 2-\sqrt{2}; \quad 5) \sqrt{5}-1$$

баробар шуда метавонад?

239. Барои қимати додашудаи α қимати ифодаро ёбед:

$$1) 2\sin \alpha + \sqrt{2}\cos \alpha, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad | \quad 2) 0,5\cos \alpha - \sqrt{3}\sin \alpha, \text{ дар ин } \alpha = 60^\circ;$$

$$3) \sin 3\alpha - \cos 2\alpha, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{6}; \quad | \quad 4) \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

240. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;
4) $\cos 0,5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Муодиларо ҳал кунед:

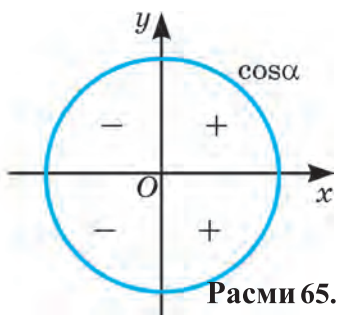
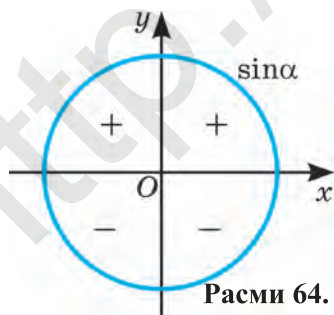
1) $\sin(x + \pi) = -1$; 2) $\sin \frac{1}{2}(x - 1) = 0$; 3) $\cos(x + \pi) = -1$;
4) $\cos 2(x + 1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x - 2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x - 1) = 0$.

§ 20. ИШОРАҲОИ СИНУС, КОСИНУС ВА ТАНГЕНС

1. Ишораҳои синус ва косинус

Фарз мекунем, нуқтаи $(1; 0)$ аз рӯи давраи воҳидӣ, муқобили акрабаки соат ҳаракат мекунад. Дар ин ҳолат ординатаҳо ва абсиссаҳои нуқтаҳои дар чоряки (квадранти) якум ҷойгиршуда мусбат мебошанд.

Бинобар ин, агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin \alpha > 0$ ва $\cos \alpha > 0$ мешавад (расмҳои 64, 65) Барои нуқта, ки дар чоряки ду воқеъ аст, ордината мусбат, абсиссаҳо бошанд, манфианд. Бинобар ин, агар бошад, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ мешавад (расмҳои 64, 65). Ин ҳолатро дар чоряки сеюм $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, дар чоряки чорум бошад, $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ (расмҳои 64, 65) мушоҳида кардан мумкин аст. Дар ҳаракати минбаъдаи нуқта дар гирди давра ишораҳои синус ва косинус бо дар кадом чоряк истодани нуқта муайян карда мешавад. Ишораи синус дар расми 64, ишораи косинус дар расми 65 нишон дода шудааст.

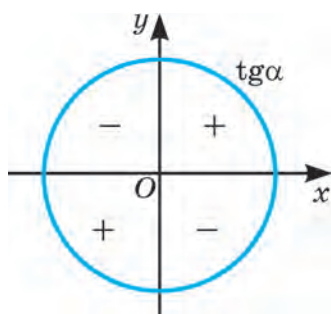


Агар нуктаи (1; 0) мувофиқи акрабаки соат ҳаракат кунад, дар ин ҳолат ҳам, ишораҳои синус ва косинус мувофиқи чоряки ҷойгиршавии нукта муайян карда мешавад, ки аз расмҳои 64, 65 дидан мумкин аст.

Масъалаи 1. Ишораҳои кунҷии синус ва косинусҳоро муайян кунед:

- 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745° ; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) Дар давраи воҳидӣ ба кунҷи $\frac{3\pi}{4}$ нуктаи дар чоряки дуюм ҷойгирфта мувофиқ меояд. Бинобар ин, $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos \frac{3\pi}{4} < 0$.



Расми 66.

2) Азбаски $745^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$ аст, пас ҳангоми нуктаи (1; 0)-ро ба 745° чарх занонидан нуктаи дар чоряки якум ҷойгирфта мувофиқ меояд. Бинобар ин $\sin 745^\circ > 0$, $\cos 745^\circ > 0$.

3) Азбаски $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ аст, пас ҳангоми нуктаи (1; 0)-ро ба $-\frac{5\pi}{7}$ чарх занонидан нуктаи дар чоряки сеюм ҷойгирфта мувофиқ меояд.

Бинобар ин, $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

2. Ишораҳои тангенс

Аз рӯи таъриф $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ аст. Аз ин рӯ агар $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ дорои ишораи ягона бошад, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ишораҳои муқобил дошта бошанд, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ мешавад. Ишораҳои тангенс дар расми 66 тасвир шудаанд.

Ишораҳои $\operatorname{ctg}\alpha$ бо ишораҳои $\operatorname{tg}\alpha$ як хел аст.

Масъалаи 2. Ишораҳои кунҷии тангенсро муайян кунед:

- 1) 260° ; 2) 3.

△ 1) Аз он сабаб, ки $180^\circ < 260^\circ < 270^\circ$ аст, $\operatorname{tg} 260^\circ > 0$ мешавад.

2) Аз он сабаб, ки $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ аст, $\operatorname{tg} 3 < 0$ мешавад. ▲

Машиқҳо

242. Агар:

- 1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = 210^\circ$; 4) $\alpha = -210^\circ$;
 5) $\alpha = 735^\circ$; 6) $\alpha = 848^\circ$; 7) $\alpha = \frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha = \frac{5\pi}{8}$.

бошад, чоряки чойгиршавии нуктаеро муайян кунед, ки он ҳангоми ба кунчи a чарх занонидани нуктаи $(1; 0)$ ҳосил мешавад.

243. Агар:

- 1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha = -\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$;
 5) $\alpha = 740^\circ$; 6) $\alpha = 510^\circ$; 7) $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha = 361^\circ$

бошад, ишораҳои адади $\sin\alpha$ -ро муайян кунед.

244. Агар:

- 1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$;
 5) $\alpha = 290^\circ$; 6) $\alpha = -150^\circ$; 7) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha = -100^\circ$

бошад, ишораҳои адади $\cos\alpha$ -ро муайян кунед.

245. Агар:

- 1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$;
 5) $\alpha = 190^\circ$; 6) $\alpha = 283^\circ$; 7) $\alpha = 172^\circ$; 8) $\alpha = 200^\circ$

бошад, ишораҳои адади $\tan\alpha$ ва $\cot\alpha$ -ро муайян кунед.

246. Агар:

- 1) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi < \alpha < 2\pi$;
 4) $2\pi < \alpha < 2,5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$; 6) $1,5\pi < \alpha \leq 1,8\pi$

бошад, ишораҳои адади $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ -ро муайян кунед.

247. Агар: 1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3,4$; 4) $\alpha = -1,3$; 5) $\alpha = 3,14$

бошад, ишораҳои $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ -ро муайян кунед.

248. Бигзор $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад. Ишораи ададро муайян кунед

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; | 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; | 3) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; | 4) $\sin(\pi - \alpha)$; |
| 5) $\cos(\alpha - \pi)$; | 6) $\tan(\alpha - \pi)$; | 7) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; | 8) $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. |

249. Қиматҳои аргумент α -ро дар фосилаи аз 0 то 2π муайян кунед, ки барои онҳо ишораҳои синус ва косинус якхел (ҳар хел) мешаванд.

250. Ишораи ададро муайян кунед:

$$1) \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}; \quad 3) \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{3\pi}{4}}; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}.$$

251. Қимати ифодаҳоро муқоиса кунед :

$$1) \sin 0,7 \text{ ва } \sin 4; \quad 2) \cos 1,3 \text{ ва } \cos 2,3.$$

252. Муодиларо ҳал кунед:

$$1) \sin(5\pi + x) = 1; \quad 2) \cos(x - 3\pi) = 0;$$

$$3) \cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1; \quad 4) \sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1.$$

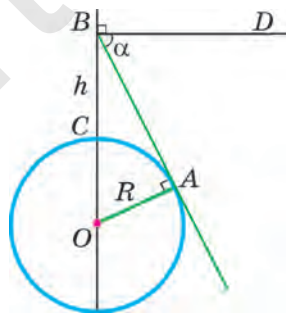
253. Агар:

$$1) \sin \alpha + \cos \alpha = -1,4; \quad 2) \sin \alpha - \cos \alpha = 1,4;$$

$$3) \sin \alpha + \cos \alpha = 1,4; \quad 4) \cos \alpha - \sin \alpha = 1,2$$

бошад, нуқтаи ба адади α мувофиқ оянда дар кадом чоряк ҷойгир аст?

254. (Масъалаи Берунӣ.) Агар баландии кӯҳ $h = BC$ ва кунҷи $\alpha = \angle A B D$ маълум бошад, радиуси Замин R -ро ёбед (расми 67).



Расми 67.

§ 21. МУНОСИБАТҲОИ БАЙНИ СИНУС, КОСИНУС ВА ТАНГЕНСИ ҲАМОН КУНҶ

Муносибати байни синус ва косинусро муайян мекунем.

Бигзор нуқтаи $M(x; y)$ -и давраи воҳидӣ дар натиҷаи ба кунҷи α чарх занонидани нуқтаи $(1; 0)$ ҳосил шуда бошад (расми 68). Дар ин ҳолат мувофиқи таърифи синус ва косинус

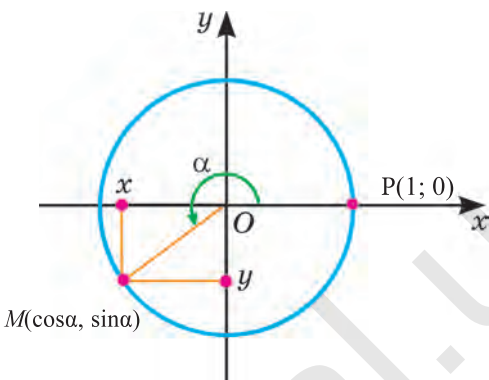
$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha \text{ мешавад.}$$

Нуқтаи M ба давраи воҳидӣ тааллуқ дорад, бинобар ин координатаҳои $(x; y)$ -и он муодилаи $x^2 + y^2 = 1$ -ро қаноат мекунад.

Бинобар ин,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

Баробарии (1) барои қиматҳои ихтиёрии α иҷро мешавад ва айнияти асосии тригонометрӣ номида мешавад. Аз баробарии (1) $\sin\alpha$ -ро бо $\cos\alpha$ ва баръакс, $\cos\alpha$ -ро бо $\sin\alpha$ ифода кардан мумкин аст:



Расми 68.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \quad (3)$$

Ишораи дар назди реша истодаи ин формулаҳо бо ишораи ифодаи дар қисми чапи формула истода муайян карда мешавад.

Масъалаи 1. Агар $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (2) истифода мебарем. Азбаски $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ аст, пас $\sin\alpha < 0$ мешавад, бинобар ин дар формулаи (2) пеш аз реша ишораи

“−” гузоштан лозим аст: $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. ▲

Масъалаи 2. Агар $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ва $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ Азбаски $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ аст, $\cos\alpha > 0$ мешавад ва бинобар ин дар формулаи (3) пеш аз реша ишораи “+” гузоштан лозим аст:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangle$$

Акнун алоқамандии байни тангенс ва котангенсро муайян мекунем.
Мувофиқи таърифи тангенс ва котангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Ин баробариҳоро зарб карда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (4)$$

Аз баробарии (4) $\operatorname{tg} \alpha$ -ро бо ёрии $\operatorname{ctg} \alpha$ ва баръакс, $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро бо ёрии $\operatorname{tg} \alpha$ ифода кардан мумкин аст:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

Баробариҳои (4)–(6) ҳангоми $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z}$ будан ҷой дорад.

Масъалаи 3. Агар $\operatorname{tg} \alpha = 13$ бошад, $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (6) меёбем: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

Масъалаи 4. Агар $\sin \alpha = 0,8$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\operatorname{tg} \alpha$ -ро ҳисоб кунед

△ Аз рӯи формулаи (3) $\cos \alpha$ -ро меёбем. Аз он сабаб, ки $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ аст, $\cos \alpha < 0$ мешавад. Аз ҳамин сабаб,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -0,6.$$

$$\text{Пас, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}. \quad \blacktriangle$$

Аз айнияти асосии тригонометри ва таърифи тангенс истифода бурда, муносибати байни тангенс ва косинусро меёбем.

△ $\cos \alpha \neq 0$ фарз карда, ҳарду қисми баробарии $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ -ро ба $\cos^2 \alpha$ тақсим мекунем: $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, аз ин ҷо

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \quad \blacktriangle \quad (7)$$

Агар $\cos \alpha \neq 0$ бошад, яъне $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ бошад, формулаи (7) дуруст аст.

Аз формулаи (7) тангенсро бо косинус ва косинусро бо ёрии тангенс ифода кардан мумкин аст.

Масъалаи 5. Агар $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\operatorname{tg} \alpha$ -ро ҳисоб кунед.

$\triangle$ Аз формулаи (7) ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс дар чоряки дуюм манфӣ аст, бинобар ин $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$. $\blacktriangle$

Масъалаи 6. Агар $\operatorname{tg} \alpha = 3$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\cos \alpha$ -ро ҳисоб кунед.

$\triangle$ Аз формулаи (7) ҳосил мекунем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{10}.$$

барои он ки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ аст, $\cos \alpha < 0$ мешавад ва бинобар ин, $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$. $\blacktriangle$

Машқҳо

255. Агар:

- 1) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ бошад, $\sin \alpha$ ва $\operatorname{tg} \alpha$ -ро;
- 2) $\sin \alpha = 0,8$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\cos \alpha$ ва $\operatorname{tg} \alpha$ -ро;
- 3) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро;
- 4) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -ро;
- 6) $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ бошад, $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -ро ҳисоб кунед.

256. Бо ёрии айнияти асосии тригонометрӣ дар як вақт иҷрошавӣ ва иҷронашавии баробариҳои зеринро муайян кунед:

1) $\sin\alpha = 1$ ва $\cos\alpha = 1$;

2) $\sin\alpha = 0$ ва $\cos\alpha = -1$;

3) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ва $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

4) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ва $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

257. Оё баробариҳо дар як вақт иҷро мешаванд

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ ва $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ва $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

258. Бигзор, α яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа аст. Агар $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$ бошад, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ -ро ёбед

259. Дар секунҷаи баробарпахлӯ тангенс кунҷи назди қулла ба $2\sqrt{2}$ баробар аст. Косинуси ин кунҷро ёбед

260. Агар $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{8}$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ёбед.

261. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ёбед.

2) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ бошад, $\sin\alpha$ -ро ёбед.

262. Маълум аст, ки $\operatorname{tga} = 2$. Қимати ифодаро ёбед:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;

5) $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$;

6) $\frac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

263. Маълум аст, $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Қимати ифодаҳои: 1) $\sin\alpha \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ -ро ёбед.

264. Муодиларо ҳал кунед:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$; 2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$; 4) $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

§ 22. АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Масъалаи 1. Ҳангоми $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ будан, ҷой доштани баробарии

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (1)$$

-ро исбот кунед.

△ Мувофиқи таърифи котангенс $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ва бинобар ин

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

Ин шакли ивазкуниҳо дуруст аст, чунки ҳангоми $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ будан, $\sin \alpha \neq 0$. ▲

Баробарии (1) барои киматҳои имкондоштаи ихтиёрии α ҷой дорад, яъне барои ҳамаи киматҳои қисмҳои чап ва ростии маънодоштаи он дуруст мебошад. Чунин баробариҳо айниятҳо номида мешаванд.

Масъалаҳо оид ба исботи ин гуна баробариҳо масъалаҳо доир ба исботи айниятҳо номида мешаванд.

Дар оянда агар исботи айниятҳо дар шартҳои масъалаҳо талаб карда нашуда бошад, киматҳои ҷоизи кунҷҳоро намекобем.

Масъалаи 2. $\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

$$\triangle (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Айниятро исбот кунед: $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

△ Барои исбот кардани ин айният нишон медиҳем, ки фарқи байни қисмҳои чап ва ростии ин баробарӣ ба сифр баробар аст:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \quad \blacktriangle$$

Ҳангоми ҳал кардани масъалаҳои 1–3 аз усулҳои зерини исботи айниятҳо истифода карда шуд: дар қисми рост шаклро иваз карда, дар қисми чап баробар будани онро нишон додан; фарқи байни қисмҳои чап ва рост ба сифр баробар буданашро нишон додан. Дар баъзе ҳолатҳо ҳангоми исботи айниятҳо, шаклҳои қисмҳои чап ва ростии онро иваз карда ба ифодаи ягона овардан қулай аст.

Масъалаи 4. Айниятро исбот кунед: $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

$$\triangle \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Айният исбот карда шуд, чунки қисмҳои чап ва рости он ба $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ баробар аст. $\blacktriangle$

Масъалаи 5. Ифодаро содда кунед: $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\triangle \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha. \quad \blacktriangle$$

Ҳангоми ҳалли масъалаҳо доир ба содда кардани ифодаҳои тригонометрӣ, агар дар шарт масъала талаб карда нашуда бошад, қиматҳои ҷоизи қабулшавандаи кунҷҳоро намекобем

Машқҳо

265. Айниятро исбот кунед:

- 1) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$; 2) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$;
- 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$;
- 5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$; 6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$.

266. Ифодаро содда кунед::

- 1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;
- 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha}$; 5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

- 1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

$$3) \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$4) \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

268. Айниятро исбот кунед

$$1) (1 - \sin^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1; \quad 2) \sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

269. Исбот кунед, ки барои ҳамаи қиматҳои ҷоиш а ифодаи зерин айнан як хел қиматро қабул мекунад, яъне аз а вобаста нест:

$$1) (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha;$$

$$2) \sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha);$$

$$3) \left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) \sin^2\alpha \cos^2\alpha;$$

$$4) \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha.$$

270. Айниятро исбот кунед

$$1) (1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha; \quad 2) \frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{1 + \sin\alpha};$$

$$3) \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$4) (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha;$$

$$5) \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha};$$

$$6) \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$7) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 1;$$

$$8) \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha.$$

271. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

$$1) \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha), \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{3};$$

$$2) (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}, \text{ дар ин } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

272. Агар $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,6$ бошад, қимати $\sin\alpha \cos\alpha$ -ро ёбед

273. Агар $\cos\alpha - \sin\alpha = 0,2$ бошад, қимати $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$ -ро ёбед

274. Муодиларо ҳал кунед.

$$1) 3\cos^2x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2x; \quad | \quad 2) \cos^2x - \sin^2x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2x.$$

§ 23. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ α ВА $-\alpha$

Бигзор нуқтаҳои M_1 ва M_2 -и давраи воҳидӣ ҳангоми мувофиқан ба кунҷҳои α ва $-\alpha$ чарх занонидани нуқтаи $P(1; 0)$ ҳосил шуда бошад (расми 69). Дар ин ҳолат тири Ox кунҷи M_1O M_2 -ро ба ду қисми баробар тақсим мекунад ва бинобар ин нуқтаҳои M_1 ва M_2 нисбат ба тири Ox симметрӣ чойгир шудаанд. Абсиссаи ин нуқтаҳо як хел мешаванд, ординатаҳошон бошад, фақат бо ишораашон фарқ мекунад. Нуқтаи M_1 ба координатаҳои $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, нуқтаи M_2 бошад, ба координатаҳои $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$ соҳиб мебошад. Бинобар ин

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \quad (1)$$

Аз таърифи тангенс истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Пас,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \quad (2)$$

Ба монанди ин,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \quad (3)$$

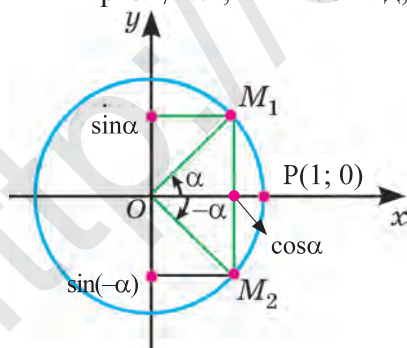
Формулаи (1) барои қиматҳои ихтиёрии α чой дорад, формулаи (2) бошад, ҳаигоми $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ бо мавқеъ аст.

Агар $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ бошад, дар он ҳолат нишон додан мумкин аст, ки $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ аст. Формулаҳои (1)—(2) имкон медиҳад, ки қиматҳои синус, косинус ва тангенсро барои кунҷҳои манфӣ муайян кунем. Масалан:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$



Расми 69.

275. Ҳисоб кунед:

- 1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\frac{1+\operatorname{tg}^2(-30^\circ)}{1+\operatorname{ctg}^2(-30^\circ)}$;
- 3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) + \sin^2(-\frac{\pi}{4})$;
- 4) $\cos(-\pi) + \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{3}{2}\pi) + \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Ифодаро содда кунед:

- 1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;
- 3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha$.

277. Айниятро исбот кунед: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

278. Ҳисоб кунед:

- 1) $\frac{3-\sin^2(-\frac{\pi}{3})-\cos^2(-\frac{\pi}{3})}{2\cos(-\frac{\pi}{4})}$;
- 2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7,5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Содда кунед:

- 1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$;
- 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

§ 24.

ФОРМУЛАҲОИ ЧАМЪ

Формулаи чамъ гуфта, бо ёрии синус ва косинусҳои кунҷҳои α ва β ифодашавии $\cos(\alpha \pm \beta)$ ва $\sin(\alpha \pm \beta)$ -ро меноманд.



Теорема. Барои α ва β -и ихтиёри баробарии зерин ҷой дорад :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

○ Фарз мекунем, ки дар натиҷаи нуктаи $M_0(1; 0)$ -ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷҳои $\alpha - \beta$ ва $\alpha + \beta$ радиан ҷарх занонидан мувофиқан нуктаҳои M_α , $M_{-\beta}$ ва $M_{\alpha+\beta}$ ҳосил мешавад (расми 70). Мувофиқи таърифи синус ва косинус ин нуктаҳо ба координатаҳои зерин соҳиб аст:

$$M_\alpha (\cos\alpha; \sin\alpha), \quad M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta)), \\ M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta)).$$

Азбаски $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$ аст, пас секунҷаҳои баробарпахлӯи $M_0OM_{\alpha+\beta}$ ва $M_{-\beta}OM_\alpha$ баробар ва бинобар ин асосҳои $M_0M_{\alpha+\beta}$ ва $M_{-\beta}M_\alpha$ - онҳо ҳам баробар аст. Пас ,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Аз формулаи масофаи байни ду нуктаи маълуми курси геометрия истифода бурда, ҳосил мекунем:

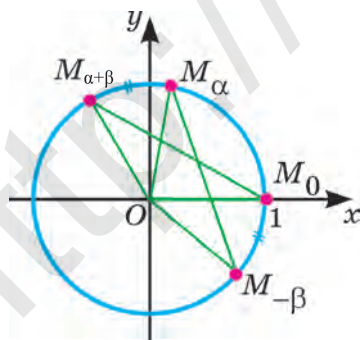
$$(1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2.$$

Аз формулаи (1)-и § 23 истифода бурда, шакли ин баробариро иваз мекунем:

$$1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = \\ = \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta, \\ \text{аз ин ҷо } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad \bullet$$



Расми 70.

Масъалаи 1. $\cos 75^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \\ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \blacktriangle$$

Дар формулаи (1) β ро ба $-\beta$ иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

аз ин ҷо



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

Масъалаи 2. $\cos 15^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз рӯи формулаи (2) меёбем:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Масъалаи 3. Формулаи зеринро исбот кунед:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \quad (3)$$

△ Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бошад, аз рӯи формулаи (2) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta,$$

яъне

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \quad (4)$$

Дар ин формула β -ро бо α иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Дар формулаи (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ фарз кунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \quad \blacktriangle$$

Аз формулаҳои (1)–(4) истифода бурда, барои синус формулаҳои ҷамъро мебарорем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Ҳамин тавр



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

Дар формулаи (5) β -ро бо $-\beta$ иваз карда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

аз ин ҷо



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

Масъалаи 4. $\sin 210^\circ$ ро ҳисоб кунед.

$$\triangle \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$= \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 5. Ҳисоб кунед:

$$\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle \sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \sin \left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \pi = 0. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 6. Баробари ро исбот кунед:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \quad (7)$$

$$\triangle \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Сурат ва махрачи ин касрро ба $\cos\alpha\cos\beta$ тақсим карда, формулаи (7)-ро ҳосил мекунем. $\blacktriangle$

Формулаи (7) ҳангоми ҳисобкуниҳо бомавқеъ шуда метавонад. Масалан, бо ёрии ҳамин формула меёбем:

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

Машиқҳо

Бо ёрии формулаҳои чамъ ҳисоб кунед (280–281):

$$280. \quad 1) \cos 135^\circ; \quad 2) \cos 120^\circ; \quad 3) \cos 150^\circ; \quad 4) \cos 240^\circ.$$

- 281.** 1) $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;
 2) $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$;
 3) $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$;
 4) $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$.

- 282.** 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, дар ин $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, дар ин $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ифодаро содда кунед (**283–284**):

- 283.** 1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$; 2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;
 3) $\cos\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right)$;
 4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$.

- 284.** 1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$;
 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta)$.

Ифодаро содда кунед (**285–286**):

- 285.** 1) $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;
 2) $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$;
 3) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

- 286.** 1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, дар ин $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, дар ин $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

287. Ифодаро содда кунед:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin(\alpha - \beta)$;

4) $\sin(\alpha + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Агар $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ ва $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\cos(\alpha + \beta)$ ва $\cos(\alpha - \beta)$ -ро ҳисоб кунед.

289. Агар $\cos\alpha = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ва $\sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin(\alpha - \beta)$ -ро ҳисоб кунед.

290. Ифодаро содда кунед:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha - \beta)}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.

291. Айниятро исбот кунед:

1) $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

292. Ифодаро содда кунед: 1) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ + \operatorname{tg}31^\circ}{1 - \operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi - \operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1 + \operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

§ 25. СИНУС ВА КОСИНУСИ КУНЧИ ДУЧАНДА

Аз формулаҳои ҷамъ истифода карда, формулаҳои синус ва косинуси кунҷи дучандаро ҳосил мекунем.

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.



$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

(1)

Масъалаи 1. Агар $\sin\alpha = -0,6$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot \cos\alpha = -1,2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ аст, ва бинобар ин $\cos\alpha < 0$ мешавад ва:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

Пас, $\sin 2\alpha = -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$. ▲

$$2) \cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Ҳамин тавр,



$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

(2)

Масъалаи 2. Агар $\cos\alpha = 0,3$ бошад, $\cos 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (2) ва аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда ҳосил мекунем: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0,3)^2 - 1 = -0,82. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Ифодаро содда кунед: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}.$

$$\begin{aligned} \triangle \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Масъалаи 4. Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ бошад, $\operatorname{tg} 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

$$\triangle \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

аз рӯи формула фарз мекунем, ки $\beta = \alpha$ аст (ниг. ба § 24) ва:



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

(3)

-ро ҳосил мекунем.

Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ бошад, дар он ҳолат аз рӯи формулаи (3)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$



Машқҳо

Ҳисоб кунед: (293–294):

293. 1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
3) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$; 4) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

294. 1) $2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;
3) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - (\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8})^2$.

295. Агар :

- 1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

296. Агар:

- 1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ бошад, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

Ифодаро содда кунед (297–298):

297. 1) $\sin \alpha \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$;
3) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos \alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; 3) $\frac{\sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$; 4) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

299. Айниятро исбот кунед:

1) $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Агар:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$; 3) $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$

бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

301. Айниятро исбот кунед:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$.

302. Ҳисоб кунед:

1) $2\cos^2 15^\circ - 1$; | 2) $1 - 2\sin^2 22,5^\circ$; | 3) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$; | 4) $1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12}$.

303. Ифодаро содда кунед:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$;
4) $\frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Айниятро исбот кунед:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2\operatorname{ctg} \alpha$;
3) $\operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

305. Агар $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$ бошад, $\operatorname{tg} 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед:

306. Ҳисоб кунед: 1) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{6\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 3) $\frac{4\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

§ 26.

ФОРМУЛАҲОИ МУВОФИҚОВАРӢ

Қадвали қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс барои кунҷҳои аз 0° то 90° (ё аз 0 то $\frac{\pi}{2}$) сохта мешавад. Дар ин ҳолат қиматҳои онҳо барои дигар кунҷҳо, бо қиматҳои ба кунҷҳои тез овардашуда эзоҳ дода мешавад.

Масъалаи 1. $\sin 870^\circ$ ва $\cos 870^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

△ $870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$. Бинобар ин ҳангоми нуқтаи $P(1; 0)$ -ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба 870° чарх занонидан, нуқта ду чархзаниро иҷро мекунад ва боз ба 150° чарх мезанад, яъне ҳуди нуқтаи M ҳангоми ба 150° чарх задан ҳосил мешавад (расми 71).

Бинобар ин $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ$ ва $\cos 870^\circ = \cos 150^\circ$.

Нуқтаи M_1 -и ба нуқтаи M нисбат ба тири Oy симметриро месозем (расми 72). Ординатаҳои нуқтаҳои M ва M_1 як хел, абсиссаҳояшон бошад фақат бо ишораҳояшон фарқ мекунад. Бинобар ин $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ҷавоб: $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

Ҳангоми ҳалли масъалаи 1 аз баробариҳои

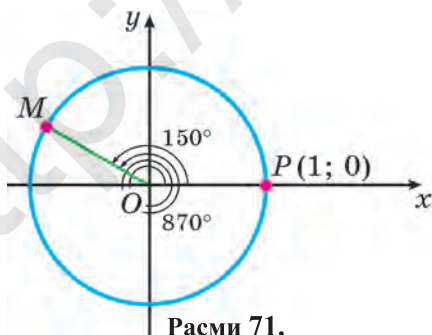
$$\sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ, \cos(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \quad (1)$$

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ \quad (2)$$

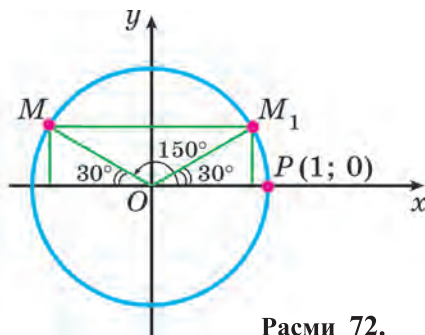
истифода бурдан мумкин аст. Баробариҳои (1) баробариҳои дуруст аст, чунки ҳангоми ба кунҷи $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ чарх занонидани нуқтаи $P(1; 0)$, айнан нуқтаи ҳангоми онро ба кунҷи α чарх занонидан ҳосил мешавад. Бинобар ин формулаҳои зерин ҷой доранд:



$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$



Расми 71.



Расми 72.

Хусусан, $k = 1$ бошад, баробарии :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

чой дорад.

Баробарии (2) ҳолати хусусии формула ҳисоб карда мешавад:



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \quad (4)$$

Формулаи $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ -ро исбот мекунем.

○ Барои синус формулаи чамъро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \\ &= 0 \cdot \cos\alpha - (-1) \cdot \sin\alpha = \sin\alpha. \quad \bullet\end{aligned}$$

Формулаҳои дуҷуми (4) ҳам айнан исбот карда мешавад. Формулаҳои (4) формулаҳои мувофиқоварӣ номида мешаванд. Бо ёрии формулаҳои (3) ва (4) синус ва косинуси кунҷи ихтиёро ба ҳисобкунии қиматҳои онҳо барои кунҷи тез овардан мумкин аст.

Масъалаи 2. $\sin 930^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (3) истифода бурда ҳосил мекунем.

$$\sin 930^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

Мувофиқи формулаи $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ҳосил мекунем: $\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ$.

Аз рӯи формулаи (4) меёбем:

$$-\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$. ▲

Масъала 3. $\cos \frac{15\pi}{4}$ -ро ҳисоб кунед.

$$\triangle \cos \frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangle$$

Акнун нишон медиҳем, ки ҳисобкунии тангенс кунчи ихтиёриро чӣ гуна ба ҳисобкунии тангенс кунчи тез овардан мумкин аст.

Аз формулаи (3) ва аз таърифи тангенс баробарӣ

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha, k \in \mathbb{Z}$$

бармеояд.

Аз ин баробарӣ ва аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Бинобар ин формулаи зерин ҷой дорад:



$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

(5)

Масъалаи 4. Ҳисоб кунед: 1) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$.

$$\triangle 1) \operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1. \blacktriangle$$

Дар § 24 (масъалаи 3) формулаҳои



$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

исбот карда шуда буданд, ки онҳо низ *формулаҳои мувофиқоварӣ* номида мешаванд. Аз ин формулаҳо истифода карда, масалан,

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} \text{ -ро ҳосил мекунем.}$$

Барои қимати дилхоҳи x дурустии баробариҳои $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ маълум аст.

Аз ин баробариҳо дида мешавад, ки ҳангоми ба 2π тағйир ёфтани аргумент қиматҳои синус ва косинус даврӣ такрор мешавад. Ин гуна *функсияҳо функсияҳои даврии давраи 2π* номида мешавад.



Агар чунин адади $T \neq 0$ мавҷуд бошад, ки барои x -и ихтиёрии соҳаи муайянии функсияи $y = f(x)$ баробарии $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ иҷро шавад, $f(x)$ функсияи даврӣ номида мешавад. Адади T даври функсияи $f(x)$ ном дорад.

Аз ин таъриф дида мешавад, ки агар адади x мугааллики соҳаи муайянии функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ ададҳои $x+T$, $x-T$ ва умуман ададҳои $x+Tn$, $n \in \mathbb{Z}$ низ ба соҳаи муайянии ҳамон функсияи даврӣ тааллуқ дорад ва $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ мешавад

||| Нишон медиҳем, ки даври аз ҳама хурди мусбати функсияи $y = \cos x$, ба 2π баробар аст

○ Бигзор $T > 0$ даври косинус бошад, яъне барои x -и ихтиёри баробарии $\cos(x + T) = \cos x$ иҷро мешавад. $x = 0$ гуфта, $\cos T = 1$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Азбаски $T > 0$ аст, пас T фақат қиматҳои 2π , 4π , 6π , ... -ро қабул карда метавонад ва бинобар ин қимати T аз 2π хурд шуда наметавонад.. ●

||| Исбот кардан мумкин аст, ки даври аз ҳама хурди мусбати функсияи $y = \sin x$ низ ба 2π баробар аст.

Машқҳо

Ҳисоб кунед (307–310):

307. 1) $\sin \frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos \frac{11}{2}\pi$;
 5) $\sin 720^\circ$; 6) $\cos 540^\circ$; 7) $\sin 12,5\pi$; 8) $\cos 2025^\circ$.
 308. 1) $\cos 420^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 570^\circ$; 3) $\sin 3630^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 960^\circ$;
 5) $\sin \frac{13\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$; 7) $\operatorname{tg} 585^\circ$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4}$.
 309. 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\cos 120^\circ$; 4) $\sin 315^\circ$.

- 310.** 1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos \frac{5\pi}{3}$;
 4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Қимати ададии ифодаро ёбед:

- 1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;
 2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;
 3) $\sin(-7\pi) - 2\cos \frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$;
 4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Ифодаро содда кунед:

- 1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;
 2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Ҳисоб кунед:

- 1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 2) $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$;
 3) $2\sin 6,5\pi - \sqrt{3}\sin \frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4,25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos \frac{61\pi}{6}$;
 5) $\frac{\sin(-6,5\pi) + \operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi) + \operatorname{ctg}(-16,25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^\circ) + \sin 480^\circ}{\operatorname{tg} 405^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ}$.

314. Ифодаро содда кунед:

- 1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;
 3) $\frac{\sin(\alpha - \pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \pi)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi - \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

315. Иёбот кунед, ки синуси суммаи ду кунҷи дарунии сеқунча ба синуси кунҷи сеюмаш баробар аст.

316. Айниятро исбот кунед:

$$\begin{aligned} 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\alpha; & 2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin\alpha; \\ 3) \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) &= -\sin\alpha; & 4) \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) &= -\cos\alpha. \end{aligned}$$

317. Муодиларо ҳал кунед:

$$\begin{aligned} 1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 1; & 2) \sin(\pi - x) &= 1; & 3) \cos(x - \pi) &= 0; \\ 4) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= 1; & 5) \cos(\pi - 2x) &= 1; & 6) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= 0. \end{aligned}$$

§ 27. СУММА ВА ФАРҚИ СИНУСҲО. СУММА ВА ФАРҚИ КОСИНУСҲО

Масъалаи 1. Ифодаро содда кунед:

$$\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \sin \frac{\pi}{12}.$$

△ Аз формулаҳои чамъ ва синуси кунчи дучанда истифода бурда, ба зерин соҳиб мешавем:

$$\begin{aligned} &\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= \left(\sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} + \cos\alpha \sin \frac{\pi}{12} + \sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} - \cos\alpha \sin \frac{\pi}{12}\right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= 2\sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \sin\alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin\alpha. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Агар аз формулаи суммаи синусҳо

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (1)$$

истифода карда шавад, ин масъаларо соддатар ҳал кардан мумкин аст. Бо ёрии он формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} & \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ & = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Акнун ҷоиз будани формулаи (1)-ро исбот мекунем:

○ Ба $\frac{\alpha+\beta}{2} = x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = y$ ишоракуниҳоро дохил мекунем. Он вақт $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ мешавад, бинобарин, $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

Дар қатори формула (1) аз формулаи фарқи синусҳо, формулаҳои сумма ва фарқи косинусҳо низ истифода бурда мешавад:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

Формулаҳои (3) ва (4) ҳам, монанди исботи формулаи (1) исбот карда мешавад; формулаи (2) бо роҳи иваз кардани β ба $-\beta$ аз формулаи (1) ҳосил карда мешавад. (Инро мустақилона исбот кунед).

Масъалаи 2. $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

$$\begin{aligned} & \triangle \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \\ & = 2 \sin \frac{75^\circ+15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ-15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Масъалаи 3. $2 \sin \alpha + \sqrt{3}$ -ро ба ҳосили зарб иваз кунед.

$$\begin{aligned} & \triangle 2 \sin \alpha + \sqrt{3} = 2 \left(\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ & = 4 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Масъалаи 4. Исбот кунед, ки қимати аз ҳама хурди $\sin\alpha + \cos\alpha$ ба $-\sqrt{2}$, қимати аз ҳама калонаш бошад, ба $\sqrt{2}$ баробар аст.

△ Ифодаи додашударо ба ҳосили зарб иваз мекунем:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Азбаски қимати аз ҳама хурди косинус ба -1 , аз ҳама калонаш ба 1 баробар аст, бинобар ин қимати аз ҳама хурди ифодаи додашуда ба $\sqrt{2} \cdot (-1) = -\sqrt{2}$, қимати аз ҳама калонаш ба $\sqrt{2} \cdot (1) = \sqrt{2}$ баробар аст. ▲

Машиқҳо

318. Ифодаро содда кунед:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; | 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$; |
| 3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; | 4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. |

319. Ҳисоб кунед:

- | | |
|---|---|
| 1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$; | 2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$; |
| 3) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$; | 4) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$; |
| 5) $\sin \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$; | 6) $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ$. |

320. Ба ҳосили зарб иваз кунед:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $1 + 2\sin\alpha$; | 2) $1 - 2\sin\alpha$; | 3) $1 + 2\cos\alpha$; |
| 4) $1 + \sin\alpha$; | 5) $1 - \cos\alpha$; | 6) $1 + \cos\alpha$; |

321. Айниятро исбот кунед:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; | 2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$. |
|--|--|

322. Ифодаро содда кунед:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; | 2) $\frac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$. |
|--|--|

Айниятро исбот кунед (323–324):

323. 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0.$

324. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha;$

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

325. Дар намуди ҳосили зарб нависед:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ;$ 2) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}.$

326. Айнияти $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ -ро исбот ва ҳисоб кунед:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ;$ 2) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12};$ 3) $\operatorname{tg} 99^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ.$

327. Ба зарбкунандаҳо чудо кунед:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha;$ 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha;$
3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha;$ 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha.$

Машқҳо доир ба боби III

328. Бигзор, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад. Муайян кунед, ки дар натиҷаи ба кунҷҳои:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha;$ | 2) $\alpha - \pi;$ | 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha;$ | 4) $\frac{\pi}{2} + \alpha;$ | 5) $\alpha - \frac{\pi}{2};$ | 6) $\pi - \alpha$

ҷарх занонидани нуқтаи $P(l; O)$ нуқтаи ҳосилшуда дар кадом ҷорак меҳобад.

329. Қимати синус ва косинуси кунчи додашударо ёбед:

1) $3\pi;$ 2) $4\pi;$ 3) $3,5\pi;$ 4) $\frac{5}{2}\pi;$
5) $\pi k, k \in \mathbb{Z};$ 6) $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z};$ 7) $2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ 8) $6,5\pi.$

330. Ҳисоб кунед:

- 1) $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}$;
- 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3,5\pi$;
- 3) $\sin \pi k + \cos 2k\pi$, дар ин ҷо k – адади бутун;
- 4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$, дар ин ҷо k – адади бутун

331. Ёбед, ки:

- 1) агар $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\cos \alpha$ -ро;
- 2) агар $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\tan \alpha$ -ро;
- 3) агар $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin \alpha$ -ро;
- 4) агар $\cot \alpha = \sqrt{2}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin \alpha$ -ро.

332. Айниятро исбот кунед:

- 1) $5\sin^2 \alpha + \tan \alpha \cos \alpha + 5\cos^2 \alpha = 5 + \sin \alpha$;
- 2) $\cot \alpha \sin \alpha - 2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = \cos \alpha - 2$;
- 3) $\frac{3}{1+\tan^2 \alpha} = 3\cos^2 \alpha$;
- 4) $\frac{5}{1+\cot^2 \alpha} = 5\sin^2 \alpha$.

333. Ифодаро содда кунед

- 1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
- 2) $3\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
- 3) $(1-\tan(-\alpha))(1-\tan(\pi+\alpha))\cos^2 \alpha$;
- 4) $(1+\tan^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\cot^2(-\alpha)}\right)$.

334. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

- 1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, дар ин ҷо $\cos \alpha = \frac{1}{4}$;
- 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, дар ин ҷо $\sin \alpha = \frac{1}{6}$.

335. Ҳисоб кунед:

- 1) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;
 4) $\sin 75^\circ$; 5) $\cos 75^\circ$; 6) $\sin 135^\circ$.

ХУДРО БИСАНЧЕД!

1. Агар: 1) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin 2\alpha$ -ро,

2) $\cos \alpha = -0,6$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, $\cos 2\alpha$ -ро
 ҳисоб кунед.

2. Қимати ифодаро ёбед:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi$;

2) $\cos 150^\circ$; 3) $\sin \frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$.

3. (Масъалаи Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошӣ.)

Исбот кунед, ки $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ аст.

4. Айниятро исбот кунед:

1) $3 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2$; 2) $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin^2 \alpha$.

5. Қимати ифодаро ёбед::

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Қимати ифодаро ёбед::

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;

4) $\frac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Ҳисоб кунед (337–338):

337. 1) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos \frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$;
3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ)$; 4) $\cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ$.

339. Ададхоро муқоиса кунед:

1) $\sin 3$ ва $\cos 4$; 2) $\cos 0$ ва $\sin 5$; 3) $\sin 1$ ва $\cos 1$.

340. Ишораи ададро муайян кунед:

1) $\sin 3,5 \operatorname{tg} 3,5$; 2) $\cos 5,01 \sin 0,73$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 13}{\cos 15}$;
4) $\sin 1 \cos 2 \operatorname{tg} 3$; 5) $\sin 2 \cos 2$; 6) $\operatorname{tg} 1 \cos 1$.

341. Ҳисоб кунед:

1) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 165^\circ$; 3) $\sin 105^\circ$;
4) $\sin \frac{\pi}{12}$; 5) $1 - 2\sin^2 195^\circ$; 6) $2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1$.

342. Ифодаро содда кунед

1) $(1 + \operatorname{tg}(-\alpha))(1 - \operatorname{ctg}(-\alpha)) - \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos \alpha + \sin(-\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin \alpha}$.

343. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ дода шудааст. Қимати $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Ифодаро содда кунед (344–346):

344. 1) $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha$; 2) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{4 \cos \alpha}$; 2) $\frac{2 \cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}$;
3) $\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1}$; 4) $\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \sin(\pi - x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} + \cos(1,5\pi + x)$;
3) $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} - \sin(1,5\pi + x)$; 4) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} + \cos(3\pi - x)$.

347. 1) Агар $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ ва $\operatorname{tg} \beta = 2,4$ бошад, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ро;
 2) агар $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ ва $\operatorname{ctg} \beta = -1$ бошад, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ ро ҳисоб кунед.

348. Ифодаро содда кунед

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

Машиқ (тест)-ҳои санҷиш доир ба боби III

- Ченаки радиании 153° -ро ёбед.
 А) $\frac{17\pi}{20}$; Б) $\frac{19\pi}{20}$; В) 17π ; Г) $\frac{2\pi}{9}$.
- Ченаки градусии $0,65\pi$ -ро ёбед.
 А) $11,7^\circ$; Б) 117° ; В) 116° ; Г) 118° .
- Кадоме аз зарбшавандаҳо манфӣ аст?
 А) $\cos 314^\circ \sin 147^\circ$; Б) $\operatorname{tg} 200^\circ \operatorname{ctg} 201^\circ$;
 В) $\cos 163^\circ \cos 295^\circ$; Г) $\sin 170^\circ \operatorname{ctg} 250^\circ$.
- Кадоме аз зарбшавандаҳо мусбат аст?
 А) $\sin 2^\circ \cos 2^\circ \sin 1^\circ$; Б) $\operatorname{tg} 8^\circ \operatorname{ctg} 8^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} \sqrt{10}$;
 В) $\sin 9^\circ \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cos 9^\circ$; Г) $\cos 10^\circ \cos 10^\circ \cos 11^\circ \cos \sqrt{11}$.
- Ҳамаи кунҷҳоеро, ки ба он нуқтаи $(1; 0)$ -ро барои ёфтани нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ гардонидан лозим аст, ёбед.
 А) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 В) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $2\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- Координатаҳои нуқтаеро, ки ҳангоми ба кунҷи $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ чархзанондани нуқтаи $(1; 0)$ ҳосил мешавад, ёбед.
 А) $(0; 1)$; Б) $(0; -1)$; В) $(1; 0)$; Г) $(-1; 0)$.

7. Ададҳоро бо тартиби афзуншавӣ нависед:

$$a = \sin 1,57; \quad b = \cos 1,58; \quad c = \sin 3.$$

А) $a < c < b$; Б) $b < c < a$; В) $c < a < b$; Г) $b < a < c$.

8. Ададҳоро бо тартиби камшавӣ нависед:

$$a = \cos 2; \quad b = \cos 2^\circ; \quad c = \sin 2; \quad d = \sin 2^\circ.$$

А) $a > c > d > b$; Б) $d > c > b > a$;
В) $b > c > d > a$; Г) $c > d > b > a$.

9. Ҳисоб кунед: $\frac{\sin 136^\circ \cdot \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cdot \cos 224^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \cdot \cos 50^\circ} \cdot$

А) $\cos 40^\circ$; Б) 0,5; В) $\sin 44^\circ$; Г) 2.

10. Ҳисоб кунед: $\frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 130^\circ - \sin 100^\circ \cdot \sin 220^\circ}{\sin 27^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 157^\circ \cdot \cos 153^\circ} \cdot$

А) 1; Б) -1; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Ҳисоб кунед: $\cos(-225^\circ) + \sin 675^\circ + \operatorname{tg}(-1035^\circ)$.

А) 1; Б) -1; В) $\sqrt{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin \alpha = 0,6$ бошад, $\operatorname{tg} 2\alpha$ -ро ёбед $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

А) 3,42; Б) $3\frac{3}{7}$; В) $\frac{7}{24}$; Г) $-\frac{7}{24}$.

13. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

А) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; Б) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; В) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; Г) $\sqrt{5}$.

14. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$ бошад, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

А) $\frac{4}{3}$; Б) $-\frac{4}{3}$; В) $\frac{3}{4}$; Г) $-\frac{3}{4}$.

15. Содда кунед: $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) -1 ;

Б) 1 ;

В) $0,5$;

Г) $-\frac{1}{2}$.

16. Содда кунед: $\frac{\sin 2\alpha + \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$;

Б) $\frac{1}{3}\sin\alpha$;

В) $-\sin\alpha$;

Г) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}$ бошад, $\frac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha + 15\cos^2\alpha}$ ро ҳисоб кунед.

A) $0,59$;

Б) $0,49$;

В) $-0,49$;

Г) $0,2$.

18. $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3}$ бошад, $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ -ро ёбед.

A) $\frac{81}{49}$;

Б) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$;

В) $\frac{49}{81}$;

Г) $-1\frac{32}{49}$.

19. Ҳисоб кунед: $\sin 100^\circ \cdot \cos 440^\circ + \sin 800^\circ \cdot \cos 460^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) 1 ;

В) -1 ;

Г) 0 .

20. Содда кунед: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$;

Б) $-2\sin 4\alpha$;

В) $\sin 4\alpha$;

Г) $2\cos 2\alpha$.

21. Решаи муодилаи $8x^2 - 6x + 1 = 0$ $\sin\alpha$ ва $\sin\beta$ мебошанд, агар α, β дар чоряки I бошад, $\sin(\alpha + \beta)$ -ро ёбед.

A) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$;

Б) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$;

В) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$;

Г) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. Решаи муодилаи $6x^2 - 5x + 1 = 0$ $\cos\alpha$ ва $\cos\beta$ мебошанд, агар α, β дар чоряки I бошад, $\cos(\alpha + \beta)$ -ро ёбед.

A) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$;

Б) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$;

В) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$;

Г) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. Агар $2(x + \sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$ бошад, x -ро ёбед:

- А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\sqrt{2}$; В) $-\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{2}$.

24. Решаи муодилаи $x^2 - 7x + 12 = 0$ тга ва $\text{tg}\beta$ бошад, $\text{tg}(\alpha + \beta)$ -ро ёбед.

- А) 1; Б) $\frac{7}{11}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\frac{7}{11}$.

Масъалаҳои амалӣ - татбиқӣ ва алоқа бо ҷаҳон

Масъала. (масъалаи Берунӣ)

Мушоҳидачӣ аз сатҳи баҳр дар ба қуллаи қўҳи баландиаш 4,83 км истода, қунҷи моили нисбат ба горизонти укёнус $2,23^\circ$ -ро чен кард. Радиуси Заминро ёбед:

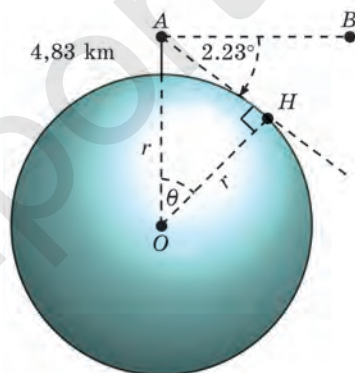
Олими бузурги қомусии асри миёна Абӯрайҳон Муҳаммад ибн Аҳмад Берунӣ (973–1048) радиуси кураи Заминро саҳеҳтар чен кардааст.

Усули ҳалли масъалаи зерин ба он мансуб аст.

 Фарз мекунем, ки Замин қурашакл аст. Бо r радиуси Замин, бо A қуллаи қўҳ, бо

H нуқтаи горизонти дар хати ростии аз нуқтаи A бароянда хобандаи дар расми 73 нишон додааст. Нуқтаи O маркази Замин ва нуқтаи B нуқтаи хати ростии горизонталӣ аз нуқтаи A гузаранда ва ба $\overline{OA}$ перпендикуляр аст. Қунҷи $\angle AOH$ -ро бо θ ишора мекунем.

Нуқтаи A аз сатҳи баҳр дар баландии 4,83 км ҷойгир шудааст, аз ҳамин сабаб $OA = r + 4,83$. Ба ғайр аз ин $OH = r$. AB ба OA перпендикуляр $\angle OAB = 90^\circ$ ва аз ҳамин сабаб $\angle OAH = 90^\circ - 2,23^\circ = 87,77^\circ$. Сатҳи Заминро ба сифати давраи ба монанди дар расм додашуда бинем, $\overline{AH}$ расанда ба давра мешавад ва пас $\overline{AH}$ ва $\overline{OH}$ ба якдигар перпендикуляр мешавад, дар натиҷа, қунҷи $\angle OHA = 90^\circ$. Ҳосили ҷамъи қунҷҳои $\angle OAH$ ба 180°



Расми 73.

баробар аст. Аз ин ҷо $\theta = 180^\circ - 90^\circ - 87,77^\circ = 2,23^\circ$.

Пас, $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r+4,83}$, аз ин ҷо $\frac{r}{r+4,83} = \cos 2,23^\circ$.

Ин муодиларо нисбат ба r ҳал мекунем:

$$r = (r+4,83)\cos 2,23^\circ \Rightarrow r - r\cos 2,23^\circ = 4,83\cos 2,23^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4,83\cos 2,23^\circ}{1 - \cos 2,23^\circ} \Rightarrow r = 6372,91.$$

Ҳаминро таъкид кардан ҷоиз аст, ки натиҷаи ҳосилкардашуда ба радиуси миёнаи аслии Замин 6373 км хеле наздик аст.

Ҷавоб: $r = 6372,91$ км ▲

Масъалаҳо

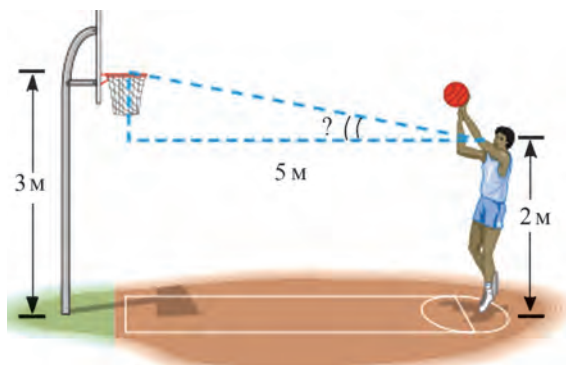
1. Радифи мушоҳидакунандаи Замин аз сатҳи Замин дар масофаи h (км) аз рӯи давра ҳаракат мекунад. Фарз мекунем d дарозии фосолае, ки аз радиф сатҳи Заминро мушоҳида карданаш мумкин аст (расми 74).

- 1) Муодилаи вобастагии байни кунҷи марказӣ θ (бо радианҳо) ва баланди h -ро ёбед;
- 2) Муодилаи вобастагии байни d ва θ -ро ёбед;
- 3) Муодилаи вобастагии d ва h -ро ёбед;
- 4) агар $d = 4000$ км бошад, радиуси Замин бояд дар кадом баландӣ бошад?
- 5) агар радиуси Замин дар баландии 100 км бошад, d -чӣ гуна мешавад.

2. Баскетболчӣ аз сабади баскетбол дар масофаи 5 метр, чашмонаш аз фарш дар баландии 2 метр, гардиши сабадча бошад аз фарш дар баландии 3 метр мебошад (расми 75). Кунҷи мушоҳидаи баскетболчӣ аз чашмони он то маркази гардиши сабад чанд градус аст?

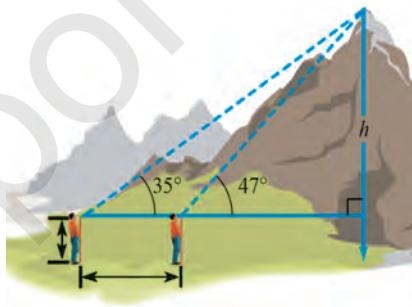


Расми 74.



Расми 75.

3. Маркшейдер (мутахассиси конҳоро ба нақша гиранда ва аз онҳо дуруст истифодабаранда) барои чен кардани баландии кӯҳ аз ду нуқтаи масофаи байнашон ба 900 метр баробар кунҷҳои мушоҳидаҳоро чен кард (расми 76). Дар натиҷа муайян кард, ки кунҷи якум 47° ва дуюмаш ба 35° баробар аст. Агар баландии теодолит (асбоби кунҷро ченкунанда) 2 метр бошад, баландии кӯҳро ёбед.



Расми 76.

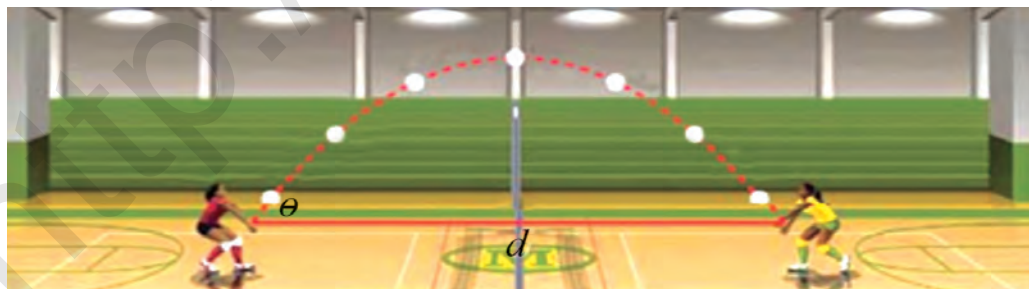
4. Дар бозии волейбол туб дар тахти

кунҷи θ , бо суръати ибтидоии v м/с ҳаво дода шуда, дар асоси

формулаи $d = \frac{v}{9,75} \sin 2(\theta)$ ба масофаи

горизонтالي d парвоз карда меравад.

Агар $\theta = 60^\circ$ ва суръати 12 м/с бошад, d -ро ёбед (расми 77).



Расми 77.



Масъалаҳои таърихӣ

Масъалаҳои Абу Райҳон Берунӣ

1. Чох дар шакли силиндр буда, қаъри он аз нуктаи A зери кунҷи α , аз нуктаи B зери кунҷи β менамояд (расми 78). Агар $AB = a$ бошад, чуқурии чоҳро ёбед:

Дода шудааст:

$$\angle CAD = \alpha, \angle ABD = \beta, AB = a.$$

Ҳисоб кунед: $AC = ?$

2. Манора аз нуктаи A -и замин зери кунҷи α , аз нуктаи B бошад, зери кунҷи β менамояд (расми 79). Агар $AB = a$ бошад, баландии манораро ёбед.

Дода шудааст:

$$\angle CAD = \alpha, \angle ABD = \beta, AB = a.$$

Ҳисоб кунед: $CD = ?$

Масъалаи Фисиддин Ҷамшед ал-Кошӣ.

3. Барои кунҷи ихтиёрии α исбот кунед, ки

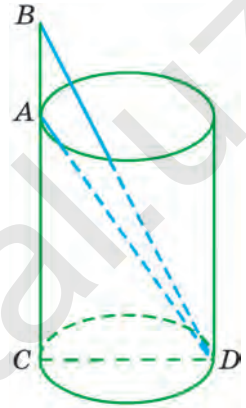
$$\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{2}}.$$

Масъалаи математики машҳур Абулвафо Муҳаммад ал-Бузҷонӣ (940–998).

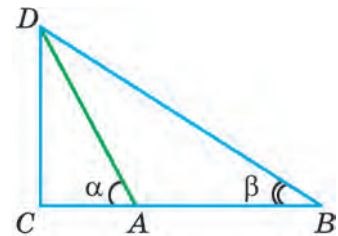
4. Исбот кунед, ки барои α ва β -и ихтиёрӣ баробарии.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

дуруст аст



Расми 78.



Расми 79.



Дар инкишофи математика, хусусан тригонометрия чунин муттафакирони бузург ба мисли Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Аҳмад Фарғонӣ, Абӯрайҳон Берунӣ, Мирзо Улуғбек, Алӣ Қушчӣ, Ғиёсиддин Чамшед ал-Кошӣ саҳми босазо гузоштаанд. Муайян кардани координатаи ситораҳо дар сфераи осмонӣ, мушоҳидаи координатаи ситораҳо, пешгуӣ кардани ғирифтани Моҳ ва Офтоб барин масъалаҳо ва дигар масъалаҳои илмӣ-амалӣ ҳисобу китоби дақиқ ва дар асоси онҳо тартиб дода шудани ҷадвалҳои дақиқро талаб мекард.



Мирзо Улуғбек
(1394–1449)

Чунин ҷадвалҳои астрономӣ (тригонометрӣ) дар Шарқ «Зич»-ҳо ном доштанд. «Зич»-ҳои олимони машҳур Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Абӯ-райҳон Берунӣ, Мирзо Улуғбек монанди асарҳои математикишон хеле машҳур буда, ба забонҳои лотинӣ ва дигар забонҳо тарҷума карда шуда буданд. Ии гуна асарҳо дар пешравии математика ва астрономияи Аврупо саҳми худро гузоштаанд.

Дар асари «Қонуни Маъсудӣ»-и Берунӣ ҷадвали синусҳо бо фосилаи 15 дақиқа, ҷадвали тангенсҳо бо фосилаи 1° бо саҳеҳии 10^{-8} дода шудаанд. Ниҳоят яке аз «Зич»-ҳои аниқ ин «Зичи Курагонӣ»-и Мирзо Улуғбек мебошад. Дар он ҷадвали синусҳо бо фосилаи 1 дақиқа, ҷадвали тангенсҳо аз 0° то 45° бо фосилаи 1 дақиқа ва аз 46° то 90° бо фосилаи 5 дақиқа бо саҳеҳии 10^{-10} дода шудаанд.

Ғиёсиддин Чамшед ал-Кошӣ дар «Рисола дар бораи хорда ва синус»-аш $\sin 1^\circ$ -ро бо саҳеҳии 17 ракам баъд аз вергул ҳисоб кардааст:

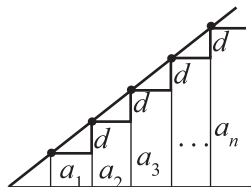
$$\sin 1^\circ = 0,017452406437283512...$$

Дарозии давра ба миёнаи арифметикии периметрҳои бисёркунҷаҳои $3 \cdot 2^n$ -и мунтазами дарун ва берункашидашуда баробар гуфта, ҳаёгоми $n = 28$ будан, Чамшед ал-Кошӣ дар асари «Рисола дар бораи давра» барои 2π натиҷаи зеринро ҳосил кард:

$$2\pi = 6,2831853071795865...$$

БОБИ IV.

ПАЙДАРПАИҲОИ АДАДӢ ПРОГРЕССИЯҲО



§ 28.

ПАЙДАРПАИҲОИ АДАДӢ

Дар ҳаёти ҳаррӯза барои нишон додани тартиби ҷойгиршавии ҷиҳозҳои гуногун аз рақамгузории онҳо истифода бурда мешавад. Масалан, хонаҳои дар ҳар як кӯча ҷойгиршуда рақамгузорӣ карда мешавад. Дар китобхона абонементҳои китобхонаи рақамгузорӣ карда мешавад ва онҳо бо тартиби рақамгузорӣ ба картотекаҳои махсус ҷойгир карда мешавад. Дар банк бо воситаи рақами ҳисоб миқдори маблағ ба банк гузоштаи шахсро дидан мумкин аст. Гӯем, ки дар ҳисоб рақами №1 a_1 сӯм, дар ҳисоб рақами №2 a_2 сӯм ва ҳоказо маблағ ҳаст. Дар натиҷа пайдарпаии

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$$

-ро ҳосил мекунем, дар ин ҷо N – адади ҳамаи ҳисоб рақамҳо. Дар ин ҷо ба ҳар як адади натуралии аз 1 то N адади a_n мувофиқ гузошта шудааст. Дар математика пайдарпаиҳои ададии беохир омӯхта мешавад:

$$a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

a_1 – аъзои якуми пайдарпаи, a_2 – аъзои дууми пайдарпаи, a_3 – аъзои сеюми пайдарпаи адади номида мешавад ва ҳоказо. Адади a_n – аъзои n -ум ва адади натуралии рақами он номида мешавад. Масалан, пайдарпаии аз квадратҳои ададҳои натуралӣ иборат будаи $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$,

$(n+1)^2, \dots, a_1=1$ аъзои якуми пайдарпаи, $a_n=n^2$ аъзои n -уми пайдарпаи; $a_{n+1}=(n+1)^2$ аъзои $(n+1)$ -уми пайдарпаи аст. Пайдарпаиҳои ададӣ бисёртар бо ёрии формулаи аъзои n -ум дода мешавад.

Масалан, бо ёрии формулаи $a_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) пайдарпаиҳои ададии

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ дода шудааст.

Масъалаи 1. Пайдарпаиҳои ададии бо формулаи $a_n = n(n-2)$ дода шудааст. Аъзои 100-уми онро ёбед:

$$\triangle a_{100} = 100 \cdot (100-2) = 9800. \blacktriangle$$

Масъалаи 2. Пайдарпаиҳои ададии бо формула $a_n = 2n + 3$ дода шудааст.

1) 43 аъзои пайдарпаиҳои адади мебошад, рақами онро ёбед; 2) 50 аъзои пайдарпаиҳои адади шуда метавонад ё не?

$\triangle 1)$ Мувофиқи шарт $2n + 3 = 43$, аз ин ҷо $n = 20$.

2) Агар 50 аъзои пайдарпаиҳои адади ва n -рақами аъзои он бошад, дар ин ҳол $2n + 3 = 50$, аз ин ҷо $n = 23,5$. Аз сабаби қимати n адади натуралӣ нест, рақами пайдарпаиҳои адади шуда наметавонад. Аз ҳамин сабаб адади 50 аъзои пайдарпаи наметавонад. $\blacktriangle$

Дар баъзе ҳолатҳо пайдарпаи бо воситаи чунин формулаҳо дода мешавад, ки дар ин ҳол аз ягон рақамаш сар карда дилхоҳ аъзои онро бо ёрии якто ёки якчандто аъзоҳои пешина ҳисоб кардан мукин аст. Ин усули додашудани пайдарпай усули рекуррентӣ (лотинӣ *recuro* – баргаштан) мебошад.

Масъалаи 3. Пайдарпаи ададӣ бо формулаи рекуррентии $b_{n+2} = b_{n+1} + b_1$ ва бо ёрии шартҳои $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ дода шудааст. Аъзои 5-уми ин пайдарпаиро ёбед;

$$\triangle b_3 = b_2 + b_1 = 3 + 1 = 4.$$

$$b_4 = b_3 + b_2 = 4 + 3 = 7.$$

$$b_5 = b_4 + b_3 = 7 + 4 = 11.$$

Ҷавоб: $b_5 = 11. \blacktriangle$

Машиқҳо

349. Пайдарпаии ададӣ аз квадратҳои ададҳои натуралӣ иборат: 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 , $(n+1)^2$, ...дода шудааст.

1) Аъзоҳои сеюм, шашум, n -умро гӯед.

2) Рақамҳои аъзоҳои 4, 25, n^2 , $(n+1)^2$ -ро нишон диҳед.

350. Се аъзоҳои аввалии пайдарпаии ададии бо формулаи зерин додашударо ҳисоб кунед:

1) $a_n = 2n + 3$;

2) $a_n = 2 + 3n$;

3) $a_n = 100 - 10n^2$;

4) $a_n = \frac{n-2}{3}$;

5) $a_n = \frac{1}{n}$;

6) $a_n = -n^3$.

351. (Шифохӣ). Пайдарпаии ададӣ бо формулаи $x_n = n^2$ дода шудааст. Рақамҳои аъзоҳои ба 100; 144; 225 баробарро гӯед. Ададҳои 48, 49, 169 аъзоҳои ин пайдарпаи шуда метавонад ё не?

352. Пайдарпаии адади бо формулаи $a_n = n^2 - 2n - 6$ дода шудааст. Оё ададҳои 1) -3; 2) 2; 3) 3; 4) 9 аъзоҳои пайдарпаи шуда метавонад ё не?

353. Чор аъзои аввалии пайдарпаии бо формулаи рекурентии

1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$;

2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$

ва шарти $a_1 = 2$ дода шударо ёбед.

354. Формулаи аъзои n -уми пайдарпаии $a_n = (n-1)(n+4)$ аст. Агар 1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ бошад, n -ро ёбед.

355. Чор аъзои аввалии пайдарпаии бо формулаи рекурентии a_{n+1} ва шарти $a_1 = 256$ -ро ҳисоб кунед.

356. Шаш аъзои аввалии пайдарпаии ададии бо формулаи рекурентии

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$;

2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$;

ва шарти $a_1 = 1$ дода шударо нависед.

357. Пайдарпаии ададӣ бо формулаи $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ ва шартҳои $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, дода шудааст. Аъзои панҷуми пайдарпаиро ҳисоб кунед.

358. Аъзоҳои $(n + 1)$, $(n + 2)$ ва $(n + 5)$ -и, пайдарпаии бо формулаи аъзои n -ум додашударо нависед:

$$1) a_n = -5n + 4; \quad | \quad 2) a_n = 2(n - 10); \quad | \quad 3) a_n = 2 \cdot 3^{n+1}; \quad | \quad 4) a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

§ 29. ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

Масъалаи зеринро дида мебароем.

Масъала. Дар давоми тайёри барои аз санҷиш гузаштан, донишомӯз ҳар рӯз ҳал кардани 5 масъалаи санҷишро ба нақша гирифт. Шумораи масъалаҳои санҷишиё, ки дар як рӯз бояд ҳал карда шаванд, чӣ гуна тағйир меёбад?

Адади масъалаҳои ба нақша гирифташуда ҳар рӯз ба таври зерин тағйир меёбад:

рӯзи якум	рӯзи дуюм	рузи сеюм	рӯзи чорум...
5 то	10 то	15 то	20 то ...

Дар натиҷа чунин пайдарпаиро ҳосил мекунем:

$$5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

Бо ёрии a_n адади ҳамаи масъалаҳоеро, ки дар n - рӯз бояд ҳал шаванд, ишора мекунем. Масалан: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, ...

... , . a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n - и ҳосилшуда пайдарпаии ададӣ номида мешавад. Ҳар як аъзои ин пайдарпай, аз аъзои дуюм сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянд ҷамъ кардани адади 5 ҳосил мешавад. Чунин пайдарпай *прогрессияи арифметикӣ* номида мешавад.



Агар дар пайдарпаии ададии $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ барои n -и натуралии дилхоҳ баробарии

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(дар ин ҷо d -ягон адад) иҷро шавад, чунин пайдарпай прогрессияи арифметикӣ номида мешавад

Аз ин формула бармеояд, ки $a_{n+1} - a_n = d$. Адади d – фарқи прогрессияи арифметикӣ номида мешавад.

1) Қатори ададҳои натуралии 1, 2, 3, 4, прогрессияи арифметикиро ташкил мекунад. Фарқи ин прогрессия $d = 1$ аст.

2) Пайдарпаии ададҳои бутуни манфии $-1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$ прогрессияи арифметикии фарқаш $d = -1$ аст

3) Пайдарпаии $3, 3, 3, \dots, 3, \dots$ прогрессияи арифметикии фарқаш $d = 0$ аст.

Масъалаи 1. Иббот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи $a_n = 1,5 + 3n$ додашуда прогрессияи арифметикӣ мебошад.

△ Нишон додани он талаб карда мешавад, ки барои n - дилхоҳ фарқи $a_{n+1} - a_n$ айнан як хел (аз n вобаста нест) аст.

Аъзои $(n + 1)$ -уми пайдарпаии додашударо менависем:

$$a_{n+1} = 1,5 + 3(n + 1).$$

Бинобар ин $a_{n+1} - a_n = 1,5 + 3(n + 1) - (1,5 + 3n) = 3$.

Пас фарқи $a_{n+1} - a_n$ аз n вобаста нест. ▲

Аз таърифи прогрессияи арифметикӣ $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$ аст, аз ин ҷо

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n > 1$$



Ҳамин тавр, дар прогрессияи арифметикӣ аз аъзои дуюм сар карда, ҳар як аъзояш ба миёнаи арифметикии ду аъзои ҳамсоя баробар аст. Номи прогрессияи "арифметикӣ" бо ҳамин эзоҳ дода мешавад.

Таъкид мекунем, ки агар a_1 ва d дода шуда бошад, он гоҳ аъзоҳои боқимондаи прогрессияи арифметикӣ аз рӯи формулаи $a_{n+1} = a_n + d$ ҳисоб кардан мумкин аст.

Бо ин усул ҳисоб кардани якчанд аъзоҳои аввала ягон душворӣ пайдо намекунад: лекин, масалан, барои a_{100} ҳисобкуниҳои зиёд талаб карда мешавад. Одатан барои ин аз формулаи аъзои n -ум истифода мебаранд.

Аз таърифи прогрессияи аритметикӣ

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ ва ғайра.}$$

Умуман,



$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

(1)

чунки аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ ҳангоми ба аъзои якум адади d -ро $(n - 1)$ маротиба ҳам кардан ҳосил карда мешавад.

Формулаи (1) формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ номида мешавад.

Масъалаи 2. Агар $a_1 = -6$ ва $d = 4$ бошад, аъзои садуми прогрессияи арифметикиро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (1): $a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$. ▲

Масъалаи 3. Адади 99 аъзои прогрессияи арифметикии 3, 5, 7, 9, ... мебошад. Аъзои чандум будани онро ёбед.

△ Фарз мекунем, ки n ададест, ки мо онро бояд пайдо кунем.

Бинобар $a_1 = 3$ ва $d = 2$ буданаш, мувофиқи формулаи $a_n = a_1 + (n - 1)d$ баробарии $99 = 3 + (n - 1)2$ ҳосил мешавад. Аз ин рӯ $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$; $n = 49$.

Ҷавоб: $n = 49$. ▲

Масъалаи 4. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_8 = 130$ ва $a_{12} = 166$ аст. Формулаи аъзои n -умро ёбед.

△ Аз формулаи (1) истифода бурда меёбем: $a_8 = a_1 + 7d$, $a_{12} = a_1 + 11d$
Қиматҳои додашудаи a_8 ва a_{12} -ро гузошта, нисбат ба a_1 ва d системаи муодилаҳоро ҳосил мекунем: $a_1 + 7d = 130$ ва $a_1 + 11d = 166$

Аз муодилаи дуюм муодилаи якумро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

△ Аз формулаи (1) ҳосил мекунем.

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

Қиматҳои додашудаи a_8 ва a_{12} -ро гузошта, нисбат ба a_1 ва d системаи муодилаҳоро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Аз муодилаи дуюм муодилаи якумро тарҳ карда ҳосил мекунем

$$4d = 36, \quad d = 9.$$

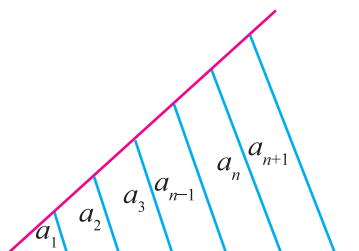
Пас, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Формулаи аъзои n -уми прогрессияро менависем:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ҷавоб: $a_n = 9n + 58$. ▲

Масъалаи 5. Дар як тарафи кунҷ аз куллаи он сар карда порчаҳои баробар чудо карда мешавад. Аз охириҳои онҳо хатҳои ростии параллел мегузаронанд (расми 80). Ибтибот кунед, ки дарозии порчаҳои $a_1, a_2, a_3, \dots$ - и ҳамон хатҳои ростии, ки дар байни тарафҳои кунҷ меҳабад, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд.



Расми 80.

▲ Дар трапетсияи асосҳояш a_{n-1} ва a_{n+1} хати миёна ба a_n баробар аст. Бинобар ин

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Аз ин ҷо $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ ёки

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Азбаски дар ин пайдарпай фарқи ҳар як аъзо аз аъзои дар пеш истода ҳамон як адад мешавад, пас ин пайдарпай прогрессияи арифметикӣ мешавад. ▲

Машқҳо

359. (Шифохӣ.) Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро гӯед:

- 1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
- 3) 25, 21, 17, ...; 4) -12, -9, -6, ...

360. Агар:

- 1) $a_1 = 2$ ва $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ ва $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ ва $d = -1$ бошад, панҷ аъзои аввалии прогрессияи арифметикиро нависед.

361. Ибтибот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи аъзои n -ум додашудаи зерин прогрессияи арифметикӣ аст:

- 1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
- 4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Дар прогрессияи арифметикӣ: 1) агар $a_1 = 2, d = 3$ бошад, a_{15} -ро ёбед;

- 2) агар $a_1 = 3$, $d = 4$ бошад, a_{20} -ро ёбед:
 3) агар $a_1 = -3$, $d = -2$ бошад, a_{18} -ро ёбед:
 4) агар $a_1 = -2$, $d = -4$ бошад, a_{11} -ро ёбед.

363. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикиро нависед:

- 1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
 3) -4, -6, -8, -10, ...; 4) 1, -4, -9, -14,

364. Адади -22 аъзои прогрессияи арифметикии 44, 38, 32, ... мебошад. Рақами ин ададро ёбед.

365. Оё адади 12 аъзои прогрессияи арифметикии -18, -15, -12, ... мешавад?

366. Адади -59 аъзои прогрессияи арифметикии 1, -5, ... аст. Рақами онро муайян кунед. Оё адади -46 аъзои ҳамон прогрессия мешавад?

367. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8$, $a_{10} = 64$ бошад, фарқи онро ёбед.

368. Фарқи прогрессияи арифметикӣ ба 1,5 баробар аст. Агар:

- 1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32,5$ бошад, a_1 -ро ёбед.

369. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5,5$;
 3) $a_3 = -1$, $a_9 = 17$ бошад, аъзои якуми онро ёбед.

370. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$;
 3) $a_7 = 11$, $a_{13} = 29$ бошад, формулаи аъзои n -уми онро ёбед.

371. Дар кадом қиматҳои n -аъзоҳои прогрессияи арифметикии 15, 13, 11, ... манфӣ мешавад?

372. Дар прогрессияи арифметикии $a_1 = -10$, $d = 0,5$ бошад, дар кадом қиматҳои n нобаробарии $a_n < 2$ иҷро мешавад?

373. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;
 3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0,5$, $a_{10} = -2,5$
 бошад, аъзои нӯҳум ва фарқи онро ёбед.

§ 30. ҲОСИЛИ ҶАМЪИ n -АЪЗОИ АВВАЛАИ ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

Масъалаи 1. Ҳосили ҷамъи ҳамаи ададҳои натуралии аз 1 то 100 ро ёбед.

△ Ин ҳосили ҷамъро бо ду усул менависем: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$,

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1.$$

Ин баробариҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{100\text{-то ҷамъкунанда}}$$

Бинобар ин $2S = 101 \cdot 100$, аз ин ҷо $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Акнун *прогрессияи арифметикии ихтиёрии* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ -ро дида мебароем.

Ҳосили ҷамъи n - аъзои аввалаи *прогрессияи додашуда* S_n бошад:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$



Теорема: *Ҳосили ҷамъи n -аъзои аввалаи *прогрессияи арифметикӣ* ба зерин баробар аст:*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (1)$$

○ S_n -ро дар ду тарз навишта мегирем::

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Мувофиқи таърифи *прогрессияи арифметикӣ* ин баробариҳоро ба таври зерин навиштан мумкин аст:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d), \quad (2)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d). \quad (3)$$

Баробариҳои (2) ва (3) -ро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n\text{-то ҷамъкунанда}}$$

Пас, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, аз ин ҷо $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$. ●

Масъалаи 2. Ҳосили ҷамъи n -то адади натуралии авваларо ёбед.

△ Фарқи пайдарпаии ададҳои ҷуфти натуралии

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$$

прогрессияи арифметикӣ $d = 1$ мебошад. Ҳангоми $a_1 = 1$ ва $a_n = n$ будан, аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Ҳамин тавр,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Агар ҷамъшавандаҳои ҳосили ҷамъи $38 + 35 + 32 + \dots + (-7)$ аъзоҳои пайдарпаии прогрессияи арифметикӣ бошад, суммаро ёбед.

△ Аз рӯи шарти масъала $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. аст. Формулаи $a_n = a_1 + (n-1)d$ -ро истифода бурда, $-7 = 38 + (n-1)(-3)$ -ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо $n = 16$ аст.

Аз рӯи формулаи $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ меёбем: $S_{16} = \frac{38 - 7}{2} \cdot 16 = 248$. ▲

Масъалаи 4. Барои он ки ҳосили ҷамъ ба 153 баробар шавад, аз 1 сар карда чандто ададҳои натуралиро ҷамъ кардан лозим аст?

△ Қатори ададҳои натуралӣ, прогрессияи арифметикии фарқаш $d=1$ аст. Мувофиқи шарт $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Формулаи ҳосили ҷамъи n -то аъзои авваларо ба таври зерин табдил медиҳем:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Аз додашудаҳо истифода бурда, нисбат ба n -и номаълум муодила ҳосил мекунем:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

аз ин ҷо

$$306 = 2n + (n - 1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Ин муодиларо ҳал карда меёбем:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2},$$

$$n_1 = -18, \quad n_2 = 17.$$

Миқдори ҷамъшавандаҳо манфӣ шуданаш мумкин нест, бинобар ин $n = 17$. ▲

Машқҳо

374. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

$$1) a_1 = 1, a_n = 20, n = 50; \quad 3) a_1 = -1, a_n = -40, n = 20;$$

$$2) a_1 = 1, a_n = 200, n = 100; \quad 4) a_1 = 2, a_n = 100, n = 50$$

бошад, суммаи n -аъзои аввалаи онро ёбед.

375. Ҳосили ҷамъи ададҳои натуралии аз 2 то 98 -ро ёбед (98 низ ба сумма дохил мешавад).

376. Ҳосили ҷамъи ададҳои токи аз 1 то 133 -ро ёбед (133 низ ба сумма дохил мешавад).

377. Агар дар прогрессияи арифметикӣ::

$$1) a_1 = -5, d = 0,5; \quad 2) a_1 = \frac{1}{2}, d = -3; \quad 3) a_1 = 36, d = -2,5$$

бошад, суммаи дувоздаҳ аъзои аввалаи оиро ёбед.

378. 1) агар $n = 11$ бошад, 9; 13; 17; ...;

2) агар $n = 12$ бошад, -16; -10; -4; ...

ҳосили ҷамъи n аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро ёбед.

379. Агар ҷамъшавандаҳои суммаи:

1) $3 + 6 + 9 + \dots + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + \dots + (-60)$ аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ бошад, ин суммаро ёбед..

380. Ҳосили ҷамъи тамоми ададҳои дурақама, тамоми ададҳои се-рақама ро ёбед.

381. Прогрессияи арифметикӣ бо формулаи аъзои n -умаш дода шудааст. Агар: 1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$ бошад, S_{50} -ро ёбед.

382. Барои он ки ҳосили чамъ ба 75 баробар шавад, аз 3 сар карда чандто адади пайдарпаи натуралиро чамъ бояд кард?

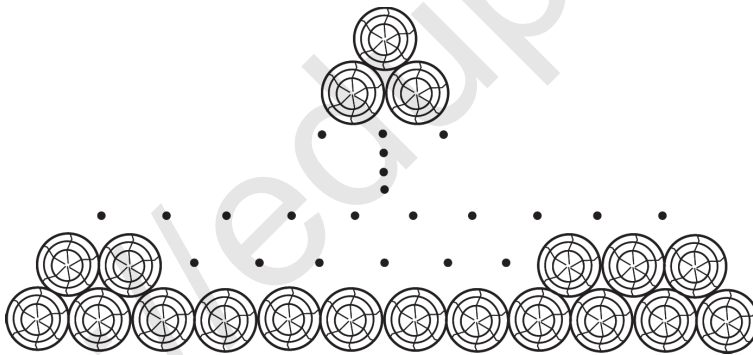
383. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}, n = 10, S_{10} = 90\frac{5}{6}$ бошад, a_n ва d -ро ёбед.

384. Агар дар прогрессияи арифметикӣ::

1) $a_7 = 21, S_7 = 205$; | 2) $a_{11} = 92, S_{11} = 22$; | 3) $a_{20} = 65, S_{20} = 350$ бошад, a_1 ва d -ро ёбед.

385. Барои сохтмон ғўлачӯбхоро чун дар расми 81 нишондода барин чида тахт намуданд. Агар дар асоси он 12 ғўлачӯб истода бошад, дар гарам чандто ғўлачӯб ҳаст?



Расми 81.

386. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_3 + a_9 = 8$. S_{11} -ро ёбед.

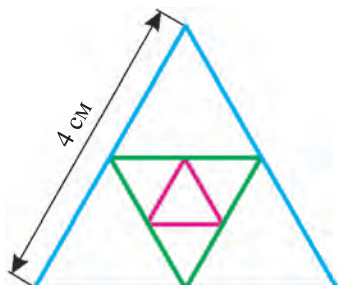
387. Дар прогрессияи арифметикӣ $S_5 = 65$ ва $S_{10} = 230$ бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

388. Иббот кунед, ки барои прогрессияи арифметикӣ баробарии $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ иҷро мешавад.

§ 31. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ

Секунҷаи баробартарафи мунтазами тарафаш ба 4 см баробарбударо дида мебароем.

Секунҷаи куллаҳояш дар миёнаҷоҳои тарафҳои ин секунҷа воқеъбударо месозем (расми 82). Мувофиқи хосияти хати миёнаи секунҷа тарафи секунҷаи дуюм ба 2 см баробар аст. Созишҳои ба ии монандро



Расми 82.

давом дода, секунҷаҳои тарафҳояшон ба $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ см ва ҳоказоҳоро ҳосил мекунем.

Пайдарпаии дарозии ин секунҷаҳоро менависем:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Дар ин пайдарпай ҳар як аъзои он аз аъзои дуюм сар карда, ҳангоми аъзои авваларо айнан ба як адад $\frac{1}{2}$ зарб кардан баробар аст. Ии гуна пайдарпаиҳоро прогрессияҳои геометрӣ меноманд.



Търиф. Агар дар пайдарпаии

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

барои n -и натуралии ихтиёрӣ баробарии

$$b_{n+1} = b_n q$$

иҷро шавад, ин намуд пайдарпаиҳоро прогрессияи геометрӣ номида мешавад, дар ин ҷо $b_n \neq 0$, q – ягон адади гайрисифрӣ.

Аз ин формула бармеояд, ки $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ аст. Адади q маҳраҷи прогрессия и геометрӣ номида мешавад.

Мисолҳо.

1) 2, 8, 32, 128, ... – прогрессияи геометрии маҳраҷаш $q = 4$ аст;

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$ – прогрессияи геометрии маҳраҷаш $q = \frac{2}{3}$ аст.

- 3) $-\frac{1}{12}, 1, -12, 144, \dots$ – прогрессияи геометрии маҳраҷаш $q = -12$ аст;
 4) $7, 7, 7, 7, \dots$ – прогрессияи геометрии маҳраҷаш $q = 1$ аст.

Масъалаи 1. Иббот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи $b_n = 7^{2n}$ додашуда прогрессияи геометрӣ мебошад.

△ Таъкид мекунем, ки барои n -ҳои ихтиёрӣ $b_n = 7^{2n} \neq 0$ аст. Талаб карда мешавад, ки барои n -ҳои дилхоҳ ҳосили тақсим $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ба ҳамон як адади аз n новобаста баробар буданаш иббот карда шавад. Дар ҳақиқат,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49$$

яъне, ҳосили тақсими $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ аз n вобаста нест. ▲

Мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ $b_{n+1} = b_n q$, $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, аз ин ҷо

$$b_{n+1}^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n > 1.$$



Агар ҳамаи аъзоҳои прогрессия мусбат бошанд, он гоҳ $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ мешавад яъне, аз аъзои дуёми прогрессияи геометрӣ сар карда ҳар як аъзои он ба миёнаи геометрии ду аъзоҳои ба он ҳамсоя баробар аст. Номии прогрессияи «геометрӣ» бо ин эзоҳ дода мешавад.

Таъкид мекунем, ки агар b_1 ва q дода шуда бошад, он гоҳ аъзоҳои боқимондаи прогрессияи геометрӣ аз рӯи формулаи рекуррентии

$b_{n+1} = b_n q$ ҳисоб карда шуданаш мумкин аст. Лекин, агар n , аз ҳад калон бошад, он гоҳ меҳнати бисёр сарф мешавад. Одатан аз формулаи аъзои n -ум истифода мебаранд.

Мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ

$$b_2 = b_1 q,$$

$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$

$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ ва ғайра.}$$

Умуман,



$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

(1)

чунки аъзoi n -уми прогрессияи геометрӣ ҳангоми ба аъзoi якум адади q -ро $(n - 1)$ маротиба зарб кардан ҳосил карда мешавад.

Формулаи (1) *формулаи аъзoi n -уми прогрессияи геометрӣ* номида мешавад.

Масъалаи 2. Агар $b_1 = 81$ ва $q = \frac{1}{3}$ бошад, аъзoi ҳафтуми прогрессияи геометрӣро ёбед.

△ Мувофиқи формулаи (1) :

$$b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Адади 486 аъзoi прогрессияи геометрии 2, 6, 18, ... мебошад. Аъзoi чандуми он мешавад

△ Бигзор рақами ҳосилшаванда, n – бошад. Барои он ки $b_1 = 2$, $q = 3$ аст, мувофиқи формулаи $b_n = b_1 q^{n-1}$:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad 243 = 3^{n-1}, \quad 3^5 = 3^{n-1},$$

аз ин ҷо $n-1=5$, $n=6$. $\blacktriangle$

Масъалаи 4. Дар прогрессияи геометрӣ $b_6 = 96$ ва $b_8 = 384$. аст. Формулаи аъзoi n -умро ёбед.

△ Мувофиқи формулаи $b_n = b_1 q^{n-1}$: $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. Қиматҳои додашудаи b_6 ва b_8 -ро гузошта ҳосил мекунем: $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Аз ин баробариҳо дуомашро ба якumаш тақсим мекунем:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

аз ин ҷо $4 = q^2$ ва ё $q^2 = 4$ аст. Аз баробарии охирин бармеояд, ки $q = 2$ ёки $q = -2$ аст.

Барои ёфтани аъзoi якуми прогрессия аз баробарии $96 = b_1 q^5$ истифода мебарем:

1) Бигзор $q = 2$ бошад. Дар ин ҳолат $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96 = b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$ мешавад.

Агар, $b_1 = 3$ ва $q = 2$ бошад, формулаи аъзoi n чунин $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ мешавад.

1) Бигузор $q=-2$ бошад. Дар ин ҳолат $96 = b_1(-2)^5$, $96 = b_1(-32)$, $b_1=-3$.

Агар $b_1=-3$ ва $q=-2$ бошад, формулаи аъзои n

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

мешавад.

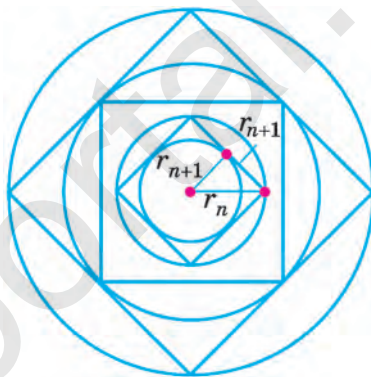
Ҷавоб: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ёки $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

Масъалаи 5. Ба давра квадрат дарун кашида шуда, ба он бошад давраи дуюм дарун кашида шудааст. Ба давраи дуюм квадрати дуюм дарун кашида шуда, ба он бошад давраи сеюм дарун кашида шудааст ва ҳоказо (расми 83). Исбот кунед, ки радиусҳои давраҳо прогрессияи геометрии ташкил медиҳанд.

△ Бигзор r_n – радиуси давраи n -ум бошад. Мувофиқи теоремаи Пифагор $r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2$, аз ин ҷо $r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2$, яъне $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$.

Пас, пайдарпаии радиусҳои давраҳо прогрессияи геометрии маҳраҷаш $\frac{1}{\sqrt{2}}$

бударо ташкил мекунад. ▲



Расми 83.

Машқҳо

389. (Шифохӣ.) Дар ҳамин прогрессияи геометрӣ аъзои якӯм ва маҳраҷ ба чӣ баробар аст: 1) 8, 16, 32, ... ; 2) -10, 20, -40, ... ;

3) 4, 2, 1, ... ; 4) -50, 10, -2, ... ?

390. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$ бошад, панҷ аъзои авваларо ёбед.

391. Пайдарпайии ададии зерини бо формулаи аъзои n -ум дода шуда, исбот кунед, ки прогрессияи геометрӣ мебошад.

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 3$ ва $q = 10$ бошад, b_4 -ро;

2) $b_1 = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад, b_7 -ро;

3) $b_1 = 1$ ва $q = -2$ бошад, b_5 -ро;

4) $b_1 = -3$ ва $q = -\frac{1}{3}$ бошад, b_6 -ро ҳисоб кунед.

393. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрии нависед:

1) 4, 12, 36, ...; 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...; 3) 4, -1, $\frac{1}{4}$, ...;

4) 3, -4, $\frac{16}{3}$, ...; 5) 16, 8, 4, 2, ...; 6) -9, 3, -1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Дар прогрессияи геометрӣ рақами аъзои зерин хаткашида шударо ёбед:

1) 6, 12, 24, ... , 192, ...; 2) 4, 12, 36, ... , 324, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\frac{1}{25}$; 4) -1, 2, -4, ... , 128,

395. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$;

3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$;

4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

бошад, маҳраҷи онро ёбед.

396. Прогрессияи геометрии 2, 6, 18, ... дода шудааст. 1) Аъзои ҳаштуми ин прогрессияро ёбед; 2) Рақами аъзои ба 162 баробари ин пайдарпаиро ёбед.

397. Агар дар прогрессияи геометрӣ аъзои мусбат

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

бошад, аъзои ҳафтум ва маҳраҷи онро ёбед.

398. Агар дар прогрессияи геометрӣ

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204,8$, бошад, аъзоҳои панҷум ва якуми онро ёбед.

399. Амонатгузор дар бонки пасандоз 4 январи соли 2009-ум 300000 сӯм пул гузошт. Агар бонки пасандоз сола ба миқдори 30% -и пасандоз

даромад диҳад, пули амонатгузор то 4 январи соли 2012 чӣ қадар мешавад?

- 400.** Квадрати тарафаш 4 см дода шудааст. Миёнаҷоҳи тарафҳои он қул्लाҳои квадрати дуҷум мебошад. Миёнаҷоҳи тарафҳои квадрати дуҷум бошад, қул्लाҳои квадрати сеҷум ва ҳоказо. Исбот кунед, ки пайдарпаии масоҳатҳои ҳамин квадратҳо прогрессияи геометрии ташкил мекунад. Масоҳати квадрати ҳафтумро ёбед.

§ 32. ҲОСИЛИ ЧАМЪИ n АЪЗОИ АВВАЛАИ ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРИЙ

Масъалаи 1. Ҳосили чамъи зеринро ёбед:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \quad (1)$$

△ Ҳар ду қисми баробари ба 3 зарб мекунем:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \quad (2)$$

Баробариҳои (1) ва (2) -ро ба таври зерин навишта мегирем::

$$\begin{aligned} S &= 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5); \\ 3S &= (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6. \end{aligned}$$

Ифодаҳои дохили қавс як хел аст. Бинобар ин аз ифодаи поёни ифодаи болоиро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \quad \blacktriangle$$

Акнун прогрессияи геометрии $b_1, b_1q, \dots, b_1q^n$, ки маҳраҷаш $q \neq 1$ аст, дида мебароем. Бигзор S_n – ҳосили чамъи n -то аъзои аввалаи ин прогрессия бошад: $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}$. (3)



Теорема. Ҳосили чамъи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрии, ки маҳраҷаш $q \neq 1$ аст, ба зерин баробар мебошад:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (4)$$

○ Ҳар ду қисми баробари (3) -ро ба q зарб мекунем:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n. \quad (5)$$

Баробариҳои (3) ва (5)-ро ба таври зерин навишта мегирем:

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}), \\ qS_n &= (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n. \end{aligned}$$

Ифодаҳои дохили қавс як хел аст. Бинобар ин аз ифодаи поёни ифодаи болоиро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Аз ин ҷо

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad \bullet$$

Агар $q = 1$ бошад, дар он ҳолат

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{n\text{-то чамъшаванда}} = b_1n, \quad \text{яъне } S_n = b_1n.$$

Масъалаи 2. Ҳосили чамъи панҷ аъзои аввалии прогрессияи геометрии 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... -ро ёбед:

△ Дар ин прогрессия $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$ аст. Аз рӯи формулаи (4) меёбем:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Ҳосили чамъи шаш аъзои аввалии прогрессияи геометрӣ, ки махрачаш $q = \frac{1}{2}$ аст, ба 252 баробар мебошад. Аъзои якуми ин прогрессияро ёбед.

△ Аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$252 = \frac{b_1 \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Аз ин чо $252 = 2b_1 \left(1 - \frac{1}{64}\right)$, $252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}$, $b_1 = 128$. ▲

Масъалаи 4. Ҳосили чамъи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ба -93 баробар аст. Аъзои якуми ин прогрессия ба -3 , махраҷ бошад ба 2 баробар аст. n -ро ёбед:

▲ Аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Аз ин чо $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

Масъалаи 5. $5, 15, 45, \dots, 1215, \dots$ — прогрессияи геометрӣ аст.

Ҳосили чамъи $5 + 15 + 45 + \dots + 1215$ -ро ёбед.

▲ Дар прогрессия $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулаи суммаи n -то аъзои авваларо чунин табдил медиҳем:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Аз шарти масъала истифода бурда меёбем:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820. \quad \blacktriangle$$

Машқҳо

401. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$

бошад, ҳосили чамъи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ро ёбед:

402. Ҳосили чамъи ҳафт аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ёбед:

1) $5, 10, 20, \dots$; 2) $2, 6, 18, \dots$; 3) $1, 1, 1, 2, \dots$

1) $5, 10, 20, \dots$; 2) $2, 6, 18, \dots$; 3) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

403. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $q = 2$, $S_7 = 635$ бошад, b_1 ва b_7 -ро ёбед;

2) $q = -2$, $S_8 = 85$ бошад, b_1 ва b_8 -ро ёбед.

404. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2$;

2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2$;

3) $S_n = 170, b_1 = 256, q = -\frac{1}{2}$;

4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

бошад, шумораи аъзоҳои он n -ро ёбед.

405. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 7, q = 3, S_n = 847$ бошад, n ва b_n -ро;

2) $b_1 = 8, q = 2, S_n = 4088$ бошад, n ва b_n -ро;

3) $b_1 = 2, b_n = 1458, S_n = 2186$ бошад, n ва q -ро;

4) $b_1 = 1, b_n = 2401, S_n = 2801$ бошад, n ва q -ро ёбед.

406. Агар чамъшавандаҳои суммаи ададҳо аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи геометрӣ бошад, ии суммаро ёбед:

1) $1 + 2 + 4 + \dots + 128$;

2) $1 + 3 + 9 + \dots + 243$;

3) $-1 + 2 - 4 + \dots + 128$;

4) $5 - 15 + 45 - \dots + 405$.

407. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_2 = 15, b_3 = 25$; | 2) $b_2 = 14, b_4 = 686$, | 3) $b_2 = 15, b_4 = 375, q > 0$
бошад, b_5 ва S_4 -ро ёбед.

408. Прогрессияи геометрӣ бо формулаи аъзои n -ум дода шудааст:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ бошад, S_5 -ро ёбед;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ бошад, S_6 -ро ёбед;

409. Агар n — нишондихандаи дараҷа ва адади натуралии аз 1 калон бошад айниятро исбот кунед:

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = x^n - 1,$$

410. Дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_3 = 135, S_3 = 195$ бошад, b_1 ва q -ро ёбед;

2) $b_1 = 12, S_3 = 372$ бошад, q ва b_3 -ро ёбед.

411. Дар прогрессияи геометрӣ:

- 1) $b_1 = 1$ ва $b_3 + b_5 = 90$ бошад, q -ро;
- 2) $b_2 = 3$ ва $b_4 + b_6 = 60$ бошад, q -ро;
- 3) $b_1 - b_3 = 15$ ва $b_2 - b_4 = 30$ бошад, S_{10} -ро;
- 4) $b_3 - b_1 = 24$ ва $b_5 - b_1 = 624$ бошад, S_5 -ро ёбед.

§ 33. ПРОГРЕССИИ ГЕОМЕТРИИ БЕҲАД КАМШАВАНДА

Квадратҳои дар расми 84 тасвиршударо дида мебароем. Тарафи квадрати якум ба 1, дуомаш ба $\frac{1}{2}$, сеюмаш ба $\frac{1}{2^2}$ баробар аст ва ғайра. Пас, тарафҳои квадратҳои прогрессияи геометрии маҳрачаш ба $\frac{1}{2}$ баробарро ташкил мекардаанд:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \quad (1)$$

Масоҳатҳои ин квадратҳо бошад, прогрессияи геометрии маҳрачаш ба $\frac{1}{4}$ баробари зеринро ташкил мекунанд:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots, \frac{1}{4^{n-1}}, \dots \quad (2)$$

Аз расми 84 аён аст, ки тарафҳои квадратҳо ва масоҳатҳои онҳо бо афзудани рақами n торафт кам шуда, ба сифр наздик шуда мераванд. Бинобар ин прогрессияҳои (1) ва (2) прогрессияҳои беҳад камшаванда номида мешаванд. Таъкид, мекунем ки маҳрачҳои ин прогрессияҳо аз як хурд аст.

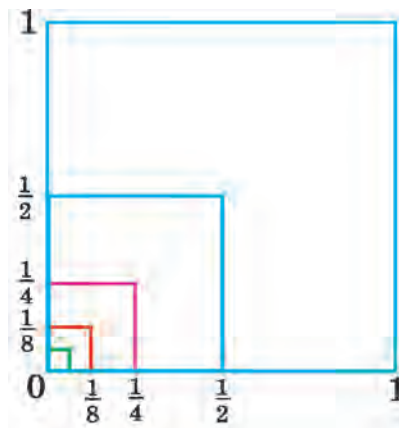
Акнун прогрессияи геометрии зеринро дида мебароем:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \dots \quad (3)$$

Маҳрачи ин прогрессия $q = -\frac{1}{3}$,

аъзохояш бошад $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$,

$b_4 = -\frac{1}{27}$ ва ғайра.



Расми 84.

Бо зиёд шудани рақами n аъзоҳои ин прогрессия ба сифр наздик мешаванд. Прогрессияи (3) -ро низ прогрессияи беҳад камшаванда ме- номанд. Таъкид карда мегузарем, ки модули маҳраҷи он низ аз як хурд аст $|q| < 1$.



Прогрессияи геометрии модули маҳраҷаш аз як хурд прогрессияи геометрии беҳад камшаванда номида мешавад.

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки прогрессияи геометрии бо формулаи аъзои n - умаш

$$b_n = \frac{3}{5^n} \text{ — додашуда, беҳад камшаванда аст.}$$

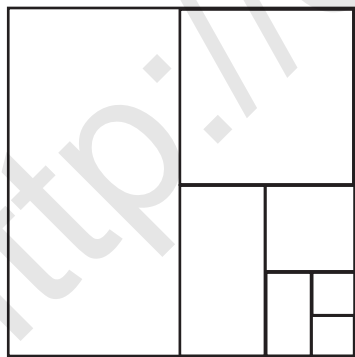
△ Мувофиқи шарт $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, аз ин ҷо $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. Азбаски $|q| < 1$ аст, пас прогрессияи геометрии додашуда беҳад камшаванда мешавад. ▲

Дар расми 85 квадрати тарафаш ба 1 баробар тасвир карда шудааст. Нисфи онро штрихпӯш мекунем. Сонӣ нисфи қисми боқимондашро низ штрихпӯш мекунем ва ғайра. Масоҳатҳои росткунҷаҳои штрихонидашуда и прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи зерин- ро ташкил медиҳад.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Агар бо ин роҳ ҳамон росткунҷаҳои ҳосилкардашударо штрихонем, он гоҳ тамоми квадрат бо штрих рӯйпӯш мегардад. Табиист, ки суммаи масоҳатҳои ҳамаи росткунҷаҳои штрихонидашударо ба 1 баробар гуфта ҳисобидан мумкин аст, яъне:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$



Расми 85.

Дар қисми чапи ин баробарӣ ҳосили ҷамъи адади беҳад ҷамъшавандаҳо исто- дааст. Ҳосили ҷамъи n -то ҷамъшавандаҳои авваларо дида мебароем:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Мувофиқи формула суммаи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Агар n беҳад афзун шавад, он гоҳ $\frac{1}{2^n}$ ба сифр наздик шудан мегирад (ба сифр майл мекунад). Ин ҳолат чунин навишта мешавад:

ҳангоми $n \rightarrow \infty \quad \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, (ҳонда мешавад: ҳангоми n ба беҳадӣ майл кардан $\frac{1}{2^n}$ ба сифр майл мекунад) ва ё

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(ҳонда мешавад: ҳангоми n ба беҳадӣ майл кардан, лимити пайдарпаии $\frac{1}{2^n}$ ба сифр баробар аст.)

Умуман, барои ягон пайдарпаии a_n ҳангоми $n \rightarrow \infty$ будан $a_n - a \rightarrow 0$ бошад, он гоҳ пайдарпаии a_n ба адади майл мекунад (лимити пайдарпаии a_n ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ба a баробар аст) мегӯянд ва ба таври $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ менависанд.

Азбаски ҳангоми $n \rightarrow \infty$ будан $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ аст, пас ҳангоми $n \rightarrow \infty$ будан $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 1$, яъне $n \rightarrow \infty$ бошад $S_n \rightarrow 1$. Бинобар ин ҳосили ҷамъи беҳад $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ ба 1 баробар ҳисобида мешавад. Акнун прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи дилхоҳро дида мебароем:

$$b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots,$$

дар ин ҷо $|q| < 1$.

Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда гуфта, ҳангоми $n \rightarrow \infty$ адади суммаи n -то аъзои аввалаи он майлқунандаро меноманд.

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ аз формула истифода мебарем. Онро интавр менависем:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n. \quad (4)$$

Азбаски $|q| < 1$ аст, ҳангоми беҳад афзудани n $q^n \rightarrow 0$ мешавад. Бинобар ин $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ ҳам ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ба сифр майл мекунад. Дар формулаи (4) ҷамшавандаи якум ба n вобаста нест. Пас ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ҳосили ҷамъи S_n бо адади $\frac{b_1}{1-q}$ майл мекунад.



Ҳамин тавр ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи S ба зерин баробар аст:

$$S = \frac{1}{1-q} \quad (5)$$

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $b_1 = 1$ будан, $S = \frac{1}{1-q}$ -ро соҳиб мешавем. Одатан ин баробарӣ дар намуди зерин навишта мешавад:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Таъкид мекунем, ки ин баробарӣ ва баробарии (5) фақат ҳангоми $|q| < 1$ будан, ҷой дорад.

Масъалаи 2. Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \dots$ -ро ёбед.

△ Азбаски $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$ аст, пас $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}, S = \frac{b_1}{1-q}$. Аз рӯи формулаи

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{8}. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Агар $b_3 = -1, q = \frac{1}{7}$ бошад, ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед.

△ Ҳангоми $n = 3$ будан формулаи $b_n = b_1 q^{n-1}$ -ро истифода барем, $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}, -1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$ ҳосил мешавад, аз ин ҷо $b_1 = -49$.

Аз рӯи формулаи (5) суммаи S -ро меёбем:

$$S = \frac{-49}{1 - \frac{1}{7}} = -57 \frac{1}{6}. \quad \blacktriangle$$

Масъалаи 4. Аз формулаи (5) истифода бурда касри даҳии даврии беҳади $a = 0,(15) = 0,151515\dots$ -ро дар шакли касри оддӣ нависед.

△ Пайдарпаии зерини қиматҳои тақрибии касри беҳади додашударо тартиб медиҳем: $a_1 = 0,15 = \frac{15}{100},$

$$a_2 = 0,1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0,151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Ин тавр навишгари қиматҳои тақриби нишон медиҳад, ки касри даври додшударо дар шакли прогрессияи геометрии беҳад камшаванда тасвир кардан мумкин аст:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots$$

Мувофиқи формулаи (5) ҳосил мекунем:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \quad \blacktriangle$$

Машиқҳо

412. Иббот кунед, прогрессияи геометрии беҳад камшаванда аст:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$; | 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; | 3) $-81, -27, -9, \dots$; |
| 4) $-16, -8, -4, \dots$; | 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots$; | 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$. |

413. Агар дар прогрессияи геометрии:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1) $b_1 = 40, b_2 = -20$; | 2) $b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4}$; |
| 3) $b_7 = -30, b_6 = 15$; | 4) $b_5 = -9, b_9 = -\frac{1}{27}$ |

бошад, он беҳад камшаванда мешавад? Инро муайян кунед.

414. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед:

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------|
| 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; | 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots$; | 3) $-25, -5, -1, \dots$; |
| 4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots$; | 5) $128, 64, 2, \dots$; | 6) $-81, -27, -9, \dots$. |

415. Агар дар прогрессияи геометрии камшаванда:

- | | |
|--|---|
| 1) $q = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{8}$; | 2) $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 9$; |
| 3) $q = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{81}$; | 4) $q = -\frac{1}{2}, b_4 = -\frac{1}{8}$ |

бошад, суммаи онро ёбед.

416. Оё пайдарпаии бо формулаи аъзои n -ум додашудаи зерин прогрессияи геометрии беҳад камшаванда мешавад?

- 1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;
 4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. 1) Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед:
 12, 4, $\frac{4}{3}, \dots$; 2) 100, -10, 1 ...; 3) 98, 28, 8,

418. Агар дар прогрессияи геометрии беҳад камшаванда:

- 1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

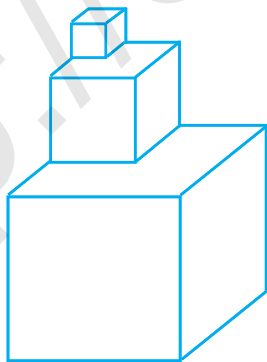
бошад, суммаи онро ёбед.

419. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда ба 150 баробар аст. Агар:

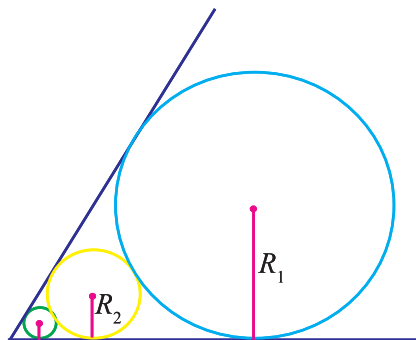
- 1) $q = \frac{1}{3}$, бошад, b_1 -ро; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

бошад, q -ро ёбед.

420. Ба болои куби тегааш a куби тегааш $\frac{a}{2}$ гузоштанд, ба болои он куби тегааш $\frac{a}{4}$ гузоштанд, баъдан ба болои он куби тегааш $\frac{a}{8}$ гузоштанд ва ҳоказо (расми 86). Баландии шакли ҳосилшударо ёбед.



Расми 86.



Расми 87.

- 421.** Ба кунчи 60° баробар давраҳои ба якдигар расанда пай дар пай дарун кашида шудаанд (расми 87). Радиуси давраи якум ба R_1 баробар аст. Радиуси давраҳои боқимонда $R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$ ро ёбед ва нишон диҳед, ки онҳо прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ташкил мекунад. Ибтот кунед, ки суммаи $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$ ба масофаи байни маркази давраи якум ва қуллаи кунҷ баробар аст.
- 422.** Қасри даҳии даврии беохирро дар шакли қасри оддӣ нависед:
 1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

Машқҳо доир ба боби IV

- 423.** Фарқи прогрессияи арифметикиро ёбед, аъзоҳои қорӯм ва панҷуми онро нависед:
- 1) $4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, \dots$; 2) $3\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2}, \dots$;
 3) $1, 1 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, \dots$; 4) $\sqrt{2}, \sqrt{2} - 3, \sqrt{2} - 6, \dots$.
- 424.** Ибтот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи аъзои n -умаш $a_n = -2(1 - n)$ додашуда прогрессияи арифметикӣ мебошад.
- 425.** Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
- 1) $a_1 = 6, d = \frac{1}{2}$ бошад, a_5 -ро; 2) $a_1 = -3\frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$ бошад, a_7 -ро;
 3) $a_1 = 4,8, d = 1,2$ бошад, a_{11} -ро ҳисоб кунед:
- 426.** Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
- 1) $a_1 = -1, a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3, a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2, a_5 = 6$ бошад, суммаи бист аъзои аввалаи онро ёбед.
- 427.** Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
- 1) $a_1 = -2, a_n = -60, n = 10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 25\frac{1}{2}, n = 11$
 бошад, суммаи n -то аъзои аввалаи онро ёбед.
- 428.** Агар ҷамъшавандаҳои суммаи:
- 1) $-38 + (-33) + (-28) + \dots + 12$;
 2) $-17 + (-14) + (-11) + \dots + 13$
 аъзоҳои пайдарпаии прогрессияи арифметикӣ бошад, ин суммаро ёбед.

429. Махраҷи прогрессияи геометрӣ ва аъзоҳои чорум ва панҷуми онро ёбед:

- 1) $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$; 2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$; 3) $3, \sqrt{3}, 1, \dots$;
4) $5, -5\sqrt{2}, 10, \dots$; 5) $16, 4, 1, \dots$; 6) $8, -4, 2, \dots$.

430. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ нависед:

- 1) $-2, 4, -8, \dots$; 2) $-\frac{1}{2}, 1, -2, \dots$; 3) $-27, -9, -3, \dots$.

431. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

- 1) $b_1 = 2, q = 2, n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{8}, q = 5, n = 4$;
3) $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}, n = 5$, бошад, b_n -ро ёбед.

432. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

- 1) $b_1 = \frac{1}{2}, q = -4, n = 5$; 2) $b_1 = 2, q = -\frac{1}{2}, n = 10$;
3) $b_1 = 10, q = 1, n = 6$; 4) $b_1 = 5, q = -1, n = 9$ бошад,
суммаи n -аъзои аввалини онро ёбед.

433. Суммаи n -аъзои аввалини прогрессияи геометрӣ ёбед:

- 1) $128, 64, 31, \dots, n = 6$; 2) $162, 54, 18, \dots, n = 5$;
3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots, n = 5$; 4) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, n = 4$.

434. Ибтот кунед, ки прогрессияи геометрӣ беҳад камшаванда аст, суммаи онро ёбед:

- 1) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$; 2) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots$; 3) $7, 1, \frac{1}{7}, \dots$.

435. Агар дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 2\frac{1}{2}$ ва $a_8 = 23\frac{1}{2}$ бошад, фарқи онро ёбед.

436. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_1 = 5, a_3 = 15$; 2) $a_3 = 8, a_5 = 2$; 3) $a_2 = 18, a_4 = 14$
бошад, панҷ аъзои аввалини онро ёбед.

437. Байни ададҳои -10 ва 5 як ададро чунон гузоред, ки дар натиҷа се аъзои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ ҳосил шавад.

438. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_{13} = 28, a_{20} = 38$; 2) $a_{18} = -6, a_{20} = 6$; 3) $a_6 = 10, a_{11} = 0$ бошад,
аъзои нуздаҳум ва якуми онро ёбед.

Худро бисанҷед!

1. Дар прогрессияи арифметикӣ 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$ бошад, a_{10} ва суммаи даҳ аъзои аввалаи онро ёбед.
2. Дар прогрессияи геометрӣ : 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ бошад, b_6 ва суммаи шаш аъзои аввалаи онро ёбед.
3. 1) Исбот кунед, ки пайдарпаии 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; 2) $128, 32, 8, \dots$ прогрессияи геометрии баҳад камшаванда аст ва суммаи аъзоҳои онро ёбед.

439. Дар кадом қиматҳои x ададҳои

- 1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2 , $11x$; 3) x^2 , $10x$, 25 аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ мешавад.

440. Нишон диҳед, ки ададҳои зерин се аъзои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ мебошанд:

- 1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha - \beta)$;
2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha - \beta)$;
3) $\cos 2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1 ; 4) $\sin 5\alpha$, $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$, $\sin\alpha$.

441. Барои он ки сумма ба 252 баробар бошад, аз 5 сар карда чандто адади пайдарпаи токи натуралиро чамъ кардан лозим аст?

442. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

- 1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;
3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$ бошад, a_n ва d -ро ёбед.

443. Дар прогрессияи геометрӣ:

- 1) агар $b_1 = 4$ ва $q = -1$ бошад, b_9 -ро ёбед.
2) агар $b_1 = 1$ ва $q = \sqrt{3}$ бошад, b_7 -ро ёбед.

444. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

- 1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$ бошад, аъзои панҷуми онро ёбед.

445. Дар байни ададҳои 4 ва 9 як адади мусбатро чунон ҷойгир кунед, ки дар натиҷа се аъзои пайдарпаи прогрессияи геометрӣ ҳосил шавад.

446. Агар пайдарпай бо формулаи аъзои n -умаш:

$$1) b_n = 5^{n+1}; \quad 2) b_n = (-4)^{n+2}; \quad 3) b_n = \frac{10}{7^n}; \quad 4) b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$$

дода шуда бошад, оё прогрессияи геометрии беҳад камшаванда шуда метавонад?

447. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

$$\begin{array}{ll} 1) b_2 = -81, S_2 = 162; & 2) b_2 = 33, S_2 = 67; \\ 3) b_1 + b_3 = 130, b_1 - b_3 = 120; & 4) b_2 + b_4 = 68, b_2 - b_4 = 60 \end{array}$$

бошад, нишон диҳед, ки он беҳад камшавада аст.

448. Истироҳаткунанда ба тавсияи шифокор амал карда, рӯзи якум зери нури офтоб 5 дақиқа хобид, дар ҳар як рӯзи баъдина бошад, офтобхӯрӣ 5 дақиқагӣ афзуд. Агар ӯ ба офтобхӯрӣ рӯзи чоршайбе оғоз карда бошад, дар кадом рӯзи ҳафта муддати офтобхӯрӣ ба 40 дақиқа баробар мешавад?

449. Агар дар прогрессияи $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ ва $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ бошад, бошад, аъзои якум ва фарқи оиро ёбед.

450. Агар дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ва $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

451. Дар соати 1 соат 1 маротиба, дар 2–2 маротиба, ..., дар 12–12 маротиба бонг мезанад. Мили соат ҳангоми ними ҳар як соати навбатиро нишон додан бошад, як маротиба бонг мезанад. Ин соат дар як шабонарӯз чанд маротиба бонг мезанад?

Машқ (тест)-ҳои санҷишӣ доир ба боби IV

- Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101} -ро ёбед.
А) -9797; Б) -9798; В) -7979; Г) -2009.
- Дар прогрессияи арифметикӣ $d = 4$, $S_{50} = 5000$ бошад, a_1 -ро ёбед.
А) -2; Б) 2; В) 100; Г) 1250.
- Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ бошад, d -ро ёбед.
А) 4; Б) 2; В) 3; Г) 3,5.

4. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2 + a_9 = 20$ бошад, S_{10} -ро ёбед.
А) 90; Б) 110; В) 200; Г) 100.
5. Аъзои 5-уми пайдарпаиро ёбед, ки ҳангоми ба 8 тақсим кардан дар бақия 7 монад.
А) 47; Б) 55; В) 39; Г) 63.
6. Адади 701 аъзои аъзои чандуми прогрессияи 1, 8, 15, 22, ... мебошад?
А) 101; Б) 100; В) 102; Г) 99.
7. Аъзои прогрессияи 1002, 999, 996, ... аз кадом аъзо сар карда, ададҳои манфӣ мешаванд?
А) 335; Б) 336; В) 337; Г) 334.
8. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ бошад, a_{100} -ро ёбед.
А) 507; Б) 495; В) 502; Г) 595.
9. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$ бошад, n -ро ёбед.
А) 99; Б) 101; В) 10; Г) 100.
10. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_{12} + a_{15} = 20$ бошад, S_{26} -ро ёбед.
А) 260; Б) 270; В) 520; Г) 130.
11. Дар байни ададҳои 1 ва 11 чунин 99 ададро ҷойгир кунед, ки онҳо бо ии ададҳо дар яққоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Барои ии прогрессия S_{50} -ро ёбед.
А) $172\frac{1}{2}$; Б) 495; В) 300; Г) 178.
12. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = -20,7$, $d = 1,8$ бошад, аз кадом аъзо сар карда, аъзоҳои прогрессия мусбат мешаванд?
А) 18; Б) 13; В) 12; Г) 15.
13. Суммаи чанд адади натуралии ба 7 қаратӣ 385-ро ҳосил мекунад?
А) 12; Б) 11; В) 10; Г) 55.
14. Дар прогрессияи геометрӣ $b_1 = 2$, $q = 3$ бошад, S_6 -ро ёбед.
А) 1458; Б) 729; В) 364; Г) 728.
15. Дар прогрессияи геометрӣ $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$ бошад, b_1 -ро ёбед.
А) $242\frac{2}{3}$; Б) 81; В) $121\frac{1}{3}$; Г) 240.

16. Дар прогрессияи геометрӣ $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ бошад, q -ро ёбед.

А) 4; Б) 2; В) 8; Г) $\frac{1}{2}$.

17. Прогрессияи геометрӣ дорои 6 аъзо мебошад. Суммаи 3 аъзои аввала ба 26, суммаи 3 аъзои оянда ба 702 баробар аст. Маҳраҷи прогрессияро ёбед.

А) 4; Б) 3; В) $\frac{1}{3}$; Г) $2\sqrt{3}$.

18. Агар дар прогрессияи геометрии беҳад камшаванда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ бошад, q -ро ёбед.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{64}{65}$; В) $\frac{63}{64}$; Г) $\frac{1}{4}$.

19. Агар дар прогрессияи геометрӣ $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2 - \sqrt{3}$ бошад, S -ро ёбед.

А) $2 + \sqrt{3}$; Б) 3; В) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Г) 2.



Масъалаҳои амалӣ-таҷрибӣ ва алоқа бо ғанҷо

Масъалаи 1. Қисми озод афтада дар сонияи якум 4,9 м ва дар сонияҳои минбаъда нисбат ба пештара 9,8 м зиёд масофаро тай мекунад. Қисм аз баландии 4410 метр дар чӣ қадар вақт ба замин меафтад?

△ Мувофиқи шартҳои масъала қисм дар сонияи якум $a_1 = 4,9$, сонияи дуюм $a_2 = 4,9 + 9,8$, сонияи сеюм $a_3 = a_2 + 9,8 = a_1 + 2 \cdot 9,8$ ва ҳоказо дар сонияи n -ум $a_n = a_{n-1} + 9,8 = a_1 + (n-1)9,8$ метр ба паст мефурояд, яъне масофаҳои дар ҳар як сония ба паст фурумадан, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад. Пас, қисм дар n сония ба замин меафтад, ғуём, дар асоси формулаи ҳосили ҷамъи n -аъзои аввалии прогрессияи арифметикӣ

$$\begin{aligned} 4410 &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2 \cdot 4,9 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо $4,9n^2=4\,410$, $n^2=900$, $n=30$ -ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: Ҷисм дар 30 сония ба замин меафтад. ▲

Масъалаи 2. Шахсе b сӯм маблағи худро бо фоизи солонаи $p\%$ гузошт ва баъд аз n сол гузаштан ҳама пулро баргардонда гирифт. Агар $b=4\,000\,000$, $p=8$ бошад, вай шахс баъд аз ду сол чӣ қадар пул гирифтааст?

▲ Маблағи аввалаи гузоштааш b сӯм бошад, баъд аз як сол маблағи он $b_1 = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ сӯм мешавад. Барои солҳои оянда яке аз вариантҳои зерин шуданаш мумкин аст.

1) Барои ҳар як соли оянда фоиз аз рӯи маблағи аввала b сӯм ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҳол баъд аз соли дуюм $b_2 = b + 1 + \frac{bp}{100} + \frac{bp}{100} = b \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right)$

сӯм ва ҳоказо баъд аз n сол $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$ сӯм мешавад. Ин гуна ҳисобкунии фоиз фоизи содда номида мешавад. Дар ин ҷо агар $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ бошад, дар ин ҳол $b_2 = 4\,000\,000 \cdot 1,16 = 4\,640\,000$

2) Барои ҳар як соли оянда аз рӯи маблағи соли гузашта ҳисоб карда мешавад. Баъд аз ду сол $b_2 = b_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ сӯм

ва ҳоказо баъд аз n сол $b_n = b_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ мешавад.

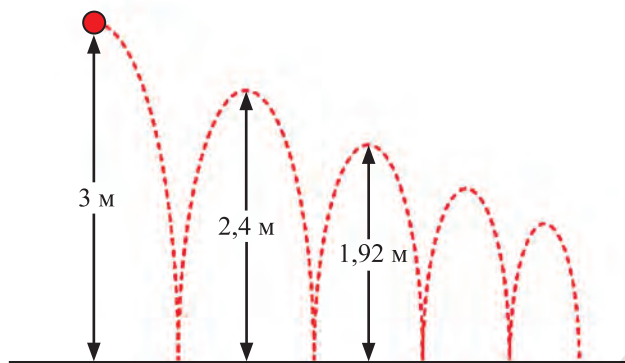
Ин гуна ҳисобкунии фоиз фоизи мураккаб номида мешавад. Дар ин ҷо агар $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ бошад, дар ин ҳо $b_2 = 4\,000\,000 \cdot 1,08^2 = 4\,665\,600$ сӯм.

Ҷавоб: дар ҳолати фоизи содда $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$ сӯм ; $4\,640\,000$ сӯм;

дар ҳолати фоизи мураккаб $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ сӯм; $4\,665\,600$ сӯм. ▲

Масъалаҳо

1. Қисми озодафтанда дар сонияи якум 4,9 м роҳ ,дар ҳар як сонияҳои оянда, аз пештара 9,8 м зиёд роҳ тай мекунад. Қисми афтанда дар сонияи 5-ум кадом масофaro тай мекунад?
2. Дар яке аз секторҳои сирк дар ҳар як қатори оянда нисбат ба пешина якто қойи нишаст зиёдтар аст. Агар
 - 1) дар қатори якум 8 то қойи нишаст қаторҳо 22 то;
 - 2) дар қатори якум қойи нишаст 10 то қойи нишаст, қаторҳо 21- то бошад дар сектор чандто қой ҳаст?
3. Сайёҳон дар соҳили дарё 140 км масофaro тай карданро ба нақша гирифтанд. Рӯзи якум 5 км, ҳар як рӯзи оянда нисбат ба рӯзи гузашта 2 км зиёд роҳ гашта бошанд, онҳо дар саёҳат чанд рӯз буданд?
4. Ҳуҷайраҳои хамиртурӯш дар натиҷаи ба 2 тақсим шудани ҳуҷайра зиёд мешавад. Агар дар ҳолати аввала 6- то ҳуҷайра бошад ,баъд аз 10 маротиба тақсим шудан шумораи ҳуҷайраҳо чандто мешавад?
5. Маоши моҳонаи ходими завод дар давоми соли тақвими ҳар моҳ бо як ҳел миқдор зиёд карда шуд. Миқдори умумии дар моҳҳои июн, июл, август гирифтаи моҳонаи 9 900 000 сӯм, сентябр, октябр, ноябр гирифта 10 350 000 сӯм аст. Музди меҳнати дар давоми сол гирифтаи ходимро ёбед.
6. Бо усули ваннаи ҳаво муолиҷакунӣ рӯзи якум 15 дақиқа давом мекунад, дар ҳар як рӯзҳои оянда 10 дақиқа зиёд шуда меравад. Барои қабули ванна аз ҳама зиёд 1 соату 45 дақиқа давом кардана, бо тартиби нишондодашуда қабули ваннаи ҳаво чанд рӯз давом кардана лозим аст?
7. Тӯпи эластикии партофташуда ба замин зада шуда боз боло мебарояд ва ҳар сафар ба 80% баландии пешина барояд, дар ин ҳол тӯпи аз 3 метр партофта шуд, ҳосили ҷамъи масофаҳои умумии вертикалии ба боло ба поён тай кардаи тӯпро ёбед (расми 88).



Расми 88.



Масъалаҳои таърихӣ

1. *Масъалаи Берунӣ.* Иббот кунед, ки агар дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбат: адади аъзоҳо тоқ бошад, он гоҳ $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$ адади аъзоҳо чуфт бошад, он гоҳ $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ мебошад.
2. Масъалаи аз папируси Ахмес гирифташуда (солҳои 2000 пеш аз мелод). 10 ченак ғалларо байни 10 нафар чунон тақсим кунед, ки фарқи байни яке аз нафарҳо аз пасояндаш (ё пешояндаш) ба $\frac{1}{8}$ ченак баробар бошад.



Маълумотҳои таърихӣ

Абӯрайҳон Берунӣ дар асараш «Ёдгориҳои халқҳои қадим» ҳосили ҷамъи 64 аъзои аввалии прогрессияи геометрии, ҳисоб мекунад, ки аъзои якумаш $b_1 = 1$, маҳраҷаш $q = 2$ буда, ба ривояти кашфи шоҳмот вобаста аст. Ӯ нишон медиҳад, ки агар аз адади ба катаки k -и тахтаи шоҳмот мувофиқоянда адади 1 тарҳ карда шавад, фарқ ба суммаи ҳамаи ададҳои катакҳои аз катаки k пештара мувофиқ баробар аст, яъне иббот мекунад, ки

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} \text{ аст.}$$

Боби V. Элементҳои назарияи эхтимолият ва статистикаи математикӣ.



§ 34.

ҲОДИСАҲО

Назарияи эҳтимолият ва статистикаи математикӣ фанест, ки алокаи қонунҳои байни ҳодисаҳои тасодуфӣ ва истифодаи хулосаҳои аз онҳо ҳосилшударо, барои ҳалли масъалаҳои амалӣ меомӯзад.

1. Ҳодисаҳои рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ ва тасодуфӣ.

Дар ҳаёт ҳодиса гуфта, чараёни дилхоҳи рӯй доданаш мумкин ё ки рӯй доданаш ғайри имконро меноманд. Ба ғайр аз ин таҷрибаҳои аз тарафи одамон гузаронидашуда ёки санҷишҳо, мушоҳидаҳо ва натиҷаҳои корҳои ҷенкунӣ ҳам ҳодисаҳо мебошад. Ҳамин ҳодисаҳоро ба ҳодисаҳои рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ ва тасодуфӣ ҷудо кардан мумкин аст.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда рӯй доданаш ғайри имкон аст, **ҳодисаи рӯй доданаш ғайриимкон** номида мешавад. Ба ҳодисаи рӯй доданаш ғайриимкон мисолҳо меорем:

1) оби кӯл дар +30 градус ях мекунад

2) ҳангоми партофтани кубӣ бозии дар рӯяхояш рақамҳои аз 1-то 6 -ро партофтан, пайдо шудани рақами 8.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда албатта ҳар дафъа рӯй медиҳад, **ҳодисаи муқаррарӣ** номида мешавад. Масалан: 1) баъд аз зимистон баҳор меояд 2) ҳангоми партофтани шаш ҳол албатта рақами аз 6 калон набуда (аз сифр фарқкунанда) пайдо мешавад.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда рӯй доданаш ҳам, рӯй надоданаш ҳам мумкин аст, **ҳодисаҳои тасодуфӣ** номида мешавад.

Ҳодисаҳои зерин ба ҳодисаҳои тасодуфӣ мисол шуда метавонад:

1) Адади аз байни ададҳои натуралии аз 1 то 50 тасодуфӣ интихоб шуда ба 7 тақсим мешавад; 2) тангаи партофташуда бо тарафи герб афтид.

2. Ҳодисаҳои якҷоя, рӯй доданаши мумкин ва дар якҷоягӣ набуда.

Ду ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда дар як вақт содир шуданаш мумкин аст, ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаши мумкин номида мешавад, ҳодисаҳои дар як вақт содирнашаванда ҳодисаҳои дар якҷоягӣ набуда номида мешавад.

Масалан, ҳодисаҳои "офтоб баромад" ва "рӯз хунук" ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаши мумкин, ҳодисаҳои "офтоб фуру рафт" ва "офтоб баромад" ҳодисаҳои дар якҷоягӣ набуда мебошад. Ҳодисаҳои зерини ба шашхол вобастаро дида мебароем: 1) омадани 3 хол; 2) омадани 4 хол; холи ба се каратӣ 3) омадани аз 3 хол зиёд афтид 4) омадани холи ба се каратӣ. Аз байни ин ҳодисаҳо се ҷуфти зерин ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаши мумкин: 1- ва 4- (адади 3 ба 3 каратӣ аст); 3- ва 4- (4 хол аз 3 хол калон аст); 3- ва 4- (масалан, 6 хол). Ҳодисаҳои зерин ҳодисаҳои дар якҷоягӣ набуда мебошад; 1 ва 2 (дар як вақт омадани дуто адади гуногун мумкин нест); 1 ва 3 (холи аз 3 калон, яъне холҳои 4, 5, 6 бо холи 3 дар як вақт намеояд); 2 ва 4 (адади 4 ба 3 каратӣ намебошад).

3. Ҳодисаҳои баробар имконият.

Мисолҳоро дар гуруҳи ҳодисаҳо бо таври зерин дида мебароем:



тарафи герб



тарафи рақам

Расми 89

1) ҳангоми як маротиба партофтани танга тарафи "рақам" омадани танга ва тарафи "герб" омадани танга

2) ҳангоми як маротиба партофтани шашхол омадани "1 хол", омадани "2 хол", ..., омадани "6 хол"

3) ҳангоми партофтани кубӣ, як рӯяш кабӯд, рӯяҳои боқимондааш сурх рангкардашуда, боло афтодани рӯи "кабӯд" рангкардашуда ва рӯи "сурх" рангкардашуда.

4) Аз даруни куттии дар дохилаш 10-то кураи сафед ва якто сиёҳ дошта ҳангоми гирифтани якто кура "кураи сафед" ёки "кураи сиёҳ" буданаш дар мисолҳои 1- ва 2- барои рӯй додани ҳодисаҳо дар якаш нисбат ба дигараш ягон гуна бартарӣ дида намешавад (танга ва куб дуруст бошад албатта). Ин гуна ҳодисаҳои баробар имконият ном дорад. Дар мисолҳои 3- ва 4- ба ҳодисаҳои баробар имконият надошта мисолҳо оварда шудааст. Дар ҳақиқат ҳам 5 рӯи кубӣ рангкардашуда сурх ва як рӯяш сиёҳ аст пас имконияти омадани рӯи сурх нисбат ба рӯи сиёҳ бисёртар аст. Монанди ҳамин гирифтани кураҳои сафед нисбат ба кураи сиёҳ зиёдтар аст.

Машқҳо

Дар машқҳо шартҳо ва ҳодисаҳои бо ин шартҳо рӯйдиханда тасвир карда шудааст. Барои ҳар як ҳодиса (шифохӣ) рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ тасодуфӣ буданаш муайян карда шавад (**452–456**):

452. Аз хонандагони мактаб: 1) номи дутояш як хел; 2) қадӣ ҳаммааш як хел.

453. Китоби дарсии алгебраро тасодуфӣ кушода, дар саҳифаи тарафи рост калимаи сеюм интиҳоб карда шуд ин калима: 1) калимаи "эҳтимолият" 2) бо ишораи "!" сар мешавад.

454. Аз рӯйхати хонандагони синфи 9 (дар ин рӯйхат духтарон ҳам писарон ҳай аст) як хонанда интиҳоб карда шуд: 1) ӯ духтар бача; 2) хонандаи интиҳобшуда 16 сола; 3) хонандаи интиҳобшуда 15 моҳа; 4) синни соли ин хонанда аз 3 калон.

455. Имрӯз дар Самарқанд барометр фишори нормалии атмосфераро нишон дода истодааст. Дар ин ҳолат: 1) оби дар дег будаи аҳолии Самарқанд дар $t = 70^{\circ}\text{C}$ мечӯшад; 2) ҳарорати ҳаво -5°C паст шавад, оби дар кӯлмак буда ях мекунад.

456. Дуто куби бозӣ партофта шуд: 1) дар куби якум 4 хол омад ва дар куби дуюм 6 хол омад; 2) ҳосили чамъи холҳои ду куб ба 1 баробар; 3) ҳосили чамъи холҳои ду куб ба 4 баробар; 4) холҳои омадаи ҳар ду куб ба 5 баробар; 5) ҳосили чамъи холҳои омадаи ду куб аз 12 калон нест.

Аз ҳодисаҳои додашуда ҷуфти ҳодисаҳои дар якҷоягӣ рӯй додана мумкин ва кадомҳояш дар якҷоягӣ набуда мебошад, нишон диҳед (**457–459**):

457. Дар бозии шашкаи Саодат ва Шухрат бозӣ карда : 1) Саодат ғалаба кард; Шухрат бозиро бой дод; 2) Саодат бой дод; Шухрат бой дод.

458. Куби бозӣ партофта шуд. Рӯйи болоии он: 1) холи 5; 2) холи 3 3) холи 1; холи тоқро нишон дод.

459. Аз тудай домино як дона домино гирифта шуд ,дар ин ҳол : 1) яке аз ададҳои он аз 4 калон, дуомаш ба 6 баробар; 2) яке аз ададҳо аз 5 хурд нест, дуомаш аз 5 калон нест 3) яке аз ададҳо ба 5, ҳосили чамъи ду адад ба 12 баробар; 4) ҳар ду адад аз 4 калон , ҳосили чамъи ададҳо аз 9 калон намебошад.

460. Аз ҳодисаҳои: 1) „барф борида истодааст“; 2) „ҳаво соф“ 3) „ҳарорати ҳаво $+37^{\circ}\text{C}$ “ ҷуфти ҳодисаҳои имконпазирро тартиб дода , аз байни онҳо ҳодисаҳои дар якҷоягӣ рӯй додана мумкин ва дар якҷоягӣ набударо муайян кунед.

461. Аз ҳодисаҳои зерин: 1) „баҳор омад“; 2) „мувофиқи ҷадвали дарсӣ 6 то дарс мешавад“; 3) „имрӯз 1-январ“; 4) „ҳарорати ҳавои Тошканд $+40^{\circ}\text{C}$ “ ҷуфти ҳодисаҳои имконпазирро тартиб дода , аз байни онҳо ҳодисаҳои дар якҷоягӣ рӯй додана мумкин ва дар якҷоягӣ рӯй додана мумкин набударо муайян кунед.

462. Аз 4-то куттии гугурт яктояш холи аст .Бо тарзи тасодуфӣ яке аз куттиҳои гугурт интихоб карда шуд. Оё ҳодисаҳои "Куттии гугурти дарунҳоли" ва "Куттии гугурти дарунҳоли не" ҳодисаҳои баробар имконият шуда метавонанд ё не ?

463. 1) 1 то рӯйи; 2) 2 то рӯйи куби бозӣ бо ранги сабз ва рӯйҳои боқимонда бо ранги сурх ранг карда шуд. Ҳодисаҳои омадани "рӯйи ранги сабз" дошта ва "рӯйи ранги сурх" дошта оё ҳодисаҳои баробар имконият шуда метавонад ё не?

464. 6-то кураи сафед, 6-то кураи сурх, 6-то кураи кабуд, 6-то кураи зарди аз як то шаш номеронида шударо ба як халта андохта, омехта карда шуд. Аз даруни халта тасодуфан якто кура гирифта шуд. Оё ҳодисаҳои зерин баробар имконият шуда метавонад.

- 1) „кураи сафеди интиҳобшуда“ ва „кураи кабуди интиҳобшуда“; 2) „раками кураи интиҳобшуда 5“ ва „раками кураи интиҳобшуда 4“; 3) „кураи интиҳобшуда сурх ва рақамаш 2“ ва „кураи интиҳобшуда зард ва рақамаш 6“; 4) „кураи интиҳобшуда сурх“ ва „кураи интиҳобшуда сурх нест“; 5) раками "кураи интиҳобшуда аз 2 калон не" ва "раками кураи интиҳобшуда аз 2 калон"?

§ 35. ЭҲТИМОЛИЯТИ ҲОДИСАҲО

Дар ҳаёт ҳангоми дучоршавӣ ба ҳодисаҳои гуногун, дар бисёр ҳолат ба дараҷаи боваринокии рӯй додани ин ҳодисаҳо баҳо медиҳем. Дар ин ҳол оид ба баъзе "ҳодисаҳо" ин ҳел шуданаш мумкин нест гӯем оид ба ҳодисаҳои дигар "ин албатта рӯй медиҳад" ёки "барои рӯй додани ин ҳодиса боварӣ калон аст" мегӯем. Баҳодиҳи ба дараҷаи боваринокии рӯй додани ҳодиса ба мафҳуми эҳтимолиӣ вобаста аст. Дар як қатор мактубҳои ба якдигар навиштаи олимони франсавии асри XVII Блез Паскал (1623–1662) ва Пйер Ферма (1601–1665) якумин бор мулоҳизаронии умумии ҳалли масъалаҳои ба эҳтимолият вобаста пайдо шуда буд. Блез Паскал дар мактуби 28 октябри соли 1654 ба Пйер Ферма навиштааш чунин мулоҳиза рондааст: "Бозингар ҳангоми кубро (шашхол) партофтан омадани кадом ададро наметавонад, лекин ба имкониятҳои баробардоштани ададҳои 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 ро метавонад. Ба ғайр аз ин, бозингар дар натиҷаи таҷриба (партофтани куб) омадани яке аз адаҳои додашударо ва он ҳодисаи муқаррарӣ буданашро низ метавонад. Агар мо имконияти содиршавии ҳодисаи муқаррарӣ 1 гуфта қабул кунем, дар ин ҳол омадани яке аз ин ададҳо масалан, (омадани 6 монанди ҳамин дигар ададҳо ҳам) 6 баробар хурд мешавад, яъне ба $\frac{1}{6}$ баробар мешавад.

Имконияти бо муvвафақият рӯй додани ин ё он ҳодисаро математикҳо эҳтимолияти ҳодиса гуфта ном гузоштанд ва муvофиқ бо ҳарфи якуми калимаи лотинии *probabilitas*— эҳтимолият *P* ишора мекунад. Агар бо

ҳодисаи A ҳангоми як маротиба партофтани кубӣ бозӣ "омадани холи 5"-ро ишора кунем, дар ин ҳол эҳтимолияти ҳодисаи A -ро бо $P(A)$ ишора кардашуда бо намуди $P(A) = \frac{1}{6}$ навишташуда ва эҳтимолияти ҳодиса ба $\frac{1}{6}$ баробар аст гуфта хонда мешавад.

Масъалаи 1. Ба карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 20 навишта шудааст (ба ҳар як карточка яктоғӣ адад) карточкаҳо ба рӯи стол чаппа карда монда шуда, омехта карда шуд. Эҳтимолияти адади 7 будани карточкаи тасодуфан гирифташударо муайян кунед. Аз сабаби шумораи карточкаҳо 20-то буданаш ва ба ҳар як карточка ададҳои аз 1 то 20 як маротиба навишта шуданаш дар натиҷаи интиҳоб 20-то ҳодисаҳои баробаримқоният рӯй доданаш мумкин аст (натиҷаи таҷриба):

1) баромадани адади 1;

2) баромадани адади 2; ... 20) баромадани адади 20. Дар ин ҷо "баромадани ягон адад" ҳодисаи муқаррарӣ. Эҳтимолияти ин ҳодисаи муқаррарӣ ба 1 баробар ва эҳтимолияти ҳодисаи A "баромадани адади 7" 20 маротиба хурд, яъне $P(A) = \frac{1}{20}$.

Ҷавоб: $\frac{1}{20}$ ▲.

Ба ғайр аз ҳодисаи элементарии дар боло додашуда, ҳодисаҳои мураккабтарро низ омӯختан мумкин аст.

Масалан: Дар масъалаи 1 ёфтани эҳтимолияти адади содда будани карточкаи интиҳобшуда лозим бошад, адади A – "баромадани адади соддаи аз 20 калон набуда"-ро дида мебароем. Ин ҳодиса дар 8-то ҳолат содир мешавад, яъне ҳангоми баромадани ягонто ададҳои соддаи 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ин натиҷаҳо барои ҳодисаи A имқониятҳои мақбул пайдокунанда номида мешавад. Аз даруни ҳамаи натиҷаҳои имқонпазир (онҳо 20-то) 8 тояш имқониятҳои мақбул пайдокунанда аст. Аз ҳамин сабаб эҳтимолияти ҳодисаи A

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Аз рӯй додани ҳодисаи A ғайримқон бошад, дар ин ҳол натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул мавҷуд нест, яъне $m = 0$. Пас, дар ин ҳол

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$



Агар дар ягон таҷриба имконияти ба n -то баробар имконият бо якдигар чуфт-чуфт дар якҷоягӣ набуда натиҷа мавҷуд буда аз онҳо m -тояш барои ҳодисаи A имконияти мақбул пайдо кунанда бошад, дар ин ҳол нисбати $\frac{m}{n}$ эҳтимолияти содир шудани ҳодисаи A номида мешавад ва чунин навишта мешавад

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Масъалаи 2. Ҳангоми як маротиба партофтани кубӣ бозӣ эҳтимолияти омадани адади тоқро ёбед:

Барои ҳодисаи A – „баромадани холи тоқ“ 3 то натиҷаи (баромадани холи 1, баромадани холи 3 ва баромадани холи 5) пайдокунандаи мақбул мавҷуд аст, яъне $m = 3$. Шумораи натиҷаҳои баробар имконият бошад $n = 6$ аст, аз ҳамин сабаб

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{2}$. ▲

Масъалаи 3. Дар қуттӣ 6 дона кураи сурх ва 4 дона кураи кабуд ҳаст. Яке аз онҳоро тасодуфан интихоб намуда аз қуттӣ гирифтанд. Эҳтимолияти кураи гирифташуда сурх буданашро ёбед.

▲ 10 то натиҷаҳои баробар имконияти таҷриба мавҷуд аст: гирифтани кураи 1, гирифтани кураи 2, ..., гирифтани кураи 10, яъне $n = 10$. Дигар адади натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул бошад $m = 6$ аст. Аз ҳамин сабаб

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ҷавоб: $\frac{3}{5}$. ▲

Оид ба эҳтимолияти ҳодисаҳои муқаррарӣ ғайриимкон ва ҳодисаҳои тасодуфӣ дар асоси формулаи (1) зеринро гуфтан мумкин. Агар ҳодисаи A ҳодисаи муқаррар рӯйдиханда бошад дар ин ҳол ҳамаи натиҷаҳо барои он пайдокунандаи мақбул мешавад, яъне $m = n$. Дар ин ҳол $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Агар ҳодисаи A ҳодисаи тасодуфӣ бошад, дар ин ҳол барои натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул шартҳои $0 < m < n$ иҷро мешавад. Аз ҳамин сабаб дар ин ҳолатҳо $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Машиқҳо

- 465.** Ҳодисаҳои баробар имконияти элементарии рӯй доданааш мумкин будаи ҳолатҳои дар поён овардашударо шумored: 1) партофтани танга; 2) партофтани шашхол; 3) партофтани тетраэдри рӯяхояш ранги сафед, сурх, зард ва кабуд дошта; 4) чархзанондани стрелкаи рулеткаи сатҳаш ба 6 сектори бо ҳарфҳои A, B, C, D, E ва F ишора кардашуда.
- 466.** Аз комплекти пурраи бозии домино як донаш тасодуфӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти:
- 1) ададҳои 6 ва 5; 2) ададҳои 0 ва 1; 3) ададҳои якхела; 4) ададҳои гуногун будаи ин донро ёбед.
- 467.** Дар қутти 4 дон кураи сурх ва 5 дон кураи кабуд ҳаст. Тасодуфан як кура гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) сурх; 2) кабуд; 3) сабз; 4) сурх ё кабуд будани кураро ёбед?
- 468.** Дар қутти кураи 3 то кабуд, 4 то зард, 5 то сурх ҳаст. Тасодуфан як кура гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) кабуд; 2) зард; 3) сурх; 4) кабуд набудани; 5) зард набудани; 6) сурх набудани кураҳоро ёбед.
- 469.** Дар карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 12 навишта шудааст (бар ҳар як карточка яктоги адад) карточкаҳо ба стол чаппа карда гузошта шуда омехта карда шуд. Эҳтимолияти дар карточкаи тасодуфан гирифташуда:
- 1) адади 5; 2) адади чуфт; 3) адади ба 3 қаратӣ; 4) адади ба 4 қаратӣ; 5) адади ба 5 тақсимшаванда; 6) адади содда чӣ гуна аст?
- 470.** Нигора ду рақами охири телефони дугонаашро аз хотир фаромӯш карда, онро тахминан чинд. Эҳтимолияти ба телефони дугонааш занг задани Нигора чӣ гуна аст?
- 471.** Дар 1000 то лоторея 30 донаш бурднок мебошад. Якто лоторея харид карда шуд. Эҳтимолияти лотореяи харидшуда:
- 1) бурднок; 2) бурднок набуданааш чӣ гуна аст?

472. Талаба дар вақти тайёри ба имтиҳон аз 30 билет ба яктояш тайёри дида натавонист. Эҳтимолияти дар имтиҳон афтодани билети тайёри дидаи талабаро ёбед.
473. Ҳангоми 6 маротиба партофтани танга ҳар дафъа бо тарафи герб афтид. Танга боз як бори дигар партофта шавад, эҳтимолияти бо тарафи герб афтодани танга ба чӣ баробар аст?
474. Аз дастаи картаҳои 52-тагӣ як карта бо таври тасодуфӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) шаш хиштин; 2) ҳашт; 3) валети ранги сурх дошта; 4) чиллики ададии рангин; 5) хиштини адади тоқи ранг дошта

§ 36. БАСОМАДИ НИСБИИ ҲОДИСАҲОИ ТАСОДУФӢ

Таърифи дар параграфи гузашта ба эҳтимолият додашуда, таърифи классикии эҳтимолият номида мешавад. Таърифи классикӣ, албатта гузаронидани санчиш ёки таҷрибаро талаб намекунад. Натиҷаи баробар имкониятӣ ва пайдокунии мақбул ҳодисаҳоро аз ҷиҳати назариявӣ муайян мекунад.

Мувофиқи ин таъриф адади натиҷаҳои баробаримконияти элементарии таҷриба охиринок буда бо адади муайян ифода карда мешавад. Лекин дар амалиёт, яъне дар табиатшиносӣ, иқтисод, тиббиёт, дар истеҳсолот ва соҳаҳои дигар ҳангоми омӯхтани чараёнҳои тасодуфӣ тез-тез чунин санчишҳо ёки таҷрибаҳо дучор мешавад, ки адади натиҷаҳои дар онҳо мумкин бударо аз бар намудан бо дараҷаи ғайриимкон зиёд аст. Дар як қатор ҳолатҳои дигар то таҷрибаҳоро дар амал нагузаронидан муайян кардани баробар имконият будани натиҷаҳо душвор ёки номумкин аст. Масалан фирма қисми зиёди лампочкаҳои истеҳсолкардаашро насанҷида "бенуксон ёки нуксондор" баробаримкон буданаш ёки набуданашро тасаввур кардан душвор аст. Аз ҳамин сабаб бо баробари таърифи классикии эҳтимолият дар амалиёт аз таърифи статистикий эҳтимолият низ истифода мебаранд. Барои бо ин таъриф шинос шудан, дохил кардани мафҳуми басомади нисбӣ лозим мебошад.

Дар таҷрибаҳои Бюффон ва Пирсон гузаронида басомадҳои нисбии ҳосилшуда ба 0,5 хеле наздик мебошад. Пас, эҳтимолияти статистикий партофтани танга ба 0,5 баробар аст.



Дар катори таҷрибаҳои додашуда басомади нисбии ҳодисаи A гуфта нисбати адади рӯй додани ин ҳодиса M ба адади ҳамаи таҷрибаҳои гузаронидашуда N -ро меноманд. Дар ин ҷо адади M басомади ҳодисаи A номида мешавад.

Басомади нисбии ҳодисаи A бо $W(A)$ ишора карда мешавад. Дар ин ҳол мувофиқи таъриф

$$W(A) = \frac{M}{N}. \quad (1)$$

Масъалаи 1. Дар синф 30 хонанда таҳсил мегирад. Аз қори назорати 6 хонанда баҳои "5" гирифтанд. Басомади нисби баҳои аълои қори назоратии гирифташударо ёбед.

△ Ҳодисаи A – „гирифтани баҳои 5“ бошад ин ҳодиса 6 маротиба содир шуд, яъне $M = 6$. Адади таҷрибаҳои умумӣ $N = 30$, аз ҳамин сабаб:

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{5}$. ▲

Тадқиқотчи франсавӣ Бюффон (1707–1788) дар натиҷаи тангари 4 040 марта партофтан, дар 2 048 ҳолат бо тарафи герб афтидааст. Пас, дар ин ҳол басомади нисбии афтидани герб ба $W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,5069$ баробар аст. Математики англис Карл Пирсон дар натиҷаи тангари 24 000 маротиба партофтан 12 012 маротиба тарафи герб афтодааст. Пас дар таҷрибаи ин танга партоӣ басомади нисбии афтидани герб ба $W(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005$ баробар аст. Натиҷаи ин ду ҳолатро муқоиса кунем, қимати басомади нисбӣ умуман гирем, дар таҷрибаҳои муайян вобаста ба адади онҳо тағйир ёфтаниш мумкин.

Лекин ҳосияти асосии басомади нисбии ҳодисаи тасодуфӣ аз он иборат аст, ки шумораи таҷрибаҳо чӣ қадаре, ки зиёд шавад, басомади нисбӣ торафт барқарор шуда, дар атрофи ягон гуна адад лаппида меистад. Ин адад ба сифати эҳтимолияти статистикий ҳодисаи тасодуфӣ қабул карда мешавад. Масалан, ҳангоми тангапартоӣ ин адад ба 0,5, яъне

Бо мақсади омӯхтани чараёнҳои гуногуни монанди тангапартоӣ аз тарафи тадқиқотчиён таҷрибаҳои зиёд гузаронида шуда ва дар асоси натиҷаҳои онҳо математики швесариягӣ Якоб Бернулли (1654–1705) қонуни ададҳои калонро асоснок карда додааст.

Ҳангоми адади таҷрибаҳо калон будан басомади нисбии ҳодиса $W(A)$ аз эҳтимолияти ин ҳодиса $P(A)$ аз ҷиҳати амалӣ фарқ намекунад, яъне дар таҷрибаҳои ададаш калон тасдиқи $P(A) = W(A)$ -ро муқаррар гуфта ҳисоб кардан мумкин аст.

Масъалаи 2. Дар яке аз мамлакатҳо дар бораи сайёҳони хориҷӣ ва сайёҳони дар дохилӣ мамлакат сайёҳат карда (шаҳрвандони мамлакат) маълумотҳои зерин дода шуда бошад:

Солҳо	Шумораи умумии сайёҳон	
	Шумораи сайёҳони хориҷӣ	Сайёҳони дохилӣ
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Басомади нисбии адади шаҳрвандони дар дохилӣ мамлакат сайёҳат кардари дар солҳои додашуда ёбед. Адади сайёҳони дар дохилӣ мамлакат сайёҳат карда:

$M = 403\,989 + 348\,953 + 316\,897 + 346\,103 + 351\,028 = 1\,766\,970$, адади сайёҳони хориҷӣ : $610\,623 + 746\,224 + 822\,558 + 774\,262 + 811\,314 = 3\,764\,981$.

Адади умумии сайёҳон: $N = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5\,531\,951$.

Дар ин ҳол,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

Ҷавоб: $W \approx 0,3194$.

Машиқҳо

475. Сутуни охирини чадвалро пур кунед:

Тартиби рақам	Тачриба	Адади тачрибаҳо (N)	Ҳодисаи A	басомади ҳодисаи A	басомади нисбии ҳодисаи A ($w(A) = \frac{M}{N}$)
1	Партофтани танга	150	омадани тарафи рақамдор	78	
2	Тирпарронӣ бо камон	200	расидан ба нишон	182	
3	Партофтани шашхол	400	афтоданаи 4	67	

476. Дар яке шахрҳо аз 920-то фуқаро бақор 350- тояш бо машина, 420-тояш бо транспорти чамоа, 80 -тояш бо велосипед, 70-тояш пиёда рафтанаш маълум бошад. Басомади нисбии адади 1) бо машина; 2) бо транспорти чамоа ; 3) бо велосипед; 4) пиёда мерафтагонро ёбед.

477. Аз 5 000дона диски сахтӣ тайёркардашуда 70 донааш нуқсондор баромад. Басомади нисбии диски нуқсондор баромаданро ёбед ва бо фоиз ифода кунед.

478. Гурӯҳи баскетболчиёни чавон машқи ба ҳалқа партофтани тӯбро гузаронидан. Натиҷаҳо дарчадвали зерин дода шудааст:

Тӯби ба ҳалқа ҳаводода шуда (N)	10	50	100	250	500
Басомади тӯбҳои ба сабад афтода (M)	6	32	68	155	320
Басомади нисбии тӯбҳои ба ҳалқа афтода (W)					

Сатри охирини чадвалро пур кунед. Эҳтимолияти тӯбҳои ба ҳалқа афтода P -ро ёбед ва доир ба қимати он чӣ гуфтан мумкин аст. (то даҳяки яклухт кунед)?

§ 37 МИҚДОРҲОИ ТАСОДУФӢ

Фане ки барои ғун кардани маълумотҳо оид ба миқдорҳои тасодуфи, гурӯҳонидан, тасвири аёнии маълумотҳо бо воситаи ҷадвалҳо, диаграммаҳо, графикҳо ва дигар намудҳо инчунин бо таҳлили ин маълумотҳо машғул мешавад статистика мебошад. Миқдори тасодуфӣ гуфта, бузургiero меноманд, ки дар давоми мушоҳида ва гузаронидани таҷрибаҳо ба таври тасодуфӣ қабул кардани қиматҳои гуногун мумкин аст, меноманд. Оид ба ин гуна миқдорҳо қиматҳои онҳо ба тасодиф вобаста аст гуфта метавонем.



Миқдори тасодуфӣ гуфта, бузургiero меноманд, ки дар давоми гузаронидани мушоҳида ва гузаронидани таҷрибаҳо ба таври тасодуфӣ қабул кардани қиматҳои гуногун мумкин аст, меноманд. Оид ба ин гуна миқдорҳо, қиматҳои онҳо ба тасодуф вобаста аст, гуфта метавонем.

Масалан, адади заррачаҳои аз коинот ба ҳавлии мактаб афтада истода, адади зангҳои ба стансияҳои телефон омада истода, суръати молекулаҳои чойи дар пиёла буда, ҳангоми шашхолро партофтан омадани ҷи гуна рақам ва ғайриҳо ба миқдорҳои тасодуфӣ мисол шуда метавонад.

Масъалаи 1. Дуто кубӣ бозӣ партофта шуд. Ҳосили ҷамъи ҷи гуна ҳолҳои аз ду куб афтада ба эҳтимолияти аз ҳама калонтарин соҳиб буданашро муайян кардан мумкин-мӣ?

Эҳтимолияти пайдошавии ҳар як ҳосили ҷамъро меёбем. Адади натиҷаҳои умумӣ ин адади ҳамаи ҷамъҳои аз партофтани ду куб ҳосилшуда ба $6 \cdot 6 = 36$ баробар аст. Ҷадвали ҳолҳои ҷамъшударо тартиб медиҳем:

куби 1	куби 2					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Бо воситаи ҷадвал барои ҳар як ҷамъи муайян адади пайдокунии натиҷаҳои мақбул m -ро $m_2 = m_{12} = 1$, $m_3 = m_{11} = 2$, $m_4 = m_{10} = 3$,

$$m_5 = m_9 = 4, m_6 = m_8 = 5, m_7 = 6.$$

Эҳтимолияти ин ё он ҷамъи ҳолҳо, ки дар вақти партофтани ду куб ҳосил мешавад ба намууди ҷадвали зерин ифода кардан мумкин аст:

Ҷамъи ҳолҳо	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Эҳтимолият ($p = \frac{m}{n}$)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Аз ҷадвал ҳосили ҷамъи ҳолҳо ба 7 баробар бошад ба эҳтимолияти калон $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ баробар буданаш аён аст.

Ҷавоб: ба эҳтимолияти калонтарин ҳосили ҷамъи ҳолҳои ба 7 баробар соҳиб аст.

Дар масъалаи 1 ҳосили ҷамъи ҳалҳои ду куби партофташуда -миқдори тасодуфӣ аст. Онро бо воситаи X ишора кунем. Дар ин ҳол ададҳои $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ қиматҳои миқдори тасодуфии X мебошад. Дар ҷадвали зерин ба ҳар як қимати X қиматҳои мувофиқи $P_1, P_2, \dots, P_{10}, P_{11}$ оварда шудааст

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Бо ёрии ин ҷадвал, ба саволҳои масалан миқдори X бо эҳтимолияти яхела чӣ гуна қиматро қабул мекунад; кадом қимати миқдори X бо эҳтимолияти калон пайдо мешавад бо осонӣ ҷавоб ёфтан мумкин аст. Ин ҷадвалро ҷадвали тақсимооти аз рӯи эҳтимолияти миқдори тасодуфии X , иборат аз ҳосили ҷамъи ҳалҳои ду куби партофташуда мебошад, меғунд.



Қиматҳои миқдори тасодуфӣ X ва ифодакунандаи ҷадвали эҳтимолияти қабулкунӣ ҳар як қимат ҷадвали тақсимои оид ба эҳтимолияти миқдори тасодуфӣ номида мешавад.

Ҷадвалҳои тақсимои оид ба эҳтимолият, дар асоси натиҷаҳои ҳисобкунӣ эҳтимолият аз ҷиҳати назариявӣ тартиб дода мешавад. Дар амалиёт, баъд аз гузаронидани таҷрибаҳои ҳақиқӣ, ҷадвалҳои тақсимои оид ба басомад ёки басомади нисбӣ тартиб дода мешавад. Баъд, барои аниқтар шудан, ҷадвали тақсимои ба намуди диаграмма ёки полигони басомадҳо тасвир карда мешавад. Шумо дар курси "Алгебра"-и синфи 8 бо воситаи тасвири маълумотҳо бо ёрии диаграмма ва полигони басомадҳо шинос шуда будед.

Масъалаи 2. Барои омӯхтани шумораи ходимони дар 36 компания меҳнат карда истода аз ин компанияҳо маълумотҳо чамъ карда шуд ва он ба ҷадвали зерин дохил карда шуд:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Ин маълумотҳо 1) дар ҷадвали тақсимои басомадҳо (M) ва басомади нисбӣ (W); 2) бо ёрии полигони басомадҳо тасвир кунед.

△ 1) Аз ҷадвал дида мешавад, ки шумораи ходимонро бо X ишора кунем, миқдори тасодуфӣ мешавад. Бевосита ҷадвалро омӯхта ин миқдори тасодуфӣ қиматҳои аз 23 то 33 қабул карданаширо мебинем ва ин ададҳо дар ҷадвал чанд маротиба такрор шуданаширо шуморида, аз рӯи басомадҳо ҷадвал тартиб медиҳем:

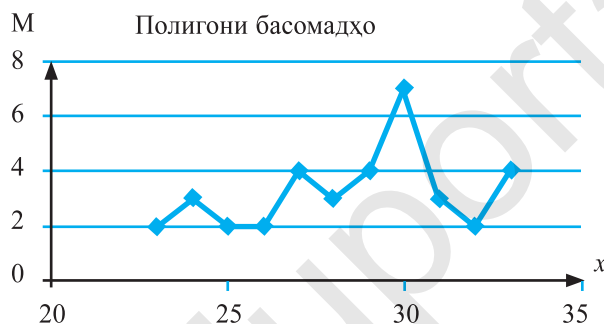
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Ҳар як басомадхоро бо адади компанияҳо $N = 36$ тақсим карда, ҷадвали тақсимотро оид ба басомади нисбӣ ҳосил мекунем:

X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Дар ин ҷо ҳосили ҷамъи басомадҳо ба $N = 36$ ва ҳосили ҷамъи басомадҳои нисбӣ ба 1 баробар буданаширо ёдоварӣ мекунем

2) Полигони басомадҳои адади ходимҳои компанияро дар расми 90 дидан мумкин аст:



Расми 90.

Ҳосили ҷамъи ҳамаи қиматҳои ягон миқдорро ёфтани шавем аз аломати Σ -и аз тарафи Эйлер дохилкардашуда истифода мебарем. Масалан, агар басомади M қиматҳои $M_1, M_2, \dots, M_k$ -ро қабул кунад, дар ин ҳол аз ишораткунии зерин истифода мебарем:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k = \Sigma M.$$

Ҳосили ҷамъи ҳамаи басомадҳои миқдорҳои тасодуфӣ ба адади таҷрибаҳо N баробар аст:

$$\Sigma M = N.$$

Барои ҳар гуна миқдори тасодуфӣ ҳосили ҷамъи басомадҳои нисбии он ба 1 баробар аст

$$\begin{aligned} \Sigma W &= \Sigma \left(\frac{M}{N} \right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \dots + \frac{M_k}{N} = \\ &= \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1. \end{aligned}$$

Микдорҳои тасодуфӣ дар ин параграф додашуда қиматҳои аз якдигар ҷудокардашударо қабул мекунад ин гуна микдорҳо микдорҳои дискрет (аз калимаи латинии *dickretus* – ҷудокардашуда, кандашуда) номида мешавад.

Агар микдори тасодуфӣ ҳамаи қиматҳои ягон фосиларо қабул кунад, он гоҳ ин гуна микдор микдори тасодуфӣ бефосила номида мешавад. Ба микдорҳои тасодуфӣ бефосила ҳамчун ба сифати мисол тағйирёбии ҳаво, вақти сарфшудаи аз хона ба мактаб рафтан, дарозии дарахти сафедори сабзида истода, вақти омадани автобуси дар истгоҳ интизор буда ва ғайраҳоро овардан мумкин аст.

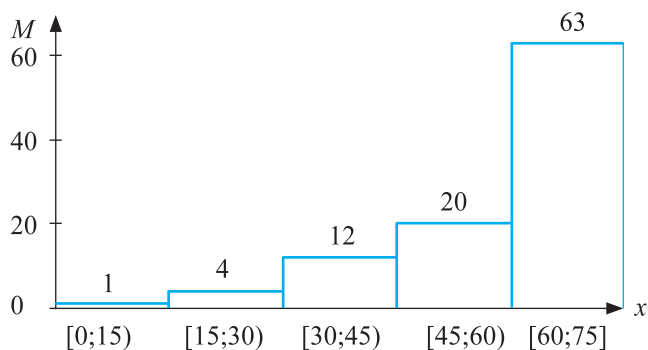
Микдорҳои тасодуфӣ бефосила қиматҳои зиёди беохир қабул кунад ҳам, тақсимои онҳоро додан мумкин аст. Барои ин фосилаи тағйирёбии қиматҳои микдори бефосила ба қисмҳо ҷудо карда мешавад ва бузургии тасодуфӣ ба ҳар як қисм афтида ҳисоб карда мешавад.

Масалан. Хонанда 100 рӯз дар зали спортӣ буда ҳар сафар барои машқи спортӣ аз 1 соату 15 дақиқа вақти зиёд сарф накардаашро навиштааст. Дар ин ҳолат вақти сарфшуда бо дақиқа дар фосилаи $[0; 75]$ будагиашро ба назар гирифта, ин фосиларо, масалан ба 5-то фосилаҳои баробари вақт ҷудо карда, вақтҳои ба машқҳои спортӣ сарфшударо ба ҷадвали басомадҳо дохил кардан мумкин аст.

T (дақиқа)	$[0; 15]$	$[15; 30]$	$[30; 45]$	$[45; 60]$	$[60; 75]$
M	1	4	12	20	63

Бевосита ҳосили ҷамъи басомадҳо ҳисоб карда, $\sum M = N = 100$ ҳосил кардан мумкин аст.

Маълумотҳои дар ҷадвал бударо ба намуди гистограммаи басомадҳо -шакли зинамонанд тасвир кардан мумкин аст. (расми 91). Дар ин ҷо дарозии асоси ҳар як зина h бошад, дар ин ҳол баландии сутун $\frac{M}{h}$, дар ин ҷо M басомади бузургии тасодуфӣ X дар фосилаҳои мувофиқ аст. Пас, масоҳати ин гуна сутун ба $\frac{M}{h} \cdot h = M$ буда, масоҳати шакли таҳти гистограмма бошад, ба $\sum M = N$ баробар мешавад.

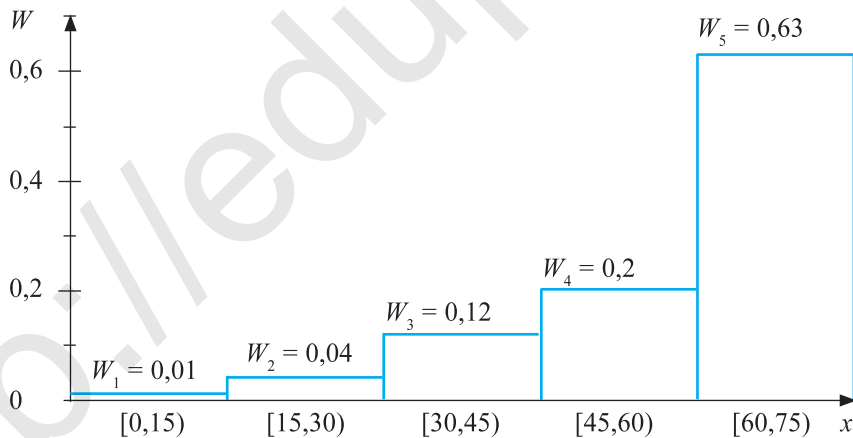


Расми 91.

Агар бо ёрии басомадҳои нисбӣ муайян карда шавад:

T (дақиқа)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W = \frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

дар ин ҳол шакли зинамонанди (расми 92) бо ёрии онҳо кашида шуда гистограммаи оид ба басомадҳои нисбии бузургии тасодуфӣ номида мешавад.



Расми 92.

Масоҳати зери ҳар як сутуни гистограммаи басомадҳои нисбӣ қимати мувофиқи W баробар мешавад. Дар ин ҳол масоҳати шакли зери гистограмма ба як баробар мешавад ($\sum W = 1$).

Машиқҳо

- 479.** 1) Дар куби оддии бозӣ; 2) куби дар ду рӯя 1 хол, дар ду рӯя 2 хол, дар ду рӯя 3 хол қайд кардашуда 3) куби дар се рӯя 1 хол, дар ду рӯя 2 хол, дар як рӯя 3 хол қайд карда шуда; 4) куби дар ду рӯя 1 хол, дар се рӯя 2 хол, дар як рӯя 3 хол қайд кардашуда дода шудааст. Чадвали тақсимоти дар асоси қиматҳои микдори тасодуфии X эҳтимолиятҳои P -и ҳангоми партофтани куб омадани "адади холҳо" тартиб диҳед.
- 480.** Дар стол ду танга партофта шуда истодааст. Агар "тарафи герб" афтад қимати ададии 0 ва агар "тарафи рақам" афтад қимати 1 медиҳем. Чадвали тақсимоти аз рӯи эҳтимолиятҳои P микдори тасодуфии X ва суммаи ададии қиматҳои тангаҳои партофташуда тартиб диҳед.
- 481.** Ду тетраэдри дар рӯяхояш ададҳои 1,2,3,4 навишташуда дар як вақт ба стол партофта шуда истодааст, дар ин ҳол ҳолҳои дар рӯяи ба стол расида истодаи ба ҳисоб гирифта мешавад. 1) ҳосили ҷамъи; 2) ҳосили зарби ҳолҳои аз ду тетраэдр афтада ба эҳтимолияти калонтарин соҳиб буданашро муайян кардан мумкин-мӣ?
- 482.** Ду куби бозӣ партофта шуд. Чадвали тақсимоти ҳосили зарби ҳолҳои ду кубро ҳангоми партофтан омадаро аз рӯи эҳтимолиятҳо тартиб диҳед.
- 483.** Соҳиби кафе дар давоми 50 рӯз ба чадвал бо мақсади дар вақти нонушта ба ҳӯрандагон дар вақташ хизмат расондан, дар ин вақт адади хизматчиёро дуруст ба роҳ мондан ва харҷҳои барои тайёр кардани таомҳо сарфшударо дуруст ба нақша гирифтани адади ҳӯрандагонро қайд карда рафт:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Бо ёрии ин чадвал адади шахсони хӯроки нисфирои истеъмоли кунандаи кафе- микдори тасодуфии X оварда шудааст: 1) чадвали тақсимодро оид ба басомадҳо (M) ва басомадҳои нисбӣ (W) ; 2) полигони басомадҳоро тартиб диҳед.

- 484.** Чадвали зерин адади духтарон ва писарони ба ҳавзаҳои оби пӯшида, ки дар давоми 5-моҳ омаданд қайд карда шуда, тартиб дода шуд:

Моҳ	Бачаҳои ба ҳавзаҳои оби омада	
	Духтарон	Писарон
Апрел	311	357
Май	284	404
Июн	278	417
Июл	340	412
Август	322	406

Басомад, басомади нисбиро ёбед ва адади писарони ба ҳавзаҳои оби омада -микдори тасодуфии X -ро тартиб диҳед ва гистограммаи басомадҳоро тартиб диҳед.

- 485.** Чадвали тақсимотии оид ба басомадҳои микдори тасодуфии X , ки қиматҳои номери телефонҳои рақамҳои аз рақамҳои номери телефонҳои зерин иборат бударо тартиб диҳед

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 1494 94.

- 486.** Полигони басомадҳо ва полигони басомадҳои нисбии микдори тасодуфии X , ки бо тақсимоти зерин дода шудааст, ёбед:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

- 487.** Дар чадвал андозаи пойафзоли 16 нафар писарони синфи 9 оварда шудааст:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

Чадвали тақсимоти оид ба басомадҳо ва басомадҳои нисбии микдори тасодуфии x -андозаи пойафзоли писарони синфи 9-ро тартиб диҳед.

Интихоби тақсимоташ дар чадвали 3 додашуда низ интихоби репрезентатив намебошад, чунки дар нисбати басомадҳо нигоҳ дошта нашудааст: $5\ 000:2\ 000:7\ 000:3\ 000 \neq 5:6:7:3$.

Маълумотҳои додашударо, аз ҷумла, қиматҳои миқдори тасодуфиро баъзан бо як адад тавсиф ёки баҳо додан мумкин аст. Ин ададро ченаки тенденсияи марказии ададҳои дар таркиби маълумотҳо буда ёки қиматҳои миқдорҳои тасодуфӣ меноманд. Ба сифати ченакҳои тенденсияи марказӣ бо тариқи мисол мода, медиана ва қимати миёнаро овардан мумкин аст.

Қимати миқдори тасодуфии басомадаш калонтарин дар интихоби омӯхта шудаистода мода бо M_0 ишора карда мешавад.

Масалан, интиҳоб аз 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3 иборат бошад, дар ин ҳол модаи он ба 8 баробар аст.

Модаи интиҳобӣ 5, 6, 11, 3, 3, 5 бошад, дуто мебошад – $M_2 = 3$, $M_2 = 5$.

Агар интиҳобӣ 1, 3, 7, 20, 6, 11-ро гирем ин мода надорад.

Агар қиматҳои интиҳобро бо тартиби афзуншавӣ навишта гирем, он гоҳ адади аз ҷиҳати шумора интиҳобро ба ду қисми баробар ҷудоқунанда медиана номида мешавад ва бо M_e ишора карда мешавад. Агар дар интиҳобӣ ба тартиб даровардашуда шумораи додашудаҳо тоқ бошад, он гоҳ медианаи он ба адади дар мобайн истода баробар аст. Агар дар интиҳобӣ ба тартиб даровардашуда шумораи додашудаҳо ҷуфт бошад, он гоҳ медианаи он ба миёнаи арифметикии ду адади дар мобайн истода баробар аст.

Масъалаи 1. Медианаи интиҳобӣ қиматҳои миқдори тасодуфиро ёбед:

- 1) 8, 2, 0, 5, -5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Элементҳои интиҳобро бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир мекунем: -5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Шумораи элементҳо тоқ. Аз адади 5 дар ҷаи ва рост 3 тоғӣ адад ҳаст, яъне 5 адади дар мобайн истода, аз ҳамин сабаб $M_e = 5$.

2) Элементҳои интиҳоб 8, 5, 3, 4, 7, 2-ро бо таври афзуншавӣ навишта мегирем: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Шумораи элементҳо ҷуфт. Ададҳои дар мобайн ҷойгир шуда 4 ва 5, аз ҳамин сабаб $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Ҷавоб: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Яке аз мафхумҳое, ки барои омӯхтани интиҳоб аҳамияти калон дорад, ки мо дар синфи 8 шинос шуда будем, васеъгии интиҳоб мебошад. Васеъгии интиҳоб гуфта фарқи байни қиматҳои калонтарин ва хурдтарини миқдори тасодуфӣ номида мешавад ва бо ҳарфи R ишорат карда мешавад.

Васеъгии интиҳоб қиматҳои миқдори тасодуфӣ то чи андоза пароканда буданаширо мефаҳмонад.

Мисол. Васеъгии интиҳобҳои 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 ва 190, 187, 198, 189, 195, 190 -ро муқоиса кунед. Қимати калонтарини интиҳоби якум ба 27, хурдтаринаш ба 8 баробар аст. Пас васеъгии интиҳоби якум $R_1 = 27 - 8 = 19$.

Қимати калонтарини интиҳоби дуюм ба 198 ва хурдтаринаш ба 186 баробар аст. Дар натиҷа васеъгии интиҳоби дуюм $R_2 = 198 - 186 = 12$.

Пас, қиматҳои интиҳоби якум нисбат ба дуюм парокандатар ҷойгир шудааст. Қимати миёна (ёки миёнаи арифметикӣ) қиматҳои миқдори тасодуфӣ гуфта, нисбати ҳосили ҷамъи қиматҳоро ба шумораи онҳо буданаширо ёдоварӣ мекунем. Қимати миёнаи ҳамаи қиматҳои миқдори тасодуфӣ X бо $\bar{X}$ ишора карда мешавад.

Масъалаи 2. Қимати миёнаи интиҳобӣ миқдори тасодуфиро аз рӯи тақсимои басомадҳои дар ҷадвали зерин додашуда ёбед:

Ҷадвали 4

X	3	4	5	7	10
M	3	1	2	1	3

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 10}{3 + 1 + 2 + 1 + 3} = \frac{9 + 4 + 10 + 7 + 30}{10} = 6.$$

Ҷавоб: 6.

Яке аз мафхумҳое, ки интиҳобӣ миқдори тасодуфиро аз рӯи тақсимои эҳтимолиятҳо тавсиф мекунад, ин мафҳуми интизории математикӣ аст. Агар барои қиматҳои $X_1, X_2, \dots, X_n$ миқдори тасодуфӣ X эҳтимолиятҳои қабулкарда мувофиқан $P_1, P_1, \dots, P_n$ бошад он гоҳ адади

$$E = X_1 P_1 + X_2 P_2 + \dots + X_n P_n \quad (1)$$

интизории математикии миқдори тасодуфӣ X номида мешавад.

Масалан: тақсимои эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфӣ X бо таври зерин дода шуда бошад:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Дар ин ҳол интизории математикии ин миқдори тасодуфӣ:

$$= 6 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Фарқи байни қимати миқдори тасодуфӣ ва миёнаи интихоб аз миёна барканоршавӣ номида мешавад. Масалан, қимати миқдори тасодуфӣ $X_1 = 35$, қимати миёна $\bar{X} = 32$ бошад, он гоҳ барканоршавии X_2 аз миёна $X_1 - \bar{X} = 35 - 32 = 3$ мешавад.

Ҳосили ҷамъи ҳамаи қиматҳои аз миёна барканоршавӣ ба сифр баробар аст, инро нишон додан осон аст.

$$\begin{aligned} (X_1 - \bar{X}) + (X_2 - \bar{X}) + \dots + (X_n - \bar{X}) &= (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n \cdot \bar{X} = \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n \cdot \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Аз ҳамин сабаб, барои тавсиф кардани қиматҳои миқдори тасодуфӣ ба ҷои ҳосили ҷамъи аз миёна барканоршавӣ миёнаи арифметикийи квадратҳои аз миёнаи барканоршавӣ истифода мебаранд. Ин гуна бузургӣ дисперсия (аз калимаи латинии dispersion – пошкунӣ, кушода) номида мешавад. Агар миқдори тасодуфӣ X N -то қиматҳои гуногунро қабул кунад ва миёнаи он $\bar{X}$ бошад, он гоҳ дисперсияи он бо ёрии формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{N}. \quad (2)$$

Пас, дисперсия ба миёнаи арифметикийи квадратҳои қиматҳои миқдори тасодуфӣ аз миёна барканоршавӣ баробар аст.

Агар қиматҳои $X_1, X_2, \dots, X_k$ миқдори тасодуфӣ X мувофиқан бо басомадҳои $M_1, M_2, \dots, M_k$ такрор шавад, он гоҳ дисперсияи он бо ёрии формулаи

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k}. \quad (3)$$

ҳисоб кардан мумкин аст, дар ин ҷо

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k}.$$

Масалан, дар ҷадвали 4 миёнаи миқдори тасодуфӣ $\bar{X} = 6$ буданаширо муайян карда будем. Акнун дисперсияи ин миқдорро муайян мекунем:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k} = \\ &= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3+1+2+1+3} = \\ &= \frac{27+4+2+1+48}{10} = \frac{82}{10} = 8,2. \end{aligned}$$

Агар миқдори тасодуфӣ ба ягон ченак (масалан, сантиметр) соҳиб бошад, дар ин ҳол миёнаи он $\bar{X}$ ва аз миёна барканоршавӣ $X - \bar{X}$ ҳам бо миқдори $\bar{X}$ ба як хел воҳид (см) соҳиб мешавад. Квадратҳои барканоршавӣ ва дисперсия бо квадрати ченаки миқдори X (сантиметри квадратӣ) муайян карда мешавад. Барои баҳо додан ба аз миёнаи барканоршавӣ ба бузургӣҳои бо миқдори X як хел ченак дошта истифода бурдан қулайтар аст. Аз ҳамин сабаб, аз қимати решаи квадратӣ аз дисперсия, яъне $\sqrt{\quad}$ истифода мебаранд. Решаи квадрати аз дисперсия гирифташуда, барканоршавии квадрати миёна номида мешавад ва бо ҳарфи σ ишора карда мешавад, яъне $\sigma = \sqrt{\quad}$.

Масалан, дисперсияи миқдори тасодуфӣ ҷадвали 4 $D = 8,2$ ҳосил шуда буд. Акнун аз қимати дисперсия решаи квадрати ро бо ёрии калкулятор ҳисоб кунем, барканоршавии миёна

$$\sigma = \sqrt{\quad} = \sqrt{8,2} \approx 2,86. \text{-ро ҳосил мекунем.}$$

Дар статистика дисперсия ва барканоршавии квадрати миёнаро ченакҳои дар атрофи қимати миёна паҳншавии қиматҳои миқдори тасодуфӣ низ, мегӯянд.

Машиқҳо

488. Тақсимои қиматҳои миқдори тасодуфии X дар сармаҷмӯ бо ҷадвали зерин дода шудааст:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Дар сармаҷмӯи додашуда кадоми аз интиҳобҳои зерин репрезентатив аст:

- 1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4
- 2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2
- 3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2
- 4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Модаи интиҳобро ёбед:

- 1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
- 2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
- 3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
- 4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Медианаи интиҳобро ёбед:

- 1) 18, 13, 35, 19, 7;
- 2) 25, 16, 14, 21, 22;
- 3) 5, 2, 9, 14, 11;
- 4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Васеъгии интиҳобро ёбед:

- 1) 18, -4, 16, -3, 11, 5, 4, -5, 1, 3;
- 2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Миёнаи интиҳобро ёбед:

- 1) 34, -10, 23, -18;
- 2) -3, 6, -19, -12, 1;
- 3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0, 7, 0, 6, 0, 4;
- 4) 2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 8, 1, 8, 2, 3.

493. Мода, медиана ва миёнаи интихобро ёбед:

- 1) 4, -3, 2, 0, 3, -2; 2) 6, 5, -2, 4, -5, 0.

494. Қиматҳои тақсимои басомадҳои миқдори тасодуфии X дар ҷадвали зерин дода шудааст. Миёнаи арифметикии интихобро ёбед:

1)

X	-3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	-3	1	5
M	5	6	3

3)

X	-5	2	3
M	3	6	2

4)

X	-2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Тақсимои оид ба эҳтимолиятҳои қиматҳои миқдори тасодуфии X дар ҷадвали зерин дода шудааст. Интизории математикиро ёбед:

1)

X	-4	-2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	-3	-2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Дисперсияи интихобро ёбед:

- 1) 9 см, 11 см, 8 см, 10 см; 2) 18 кг, 16 кг, 15 кг, 19 кг;
3) 8 сония, 11 сония, 8 сония, 9 сония, 9 сония;
4) 1 м, 9 м, 4 м, 8 м, 8 м.

497. Қиматҳои тақсимои басомадҳои миқдори тасодуфии X дар ҷадвали зерин дода шудааст. Дисперсияи интихобро ёбед.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	-2	-1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Аз рӯи қимати миёнаи элементҳои интихоб барканоршавии квадрати миёнаро ёбед:

- 1) 4 гр, 5 гр, 8 гр, 3 гр, 5 гр;
2) 9 см, 12 см, 7 см, 10 см, 12 см.

499. Аз рӯи қиматҳои тақсимои миқдори тасодуфии X барканоршавии квадрати миёнаро ёбед:

1)

X	-1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	-4	-2	1	4
M	1	4	3	2

Машиқҳо доир ба боби V

- 500.** (Шифохӣ) Ҳодисаҳои элементариро гӯед, ки дар натиҷаи таҷрибаи зерин рӯй доданаш мумкин аст: 1) бо тарзи тасодуфӣ моҳҳои сол гуфта мешавад; 2) ду танга партофта шуда, тарафҳои афтида истода мушоҳида карда мешавад; 3) ягонто адади соддаи аз 50 хурд гуфта мешавад; 4) тасодуфан адади дурақамаи ба 3 каратӣ гуфта мешавад
- 501.** Дар қуттӣ 4-то сиёҳ, 5-то сурх ва 6-то кураи кабуд ҳаст. Тасодуфан аз қуттӣ якто кура гирифта шуд. Эҳтимолияти: 1) сиёҳ; 2) сурх; 3) кабуд; 4) сиёҳ нест; 5) сурх нест; 6) кабуд нест; 7) сабз; 8) сиёҳ ёки сурх ёки кабуд буданаширо ёбед:
- 502.** Яке аз ададҳои натуралии аз 1 то 50 тасодуфан гуфта шуда эҳтимолияти ин адад: 1) 7; 2) 7 не; 3) ба 7 каратӣ; 4) ба 10 каратӣ; 5) адади содда нест; 6) аз 30 калон нест-ро муайян кунед.
- 503.** Ба стол кубӣ бозӣ ва танга партофта шуда истодааст. Эҳтимолияти дар ин ҳолат 1) дар куб 5, дар танга омадани тарафи рақамдор; 2) дар куб адади содда, дар танга омадани тарафи герб-ро ёбед:
Васеъгӣ, мода, медиана ва миёнаи интиҳобро ёбед (**504–507**):
- 504.** 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.
- 505.** 1) $-7, -7, -4, -4, 1, 3$;
2) $-3, -3, 1, 3, 10, 10$.
- 506.** 1) 0, 13, $-5, -6, 14, -1, 11, -1, -8$;
2) 5, $-9, 14, 9, -5, -2, 0, 14, -5$.
- 507.** 1) $-4, -14, 13, -6, 9, 14, 0, -6$;
2) 15, $-3, -9, 9, 13, -7, -3, 10$.
- 508.** Дисперсия ва барканоршавии қувватии миёнаро ёбед:
1) 6, 11, 8, 9; 2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4; 4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, $-2, 2, -3, 4$; 6) $-3, 3, -4, -2, 5$.

509. Аз рӯи тақсимои басомадҳои додашудаи миқдори тасодуфии Z дисперсия ва барканоршавии квадрати миёнаро ёбед:

1)

Z	-1	0	2	4
M	2	1	3	1

2)

Z	-2	1	4	5
M	1	2	3	1

510. Дисперсияи интихобхоро муқоиса кунед: 1) 4, 5, 7, 5, 9 ва 6, 9, 7, 8; 2) -2, 2, 3 ва -3, -1, 1, 3, 4.

511. Аз рӯи тақсимои эҳтимолияти додашудаи миқдори тасодуфии X интизории математикиро ёбед

1)

X	-2	-1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	-3	-2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Машиқҳои санҷишӣ (тест) доир ба боби V

1. Ба карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 15 навишта шудааст. (Ба ҳар як карточка якто адад навишта шудааст). Карточкаҳо ба стол чаппа карда гузошта шуда омехта карда шудааст. Эҳтимолияти адади содда будани адади дар карточкаи тасодуфан гирифташударо ёбед:

А) $\frac{2}{5}$;

Б) $\frac{1}{5}$;

В) $\frac{7}{15}$;

Г) $\frac{3}{5}$.

2. Дар қуттӣ 3-то сафед ва 7-то кураи сиёҳ ҳаст. Яке аз онҳо тасодуфан аз қуттӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти кураи сафед будани кураи гирифташударо ёбед:

А) 0,5; Б) 0,7; В) 0,3 Г) 0,1.

3. Аз 27 нафар хонандагони синф 15 нафарашон писарон мебошад. Ба синф як нафар писарбача ва ду нафар духтарбача ҳамроҳ шуд. Дар ин ҳол адади писарони синф – басомади нисбии миқдори тасодуфии X чӣ қадар таъғир ёфт?

А) ба $\frac{1}{45}$ зиёд шуд;

Б) ба $\frac{1}{45}$ кам шуд;

В) ба $\frac{2}{45}$ зиёд шуд;

Г) $\frac{2}{45}$ кам шуд

4. Ҳосили ҷамъи мода ва медианаи интиҳоби қиматҳои миқдори тасодуфиро ёбед: 10, 4, 2, 7, -3, 6, 10;
 А) 14; Б) 17; В) 16; Г) 13 .
5. Ҳосили ҷамъи мода ва медианаи интиҳоби қиматҳои миқдори тасодуфиро ёбед: 2, 0, 1, 4, -1, 2.
 А) 2; Б) 3; В) 0; Г) 4.
6. Тақсими басомадҳои миқдори тасодуфии X дар ҷадвали зерин дода шудааст. Миёнаи X интиҳобро ёбед:

X	-1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

- А) $1\frac{5}{9}$; Б) $1\frac{4}{9}$; В) $1\frac{1}{9}$; Г) 1.

7. Аз рӯи тақсими эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфии X интизории математикиро ёбед:

X	-1	2	3	5	7
M	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- А) $\frac{25}{9}$; Б) $\frac{26}{9}$; В) $\frac{29}{9}$; Г) $\frac{30}{9}$.

8. Аз рӯи тақсими басомадҳои миқдори тасодуфии X барканоршавии квадрати миёнаро ёбед:

X	-1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

- А) 1; Б) 1,5; В) 2; Г) 2,5.

9. Аз рӯи тақсими эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфии X дисперсияи онро ёбед:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

- А) 2,9; Б) 2,09; В) 2,99; Г) 0,29.

Масъалаҳои амалӣ -татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъалаи 1. Дар лотерея бурдҳои автомобили 5000 ч.п. (ченаки пул), 4-дона телевизорӣ ҳар якаш 250 ч.п., 5-то телефони 200 ч.п. бозӣ мекунад. Ҳамагӣ 1000 дона билети ҳар якаш 7 ч.п. фурӯхта шуд. Чадвали тақсимои бурди софӣ иштирокчи лотереяи як дона билет харид кардари созад ва интизори математикӣ ҳисоб кунед.

$\triangle$ X –бурди софӣ ба як билет афтада бошад, он гоҳ қимати он: ягонто ҳам бурд набарояд, $0 - 7 = -7$;

бурд телефони дастӣ бошад, $200 - 7 = 193$;

бурд телевизор бошад, $250 - 7 = 243$;

бурд автомобил бошад, $5\,000 - 7 = 4\,993$

ба ч.п. баробар мешавад. Аз 1000-дона чипта ба 990 донаш бурд набаромаданаширо ва шумораи бурдҳо $5+4+1=10$ -ро ба ҳисоб гирифта, дар асоси таърифи классикии эҳтимолият ҳосил мекунем:

X – миқдори тасодуфӣ

– эҳтимолияти қабул кардани қимати -7 ба $\frac{990}{1\,000} = 0,990$;

– эҳтимолияти қабул кардани қимати 193 бошад, ба $\frac{5}{1\,000} = 0,005$;

– эҳтимолияти қабул кардани қимати 243 бошад ба $\frac{4}{1\,000} = 0,004$;

– эҳтимолияти қабул кардани қимати $4\,993$ бошад ба $\frac{1}{1\,000} = 0,001$.

баробар аст. Пас, чадвали эҳтимолиятҳои тақсимои миқдори тасодуфии X чунин мешавад:

X	-7	193	243	$4\,993$
P	$0,990$	$0,005$	$0,004$	$0,001$

Дар асоси чадвал интизории математикиро ҳисоб кардан мумкин аст:

$$E = (-7) \cdot 0,990 + 193 \cdot 0,005 + 243 \cdot 0,004 + 4\,993 \cdot 0,001 = 0,$$

яъне бурди миёна ба сифр баробар аст. Натиҷаи ҳосилшуда аз билетҳои фурӯхташуда ҳамаи пулҳои ба бурд сарфшударо мефаҳмонад.

Ҷавоб: тақсироти чадвал

X	-7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

ва интизории математикӣ $E = 0$. ▲

Масъалаи 2. Дар як фирма ба кори тарчimoni ду номзод ҳаракат карда истодааст. Барои онҳо дар муддати ягонаи санҷишӣ тарҷимаи матни якхелаи 125 саҳифа дошта дода шуд. Дар як рӯз чанд саҳифаи матро тарҷима кардаи онҳо дар чадвали зерин оварда шудааст:

Номи ҳафтаҳо	Шумораи саҳифаҳои дар як рӯз тарҷимашуда	
	Номзоди 1 (X)	Номзоди 2 (Y)
Душанбе	24	25
Сешанбе	26	31
Чоршанбе	25	27
Пайшанбе	23	22
Ҷумъа	27	20

Раҳбари фирма маълумоти чадвалро таҳлил карда, ба кор қабул кардани кадомро афзал медонад?

▲ Ҳар яке аз номзодҳо дар 5 рӯз 125 саҳифаро тарҷима карданд, пас, самаранокии миёнаи ҳар ду номзод ҳам як хел аст:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (саҳифа/рӯз)}.$$

Ҳар ду миқдори тасодуфии X ва Y мода надорад ва медианаҳои як хел дорад (25 ва 25). Кадоми аз номзодҳоро ба кор қабул кардан ба мақсад мувофиқ аст. Дар ин ҳолат барқарории самаранокии меҳнати номзодҳоро муқоиса кардан лозим аст. Инро бошад, бо муқоисакунии ҳосили ҷамъи квадратҳои барқаноршавӣ ёки дисперсияи онҳо ба амал ҷорӣ кардан мумкин аст.

Рӯзҳои ҳафта	Қиматҳои миқдорҳои тасодуфӣ		Барканоршавӣ аз миёна $\bar{X} = \bar{Y} = 25$		Квадратҳои барканоршавӣ	
	X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
Душанбе	24	25	-1	0	1	0
Сешанбе	26	31	1	6	1	36
Чоршанбе	25	27	0	2	0	4
Пайшанбе	23	22	-2	-3	4	9
Ҷумъа	27	20	2	-5	4	25
Ҷамағӣ	125	125	0	0	10	74

Дида мешавад, ки ҳосили ҷамъи квадратҳои барканоршавӣ барои X ба 10, барои Y бошад, ба 74 баробар аст, ёки дисперсияро ҳисоб кунем:

$$D(X) = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_5 - \bar{X})^2}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$D(Y) = \frac{(Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_5 - \bar{Y})^2}{5} = \frac{74}{5} = 14,8.$$

Пас, дисперсияи миқдори тасодуфӣ X аз дисперсияи миқдори тасодуфӣ Y хурд аст. Аз ҷиҳати амалӣ ин натиҷа самаранокии меҳнати номзоди дуҷум барқарор набуданашро нишон медиҳад; дар баъзе рӯзҳо аз имкониятҳои пурра истифода набурда меҳнат кард, рӯзҳои дигар бошад аз дараҷаи имконияташ бисёртар ҳаракат кард, ин бошад албатта ба сифати кори иҷрокарда истода таъсири манфӣ расонданаш мумкин аст. Аз ин ҷо дида мешавад, ки раҳбари фирма ба кор қабул кардани номзоди якумро афзал медонад.

Ҷавоб: раҳбари фирма ба кор қабул кардани номзоди якумро афзал медонад. ▲

Масъалаи 3. Ҷадвали тақсимоӣ эҳтимолиятҳои миқдорҳои тасодуфӣ X ва Y -и ҳолатҳои ду камончии ба нишон ҳангоми тирпарронӣ ҳосилшуда чунин аст:

барои камончии 1:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

ва барои камончии 2:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Аз камончиҳо кадомаш ба нишон нағзтар тир мепаронад?

△ Равшан аст, ки холи миёнаи кадом аз камончиҳо зиёдтар бошад, ҳаминаш беҳтар ба нишон тир мепаронад гуфтан мумкин. Аз ҳамин сабаб интизории математикии микдорҳои тасодуфии X ва Y -ро ҳисоб мекунем:

$$E(X) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,04 + \dots + 9 \cdot 0,12 + 10 \cdot 0,20 = 5,36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,05 + \dots + 9 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,02 = 5,36,$$

яъне, ҳолҳои миёнаи ҳар ду камончӣ ҳам як хел. X ва Y -ро ҳисоб карда бинем:

$$D(X) = (0 - 5,36)^2 \cdot 0,15 + (1 - 5,36)^2 \cdot 0,11 + \dots + (10 - 5,36)^2 \cdot 0,20 = 13,6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3,69;$$

$$D(Y) = (0 - 5,36)^2 \cdot 0,01 + (1 - 5,36)^2 \cdot 0,03 + \dots + (10 - 5,36)^2 \cdot 0,02 = 4,17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2,04.$$

Ҳамин тавр, қимати миёнаи ҳолҳои ба нишон расида $E(X) = E(Y)$ бошад, ҳам барои камончии дуҷум дисперсия нисбат ба якум хурдтар аст: $D(Y) < D(X)$, яъне паҳн ҷойгиршавии ҳолҳои ба нишонрасӣ камончии дуҷум дар атрофи "марказ" ($E(Y) = 5,36$) нисбат ба камончии якум хурдтар аст. Дигар хел карда гӯем, натиҷаи он нисбат ба камончии якум аз 5,36 зиёд дур нарафтааст. Пас, он нисбат ба камончии якум беҳтар ба натиҷа соҳиб шудан нағзтар ба нишон гирифта, $E(Y)$ -ро ба росттар (ба боло) гечонидан ҳаракат карданаш лозим аст.

Ҷавоб: камончии якум ба нишон нағзтар тир мепаронад ▲

Масъалаи 4. Тақсимои басомадҳои дар давраи мусобиқаи футбол тубҳои ба дарвозаи рақибзадаи X -и футболбозони ҷамоа дода шудааст:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

△ Аз қимати миёна ҳамаи тубҳои ба дарвоза задашуда барканоршавии квадрати миёнаро ҳисоб кунед. Аввал қимати миёнаро ҳисоб мекунем:

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_5 M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 1 + 1} = \frac{0 + 3 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Ҳисобкуниҳои минбаъда дар ҷадвали зерин оварда шудааст:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X - \bar{X}$	-1,4	-0,4	0,6	1,6	2,6
$(X - \bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X - \bar{X})^2 \cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Дар ин ҳол дисперсия ва барканоршавии квадрати миёна чунин чунин ҳисоб карда мешавад:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_5 - \bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{5,88 + 0,48 + 0,72 + 2,56 + 6,76}{10} = \frac{16,4}{10} = 1,64,$$

$$\sigma = \sqrt{\quad} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$$

Ҷавоб: $\sigma \approx 1,28$. ▲

Машқҳо

1. Дар асоси маълумотҳои бисёрсолаи дар оилаҳои 4 фарзанд дошта адади писарон X бо қонуни тақсими микдори тасодуфӣ дар асоси ҷадвали зерин додашуда бошад, интизори математикӣ ва дисперсияро ҳисоб кунед:

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Чадвали холҳои 9 -то ҳакам аз рӯи ҳолдихии 10 -ҳол ба ду гимнастикачӣ гузошта дар мусобиқаи спорти дода шудааст

Рақами гимнастикачи	Рақами ҳакамҳо ва ҳолҳои онҳо гузошта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Ҳолҳои гирифтаи ҳар як гимнастикачиро мувофиқан бо миқдорҳои тасодуфии X ва Y ишора карда, интизории математикӣ, барканоршавии квадратии миёнаро ёбед ва онҳоро муқоиса кунед.

3. Талабае барои омӯхтани талаб ба пойафзол фурӯхти пойафзолҳоро дар дӯкон дар давоми 25 рӯз навишта рафт. Агар X_1 пойафзолҳои дар дӯкони якум, X_2 пойафзолҳои дар дӯкони дуюм фурӯхта бошад, дар ин ҳолат дар асоси маълумотҳои овардашуда, интизори математикӣ, барканоршавии квадратии миёнаи, миқдорҳои тасодуфии X_1 ва X_2 -ро ҳисоб кунед.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

Фурӯхти пойафзолҳоро дар дӯконҳо муқоиса кунед.

4. Аз даруни якчанд ғўлачаҳои пӯлодин бист дона ҷудо карда шуда, диаметри асосҳои онҳо d бо ёрии ду асбоби ченкунӣ чен карда шуд. Натиҷаҳои бо ёрии асбоби ченкунии якум (то саҳеҳии 1мм) дар чадвали тарафи чап, натиҷаҳои бо дуюм гирифта дар чадвали тарафи рост оварда шудааст. Дисперсияи миқдорҳои тасодуфии d_1 ва d_2 -ро муқоиса кунед.

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

Дисперсияи миқдорҳои тасодуфии d_1 ва d_2 -ро муқоиса кунед.

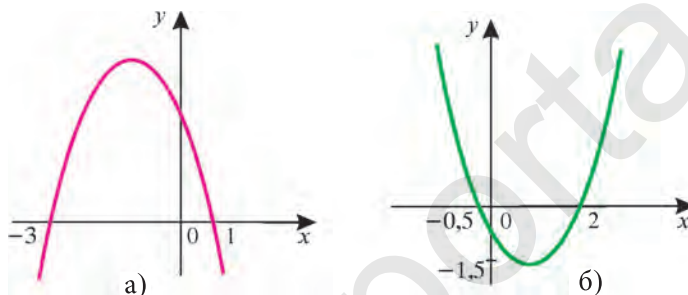
МАШҚҶО БАРОИ ТАКРОРИ КУРСИ „АЛГЕБРА“-И СИНФИ 9

512. Графики функцияро созед:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Шифохӣ.) Аз графики функцияи $y = ax^2 + bx + c$ истифода бурда (расми 93), хосиятҳои онро муайян намоед:



Расми 93.

514. Графики функцияро сохта хосиятҳои онро муайян кунед:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. Графики функцияҳоро дар як ҳамвории координатӣ созед :

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ ва $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ ва $y = 3x^2 - 2$.

Нобаробариро ҳал кунед (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \leq 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \leq 0$; 6) $x^2 - 7 \geq 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 24x + 144 \leq 0$;
 3) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 < 0$; 4) $\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 \geq 0$.

Нобаробари ро бо усули интервалҳо ҳал кунед (520–522):

520. 1) $(x+3)(x-4) > 0$; 2) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+0,7) < 0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7) < 0$; 4) $(x+2)(x-1) \leq 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1) \geq 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2 \leq 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2 > 0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2 \geq 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x} \geq 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2} \leq 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x} < 0$;

523. Масоҳати трапетсия аз 19,22 см² зиёд аст. Хати миёнаи он аз баландии он ду маротиба калон аст. Хати миёна ва баландии трапетсияро ёбед.

524. Тарафи параллелограмм аз баландии ба ин тараф фурувардашуда 2 см дароз аст. Агар масоҳати параллелограмм аз 15 см² Азӣёд бошад, дарозии ҳамон тарафро ёбед.

525. Нобаробари ро бо усули интервалҳо ҳал кунед:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4) > 0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1} + \frac{x-3}{x+3} \geq 2$.

526. Агар сеаъзогии квадратии $x^2 + px + q$ ҳангоми $x = 0$ будан, қимати ба -14 баробар ва $x = -2$ будан, қимати баробар ба -20 -ро қабул кунад, коэффисиентҳои p ва q -и ин сеаъзогии квадратиро ёбед:

527. Агар параболаи $y = x^2 + px + q$

1) тири абсиссаро дар нуқтаи $x = -\frac{1}{2}$ ва $x = \frac{2}{3}$ бурад;

2) тири абсиссаро дар нуқтаи $x = -7$ расида гузарад;

3) тири абсиссаро дар нуқтаи $x = 2$ ва тири ординатаро дар нуқтаи $y = -1$ бурида гузарад, $p - q$ -ро ёбед:

528. Агар парабола тири абсиссаро дар нуқтаи 5 бурад ва қуллаи он

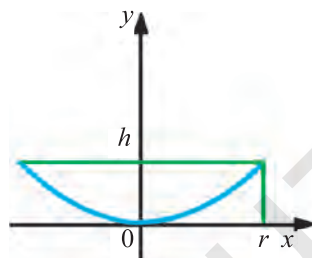
нуқтаи $\left(2\frac{3}{4}; 10\frac{1}{8}\right)$ бошад, муодилаи ин параболаро нависед.

529. Оинаи инъикоскунандаи телескоп (рефлектор) аз рӯи тирӣ буриш шакли параболаро дорост (расми 94). Муодилаи ҳамин параболаро нависед.

530. Агар графики функцияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$:

1) аз нуктаҳои $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ ва $C(0; -6)$ гузарад;

2) аз нуктаҳои $K(-2; 0)$, $L(1; 0)$, $M(0; 2)$ гузарад, коэффитсиентҳои онро ёбед:



Расми 94.

531. Дуруст будани нобаробариҳои

1) $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$; 2) $a^3 + b^3 \leq (a + b)^3$ -ро барои ададҳои ғайриманфии a ва b исбот кунед:

532. Графики функцияро созед:

1) $y = \sqrt{x^2}$;

2) $y = |x - 1|$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

533. Решаҳои ҳақиқии муодиларо ёбед:

1) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

2) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$;

3) $|x^2 - x| = 2$;

4) $|x^2 + x| = 1$;

5) $|x^2 - 2| = 2$;

6) $|x^2 - 26| = 10$.

534. Аз реша бароред:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt[5]{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

535. Содда кунед:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$;

2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$;

4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}$.

536. Қимати ифодаҳоро муқоиса намоед:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ ва $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$ ва $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$.

537. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Аз зери реша зарбкунандаро бароред:

1) $\sqrt{9a^2b}$, дар ин $a < 0, b > 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, дар ин $a > 0, b > 0$;

539. Зарбкунандаро ба зери реша дароред:

1) $x\sqrt{5}$, дар ин $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, дар ин $x < 0$;
3) $-a\sqrt{3}$, дар ин $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, дар ин $a < 0$.

540. Ба графики функсияи $y = -\frac{25}{x}$ тааллуқ доштан ё надоштани нуқтаҳои зеринро муайян намоед:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; 3) $C(0,1; 250)$

541. Ба графики функсияи $y = \sqrt{1-2x}$ тааллуқ доштан ё надоштани нуқтаи: 1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; $E(-4; 3)$ -ро муайян кунед

542. Графики функсияро ёбед:

1) $y = x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -x^2 - 7x - 6$.

543. Якчанд кунҷҳои гардишро, ки нуқтаи $P(1; 0)$ -ро ба нуқтаи :

1) $A(0; 1)$; 2) $B(0; -1)$; 3) $C(-1; 0)$; 4) $D(1; 0)$ мегузаронад, нишон диҳед:

544. Ҳисоб кунед: 1) $\frac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\frac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Мусбат ё манфӣ будани ададро муайян кунед:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

546. Дода шудааст: $\sin\alpha = 0,6$, $\sin\beta = -0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Ҳисоб кунед: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

1) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}$;
3) $\cos\alpha - \sin 2\alpha$; 4) $1 - \sin 2\alpha - \cos^2\alpha$.

548. Агар 1) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ ва $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{5}{13}$ ва $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ бошад, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ -ро ҳисоб кунед:

549. Агар

1) $a_1 = 10, d = 6, n = 23$; 2) $a_1 = 42, d = \frac{1}{2}, n = 12$;

3) $a_1 = 0, d = -2, n = 7$; 4) $a_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}, n = 18$

бошад, аъзои n -уми прогрессияи арифметикӣ ва суммаи n -то аъзои аввалаи онро ҳисоб кунед.

550. Агар $a_1 = 2, a_n = 120, n = 20$ бошад, суммаи n -то аъзои аввали прогрессияи арифметикиро ёбед.

551. Исбот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи $a_n = \frac{1-2n}{3}$ додашуда аъзои n прогрессияи арифметикӣ мебошад.

552. Агар барои прогрессияи геометрӣ

1) $b_1 = 5$ ва $q = -10$ бошад, b_4 -ро ёбед;

2) $b_4 = -5000$ ва $q = -10$ бошад, b_1 -ро ёбед;

553. Агар:

1) $b_1 = 3, q = 2, n = 5$; 2) $b_1 = 1, q = 5, n = 4$ бошад, аъзои n -прогрессияи геометрӣ ва суммаи n -то аъзои аввалаи онро ҳисоб кунед.

554. Агар 1) $b_1 = \frac{1}{4}, q = 2, n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{5}, q = -5, n = 5$ бошад, суммаи нахустин n -то аъзои прогрессияи геометрии ёбед.

555. Суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед

1) $6, 4, \frac{8}{3}, \dots$; 2) $5, -1, \frac{1}{5}, \dots$; 3) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$.

556. Аз зери реша зарбкунандаро бароред:

1) $\sqrt{20a^4b}$, дар ин ҷо $a < 0, b > 0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, дар ин ҷо $a < 1$;

557. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, дар ин ҷо $a > b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, дар ин ҷо $b > a$.

558. Махрачро аз иррационалӣ хориҷ кунед:

1) $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{5}}$.

559. Ифодаро содда кунед:

$$1) \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2) \sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4}; \quad 2) \left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

560. Муодиларо ҳал кунед:

$$1) \sqrt{x-2} = 4; \quad 2) \sqrt{x+3} = 8; \quad 3) \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1}.$$

561. Ифодаро содда кунед:

$$1) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 2) \frac{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$$
$$4) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2; \quad 5) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

562. Муодиларо ҳал кунед

$$1) 1 - \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} = 0; \quad 2) 1 + \cos 2x + 2 \cos x = 0.$$

563. Айниятро исбот кунед

$$1) \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}; \quad 2) \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

564. Айниятро исбот кунед

$$1) 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 2) 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

565. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$; $a_3 a_4 = \frac{65}{72}$. Суммаи ҳабдаҳ аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

566. Дар прогрессияи геометрӣ $q = 3$, $S_6 = 1\,820$ бошад, b_1 ва b_5 -ро ёбед:

567. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда ба $\frac{8}{5}$ ва аъзои дууми он ба $-\frac{1}{2}$ баробар аст. Аъзои сеюмро ёбед:

568. Ифодаро содда кунед:

$$1) \sqrt{5+2\sqrt{21}}; \quad 2) \sqrt{4+\sqrt{7}}; \quad 3) \sqrt{5+2\sqrt{6}}; \quad 4) \sqrt{8+2\sqrt{15}}.$$

569. Агар: 1) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2,4$; 2) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$ бошад, $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ -ро ҳисоб кунед:

Ҷавобҳо

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 4) қиматҳои ҳақиқии x -и қимати функсияро ба -5 баробар қунанда мавҷуд нест 3. 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$, $x_2 = -1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. 4. 2) 0; 4) 1. 5. 2) сифрҳо надорад; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) сифрҳо надорад 6. 2) $p = 3$, $q = -4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. 7. $x_{1,2} = \pm 2$. 9. В ва С. 12. 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) $(0; 0)$, $(2; 4)$; 6) $(1; 1)$. 13. 2) Ҳа. 14. 2) Ҳа; 4) Не. 16. 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \leq x \leq 5$; 3) $x \leq -4$, $x \geq 4$; 4) $-6 < x < 6$. 20. 2) $(-3; -4,5)$, $(2; -2)$. 21. 2) Ҳа; 4) Не. 22. 1) афзуншаванда; 2) камшаванда; 3) афзуншаванда; 4) афзуншаванда ҳам, камшаванда ҳам не. 23. 3 м/с². 26. 2) $(0; -5)$; 4) $(\frac{1}{8}; \frac{1}{16})$. 27. 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. 28. 2) Не; 4) Не. 29. 2) $(1; 0)$, $(0,5; 0)$, $(0; -1)$; 4) $(0; 0)$, $(\frac{4}{3}; 0)$. 30. $y = x^2 - 2x + 3$. 32. 2) $k = -10$. 34. 1) $y = 2(x - 3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1,5)^2 + 3,5$. 35. 2) $(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4})$; 4) $(\frac{5}{2}; \frac{21}{4})$. 36. 2) $(1; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(0; 14)$. 40. $7,5 + 7,5$. 41. 5 ва 5. 42. Дар девор тарафи паралел 6 м тарафҳои боқимонда 3 м 43. Не. 44. 2) $x = 1$ бошад $y = -5$ қимати хурдтарин; 4) $x = 1$ бошад $y = -2$ қимати хурдтарин; 45. 1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; 2) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$. 46. 1) баъд аз 5 сония баландии калонтарин 130 м; 2) $(5 + \sqrt{26})$. 48. 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. 50. 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x > -1$. 51. 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. 52. 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. 53. 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. 56. Қиматҳои мусбат дар $x < -3$, $x > 2$ қиматҳои манфӣ дар интервали $-3 < x < 2$. 58. 2) $x \leq -1$, $x \geq 4$; 4) $-1 < x < 4$. 59. 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \leq -0,25$; $x \geq 1$. 60. 2) $x = 7$; 4) ҳал надорад. 61. 2) ҳал надорад. 4) ҳал надорад.; 6) x – қимати ҳақиқии дилҳо. 62. 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$; $x > 0$. 64.

2) $x < -\frac{5}{3}$, $x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ. **65.** 2) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ; 4) $x \neq$; 6) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$. **66.** 2) ҳал надорад; 4) $-0,5 < x < 3$. **67.** 2) $x = 1$; 4) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ.. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5$, $x > 3\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0$, $x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x < 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3,5 \leq x < 7$; 6) $-2 \leq x < -1$, $x \geq 3$. **76.** 2) $x < 0,5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \leq x \leq -1$, $4 \leq x \leq 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \leq x < 2$, $x \geq 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5$, $x > 2$; 3) $-1 < x \leq -\frac{2}{5}$. **81.** 2) Дар $x=2$ $y=1$; $x=0$ ва $x=4$ $y=5$; дар $x=-1$ ва $x=5$ $y=10$; дар $x=-2$ ва $x=6$ $y=17$. **82.** 1) $y(-2)=-1$, $y(0)=-5$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=-11$, $y(3)=4$; 2) дар $x=-\frac{1}{2}$ $y=-3$; дар $x=-1$ $y=-2$; дар $x=\frac{3}{2}$ $y=13$; дар $x=\frac{4}{3}$ $y=19$. **84.** 2) $x \leq 2$, $x \geq 5$; 4) $-2 \leq x < 3$. **85.** 1) $y(-3)=3$, $y(-1)=1$, $y(1)=-1$, $y(3)=1$; 2) дар $x=2$ $y=-2$; дар $x=0$ ва $x=4$ $y=0$; дар $x=-2$ ва $x=6$ $y=2$; дар $x=-4$ ва $x=8$ $y=4$. **86.** 2) $x \neq -1$; 5) $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 4$; 6) $-5 \leq x \leq 1$, $x > 2$. **87.** 2) Ҳа; 4) Ҳа. **93.** 2) $x=16$; 4) $x=\frac{1}{16}$; 6) $x=\frac{1}{243}$. **95.** 2) $x=32$; 4) $x=8$. **98.** 2) Тоқ; 4) чуфт ҳам, тоқ ҳам нест. **99.** 2) тоқ; 4) тоқ; . **108.** 2) $x=0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110.** 2) $x \leq 3$; 4) $y < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2) тегаи куб аз 7 зиёд. **114.** 2) $x=10$; 4) $x=5$. **115.** 2) $x=2$; 4) $x=2$; $x=-7$. **116.** 2) $x=4$; 4) $x=0,2$. **117.** $x=\frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x=-2$; 4) $x_1=1$; $x_2=3$. **121.** 2) $x=2,25$. **122.** 2) $x=1$; 4) $x=5$. **123.** 2) $x=4$. **124.** 2) $2 \leq x \leq 3$; 4) $1 < x \leq 2$; 6) $x \geq 1$. **125.** 2) $x_1=2$, $x_2=0,5$; 4) *ин гуна қимати x мавҷуд нест* **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 м ва 150 m. **131.** 2) $p=1$, $q=0$.

132. 1) $x_1 = 1, x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2, x > 4$; 4) $x < 3, x > 4$. **134.** 2) $x < -6, x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}, x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) хал надорад; 4) хал надорад; 6) хал надорад. **137.** 2) $x < -1, 1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}, 4 < x \leq 7$; 6) $x \geq 2, -\frac{1}{2} \leq x < 1$. **138.** 2) $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}, \frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{5}, \frac{1}{2} < x \leq 2$. **140.** аз 12 км/с кам нест. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$. **143.** 2) $(-1; -1); (1; 1)$. **144.** 2) $x > 2$; 4) $x \leq -2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2) x – адади дилхох; 4) $2 \leq x \leq 11$; 6) $x < -7, -3 \leq x < -1, x \geq 3$. **148.** 2) кам мешавад; 4) кам мешавад. **149.** 2) тоқ; 4) чуфт ҳам, тоқ ҳам нест. **150.** 2) $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1, x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1, x > 9$; 2) $-1 < x \leq 0, 3 \leq x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \leq x < 6$; 4) $x \geq 4$. **153.** 2) $(4; 1)$; 4) $(0,5; 3)$. **154.** 2) $(7; -5), (-4; 6)$; 4) $(-1; -1), (7; 23)$. **155.** 2) $(4; -3); (17; 10)$; 4) $(4; 1), (-1; -4)$. **156.** 2) $(1; 7), (7; 1)$; 4) $(-2; -5), (-5; -2)$. **157.** 2) $(4; -1)$; 4) $(3; 1)$. **158.** 2) $(2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2)$; 4) $(1; 5), (5; 1), (-1; -5), (-5; -1)$. **159.** 5 ва 13. **160.** 4 ва 36. **161.** 2) $(7; -1), (-1; 7)$. **163.** 1) $(4; 1) (-1; -4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2)$. **164.** 300 м, 200 м. **165.** 2) $(4; 5)$ ва $(5; 4)$. **166.** 2) $(1; -2)$ ва $(3; 0)$. **167.** 2) $(9; 4)$. **168.** 2) $(3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3)$. **169.** 2) $(2; 5)$ ва $(5; 2)$; 4) $(1; 3)$ ва $(19; -3)$. **170.** 2) $(3; 5), (5; 3), (-3; -5), (-5; -3)$; 4) $(1; 7), (7; 1), (-1; -7), (-7; -1)$. **171.** 2) $(20; 4)$ ва $(-20; -4)$; 4) $(3; 6)$ ва $(6; 3)$. **172.** 2) $(-1; 1) (1; 1) \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right], 2) \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right]$; 4) $(-5; -2), (-5; 2), (5; -2)$. **173.** 2) $(5; 1)$. **174.** 2) $(-5; -1), (-3; -5), (3; 5), (5; 3)$. **175.** $(1; 9)$ ва $(9; 1)$. **176.** 2) система хал надорад. **177.** 2) $-9 \leq x \leq 3$; 4) $-6 \leq x \leq 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ ва $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \leq -2$ ва $1 \leq x \leq 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \leq x \leq 0$. **182.** 2) $\emptyset$. **194.** $(-1; -4)$ ва $(4; 4)$; 2) $(2; -2)$ ва $(9; 5)$. **195.** 2) $(-5; 6)$ ва $(6; -5)$; 4) $(-1; 10)$ ва $(10; -1)$. **196.** 2) $(6; -2)$; 4) $(3,5; -1,5)$. **197.** 2) $(-2; -3)$ ва $(2; 3)$;

4) (2; 6) ва (6; 2). **198.** 2) $(-1; 3)$ ва $(3; -1)$. **199.** 2) $(-3; 1)$ ва $(1; 5)$. **200.** 2) $(-2; 1)$ ва $(2; 1)$;
4) $(-1; 4)$ ва $(24; 0,6)$. **201.** 2) $(4; \sqrt{3})$ ва $(4; \sqrt{3})$; 4) $(-6; -2)$, $(-6; 2)$, $(6; -2)$, $(6; 2)$. **202.**
2) $(1; -2)$ ва $(2; -1)$; 4) $(2; 1)$. **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}; \sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)$ ва $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}; \sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) $(4; 1)$; 4) $(100;$
4). **205.** 2) 24. **206.** 2) дарозияш 1.2 см ва бараш 0.8 см. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \leq x \leq 2$. **208.**
2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **214.** 2) 20° ; 4) 135° ; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ$; 8)
 $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^\circ$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6,7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4,8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 м.
219. 2 рад. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ см². **221.** 2 рад. **222.** 2) $(-1; 0)$; 4) $(0; -1)$; 6) $(1; 0)$. **224.** 2) чоряки дуюм;
4) чоряки чорум; 6) чоряки дуюм. **225.** 2) $(0; 1)$; 4) $(-1; 0)$; 6) $(0; 1)$. **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm 1,$
 $\pm 2, \dots$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **227.** 2) чоряки дуюм; 4) чоряки дуюм. **228.** 2) $x =$
 $1,8\pi$, $k = 4$; 4) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 6) $x = \frac{5}{3}\pi$, $k = 2$. **230.** 2) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$. **231.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k
 $= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1 ; 6) -1 ; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) -1 ;
4) -1 ; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) -1 . **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;
4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,$
 $\dots$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 6) $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **241.** 2) $x = 2\pi k - 1$, $k = 0, \pm 1,$
 $\pm 2, \dots$; 4) $x = k\pi - 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 6) $x = \frac{2\pi k}{3} + 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **242.** 2) чоряки дуюм; 4)
чоряки дуюм; 6) чоряки дуюм. **243.** 2) мусбат; 4) мусбат; 6) мусбат. **244.** 2) манфӣ; 4) манфӣ;
6) мусбат; **245.** 2) мусбат, мусбат; 4) манфӣ, манфӣ; 6) манфӣ, манфӣ; 8) мусбат, мусбат.
246. 2) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$; 4) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.
247. 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1,3) < 0$, $\cos(-1,3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1,3) < 0$.
248. 2) манфӣ; 4) мусбат; 6) мусбат; 8) манфӣ. **249.** Агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ёки

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, аломатҳои $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ яхела аст; агар $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ёки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ бошад, аломатҳои $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ муқобил аст. **250.** 2) манфӣ; 4) мусбат. **251.** 2) $\cos 1,3 > \cos 2,3$. **252.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x = \pi + 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **253.** 2) чоряки дуюм; **254.** $\frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$. **255.** 2) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$; 4) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) иҷро мешавад; 4) иҷро намешавад. **257.** 2) иҷро намешавад. **258.** $\cos \alpha = \frac{9}{11}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos \alpha = \pm \frac{3}{4}$. **261.** $\sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x = \pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 3) $x = 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **266.** 1) 0; 4) $1 + \sin \alpha$. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x = \pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **276.** 2) $2 \cos \alpha$; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) $-2 \cos \alpha$. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **282.** 2) $\frac{4 - \sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) $\cos 3\beta$; 4) -1. **284.** $-\sin \alpha \sin \beta$. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2 + \sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) $-\sin \alpha \cos \beta$; 4) $\sin \alpha \cos \beta$. **288.** $\cos(\alpha + \beta) = \frac{84}{85}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) $2 \operatorname{ctg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) $\cos 6\alpha$; 4) $\frac{1}{2 \sin \alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **312.** 2) $\cos 2\alpha$. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5 - 3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos \alpha}$. **317.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x = \pi + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **318.** 2) $\sqrt{2} \sin \beta$; 4) $\sin 2\alpha$. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320.** 2) $4 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2)

$2\sin\alpha$. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.
328. 2) чоряки сеюм; 4) чоряки дуюм; 6) чоряки дуюм;. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1.
330. 2) 2; 4) -1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) $\sin 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.**
2) $\cos 0 > \sin 5$. **340.** 2) мусбат; 4) манфӣ. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.**
2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.** $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$.
344. 2) $\operatorname{tg}\alpha$. **345.** 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) -7. **348.** 2) $\cos 4\alpha$. **350.**
2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$. 6) -1, -8, -27. **352.** 2) мешавад; 4) мешавад **354.** 2) $n=9$. **360.**
2) -3, -1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) -42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.**
 $X_a, n = 11$. **366.** $n = 11$, HE. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) -13. **369.** 2) -100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$.
371. $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57, d = 7$; 4) $a_9 = -1, d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050;
4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) -192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2)
2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$, $d = \frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78 то чӯб. **388.** 44.
389. $a_1 = 5, d = 4$. **392.** 2) -3, 12, -48, 192, -768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;
4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374, n = 5$. **399.** $b_7 = 3\sqrt{3}$,
 $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **400.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ ёки $b_5 = -6$, $b_1 = -30\frac{3}{8}$. **401.** 659100 сӯм. **402.** 0,25 см².
403. 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) -400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1, b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4)
 $n = 5$. **407.** 2) $n = 9, b_9 = 2048$; 4) $n = 5, q = 7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = 4802, S_4 = 800$.
410. 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q = 5, b_3 = 300$ ёки $q = -6, b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ ёки $q = -2$; 4) $S_5 = 781$
ёки $S_5 = 521$. **415.** 2) ха; 4) ха. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$.

417. 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. 418. 2) не; 4) ҳа. 419. 2) $90\frac{10}{11}$. 420. 2) $6 + 4\sqrt{3}$. 421. 2) $\frac{1}{2}$. 422. 2a. 423. $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot R_1$. 424. 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. 425. 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. 427. $-5\frac{1}{3}$. 428. 2) -1080 . 429. 143. 430. 2) -22 . 431. 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. 432. 2) $b_n = -0,5 \cdot (-2)^{n-1}$. 433. 2) $b_n = \frac{125}{8}$. 434. 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. 435. 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. 436. 2) $-\frac{4}{5}$. 437. 24 $\frac{41}{74}$. 438. 2) 14, 11, 8, 5, 2. 439. $-\frac{5}{2}$. 440. 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. 441. 2) $x_1 = \frac{1}{3}$; 4) $x_2 = -4$. 443. 14. 444. 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. 445. 2) 27. 446. 2) -27 ; 4) $\pm\frac{1}{25}$. 447. 6. 448. 2) не; 4) ҳа. 450. рӯзи чоршанбе. 451. $a_1 = 8$, $d = -3$ ёки $a_1 = 2$, $d = 3$. 452. $a_1 = 5$, $d = -5$ ёки $a_1 = -5$, $d = 5$. 453. 180 маротиба. 453. 2) мумкин нест. 454. 2) Тасодуфӣ; 4) муқаррарӣ. 457. 2) яқоя нест.. 462. Баробар имконият нест.. 466. 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. 467. 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. 468. 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. 469. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. 470. 0,01. 471. 2) 0,97. 472. $\frac{29}{30}$. 473. $\frac{1}{2}$. 474. 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. 476. 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. 477. 1,4%. 482. 2) мумкин 4 хол. 488. 3 интиҳоб. 489. 2) 11; 4) 5 ва 7. 490. 2) 21; 4) 13. 491. 2) 24. 492. 2) $-5,4$; 4) 2,1. 494. 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. 495. 2) 0,1. 496. 2) $2,5 \text{ кг}^2$, 4) 6 м^2 . 502. 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. 503. 2) 0,25. 505. 2) 13, -3 ва 10, 2 3. 511. 2) $-0,5$. 516. 2) $-15 < x < 2$; 4) $x \leq 12$, $x \geq 12$. 517. 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$. 518. 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0,1$; 6) $x \leq \frac{1}{8}$, $x \geq 2$. 519. 2) $x = -12$; 4) адади ҳақиқии дилхоҳ; 6) ҳал надорад. 520. 2) $-0,7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \leq x \leq 1$. 521. 2) $x \leq -2$, $x = 1$; 4) $x \leq -\frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 2$. 522. 2) $-0,5 \leq x < 2$. 523. Баландиаш аз 3.1 см зиёд, хати миёнааш аз 6.2 см зиёд.. 524. аз 5 см зиёд.. 525. 2) $x < -7$, $-1 \leq x \leq 2$; 4) $-1 \leq x < \frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{3}$. 526. $p = 5$, $q = -14$. 527. 2) $p = 14$, $q = 49$. 528. $y = -2x^2 + 11x - 5$. 529. $y = \frac{n}{r^2} x^2$. 530. 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. 531. Нишондод. 1) $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$

ишора намуда ва $ABC = 1$ -ро ба ҳисоб гирифта, нобаробарии додашударо ба намуди A^3

$+ B^3 + C^3 \geq 3ABC$ нависед, онро ба намуди $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC -$

$BC) \geq 0$ иваз кунед. Нобаробарии $A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + AC + BC$ дар натиҷаи ҷаъм

кардани нобаробариҳои $A^2 + B^2 \geq 2AB$, $A^2 + C^2 \geq 2AC$, $B^2 + C^2 \geq 2BC$ ҳосил

мешавад; 2) нобаробариҳои миёнаи арифметикӣ ва миёнаи геометрияро ҷамъ кунед.

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c, \quad \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a, \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b; \quad 3) \text{ Аз қисми чапи нобаробарӣ қисми}$$

росташро тарҳ кунед ва суръати касри ҳосил шударо ба намуди зерин нависед.

$$(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (a + c)(a - c)^2; \quad 1) x_{1,2} = \pm 2; \quad 2) x_{1,2} = \pm 1; \quad 3) x_{3,4} = \pm 3; \quad 3) x_1 = -1, x_2$$

$$= 2; \quad 4) x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad 5) x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2; \quad 6) x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = \pm 6. \quad \mathbf{534.} \quad 2) \quad 2\frac{1}{3}; \quad 4) \quad \frac{2x^2}{3y}. \quad \mathbf{535.} \quad 2)$$

$$3 - \sqrt[3]{2}; \quad 4) \quad 6\sqrt{7}. \quad \mathbf{536.} \quad 2) \quad (2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}. \quad \mathbf{537.} \quad 2) \quad \sqrt{x}; \quad 4) \quad 9b^4. \quad \mathbf{538.} \quad 2) \quad 5ab\sqrt{b}.$$

$$\mathbf{539.} \quad 2) \quad -\sqrt{3x^2}; \quad 4) \quad \sqrt{5a^2}. \quad \mathbf{540.} \quad 2) \text{ не. } \mathbf{541.} \quad 2) \text{ не. } \mathbf{544.} \quad -1. \quad \mathbf{545.} \quad 2) \text{ манфӣ. } \mathbf{548.} \quad 2) \quad -0,8. \quad \mathbf{547.} \quad 2)$$

$$2\sin \frac{3\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}; \quad 4) \sin \alpha (\sin \alpha - 2\cos \alpha). \quad \mathbf{548.} \quad \sin \alpha = \frac{240}{289}, \quad \cos \alpha = -\frac{161}{289}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{240}{161}. \quad \mathbf{549.} \quad 2)$$

$$a_{12} = 47,5, S_{12} = 537; \quad 4) \quad a_{18} = 11\frac{2}{3}, S_{18} = 108. \quad \mathbf{550.} \quad 1220. \quad \mathbf{552.} \quad 2) \quad b_1 = 5. \quad \mathbf{553.} \quad 2) \quad b_4 = 125, S_4 =$$

$$156; \quad 4) \quad b_4 = 81, S_5 = 61. \quad \mathbf{554.} \quad 15\frac{3}{4}. \quad \mathbf{555.} \quad 2) \quad 4\frac{1}{6}; \quad 4) \quad 1; \quad 6) \quad -\frac{5}{4}(1 + \sqrt{5}). \quad \mathbf{557.} \quad 2) \quad -1; \quad 4) \quad -\frac{1}{x}. \quad \mathbf{558.} \quad 2)$$

$$\frac{(a + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b})}{a^2 - b}; \quad 4) \quad 0, 1(5 - \sqrt{5})5 + \sqrt{5}. \quad \mathbf{559.} \quad 2) \quad -\frac{\sqrt{a}}{b}; \quad 4) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}. \quad \mathbf{560.} \quad 2) \quad x = 61. \quad \mathbf{561.} \quad 2) \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\mathbf{562.} \quad 2) \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pi + 2n, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{565.} \quad 39\frac{2}{3}. \quad \mathbf{566.} \quad b_1 =$$

$$5, b_5 = 405. \quad \mathbf{567.} \quad \frac{1}{8}. \quad \mathbf{568.} \quad 1) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}; \quad 2) \frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}. \quad \mathbf{569.} \quad \sin \alpha = -\frac{120}{169}, \cos \alpha = -\frac{119}{169}.$$

„Ҷавобҳои супоришҳои "Ҳудро бисанҷед!"

Боби I. 1. $x_1 = 0, x_2 = 2$. 2. $-1 < x < 1$ бошад $y > 0$; $x < -1$ бошад $y < 0$; $x > 1$. 3. дар 1) $x > 0$ функсия меафзояд; дар $x < 0$ функсия кам мешавад.

4. 1) $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 0$. 5. 1) $x \neq 1$; 2) $-3 \leq x \leq 3$. 6. 1) $x = 28$; 2) $x = 1$.

Боби III. 1. 1) $\cos \pm = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$. 2. 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. 1) $\sin \alpha \cos \beta$; 2) $\cos^2 \alpha$; 3) $2 \sin \alpha$.

Боби IV. 1. 1) $a_{10} = -25$, $S_{10} = -115$. 2. 1) $b_6 = \frac{1}{8}$, $S_6 = 7\frac{7}{8}$. 3. 1) $q = \frac{1}{3}$, $S = 1,5$.

Ҷавобҳои масъалаҳои амалӣ -татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Боби I. 1. Суръаташ аз 60,01 км/с зиёд нашуданаш лозим. 2. $n \leq 30$. 3. 2 дақиқа. 10 м. 4. 125 то. 5. 1) 135 то; 2) 17739 то; 3) $\approx 4,9$ моҳ.

Боби II. 1. 2) 20 то қатор. 2. Дар бригадаи якум 8 то, дар дуюмаш 12 то коргар. 3. 2) 16%. 4. 2) 4 л ва 12 л. 5. Дар обу ҳавои бешамол.

Боби III. 1. 4) $\approx 335,42$ км; 5) $\approx 2243,3$ км. 2. $\approx 11,3^\circ$. 3. 1818 м. 4. $\approx 12,8$ м.

Боби IV. 1. 420. 2. 10 км. 3. 3072. 4. 39 300 000 сӯм. 5. 27 метр.

Боби V. 1. $E(X) = 26$, $D(X) = 0,9964$. 2. $E(X) \approx 8,94$, $E(Y) \approx 8,93$, $D(X) \approx 0,07$, $D(Y) \approx 0,03$, $G(X) \approx 0,071$, $\sigma(Y) \approx 0,76$. 3. $E(X_1) = E(X_2) = 3,36$, $\sigma(X_1) \approx 1,47$, $\sigma(X_2) \approx 1,41$. 4. $E(d_1) = 60$, $D(d_1) = 1,2$, $E(d_2) = 60,02$, $D(d_2) = 0,76$.

Мундариҷа

Такрори мавзӯҳои дар синфи 8-ум омӯхташуда .	3
--	---

Боби I. ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ.НОБАРОБАРИҲОИ КВАДРАТӢ

§ 1. Таърифи функсияи квадратӣ.	5
§ 2. Функсияи $y = x^2$.	7
§ 3. Функсияи $y = ax^2$.	10
§ 4. Функсияи $y = ax^2 + bx + c$.	14
§ 5. Сохтани графики функсияи квадратӣ.	18
§ 6. Нобаробариҳои квадратӣ ва ҳалли он.	24
§ 7. Бо ёрии графики функсияи квадратӣ ҳал кардани нобаробарии квадратӣ.	28
§ 8. Усули интервалҳо.	32
§ 9. Соҳаи муайянкунандаи функсия.	37
§ 10. Афзоиш ва камшавии функсияҳо.	41
§ 11. Функсияҳои чуфт ва тоқ.	46
§ 12. Нобаробарӣ ва муодилаҳои дараҷа иштирок намуда.	51
Машқҳо доир ба боби I.	56
Машқ(тест)ҳои санҷиши доир ба боби I.	60
Масъалаҳои амалӣ, татбиқӣ ва алоқа бо ҷанҳо.	63
Маълумотҳои таърихӣ.	67

Боби II. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳо

§ 13. Ҳалли системаи содаи муодилаи дараҷаи дуум иштироккарда.	68
§ 14. Усулҳои гуногуни ҳалли системаи муодилаҳо.	72
§ 15. Системаи нобаробариҳои якномаълуми дараҷаи дуум.	77
§ 16. Исроти нобаробариҳои сода.	80
Машқҳо доир ба боби II.	84
Машқ(тест)ҳои санҷиши доир ба боби II.	87
Масъалаҳои амалӣ, татбиқӣ ва алоқа бо ҷанҳо.	89

Боби III. Элементҳои тригонометрия

§ 17. Ченаки радиании кунҷ.	93
§ 18. Дар атрофи ибтидои координатаҳо ҷарҳ занондани нуқта.	97
§ 19. Таърифи синус,косинус,тангенс ва котангенс кунҷ.	103
§ 20. Ишораҳои синус,косинус ва тангенс.	109
§ 21. Муносибати байни синус,косинус ва тангенс ҳамагон як кунҷ.	112
§ 22. Айниятҳои тригонометрия.	117
§ 23. Синус, косинус,тангенс ва котангенс кунҷи α ва $-\alpha$.	120
§ 24. Формулаҳои ҷамъ.	121
§ 25. Синус ва косинус кунҷи дучандаи i .	126
§ 26. Формулаҳои мувофиқоварӣ.	129
§ 27. Сумма ва фарқи синусҳо.Сумма ва фарқи косинусҳо.	135
Машқҳои санҷиши (тест) доир боби III.	138

<i>Масъалаҳои амалӣ-таъбиқӣ ва алоқа бо фанҳо</i>	145
<i>Масъалаҳои таърихӣ</i>	148
<i>Маълумотҳои таърихӣ</i>	149
Боби IV . Пайдарпаиҳои ададӣ. Прогрессияҳо	
§ 28. Пайдарпаиҳои ададӣ.....	150
§ 29. Прогрессияи арифметикӣ	153
§ 30. Ҳосили ҷамъи - аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ	158
§ 31. Прогрессияи геометрӣ.....	162
§ 32. Ҳосили ҷамъи - аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ.....	167
§ 33. Прогрессияи геометрии беҳад камшаванда	171
Машқҳо доир ба боби IV	177
<i>Машқ(тест)ҳои санҷишӣ доир ба боби IV</i>	180
<i>Масъалаҳои амалӣ ва таъбиқӣ ва алоқа бо фанҳо</i>	
<i>Масъалаҳои таърихӣ</i>	185
<i>Маълумотҳои таърихӣ</i>	185
Боби V. Назарияи эҳтимолиятҳо ва элементҳои статистикаи математикӣ	
§ 34. Ҳодисаҳо.....	186
§ 35. Эҳтимолияти ҳодисаҳо.....	190
§ 36. Басомади нисбии ҳодисаҳои тасодуфӣ.....	194
§ 37. Микдорҳои тасодуфӣ	198
§ 38. Характеристикаи ададии микдорҳои тасодуфӣ	206
<i>Машқҳо доир ба боби V</i>	213
<i>Машқҳои санҷишӣ (тест) доир ба боби V</i>	214
<i>Масъалаҳои амалӣ -таъбиқӣ ва алоқа бо фанҳо</i>	216
Машқҳо барои такрори курси «Алгебра» -и синфи 9	222

Алимов Ш.А. ва дигарҳо.

А 47 Алгебра: Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 9-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ /Ш.А. Алимов, О.Р. Холмухамедов, М.А. Мирзааҳмедов. – Нашри 4. – Тошканд: «O‘qituvchi» 2019. –240 с.

ISBN 978-9943-5750-9-7

УЎК: 512(075.3)=222.8

КБК 22.14я72

**Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov**

ALGEBRA

(Tojik tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik
Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘QITUVCHI» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MCHJ da tayyorlandi.

Тарҷимон М. Норметов

Муҳаррир М. Норметов

Муҳаррири расмҳо Р. Запаров

Мусаҳҳаҳ Н. Ассоева

Саҳифабанди компютерӣ Х. Сафаралиев

Ҳарфчинӣ матн С.Ниязова

Литсензияи нашриёт АИ№ 012. 20.07.2018.

Аз оригинал-макет ба чоп иҷозат дода шуд. 27.07.2019. Андозаи 70×90^{1/16}.
Гарнитурани Times. Чопи офсетӣ. Ҷузъи чопии шартӣ. 17,55. Ҷузъи наشريю ҳисобӣ 16,6.
Тяждоди нашр 887 нусха. Супориши № 19-191.

Оҷонсии иттилоот ва иртибототи оммавии назди Дастгоҳи Президенти Ҷумҳурии Ўзбекистон, Хонаи эҷодии таъбу наشري «O‘qituvchi». Тошканд – 206, ноҳияи Юнусобод, кӯчаи Янгишаҳар, хонаи 1. Шартномаи № 78-19.

Дар матбааи хонаи эҷодии таъбу наشري «O‘zbekiston»-и оҷонсии коммуникатсияҳои оммавии иттилооти назди маъмурияти Президенти Республикаи Ўзбекистон чоп карда шуд. 100011, Тошканд, кӯчаи Навой, 30.

Чадвали нишондиҳандаи ҳолати китоби ба ичора дода шуда

Р/т	Ному насаби хонанда	Соли хониш	Ҳолати китоб хангоми гирифтани	Имзои раҳбари синф	Ҳолати китоб хангоми супоридан	Имзои раҳбари синф
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Китоби дарсӣ ба ичора дода шуда, дар охири соли хониш чадвали боло аз тарафи раҳбари синф дар асоси меъёрҳои зерини баҳо пур карда мешавад:

Нав	Ҳолати китоби дарси хангоми бори аввал супоридан.
Хуб	Муқовааш бутун, аз қисми асосии китоби дарсӣ ҷудо нашудааст. Ҳамаи varaқҳояш ҳаст, нодарида, ҷудо нашуда, дар саҳифаҳо навинг ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова қач шудааст, канорҳояш коҳида, якҷанд хатҳо кашида шудаанд, ҳолати аз қисми асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир шудааст. Varaқҳои ҷудошудааш аз нав таъмир шудааст, дар баъзе саҳифаҳо хат кашида шудаанд.
Ғайри-қаноатбахш	Муқова хат кашида шудааст, даридааст, аз қисми асосӣ ҷудо шудааст ёки умуман нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, varaқҳо намерасанд, хат кашида, ранг карда шудааст, китоб барқарор карда намешавад