Ş.A.ALIMOW, O.R.HALMUHAMEDOW,
M.A.MIRZAAHMEDOW

ALGEBRA

UMUMY ORTA BILIM BERÝÄN MEKDEPLERIŇ
9-NJY SYNPY ÜÇIN DERSLIK

Gaýtadan işlenen 4-nji neşir

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi
tarapyndan neşire hödürlenen

«O‘QITUVCHI» NEŞIRÝAT-ÇAPHANA DÖREDIJILIK ÖÝI
DAŞKENT – 2019

UO‘K: 512(075.3)=512.164
KBK 22.14ya72
A 48

Syn ýazanlar:

F. S. Rahimowa – Al-Horezmiý adendaky DHTU-niň matematika mugallymy;
G. A. Fozilowa – Daşkent şäheriniň, Ýunusabat tümenindäki 274-nji mekdebiň matematika mugallymy;
D. Ş. Abraýew – Daşkent şäheriniň, Almazar tümenindäki 326-njy mekdebiň matematika mugallymy.

Derslikdäki şertli belgiler:

! – bilmek möhüm we ýatda saklamak peýdaly (ýat tutmak hökman däl) tekst;

△ – meseläni çözmek; başlandy

▲ – meseläni çözmek tamamlandy;

○ – matematiki tassyklamany esaslandyrmak ýa-da formulany getirip çykarmak başlandy;

● – esaslandyrma ýa-da formulany getirip çykarmak gutardy;

– çözülmegi mejbury meseleleri tapawutlandyrýan belgi;

33,34... – çylşyrymlyrak mesele;

– esasy materialy bölmek;

ÖZÜŇIZI BARLAP GÖRÜŇ! – esasy material boýunça bilimi barlamak üçin özbaşdak iş;

– amaly we predmetara bagly meseleler;

– taryhy meseleler;

– taryhy maglumatlar.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ISBN 978-9943-5750-8-0

8-nji SYNPDA ÖWRENILEN TEMALARY GAÝTALAMAK

Eziz okuwçy! 8-nji synpda „Algebra“dan alan bilimleriňizi ýada salmak maksadynda Size birnäçe gönükmeleri hödürleýäris.

1. 1) $y=2x+3$; 2) $y=-3x+4$; 3) $y=4x-1$; 4) $y=-2x-5$ funksiýanyň grafigini çyzyň. Grafik haýsy çärýeklerde ýatýar? Grafigiň Ox we Oy oklar bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny aýdyň.

2. $y=kx+b$ funksiýanyň grafigi $A(0; -7)$, $B(2; 3)$ nokatlardan geçýär. k we b-ni tapyň.

3. Göni çyzyk $A(0; 5)$, $B\ (1; 2)$ nokatlardan geçýär. Şu göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

4. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. 3 ata we 4 sygra bir günde 27 kg iým berilýär. Bir günde 9 ata berlen iým 5 sygra berlen iýmden 30 kg köp. Bir ata we bir sygra 1 günde näçe iým berilýär?

6. Kitap bilen depderiň bilelikdäki bahasy 5 800. Kitabyň bahasynyň 10%-i depderiň bahasynyň 35%-inden 220 som gymmat. Kitap we depder aýry-aýry näçe som?

7. Deňsizligi çözüň:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\le 3$; 3) $|3x-4|\ge 2$.

8. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$ deňsizligiň iň kiçi bitin çözüwini tapyň.

10. Hasaplaň:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Ýönekeýleşdiriň:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Deňlemäni çözüň (**12–14**):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. 240 km aralygy bir awtomobil ikinjä garanda 1 sagat tizräk geçdi. Eger birinji awtomobilniň tizligi ikinjisiniň tizliginden 20 km/h artyk bolsa, her bir awtomobilniň tizligini tapyň.

16. 1) Iki sanyň tapawudy 2,5-e, kwadratlarynyň tapawudy bolsa 10-a deň. Şu sanlary tapyň.
2) Jemi 1,4-e, kwadratlarynyň jemi 1-e deň bolan iki sany tapyň.

17. $x^2-8x+3=0$ deňlemäniň kökleri x_1 we x_2 bolsa, 1) $x_1^2+x_2^2$;
2) $x_1^3+x_2^3$ 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$ -ni tapyň.

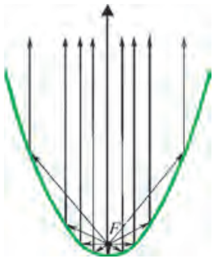
18. Sany ýüzden bire çenli tegelekläň. Tegeleklemegiň otnositel ýalňyşlygyny tapyň:

1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Sany standart şekilde ýazyň:

1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

I BAP. KWADRAT FUNKSIÝA. KWADRAT DEŇSIZLIKLER



1-§. KWADRAT FUNKSIÝANYŇ KESGITLEMESI

Siz VIII synpda $y = kx + b$ çyzykly funksiýa we onuň grafigi bilen tanşypdyňyz.

Ylmyň we tehnikanyň dürli ugurlarynda *kwadrat funksiýalar* diýlip atlandyrylýan funksiýalar duşýar. Mysallar getirýäris.

1) Tarapy x bolan kwadratyň meýdany $y = x^2$ formula boýunça hasaplanýar.

2) Eger jisim ýokary v tizlik bilen zyňlan bolsa, onda t wagtda ondan Ýeriň üstüne çenli aralyk $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$ formula bilen anyklanýar, munda s_0–wagtyň $t=0$ başlangyç wagtdaky jisimden Ýeriň üstüne çenli bolan aralyk.

Bu mysallarda $y = ax^2 + bx + c$ görnüşdäki funksiýalar garaldy. Birinji mysalda $a=1$, $b=c=0$, üýtgeýjiler bolsa x we y-ler bolýar. Ikinji mysalda $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$, üýtgeýjiler bolsa t we s harplary bilen belgilenen.

! **Kesgitleme.** ***$y=ax^2+bx+c$ funksiýa kwadrat funksiýa diýilýär, munda a, b we c – berlen hakyky sanlar, $a \neq 0$, x–hakyky üýtgeýji.***

Meselem, aşakdaky funksiýalar kwadrat funksiýalardyr:

$y = x^2$, $\quad y=-2x^2$, $\quad y=x^2-x$,

$y=x^2-5x+6$, $\quad y=-3x^2+\frac{1}{2}x$.

1-nji mesele. $x = -2,\ x = 0,\ x = 3$ bolanda

$$y(x)=x^2-5x+6$$

funksiýanyň bahasyny tapyň.

$$△\ y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2)+6 = 20;$$
$$y(0) = 0^2 - 5\cdot 0+6=6;$$
$$y(3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0.\ ▲$$

2-nji mesele. x-iň nähili bahalarynda $y = x^2 + 4x-5$ kwadrat funksiýa: 1) 7-ä; 2) –9-a; 3) –8-e; 4) 0-a deň bahany kabul edýär?

△ 1) Şerte görä $x^2+ 4x-5=7$. Bu deňlemäni çözüp, aşakdakyny alarys:

$$x^2 +4x-12 = 0,$$

$$x_{1,2} = 2-\sqrt{4+12}=-2-4,\ x_1=2,\ x_2=-6.$$

Diýmek, $y(2) = 7$ we $y\ (-6) = 7$.

2) Şerte görä $x^2 + 4x - 5 = -9$, mundan

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) Şerte görä $x^2 +4x - 5 =-8$, mundan $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Bu deňlemäni çözüp, $x_1=-3$, $x_2=-1$ bolýandygyny tapýarys.

4) Şerte görä $x^2+4x-5=0$, mundan $x_1 = 1$, $x_2 =-5$. ▲

Ahyrky ýagdaýda x-iň $y = x^2 + 4x - 5$ funksiýa 0-a deň, ýagny $y(1)=0$ we $y(-5) = 0$ bolan bahalary tapyldy. x-iň şeýle bahalaryna *kwadrat funksiýanyň nollary* diýilýär.

3-nji mesele. $y=x^2-3x$ funksiýanyň nollaryny tapyň.

△ $x^2-3x=0$ deňlemäni çözüp, $x_1=0$, $x_2=3$ bolýandygyny tapýarys. ▲

Gönükmeler

1. (Ýatdan.) Aşakda görkezilen funksiýalardan haýsylary kwadrat funksiýa bolýar:

1) $y = 2x^2 + x + 3$; 2) $y = 3x^2 - 1$; 3) $y = 5x + 1$;
4) $y = x^3 + 7x - 1$; 5) $y = 4x^2$; 6) $y = -3x^2 + 2x$?

2. x-iň şeýle hakyky bahalaryny tapyň, $y = x^2 -x-3$ kwadrat funksiýa:

1) –1-e; 2) –3-e; 3) $-\frac{13}{4}$ -e; 4) –5-e deň baha kabul etsin.

3. x-iň nähili hakyky bahalarynda $y = -4x^2 + 3x - 1$ kwadrat funksiýa: 1) -2; 2) -8; 3) $-0{,}5$; 4) -1-e deň baha kabul edýär?

4. -2; 0; 1; $\sqrt{3}$ sanlaryndan haýsylary aşakdaky kwadrat funksiýanyň nollary bolýar:
1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Kwadrat funksiýanyň nollaryny tapyň:
1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Eger $y = x^2 + px + q$ kwadrat funksiýanyň x_1 we x_2 nollary mälim bolsa, p we q koeffisiýentleri tapyň:
1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4, x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

7. x-iň $y = x^2 + 2x - 3$ we $y = 2x + 1$ funksiýalaryň deň bahalary kabul edýän bahalaryny tapyň.

2-§. $y = x^2$ Funksiýa

$y = x^2$ funksiýany, ýagny $a = 1$, $b = c = 0$ bolandaky $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýa garaýarys. Bu funksiýanyň grafigini gurmak üçin onuň bahalarynyň jedwelini düzýäris:

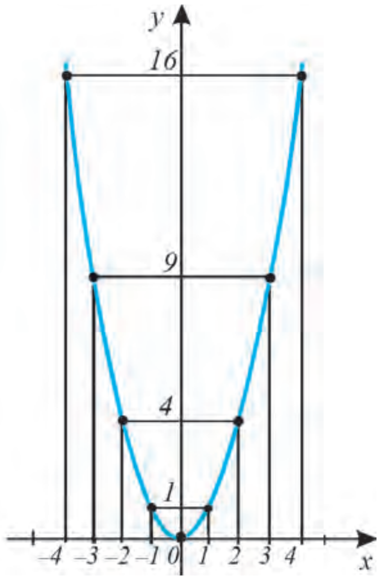
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Jedwelde görkezilen nokatlary gurup we olary tekiz egri çyzyk bilen utgaşdyryp, $y = x^2$ funksiýanyň grafigini alýarys (1-nji surat).

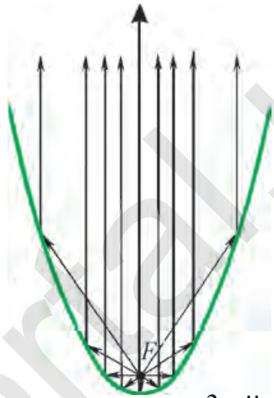
! **$y = x^2$ funksiýanyň grafigi bolan egri çyzyga *parabola* diýilýär.**

$y = x^2$ *funksiýanyň häsiýetlerini* garaýarys.

1) $y = x^2$ funksiýanyň bahasy $x \neq 0$ bolanda *položitel* we $x = 0$ bolanda *nola* deň. Diýmek, $y = x^2$ parabola koordinatalar başlangyjyndan geçýär,



1-nji surat.



2-nji surat.

parabolanyň galan nokatlary bolsa abssissalar okundan ýokarda ýatýar. $y=x^2$ *parabola abssissalar okuna* (0; 0) *nokatda galtaşýar,* diýilýär.

2) $y=x^2$ funksiýanyň grafigi *ordinatalar okuna görä simmetrik,* çünki $(-x)^2=x^2$. Meselem, $y(-3)=y(3)=9$ (1-nji surat). Şeýlelikde, ordinatalar oky *parabolanyň simmetriýa oky* bolýar. Parabolanyň öz simmetriýa *oky* bilen kesişme nokadyna *parabolanyň ujy* diýilýär. $y=x^2$ parabola üçin koordinatalar başlangyjy onuň ujy bolýar.

3) $x \geq 0$ bolanda x-iň uly bahasyna y-iň uly bahasy laýyk gelýär. Meselem, $y(3) > y(2)$. $y = x^2$ funksiýa $x \geq 0$ *aralykda artýan,* diýilýär (1-nji surat).

$x \leq 0$ bolanda x-iň uly bahasyna y-iň kiçi bahasy laýyk gelýär. Meselem, $y(-2) < y(-4)$. $y = x^2$ funksiýa $x \leq 0$ *aralykda kemelýän* diýilýär (1-nji surat).

Mesele. $y = x^2$ parabola bilen $y = x + 6$ göni çyzygyň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.

△ Kesişme nokatlary $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$

sistemanyň çözüwleri bolýar.

Bu sistemadan $x^2 = x + 6$, ýagny $x^2 - x - 6 = 0$-y alarys, mundan $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. x_1 we x_2-niň bahalaryny sistemanyň deňlemelerinden birine goýup, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$-i tapýarys.

Jogaby: (3; 9), (–2; 4).

Parabola tehnikada giň gerimde peýdalanylýan ençeme ajaýyp häsiýetlere eýe. Meselem, parabolanyň simmetriýa okunda *parabolanyň fokusy* diýlip atlandyrylýan F nokat bar (2-nji surat). Eger bu nokatda ýagtylyk çeşmesi ýerleşen bolsa, onda paraboladan şöhlenene ähli ýagtylyk şöhleleri parallel bolýar. Bu häsiýetden prožektorlar, lokatorlar we başga esbaplar taýýarlanda peýdalanylýar.

$y = x^2$ parabolanyň fokusy $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ nokat bolýar.

Gönükmeler

8. $y = x^2$ funksiýanyň grafigini millimetrli kagyzda çyzyň. Grafik boýunça:
1) $x = 0{,}8$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}9$; $x = -2{,}3$; $x = -1{,}5$ bolanda y-iň bahasyny takmynan tapyň;
2) eger $y = 2$; $y = 3$; $y = 4{,}5$; $y = 6{,}5$ bolsa, x-iň bahasyny takmynan tapyň.

9. $y = x^2$ funksiýanyň grafigini gurmazdan: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$ nokatlardan haýsylarynyň parabola degişli bolýandygyny anyklaň.

10. (Ýatdan.) $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ nokatlara ordinatalar okuna görä simmetrik bolan nokatlary tapyň. Bu nokatlar $y = x^2$ funksiýanyň grafigine degişli bolarmy?

11. (Ýatdan.) $y=x^2$ funksiýanyň bahalaryny

1) $x = 2{,}5$ we $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ we $x = 0{,}3$;

3) $x = -0{,}2$ we $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ we $x = -5{,}2$

bolanda deňeşdiriň.

12. $y = x^2$ parabolanyň:

1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;
4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$

göni çyzyk bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.

13. A nokat $y = x^2$ parabola bilen

1) $y = -x - 6$, $A(-3;\ 9)$; 2) $y = 5x-6$, $A(2;\ 4)$

göni çyzygyň kesişme nokady bolarmy?

14. Tassyklama dogrumy: $y = x^2$ funksiýa:

1) $[1;\ 4]$ kesimde; 2) $(2;\ 5)$ interwalda;
3) $x > 3$ interwalda; 4) $[-3;\ 4]$ kesimde artýar?

15. Bir koordinata tekizliginde $y=x^2$ parabola bilen $y=3$ göni çyzygy çyzyň. x-iň nähili bahalarynda parabolanyň nokatlary göni çyzykdan ýokarda bolýar; pesde bolýar?

16. x-iň nähili bahalarynda $y = x^2$ funksiýanyň bahasy:

1) 9-dan uly; 2) 25-den uly däl; 3) 16-dan kiçi däl;
4) 36-dan kiçi bolýar?

3- §. $y = ax^2$ Funksiýa

1-nji mesele. $y = 2x^2$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = 2x^2$ funksiýanyň bahalarynyň jedwelini düzýäris:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=x^2$	18	8	2	0	2	8	18

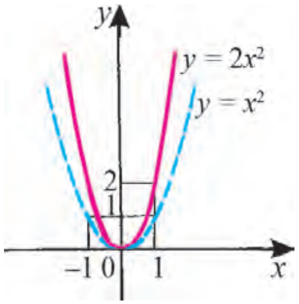
Tapylan nokatlary gurýarys we olar arkaly tekiz egri çyzyk geçirýäris (3-nji surat). ▲

$y=2x^2$ we $y=x^2$ funksiýalaryň grafiklerini deňeşdirýäris (3-nji surat). x-iň şol bir bahasynda $y=2x^2$ funksiýanyň bahasy $y=x^2$ funksiýanyň bahasyndan 2 esse artyk. Bu $y=2x^2$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokadyny $y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň edil şeýle abssissaly nokadynyň ordinatasyny 2 esse artdyrmak bilen almak mümkinligini aňladýar.

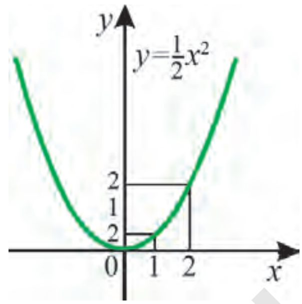
$y=2x^2$ funksiýanyň grafigi $y=x^2$ *funksiýanyň grafigini Ox* okundan *Oy* oky boýunça 2 esse *sozmak* bilen alynýar, diýilýär.

2-nji mesele. $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň bahalarynyň jedwelini düzýäris:



3-nji surat.



4-nji surat.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Tapylan nokatlary gurup, olar arkaly tekiz egri çyzyk geçirýäris (4-nji surat). ▲

$y=\frac{1}{2}x^2$ we $y = x^2$ funksiýalaryň grafiklerini deňeşdirýäris.

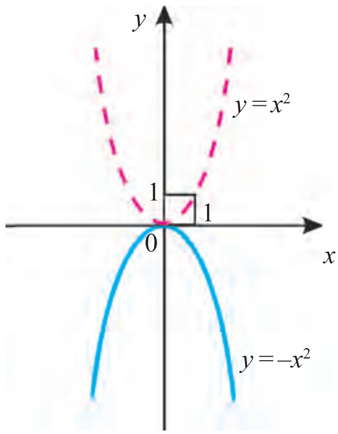
$y=\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokadyny $y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň edil şeýle abssissaly nokadynyň ordinatasyny 2 esse kemeltmek bilen almak mümkin.

$y=\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigi $y=x^2$ *funksiýanyň grafigini* Ox okuna Oy oky boýunça 2 esse *gysmak* ýoly bilen alynýar, diýilýär.

3-nji mesele. $y = -x^2$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

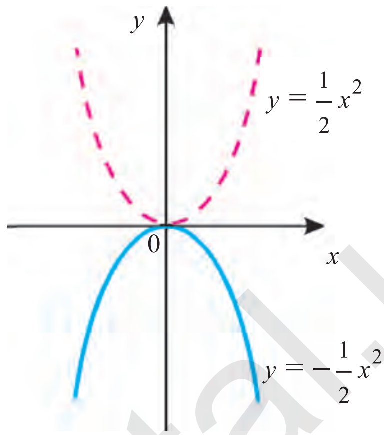
△ $y=-x^2$ we $y=x^2$ funksiýalary deňeşdirýäris. x-iň şol bir bahasynda bu funksiýalaryň bahalary modullary boýunça deň we garşylykly alamatly. Diýmek, $y=-x^2$ funksiýanyň grafigini $y=x^2$ funksiýanyň grafigini Ox okuna görä simmetrik orun üýtgetmek bilen almak mümkin (5-nji surat). ▲

Şuňa meňzeş, $y=-\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigi Ox okuna görä $y=\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigine simmetrikdir (6-njy surat).



5-nji surat.

0



6-njy surat.

$y = ax^2$ funksiýanyň grafigi, munda $a \neq 0$, hem *parabola* diýlip atlandyrylýar. $a > 0$ bolanda parabolanyň şahalary *ýokary*, $a < 0$ bolanda bolsa *pese* ugrukdyrylan.

$y = ax^2$ parabolanyň fokusy $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ nokatda ýerleşenligini nygtaýarys.

$y = ax^2$ *funksiýanyň esasy häsiýetlerini* sanap geçýäris, munda $a \neq 0$:

1) eger $a > 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funksiýa $x \neq 0$ bolanda položitel bahalary kabul edýär;

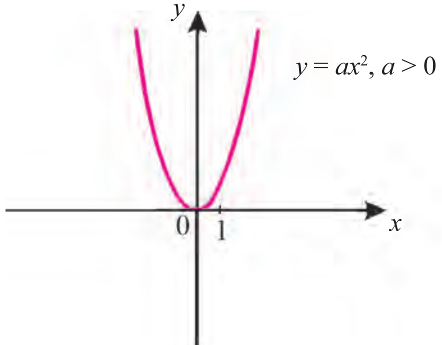
eger $a < 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funksiýa $x \neq 0$ bolanda otrisatel bahalary kabul edýär;

$y = ax^2$ funksiýanyň bahasy diňe $x = 0$ bolanda 0-a deň bolýar;

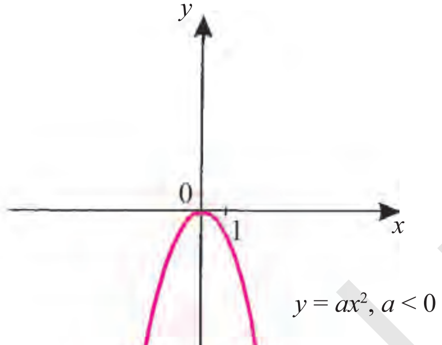
2) $y = ax^2$ parabola ordinatalar okuna görä simmetrik bolýar;

3) eger $a > 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funksiýa $x \geq 0$ bolanda artýar we $x \leq 0$ bolanda kemelýär;

eger $a < 0$ bolsa, onda $y = ax^2$ funksiýa $x \geq 0$ bolanda kemelýär we $x \leq 0$ bolanda artýar.



7-nji surat.



8-nji surat.

Bu ähli häsiýetleri grafikden gönüden-göni görmek mümkin (7-nji we 8-nji suratlar).

Gönükmeler

17. Millimetrli kagyzda $y = 3x^2$ funksiýanyň grafigini çyzyň. Grafik boýunça:

1) $x = -2{,}8;\ -1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$ bolanda y-iň bahasyny tapyň;
2) eger $y = 9;\ 6;\ 2;\ 8;\ 1{,}3$ bolsa, x-iň bahasyny takmynan tapyň.

18. (Ýatdan.) Parabolanyň şahalarynyň ugruny anyklaň:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini bir koordinata tekizliginde çyzyň:

1) $y = x^2$ we $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ we $y = -3x^2$;

3) $y = 3x^2$ we $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ we $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Grafiklerden peýdalanyp, bu funksiýalardan haýsylarynyň $x \geq 0$ aralykda artýandygyny anyklaň.

20. Aşakdaky funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň:

1) $y = 2x^2$ we $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ we $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Funksiýa $x \leq 0$ aralykda kemelýän bolarmy:

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. $y = -2x^2$ funksiýanyň:

1) $[-4; -2]$ kesimde; 3) $(3; 5)$ interwalda;
2) $[-5; 0]$ kesimde; 4) $(-3; 2)$ interwalda

artýandygyny ýa-da kemelýändigini anyklaň.

23. Deňtizlenýän hereketde jisimiň geçen ýoly $s = \frac{at^2}{2}$ formula bilen hasaplanýar, munda s – ýol, metrlerde; a – tizlenme, m/s²-larda; t – wagt, sekuntlarda ölçenýär. Eger jisim 8 s-da 96 m ýoly geçen bolsa, a tizlenmäni tapyň.

4-§. $y = ax^2 + bx + c$ Funksiýa

1-nji mesele. $y=x^2 - 2x + 3$ funksiýanyň grafigini çyzyň we ony $y = x^2$ funksiýanyň grafigi bilen deňeşdiriň.

△ $y = x^2 - 2x + 3$ funksiýanyň bahalarynyň jedwelini düzýäris:

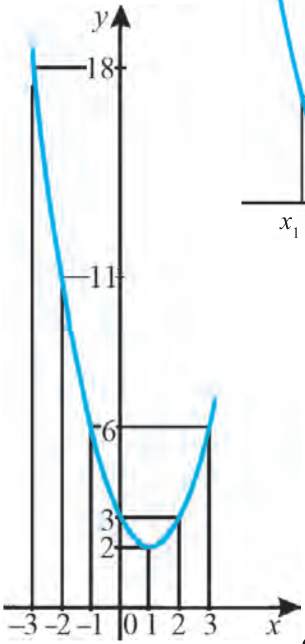
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Tapylan nokatlary gurýarys we olar arkaly tekiz egri çyzyk geçirýäris (9-njy surat).

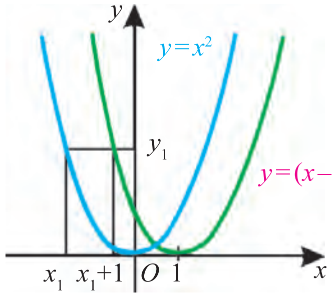
Grafikleri deňeşdirmek üçin doly kwadraty bölmek usulyndan peýdalanyp, $y = x^2 - 2x + 3$ formulanyň şekilini çalşyrýarys:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

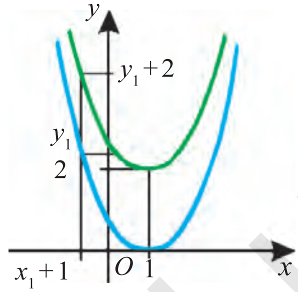
Ilki $y = x^2$ we $y = (x - 1)^2$ funksiýalaryň grafiklerini deňeşdirýäris. Eger $(x_1; y_1)$ nokat $y = x^2$ parabolanyň nokady, ýagny $y_1 = x_1^2$ bolsa, onda $(x_1 + 1; y_1)$ nokat $y = (x - 1)^2$ funksiýanyň grafigine degişli, çünki $((x_1+1)-1)^2 = x_1^2 = y_1$. Diýmek, $y=(x-1)^2$ funksiýanyň grafigi $y = x^2$ paraboladan ony saga bir birlik *süýşürmek* (parallel orun üýtgetmek) netijesinde alnan parabola bolýar (10-njy surat).



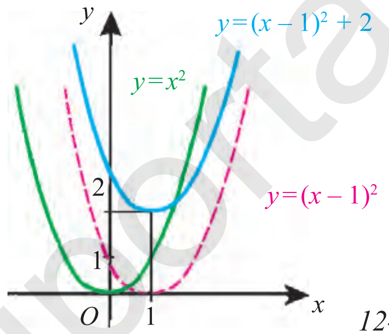
9-njy surat.



10-njy surat.



11-nji surat.



12-nji surat.

Indi $y=(x-1)^2$ we $y=(x-1)^2+2$ funksiýalaryň grafiklerini deňeşdirýäris. x-iň her bir bahasynda $y=(x-1)^2+2$ funksiýanyň bahasy $y=(x-1)^2$ funksiýanyň degişli bahasyndan 2 san artyk. Diýmek, $y=(x-1)^2+2$ funksiýanyň grafigi $y=(x-1)^2$ parabolany iki birlik ýokary süýşürmek bilen alnan paraboladyr (11-nji surat).

Şeýlelikde, $y=x^2-2x+3$ funksiýanyň grafigi $y=x^2$ parabolany bir birlik saga we iki birlik ýokary süýşürmek netijesinde alnan parabola (12-nji surat). $y=x^2-2x+3$ parabolanyň simmetriýa oky ordinatalar okuna parallel we parabolanyň ujy bolan (1; 2) nokatdan geçen göni çyzykdan ybarat. ▲

$y=a(x-x_0)^2+y_0$ funksiýanyň grafigi $y=ax^2$ parabolany:

eger $x_0>0$ bolsa, abssissalar oky boýunça saga x_0-a, eger $x_0<0$ bolsa, çepe $|x_0|$-a süýşürmek;

eger $y_0>0$ bolsa, ordinatalar oky boýunça ýokary y_0-a, eger $y_0<0$ bolsa, pese $|y_0|$ -a süýşürmek ýoly bilen alynýan parabola bolmagy şuňa meňzeş subut edilýär.

Islendik $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýany ondan doly kwadraty bölmek kömeginde

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

ýagny $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ *ýaly görnüşde ýazmak mümkin,* munda

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Şeýlelikde, $y=ax^2+bx+c$ funksiýanyň grafigi $y=ax^2$ parabolany koordinatalar oklary boýunça süýşürmek netijesinde emele gelýän parabola bolýar. $y=ax^2+bx+c$ deňlige parabolanyň deňlemesi diýilýär. $y=ax^2+bx+c$ parabolanyň depesiniň $(x_0;\ y_0)$ koordinatalaryny aşakdaky formula boýunça tapmak mümkin:

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c.$$

$y=ax^2+bx+c$ parabolanyň simmetriýa oky ordinatalar okuna parallel we parabolanyň depesinden geçýän göni çyzyk bolýar.

$y=ax^2+bx+c$ parabolanyň şahalary, eger $a>0$ bolsa, ýokary ugrukdyrylan, eger $a<0$ bolsa, pese ugrukdyrylan bolýar.

2 -nji mesele. $y=2x^2-x-3$ parabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapyň.

△ Parabolanyň depesiniň abssissasy:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}.$$

Parabolanyň depesiniň ordinatasy:

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-3=-3\frac{1}{8}.$$

Jogaby: $\left(\frac{1}{4};\ -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

3-nji mesele. Eger parabolanyň (–2; 5) nokat arkaly geçmegi we onuň depesi (–1; 2) nokatda bolýandygy mälim bolsa, parabolanyň deňlemesini ýazyň.

△ Parabolanyň depesi (–1; 2) nokat bolany üçin parabolanyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazmak mümkin:

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Şerte görä (–2; 5) nokat parabola degişli we, diýmek,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

mundan $a = 3$.

Şeýlelikde, parabola

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{ýa-da} \quad y = 3x^2 + 6x + 5$$

deňleme bilen berilýär. ▲

Gönükmeler

Parabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapyň (**24–26**):

24. (Ýatdan.)
1) $y = (x - 3)^2 - 2$; 2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$; 4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$; 2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$; 4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = -x^2 - 5$; 3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$; 5) $y = -3x^2 + x$; 6) $y = 2x^2 - x$.

27. *Ox* okunda şeýle nokady tapyň, ýagny ondan parabolanyň simmetriýa oky geçsin:
1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$; 4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. $y=x^2-10x$ parabolanyň simmetriýa oky: 1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1) nokatdan geçýärmi?

29. Parabolanyň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň:
1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$; 4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Eger parabolanyň (–1; 6) nokat arkaly geçýändigi we onuň depesi (1; 2) nokatdygy mälim bolsa, parabolanyň deňlemesini ýazyň.

31. (Ýatdan.) (1;–6) nokat $y=-3x^2+4x-7$ parabola degişli bolarmy? (–1; 8) nokat nähili?

32. Eger (–1; 2) nokat: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$ parabola degişli bolsa, k-nyň bahasyny tapyň.

33. $y=x^2$ parabolanyň ülňüsiniň kömeginde funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;

4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

34. $y=2x^2$ paraboladan ony:

1) Ox oky boýunça 3 birlik saga süýşürmek;

2) Oy oky boýunça 4 birlik ýokary süýşürmek;

3) Ox oky boýunça 2 birlik çepe we soň Oy oky boýunça bir birlik pese süýşürmek;

4) Ox oky boýunça 1,5 birlik saga we soň Oy oky boýunça 3,5 birlik ýokary süýşürmek netijesinde emele gelen parabolanyň deňlemesini ýazyň.

5-§. KWADRAT FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINI GURMAK

1-nji mesele. $y=x^2-4x+3$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ 1. Parabolanyň depesiniň koordinatalaryny hasaplaýarys:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$
$$y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

(2; –1) nokady gurýarys.

2. (2; –1) nokat arkaly ordinatalar okuna parallel göni çyzyk, ýagny parabolanyň simmetriýa okuny geçirýäris (13-nji *a* surat).

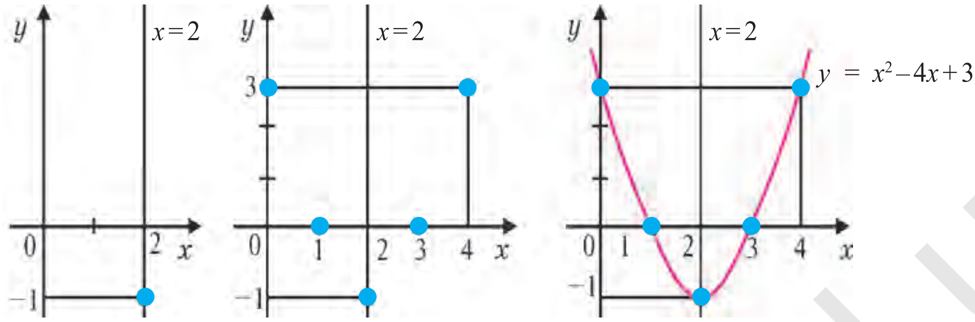
3. Şu

$$x^2-4x+3=0$$

deňlemäni çözüp, funksiýanyň nollaryny tapýarys: $x_1=1$, $x_2=3$. (1; 0) we (3; 0) nokatlary gurýarys (13-nji *b* surat).

4. Ox okunda $x=2$ nokada görä simmetrik bolan iki nokady, meselem, $x=0$ we $x=4$ nokatlary alýarys. Funksiýanyň bu nokatlardaky bahalaryny hasaplaýarys: $y(0)=y(4)=3$.

(0; 3) we (4; 3) nokatlary gurýarys (13-nji *b* surat).



a) *b)* *ç)* *13-nji surat.*

5. Gurlan nokatlar arkaly parabolany geçirýäris (13-nji *ç* surat). ▲

Şeýlelikde *islendik $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigini gurmak mümkin:*

1. x_0, y_0-lary $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ formulalardan peýdalanyp hasaplap, parabolanyň $(x_0; y_0)$ depesi gurulýar.

2. Parabolanyň depesinden ordinatalar okuna parallel göni çyzyk – parabolanyň simmetriýa oky geçirilýär.

3. Funksiýanyň nollary (eger olar bar bolsa) tapylýar we abssissalar okunda parabolanyň degişli nokatlary gurulýar.

4. Parabolanyň onuň okuna görä simmetrik bolan nähilidir iki nokady gurulýar. Munuň üçin Ox okunda x_0 $(x_0 \neq 0)$ nokada görä simmetrik bolan iki nokat almaly we funksiýanyň degişli bahalaryny (bu bahalar birmeňzeş) hasaplamaly. Meselem, parabolanyň abssissalary $x = 0$ we $x = 2x_0$ bolan nokatlaryny (bu nokatlaryň ordinatalary c-ge deň) gurmak mümkin.

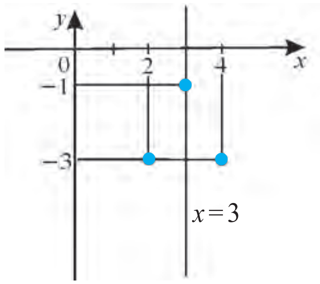
5. Gurlan nokatlar arkaly parabola geçirilýär. Grafigi has takygrak gurmak üçin parabolanyň ýene birnäçe nokadyny tapmak peýdaly bolýar.

2-nji mesele. $y = -2x^2 + 12x - 19$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

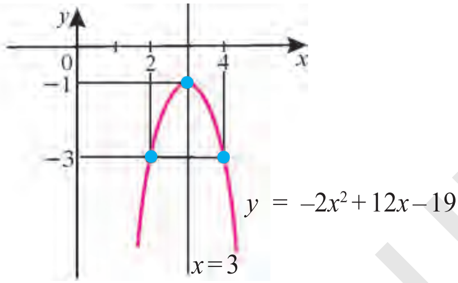
△ 1. Parabolanyň depesiniň koordinatalaryny hasaplaýarys:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, \; y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

(3; –1) nokady – parabolanyň depesini gurýarys (14-nji surat).



14-nji surat.



15-nji surat.

2. (3; –1) nokat arkaly parabolanyň simmetriýa okuny geçirýäris (14-nji surat).

3. $-2x^2 + 12x - 19 = 0$ deňlemäni çözüp, hakyky kökleriň ýokdugyna we şonuň üçin parabola Ox okuny kesmeýänligine göz ýetirýäris.

4. Ox okunda $x = 3$ nokada görä simmetrik bolan iki nokady, meselem, $x = 2$ we $x = 4$ nokatlary alýarys. Funksiýanyň şu nokatlardaky bahalaryny hasaplaýarys:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

(2; –3) we (4; –3) nokatlary gurýarys (14-nji surat).

5. Gurlan nokatlar arkaly parabola geçirýäris (15-nji surat). ▲

3-nji mesele. $y = -x^2 + x + 6$ funksiýanyň grafigini çyzyň we şu funksiýa nähili häsiýetlere eýe bolýandygyny anyklaň.

△ Funksiýanyň grafigini gurmak üçin onuň nollaryny tapýarys: $-x^2+x+6=0$, mundan $x_1=-2$, $x_1=3$. Parabolanyň depesiniň koordinatalaryny şeýle tapmak mümkin:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

$a=-1 < 0$ bolany üçin parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan.

Parabolanyň ýene birnäçe nokadyny tapýarys: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)=6$, $y(2) = 4$. Parabolany gurýarys (16-njy surat).

Grafigiň kömeginde $y = -x^2 + x + 6$ *funksiýanyň* aşakdaky *häsiýetlerini* alarys:

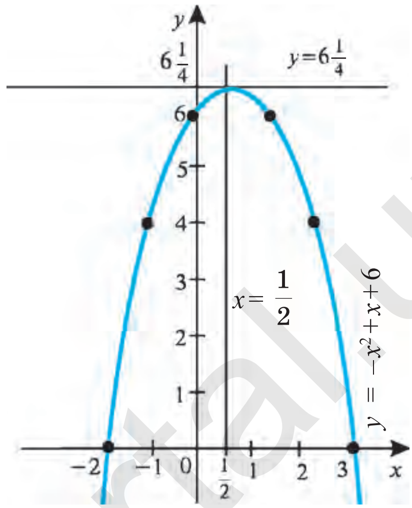
1) x-iň islendik bahalarynda funksiýanyň bahalary $6\frac{1}{4}$-e deň ýa-da ondan kiçi;

2) $-2<x<3$ bolanda funksiýanyň bahalary položitel, $x<-2$ bolanda we $x>3$ bolanda otrisatel, $x=-2$ we $x=3$ bolanda nola deň;

3) funksiýa $x \le \frac{1}{2}$ aralykda artýar, $x \ge \frac{1}{2}$ aralykda kemelýär;

4) $x=\frac{1}{2}$ bolanda funksiýa $6\frac{1}{4}$ -e deň bolan iň uly bahasyny kabul edýär;

5) funksiýanyň grafigi $x=\frac{1}{2}$ göni çyzyga görä simmetrik. ▲



16-njy surat.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiýa $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nokatda *iň kiçi* ýa-da *iň uly bahalary* kabul edýär; bu x_0 nokat parabolanyň depesiniň abssissasydyr.

Funksiýanyň x_0 nokatdaky bahasyny $y_0 = y(x_0)$ formula boýunça tapmak mümkin. *Eger $a > 0$ bolsa, onda funksiýa iň kiçi baha eýe bolýar, eger $a < 0$ bolsa, onda funksiýa iň uly baha eýe bolýar.*

Meselem, $y = x^2 - 4x + 3$ funksiýa $x = 2$ bolanda -1-e deň bolan iň kiçi bahasyny kabul edýär (13-nji ç surat); $y = -2x^2 + 12x - 9$ funksiýa $x = 3$ bolanda -1-e deň bolan iň uly bahasyny kabul edýär (15-nji surat).

4 -nji mesele. Iki položitel sanyň jemi 6-a deň. Eger olaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolsa, şu sanlary tapyň. Şu sanlaryň kwadratlarynyň jeminiň iň kiçi bahasy nähili bolar?

△ Birinji sany x harpy bilen belgileýäris, munda ikinji san $6-x$, olaryň kwadratlarynyň jemi bolsa $x^2 + (6 - x)^2$ bolýar. Şu aňlatmanyň şekilini çalşyrýarys:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Mesele $y=2x^2-12x+36$ funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaga getirildi. Şu porabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapýarys:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\cdot 2} = 3, \ y_0 = y(3) = 2\cdot 9 - 12\cdot 3 + 36 = 18.$$

Diýmek, $x = 3$ bolanda funksiýa 18-e deň iň kiçi bahany kabul edýär.

Şeýlelikde, birinji san 3-e deň, ikinji san hem $6 - 3 = 3$-e deň. Bu sanlaryň kwadratlarynyň jeminiň bahasy 18-e deň. ▲

Gönükmeler

35. Porabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapyň:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Parabolanyň koordinata oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

Funksiýanyň grafigini çyzyň we grafik boýunça: 1) x-iň funksiýanyň bahalary položitel, otrisatel bolýan bahalaryny tapyň; 2) funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň; 3) x-iň nähili bahalarynda funksiýa iň uly ýa-da iň kiçi bahalary kabul edýändigini anyklaň we olary tapyň **(37–38):**

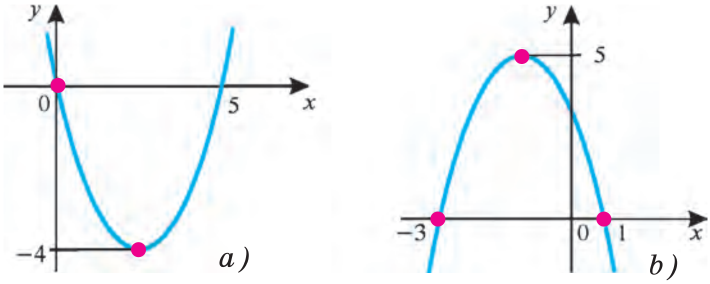
37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Kwadrat funksiýanyň berlen grafigi (17-nji surat) boýunça onuň häsiýetlerini anyklaň.

40. 15 sanyny iki sanyň jemi şeklinde, bu sanlaryň köpeltmek hasyly iň uly bolar ýaly edip şekillendiriň.

41. Iki sanyň jemi 10-a deň. Eger şu sanlaryň kublarynyň jemi iň kiçi bolsa, şu sanlary tapyň.



17-nji surat.

42. Öýüň diwarlaryna ýanaşyk gönüburçluk şeklindäki meýdany üç tarapyndan 12 m-li penjire bilen gurşamak talap edilýär. Meýdanyň ölçegleri nähili bolanda onuň meýdany iň uly bolýar?

43. Üçburçlukda esasy bilen şu esasa geçirilen beýikligiň jemi 14 sm-e deň. Şeýle üçburçluk 25 sm^2-a deň meýdana eýe bolmagy mümkinmi?

44. Grafigi gurmazdan, x-iň nähili bahasynda funksiýa iň uly (iň kiçi) baha eýe bolýandygyny anyklaň; şu bahany tapyň:

1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Eger:

1) parabolanyň şahalary ýokary ugrukdyrylan, onuň depesiniň abssissasy otrisatel, ordinatasy bolsa položitel bolsa;
2) parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan, onuň depesiniň abssissasy we ordinatasy otrisatel bolsa, $y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň deňlemesiniň koeffisiýentleriniň alamatlaryny anyklaň.

46. 5 m beýiklikden kemandan 50 m/s tizlik bilen ýokary wertikal ýagdaýda naýza oklandy. Naýzanyň t sekuntdan soň ýokary galan beýikligi metrlerde $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$ formula bilen hasaplanýar, munda $g \approx 10$ m/s^2. Naýza näçe sekuntdan soň: 1) iň uly beýiklige ýetýär we ol nähili beýiklik bolar? 2) Ýere gaçýar?

6-§. KWADRAT DEŇSIZLIK WE ONUŇ ÇÖZÜWI

1-nji mesele. Gönüburçlugyň taraplary 2 dm we 3 dm-e deň. Onuň her bir tarapy birmeňzeş sandaky desimetrlere şeýle artdyrylypdyr, ýagny netijede gönüburçlugyň meýdany 12 dm^2-dan artyk boldy. Her bir tarap nähili üýtgäpdir?

△ Gönüburçlugyň her bir tarapy x desimetre artdyrylan bolsun. Onda täze gönüburçlugyň taraplary $(2 + x)$ we $(3+x)$ desimetre, onuň meýdany bolsa $(2+x)(3+x)$ kwadrat desimetre deň bolýar. Meseläniň şertine görä $(2+x)(3+x)>12$, mundan $x^2+5x+6 > 12$ ýa-da $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Bu deňsizligiň çep bölegini köpeldijilere dagydýarys:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Meseläniň şertine görä, $x > 0$ bolany üçin $x + 6 > 0$.

Deňsizligiň iki bölegini hem $x + 6$ položitel sana bölüp, $x-1 >0$, ýagny $x > 1$-i alarys.

Jogaby: gönüburçlugyň her bir tarapy 1 dm-den köpräge artdyrylan. ▲

$x^2 + 5x - 6 > 0$ deňsizlikde x bilen nämälim san belgilenen. Bu – kwadrat deňsizlige mysal.

! ***Eger deňsizligiň çep böleginde kwadrat funksiýa, sag böleginde bolsa nol dursa, şeýle deňsizlige kwadrat deňsizlik diýilýär.***

Meselem,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \qquad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

deňsizlikler kwadrat deňsizliklerdir.

Bir nämälimli *deňsizligiň çözüwi* diýip, nämälimiň şu deňsizligi dogry sanly deňsizlige öwürýän ähli bahalaryna aýdylýandygyny ýatladyp geçýäris.

Deňsizligi çözmek — onuň ähli çözüwlerini tapmak ýa-da olaryň ýokdugyny görkezmek diýmekdir.

2-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ $x^2-5x+6=0$ kwadrat deňleme iki dürli $x_1=2$, $x_2=3$ köke eýe. Diýmek, x^2-5x+6 kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmak mümkin:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Şonuň üçin berlen deňsizligi şeýle ýazmak bolýar:

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Eger iki köpeldiji birmeňzeş alamata eýe bolsa, olaryň köpeltmek hasylynyň položiteldigi aýdyň.

1) Iki köpeldiji hem položitel, ýagny $x-2>0$ we $x-3>0$ bolan ýagdaýa garaýarys.

Bu iki deňsizlik aşakdaky sistemany düzýär:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0. \end{cases}$$

Sistemany çözüp, $\begin{cases} x>2, \\ x>3 \end{cases}$ -ni alarys, mundan $x>3$.

Diýmek, ähli $x>3$ sanlar $(x-2)(x-3)>0$ deňsizligiň çözüwleri bolýar.

2) Indi iki köpeldiji hem otrisatel, ýagny $x-2<0$ we $x-3<0$ bolan ýagdaý garaýarys.

Bu iki deňsizlik aşakdaky sistemany düzýär:

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Sistemany çözüp, $\begin{cases} x<2, \\ x<3 \end{cases}$ -ni alarys, mundan $x<2$.

Diýmek, ähli $x<2$ sanlar hem $(x-2)(x-3)>0$ deňsizligiň çözüwleri bolýar.

Şeýlelikde, $(x-2)(x-3)>0$ deňsizligiň, diýmek, berlen $x^2-5x+6>0$ deňsizligiň hem, çözüwleri $x<2$, şonuň ýaly-da, $x>3$ sanlar bolýar.

Jogaby: $x<2$, $x>3$. ▲

Umuman, eger $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňleme iki dürli köke eýe bolsa, onda $ax^2+bx+c>0$ we $ax^2+bx+c<0$ kwadrat deňsizlikleri çözmegi, kwadrat deňsizligiň çep bölegini köpeldijilere dagydyp, birinji derejeli deňsizlikler sistemasyny çözmäge getirmek mümkin.

3-nji mesele. $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ deňsizligi çözüň.

△ Hasaplamalary amatlyrak alyp barmak üçin berlen deňsizligi birinji koeffisiýenti položitel bolan kwadrat deňsizlikler şeklinde şekillendirýäris. Munuň üçin onuň iki bölegini hem –1-e köpeldýäris:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

$3x^2+5x-2=0$ deňlemäniň köklerini tapýarys:

$$x_{1,2} = \frac{-5-\sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5-7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydyp, aşakdakyny alarys:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Mundan iki sistemany alýarys:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3}>0, \\ x+2<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3}<0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

Birinji sistemany şeýle ýazmak mümkin:

$$\begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x<-2, \end{cases}$$

bu sistemanyň çözüwlere eýe dälligi görnüp dur.

Ikinji sistemany çözüp, aşakdakyny tapýarys:

$$\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ x>-2, \end{cases}$$

mundan $-2 < x < \frac{1}{3}$.

Diýmek, $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$ deňsizligiň, ýagny $-3x^2-5x+2>0$ deňsizligiň çözüwleri $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$ interwaldaky ähli sanlar bolýar.

Jogaby: $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

Gönükmeler

47. (Ýatdan.) Aşakdaky deňsizliklerden haýsylarynyň kwadrat deňsizlik bolýandygyny görkeziň:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \leq 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \leq 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Deňsizligi kwadrat deňsizlik görnüşine getiriň:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Ýatdan.) 0; –1; 2 sanlaryndan haýsylary

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \geq 0$;
3) $x^2 - x - 2 \leq 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

deňsizligiň çözüwleri bolýar?

Deňsizligi çözüň (**50–52**):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$; 3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

---

53. Deňsizligi çözüň:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \leq 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Funksiýanyň grafigini çyzyň. Grafik boýunça x-iň funksiýanyň položitel bahalaryny; otrisatel bahalaryny; nola deň baha kabul edýän ähli bahalaryny tapyň:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. x_1 we x_2 sanlar (munda $x_1 < x_2$) $y = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň nollarydygy mälim. Eger x_0 san x_1 we x_2 arasynda ýatsa, ýagny $x_1 < x_0 < x_2$ bolsa, onda $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ deňsizligiň ýerine ýetirilýändigini subut ediň.

7-§. KWADRAT DEŇSIZLIGI KWADRAT FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINIŇ KÖMEGINDE ÇÖZMEK

Kwadrat funksiýa $y = ax^2 + bx + c$ (munda $a \neq 0$) formula bilen berilýändigini ýatladyp geçýäris. Şonuň üçin kwadrat deňsizligi çözmek kwadrat funksiýanyň nollaryny we kwadrat funksiýa položitel ýa-da otrisatel bahalary kabul edýän aralyklary gözlemäge getirilýär.

1-nji mesele. Deňsizligi grafigiň kömeginde çözüň:

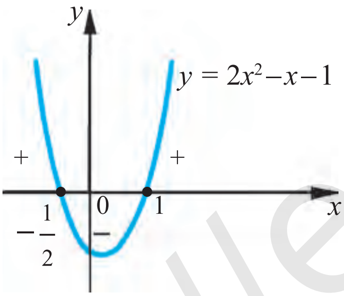
$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

△ $y = 2x^2 - x - 1$ kwadrat funksiýanyň grafigi — şahalary ýokary ugrukdyrylan parabola.

Bu parabolanyň Ox oky bilen kesişme nokatlaryny tapýarys. Munuň üçin $2x^2 - x - 1 = 0$ kwadrat deňlemäni çözýäris. Bu deňlemäniň kökleri:

$$x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1-3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Diýmek, parabola Ox okuny $x = -\frac{1}{2}$ we $x = 1$ nokatlarda kesýär (18-nji surat).



18-nji surat.

$2x^2 - x - 1 \leq 0$ deňsizligi x-iň funksiýa nola deň bolan ýa-da funksiýanyň bahalary otrisatel bolan bahalary kanagatlandyrýar, ýagny x-iň şeýle bahalary bolup, onda bu bahalarda parabolanyň nokatlary Ox okunda ýa-da şu okdan aşakda ýatýar. 18-nji suratdan görnüşi ýaly, bu bahalar $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ kesimdäki ähli sanlar bolýar.

Jogaby: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

Bu funksiýanyň grafiginden berlen deňsizlikden diňe alamaty bilen tapawutlanýan başga deňsizlikleri çözende-de peýdalanmak mümkin. 18-nji suratdan görnüşi ýaly:

1) $2x^2 - x - 1 < 0$ deňsizligiň çözüwleri $-\frac{1}{2} < x < 1$, ýagny $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ interwaldaky ähli sanlar;

2) $2x^2 - x - 1 > 0$ deňsizligiň çözüwleri $x < -\frac{1}{2}$ we $x > 1$ aralyklardaky ähli sanlar bolýar;

3) $2x^2 - x - 1 \geq 0$ deňsizligiň çözüwleri $x \leq -\frac{1}{2}$ we $x \geq 1$ aralyklardaky ähli sanlar bolýar.

2-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

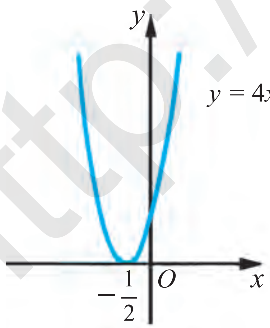
△ $y = 4x^2 + 4x + 1$ funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzýarys. Bu parabolanyň şahalary ýokary ugrukdyrylan. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ deňleme bir $x = -\frac{1}{2}$ köke eýe, şonuň üçin parabola Ox okuna $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ nokatda galtaşýar. Bu funksiýanyň grafigi 19-njy suratda şekillendirilen. Berlen deňsizligi çözmek üçin x-iň nähili bahalarda funksiýanyň bahalary položitel bolýandygyny anyklamaly. Şeýlelikde, $4x^2 + 4x + 1 > 0$ deňsizligi x-iň parabolanyň nokatlary Ox okundan ýokarda ýatýan bahalary kanagatlandyrýar. 19-njy suratdan görnüşi ýaly, şeýle bahalar $x = -0{,}5$-den başga ähli hakyky sanlar bolýar.

Jogaby: $x \neq -0{,}5$. ▲

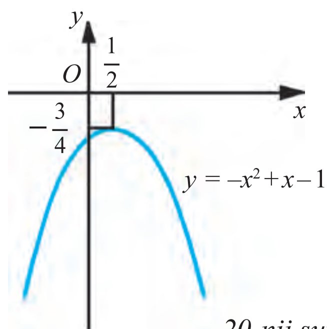
19-njy suratdan görnüşi ýaly:

1) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ deňsizligiň çözüwi ähli hakyky sanlar bolýar;

2) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ deňsizlik bir $x = -\frac{1}{2}$ ýözüwe eýe;



19-njy surat.



20-nji surat.

3) $4x^2 + 4x + 1 < 0$ deňsizlik çözüwlere eýe däl.

Eger $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ bolýandygy hasaba alynsa, bu deňsizlikleri ýatdan çözmek mümkin.

3-nji mesele. $-x^2 + x - 1 < 0$ deňsizligi çözüň.

△ $y = -x^2 + x - 1$ funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzýarys. Bu parabolanyň şahalary aşak ugrukdyrylan. $-x^2+x-1 = 0$ deňlemäniň hakyky kökleri ýok, şonuň üçin parabola Ox okuny kesip geçmeýär. Diýmek, bu parabola Ox okundan aşakda ýerleşen (20-nji surat). Bu ähli x-lerde kwadrat funksiýanyň bahalarynyň otrisateldigini, ýagny $-x^2+x-1<0$ deňsizlik x-iň ähli hakyky bahalarynda ýerine ýetirilýändigini aňladýar. ▲

20-nji suratdan ýene $-x^2 + x - 1 \leq 0$ deňsizligiň çözüwleri x-iň ähli hakyky bahalary bolýandygy, $-x^2 + x - 1 > 0$ we $-x^2 + x - 1 \geq 0$ deňsizlikler bolsa çözüwlere eýe dälligi görnüp dur.

Şeýlelikde, *kwadrat deňsizligi grafigiň kömeginde çözmek üçin:*

1) kwadrat funksiýa birinji koeffisiýentiniň alamaty boýunça parabolanyň şahalarynyň ugruny anyklamaly;

2) degişli kwadrat deňlemäniň hakyky köklerini tapmaly ýa-da olaryň ýoklugyny anyklamaly;

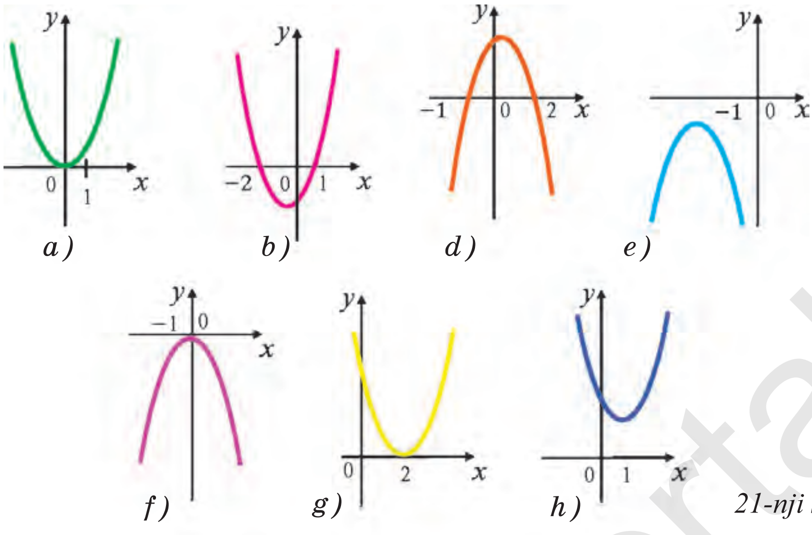
3) kwadrat funksiýanyň Ox oky bilen kesişme nokatlaryndan ýa-da galtaşma nokadyndan (eger olar bolsa) peýdalanyp, kwadrat funksiýanyň grafiginiň eskizini gurmaly;

4) grafik boýunça funksiýa gerekli bahalary kabul edýän aralyklary anyklamaly.

Gönükmeler

56. $y = x^2 + x - 6$ funksiýanyň grafigini çyzyň. Grafik boýunça x-iň funksiýanyň položitel bahalaryny; otrisatel bahalary kabul edýän bahalaryny tapyň.

57. (Ýatdan.) $y=ax^2+bx+c$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp (21-nji surat), x-iň nähili bahalarynda bu funksiýanyň položitel bahalary, otrisatel bahalary, nola deň bahany kabul edýändigini görkeziň.



21-nji surat.

Kwadrat deňsizligi çözüň (**58–62**):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Ýatdan.) Deňsizligi çözüň:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

Kwadrat deňsizligi çözüň (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \le -8$; 2) $x^2 + 12x \ge -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \ge 0$; 6) $3x^2 + x \le 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
3) $6x^2 + 1 \le 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. x-iň funksiýanyň noldan uly bolmadyk bahalary kabul edýän ähli bahalaryny tapyň:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) $x^2 - 2x + q > 0$ deňsizligiň $q > 1$ bolandaky çözüwleri x-iň ähli hakyky bahalary bolýandygyny görkeziň;
2) $x^2 + 2x + q \le 0$ deňsizlik $q > 1$ bolanda hakyky çözüwlere eýe dälligini görkeziň.

69. r-iň $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$ deňsizlik x-iň ähli hakyky bahalarynda ýerine ýetirilýän ähli bahalaryny tapyň.

8-§. INTERWALLAR USULY

Deňsizlikleri çözende köplenç interwallar usuly ulanylýar. Bu usuly mysallarda düşündirýäris.

1-nji mesele. x-iň nähili bahalarynda $x^2 - 4x + 3$ kwadrat üçagza položitel bahalary, nähili bahalarynda bolsa otrisatel bahalary kabul edýändigini anyklaň.

△ $x^2 - 4x + 3 = 0$ deňlemäniň köklerini tapýarys:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Şonuň üçin $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$x = 1$ we $x = 3$ nokatlar (22-nji surat) san okuny üç aralyga bölýär:

22-nji surat.

$$x < 1;\ 1 < x < 3;\ x > 3.$$

$1 < x < 3$ aralyk ýaly $x < 1$, $x > 3$ aralyklara-da *interwallar* diýilýär.

San oky boýunça sagdan çepe hereket edip, $x > 3$ interwalda $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ üçagza položitel bahalar kabul edýändigini görýäris, çünki munda iki $x - 1$ we $x - 3$ köpeldiji hem položitel.

Soňky $1 < x < 3$ interwalda şu üçagza otrisatel bahalary kabul edýär we, şeýlelikde, $x = 3$ nokat arkaly geçende alamatyny üýtgedýär. Bu ýagdaý şonuň üçin hem bolup geçýär, ýagny $(x-1)(x-3)$ köpeltmek hasylynda $x = 3$ nokat arkaly geçende $x - 1$ köpeldiji alamatyny üýtgetmeýär, ikinji $x-3$ köpeldiji bolsa alamatyny üýtgedýär.

$x = 1$ nokat arkaly geçende üçagza ýene alamatyny üýtgedýär, çünki $(x-1)(x-3)$ köpeltmek hasylynda birinji $x-1$ köpeldiji alamatyny üýtgedýär, ikinji $x-3$ köpeldiji bolsa üýtgetmeýär.

Diýmek, san oky boýunça sagdan çepe garap hereket edip bir interweldan goňşy interwela geçilende $(x-1)(x-3)$ köpeltmek hasylynyň alamatlary barha çalyşýar.

Şeýlelikde, $x^2 - 4x + 3$ kwadrat üçagzanyň alamaty baradaky meseläni aşakdaky usul bilen çözmek mümkin.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ deňlemäniň köklerini san okunda belgileýäris: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Olar san okuny üç interwal bölýär (22-nji surat). $x > 3$ interwalda $x^2 - 4x + 3$ üçagzanyň položitel bolýandygyny anyklap, üçagzanyň galan interwallardaky alamatlaryny barha çalyşýan tertipde belgileýäris (23-nji surat). 23-nji suratdan görnüşi ýaly, $x < 1$ we $x > 3$ bolanda $x^2-4x + 3 > 0$, $1 < x < 3$ bolanda bolsa $x^2 - 4x + 3 < 0$. ▲

23-nji surat.

Garap geçilen usula *interwallar usuly* diýilýär. Bu usuldan kwadrat deňsizlikleri we käbir deňsizlikleri çözende peýdalanylýar.

Meselem, 1-nji meseläni çözende biz aslynda $x^2 - 4x + 3 > 0$ we $x^2 - 4x + 3 < 0$ deňsizlikleri interwallar usuly bilen çözdük.

2-nji mesele. $x^3 - x < 0$ deňsizligi çözüň.

△ $x^3 - x$ köpagzany köpeldijilere dagydýarys:

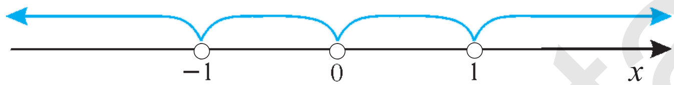
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Diýmek, deňsizligi şeýle ýazmak mümkin:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

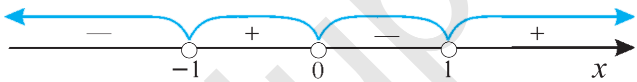
San okunda -1, 0 we 1 nokatlary belgileýäris. Bu nokatlar san okuny dört interwala bölýär (24-nji surat):

$$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1.$$



24-nji surat.

$x > 1$ bolanda $(x + 1)x(x - 1)$ köpeltmek hasylynyň hemme köpeldijileri položitel, şonuň üçin $x>1$ interwalda $(x+1)x(x-1)>0$ bolýar. Goňşy interwala geçende köpeltmek hasylynyň alamatynyň çalyşýandygyny hasaba alyp, her bir interwal üçin $(x + 1)x(x - 1)$ köpeltmek hasylynyň alamatyny tapýarys (25-nji surat).



25-nji surat.

Şeýlelikde, deňsizligiň çözüwleri x-iň $x<-1$ we $0<x<1$ interwallardaky ähli bahalary bolýar.

Jogaby: $x < -1,\ 0 < x < 1$. ▲

3-nji mesele. $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ deňsizligi çözüň.

△ Berlen deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazmak mümkin:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Ähli $x \neq -3$ da $(x + 3)^2 > 0$ bolany üçin $x \neq -3$ bolanda (1) deňsizligiň çözüwler toplumy

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

deňsizligiň çözüwleri toplumyna gabat gelýär.

$x = -3$ baha (1) deňsizligiň çözüwi bolmaýar, çünki $x = -3$ bolanda deňsizligiň çep bölegi 0-a deň.

(2) deňsizligi interwallar usuly bilen çözüp, $x < 2$, $x > 3$-i alarys (26-njy surat).

26 njy urat.

$x = -3$ berlen deňsizligiň çözüwi bolmaýanlygyny hasaba alyp, ahyrynda jogaby şeýle ýazýarys:

$$x < -3, \quad -3 < x < 2, \quad x > 3. \ \blacktriangle$$

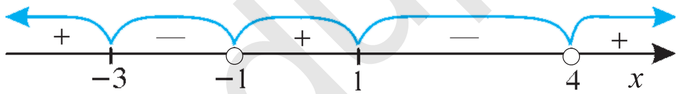
4-nji mesele. Şu deňsizligi çözüň:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

$\triangle$ Drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny köpeldijilere dagydyp aşakdakyny alarys:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \qquad (3)$$

San okunda drobuň sanawjysy ýa-da maýdalawjysy nola öwrülýän –3; –1; 1; 4 nokatlary belgileýäris. Bu nokatlar san göni çyzygyny bäş interwala bölýär (27-nji surat). $x > 4$ bolanda drobuň sanawjysyndaky we maýdalawjysyndaky ähli köpeldijiler položitel we şonuň üçin drob položitel.



27-nji surat.

Bir interwaldan soňkusyna geçende drobuň alamatyny üýtgedýär, şonuň üçin drobuň alamatlaryny 27-nji suratdaky ýaly edip goýmak mümkin. $x = -3$ we $x = 1$ bahalar (3) deňsizligi kanagatlandyrýar, $x=-1$ we $x = 4$ bolanda bolsa drob mana eýe däl. Şeýlelikde, berlen deňsizlik aşakdaky çözüwlere eýe:

$$x \leq -3, \quad -1 < x \leq 1, \quad x > 4. \ \blacktriangle$$

Gönükmeler

70. (Ýatdan.) $x = 5$ baha deňsizligiň çözüwi bolýandygyny görkeziň:

1) $(x - 1)(x - 3) > 0;$ 2) $(x + 2)(x + 5) > 0;$
3) $(x - 7)(x - 10) > 0;$ 4) $(x + 1)(x - 4) > 0.$

Deňsizligi interwallar usuly bilen çözüň (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;
3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;
4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;
3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;
3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geq 0$;
4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;
3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Deňsizligi çözüň (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;
4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x\ \ 6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$;

9- §. FUNKSIÝANYŇ KESGITLENIŞ ÝAÝLASY

Siz 7-nji synpda funksiýa düşünjesi bilen tanşypdyňyz. Şu düşünjäni ýatladyp geçýäris.

Eger sanlaryň käbir toplumyndan alnan x-iň her bir bahasyna y san laýyk getirilen bolsa, şu toplumda $y(x)$ *funksiýa* berlen diýilýär. Munda x *erkli üýtgeýji* ýa-da *argument*, y bolsa *erksiz üýtgeýji* ýa-da *funksiýa* diýilýär.

Siz $y=kx+b$ çyzykly funksiýa we $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýa bilen tanyşsyňyz.

Bu funksiýalar üçin argumentiň bahasy islendik hakyky san bolmagy mümkin.

Indi her bir otrisatel däl x sana $\sqrt{x}$ sany laýyk goýýan funksiýa, ýagny $y=\sqrt{x}$ funksiýa garaýarys. Bu funksiýa üçin argument diňe otrisatel däl bahalary kabul etmegi mümkin: $x \geq 0$. Munda funksiýa ähli otrisatel däl sanlar toplumynda kesgitlenen diýilýär we bu toplum $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň *kesgitleniş ýaýlasy* diýlip atlandyrylýar.

Umuman, funksiýanyň *kesgitleniş ýaýlasy* diýip onuň argumenti kabul edilmegi mümkin bolan ähli bahalar toplumyna aýdylýar.

Meselem, $y=\frac{1}{x}$ formula bilen berlen funksiýa $x \neq 0$ da kesgitlenen, ýagny bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy – noldan tapawutly ähli hakyky sanlar toplumy.

Eger funksiýa formula bilen berlen bolsa, onda funksiýa argumentiň berlen formula mana eýe bolýan (ýagny formulanyň sag böleginde duran aňlatmada görkezilen hemme amallar ýerine ýetirilýän) ähli bahalarynda kesgitlenen, diýip hasaplamak kabul edilen.

Formula bilen berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapmak – argumentiň formula mana eýe bolýan ähli bahalaryny tapmak diýmekdir.

1 -nji mesele. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $y(x)=2x^2+3x+5x$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\dfrac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x\;\;2}}$.

△ 1) $2x^2+3x+5$ aňlatma x-iň islendik bahasynda mana eýe bolany üçin, funksiýa ähli x-lerde kesgitlenen.

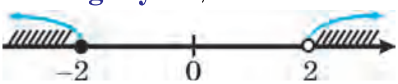
Jogaby: x – islendik son.

2) $\sqrt{x-1}$ aňlatma $x-1\geq 0$ bolanda mana eýe, ýagny funksiýa $x\geq 1$ bolanda kesgitlenen.

Jogaby: $x\geq 1$.

3) $\dfrac{1}{x+2}$ aňlatma $x+2\neq 0$ bolanda mana eýe, ýagny funksiýa $x\neq -2$ bolanda kesgitlenen.

Jogaby: $x\neq -2$.

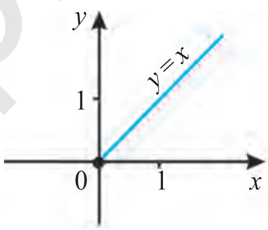


28-nji surat.

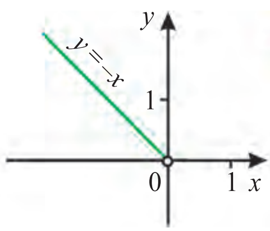
4) $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x\;\;2}}$ aňlatma $\dfrac{x+2}{x-2}\geq 0$ bolanda mana eýe. Bu deňsizligi çözüp, alarys (28-nji surat): $x\leq -2$ we $x>2$, ýagny funksiýa $x\leq -2$ we $x>2$ bolanda kesgitlenen.

Jogaby: $x\leq -2$, $x>2$. ▲

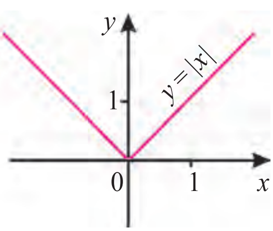
Funksiýanyň grafigi diýip koordinatalar tekizliginiň abssissalary şu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan erkli üýtgeýjiniň bahalaryna, ordinatalary bolsa funksiýanyň degişli bahalaryna deň bolan nokatlar toplumyna aýdylýandygyny ýatladyp geçýäris.



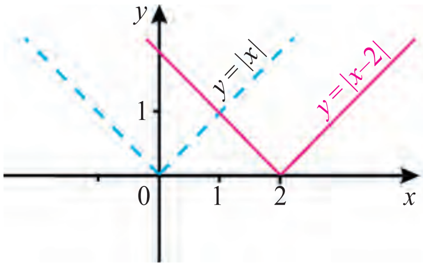
29-njy surat.



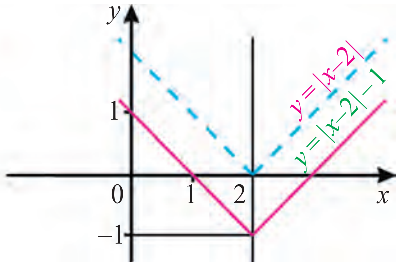
30-nji surat.



31-nji surat.



32-nji surat.



33-nji surat.

2 -nji mesele. $y = |x|$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň we onuň grafigini çyzyň.

△ Ýatladyp geçýäris:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ eger } x^{3} \geq 0 \text{ bolsa,} \\ -x, \text{ eger } x < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

Şeýlelikde, $|x|$ aňlatma islendik hakyky x-da mana eýe, ýagny $y = |x|$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy ähli hakyky sanlar toplumyndan ybarat.

Eger $x \geq 0$ bolsa, onda $|x| = x$ bolýar we, şonuň üçin, $x \geq 0$ bolanda $y = |x|$ funksiýanyň grafigi birinji koordinata burçunyň bissektrisasy bolýar (29-njy surat).

Eger $x < 0$ bolsa, onda $|x| = -x$ bolýar, diýmek, otrisatel x-ler üçin $y = |x|$ funksiýanyň grafigi ikinji koordinata burçunyň bissektrisasy bolýar (30-njy surat).

$y = |x|$ funksiýanyň grafigi 31-nji suratda şekillendirilen. ▲

Islendik x üçin $|-x| = |x|$. Şonuň üçin $y = |x|$ funksiýanyň grafigi ordinatalar okuna görä simmetrik ýerleşen.

3 -nji mesele. $y = |x-2| - 1$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = |x-2|$ funksiýanyň grafigi $y = |x|$ funksiýanyň grafiginden ony Ox ok boýunça 2 birlik saga süýşürmek bilen alynýar (32-nji surat).

$y = |x-2| - 1$ funksiýanyň grafigini almak üçin $y = |x-2|$ funksiýanyň grafigini bir birlik pese süýşürmek ýeterli (33-nji surat). ▲

Gönükmeler

81. Funksiýa $y(x) = x^2 - 4x + 5$ formula bilen berlen:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$-ni tapyň;

2) eger $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$ bolsa, x-iň bahasyny tapyň.

82. Funksiýa $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$ formula bilen berlen:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$-i tapyň;

2) eger $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$ bolsa, x-iň bahasyny tapyň.

Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň (**83–84**):

83. (Ýatdan).

1) $y=4x^2-5x+1$; 2) $y=2-x-3x^2$; 3) $y=\frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y=\dfrac{3}{5-x^2}$; 5) $y=\sqrt[4]{6-x}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-7x+10}$;

3) $y=\sqrt[3]{3x^2-2x+5}$; 4) $y=\sqrt[6]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$; 5) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{4\ \ x}}$.

85. Funksiýa $y(x)=|2-x|-2$ formula bilen berlen:

1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$-i tapyň;

2) eger $y(x)=-2$, $y(x)=0$, $y(x)=2$, $y(x)=4$ bolsa, x-iň bahasyny tapyň.

86. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; 2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

3) $y=\sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}}$.

5) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$; 6) $y=\sqrt[8]{\dfrac{x^2+4x\ \ 5}{x-2}}$;

87. $(-2;\ 1)$ nokat funksiýanyň grafigine degişli bolarmy:

1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;

3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;

4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. $y=ax^2+bx+c$ funksiýa A $(0;\ 1)$, B $(1;\ 2)$, C $(\frac{5}{6};\ 1)$ nokatlardan geçýär. 1) a, b, c-ni tapyň; 2) x-iň nähili bahalarynda $y=0$ bolýar? 3) funksiýanyň grafigini çyzyň.

10- §. FUNKSIÝANYŇ ARTMAGY WE KEMELMEGI

Siz $y=x$ we $y=x^2$ funksiýalar bilen tanyşsyňyz. Bu funksiýalar *derejeli funksiýa*nyň, ýagny

$$y=x^r \qquad (1)$$

(munda r – berlen san) funksiýanyň hususy hallarydyr.

r – natural san bolsun, $r=n=1,\ 2,\ 3,\ ...$ diýeliň. Munda natural görkezijili derejeli funksiýa $y=x^n$ -i alarys.

Bu funksiýa ähli hakyky sanlar toplumynda, ýagny san okunyň hemme ýerinde kesgitlenen. Adatda, ähli hakyky sanlar toplumy $\boldsymbol{R}$ harpy bilen belgilenýär. Şeýlelikde, natural görkezijili derejeli funksiýa $y=x^n$, $x\in\boldsymbol{R}$ üçin kesgitlenen. Eger (1)bolanda $r=-2k$, $k\in\boldsymbol{N}$ bolsa, onda $y=x^{2k}=\frac{1}{x^{2k}}$ funksiýa emele gelýär. Bu funksiýa x-iň noldan tapawutly ähli bahalarynda kesgitlenen. Onuň grafigi Oy oka görä simmetrik. $r=-(2k-1)$, $k\in\boldsymbol{N}$ bolsa, onda $y=x^{(2k\ 1)}=\frac{1}{x^{2k\ 1}}$ funksiýany alýarys. Onuň häsiýetleri size tanyş $y=\frac{1}{x}$ funksiýanyň häsiýetleri ýaly bolýar. p we q – natural sanlar we $r=\frac{p}{q}$ – gysgalmaýan drob bolsun. $y=\sqrt[q]{x^p}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy p we q-nyň jübüt-täkligine garap dürlüçe bolýar. Meselem, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ funksiýalar islendik $x \in \boldsymbol{R}$ bolanda kesgitlenen. $y=\sqrt[4]{x^3}$ funksiýa bolsa x-iň otrisatel däl, ýagny $x \geq 0$ bahalarynda kesgitlenen.

8-nji synp „Algebra“ kursundan mälim bolşy ýaly, her bir irrasional sany çäkli onluk drob bilen, ýagny rasional san bilen ýakynlaşdyrmak mümkin. Amalyýetde irrasional sanlaryň üstünde amallar olaryň rasional ýakynlaşmalaryň kömeginde ýerine ýetirilýär. Bu amallar şeýle girizilýär, ýagny amallaryň, deňlikleriň we deňsizlikleriň rasional sanlar üçin häsiýetleri irrasional sanlar üçin hem doly saklanýar.

$r_1, r_2, ..., r_k, ...$ rasional sanlar r irrasional sanyň rasional ýakynlaşmalary bolsun. Onda x položitel san bolanda, x-iň rasional derejeleri, ýagny x^{r_1}, x^{r_2}, ... , x^{r_k}, ... sanlar x^r derejäniň ýakynlaşmalary bolýar. Şeýle kesgitlenen derejä *irrasional görkezijili dereje* diýilýär. Diýmek, $x > 0$ üçin dereje görkezijisi islendik r bolan $y = x^r$ funksiýany kesgitlemek mümkin.

Derejeli funksiýa x-iň (1) formula mana eýe bolýan bahalary üçin kesgitlenen. Meselem, $y = x$ we $y = x^2$ ($r = 1$ we $r = 2$) funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasy ähli hakyky sanlar toplumy bolýar; $y=\frac{1}{x}$ ($r = 1$) funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy nola deň bolmadyk ähli hakyky sanlar toplumy bolýar; $y=\sqrt{x}$ $\left(r=\frac{1}{2}\right)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy ähli otrisatel däl sanlaryň toplumyndan ybarat.

! **Eger argumentiň käbir aralykdan alnan uly bahasyna funksiýanyň uly bahasy gabat gelse, ýagny şu aralyga degişli islendik x_1, x_2 üçin $x_2>x_1$ deňsizlikden $y(x_2) > y(x_1)$ deňsizlik gelip çyksa, $y(x)$ funksiýa şu aralykda *artýan* funksiýa diýilýändigini ýatladýarys.**

! **Eger käbir aralyga degişli islendik x_1, x_2 üçin $x_2>x_1$ deňsizlikden $y(x_2) < y(x_1)$ gelip çyksa, $y(x)$ funksiýa şu aralykda *kemelýän* funksiýa diýilýär.**

Meselem, $y = x$ funksiýa sanlar okunda artýar. $y = x^2$ funksiýa $x \geq 0$ aralykda artýar, $x \leq 0$ aralykda kemelýär.

$y = x^r$ derejeli funksiýanyň artmagy ýa-da kemelmegi dereje görkezijisiniň alamatyna bagly.

Eger $r>0$ bolsa, onda $y=x^r$ derejeli funksiýa $x\geq 0$ aralykda *artýar*.

○ $x_2>x_1\geq 0$ bolsun. $x_2>x_1$ deňsizligi položitel r derejä göterip, $x_2^r > x_1^r$ -i, ýagny $y(x_2) > y(x_1)$-i alarys. ●

Meselem, $y=\sqrt{x}$ we $y=x^{\frac{3}{2}}$ funksiýalar $x\geq 0$ aralykda artýar. Bu funksiýalaryň grafikleri 34-nji suratda şekillendirilen. Şu suratdan $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafigi $0<x<1$ aralykda $y = x$ funksiýanyň grafiginden ýokarda, $x > 1$ aralykda bolsa $y = x$ funksiýanyň grafiginden aşakda ýatýandygy görnüp dur.

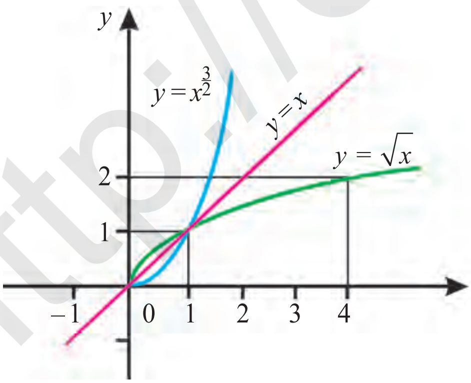
Eger $0<r<1$ bolsa, $y=x^r$ funksiýanyň grafigi edil şeýle häsiýete eýe bolýar.

$y=x^{\frac{3}{2}}$ funksiýanyň grafigi $0<x<1$ aralykda $y=x$ funksiýanyň grafiginden aşakda, $x > 1$ aralykda bolsa $y = x$ funksiýanyň grafiginden ýokarda ýatýar.

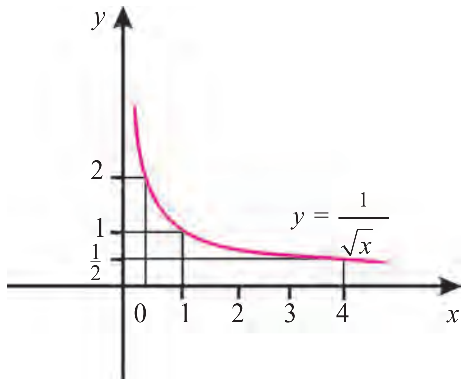
$r>1$ bolsa, $y-x^r$ funksiýanyň grafigi edil şeýle häsiýete eýe bolýar.

Indi $r>1$ bolan ýagdaýa garaýarys.

Eger $r < 0$ bolsa, onda $y= x^r$ derejeli funksiýa $x > 0$ aralykda *kemelýär*.



34-nji surat.



35-nji surat.

○ $x_2 > x_1 > 0$ bolsun. $x_2 > x_1$ deňsizligi otrisatel r derejä göterip, çep we sag bölekleri položitel bolan deňsizlikleriň häsiýetine görä $x_2^r > x_1^r$ -i, ýagny $y(x_2) < y(x_1)$ -i alarys. ●

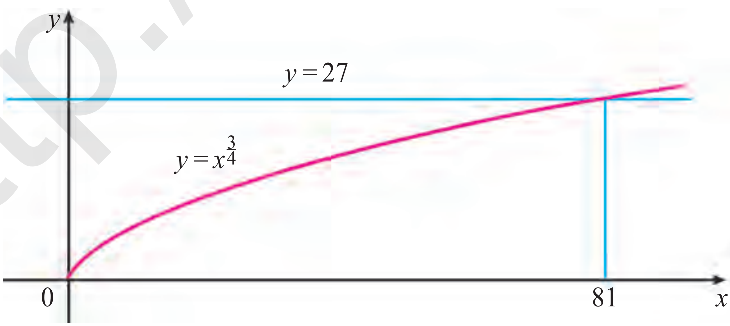
Meselem, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ýagny $y=x^{-\frac{1}{2}}$ funksiýa $x>0$ aralykda kemelýär. Bu funksiýanyň grafigi 35-nji suratda şekillendirilen.

1-nji mesele. $x^{\frac{3}{4}}=27$ deňlemäni çözüň.

△ $y=x^{\frac{3}{4}}$ funksiýa $x\geq 0$ bolanda kesgitlenen. Şonuň üçin berlen deňleme diňe otrisatel däl köklere eýe bolmagy mümkin. Şeýle köklerden biri: $x=27^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{3^3})^4=3^4=81$. Deňlemäniň başga kökleri ýok, çünki $y=x^{\frac{3}{4}}$ funksiýa $x\geq 0$ bolanda artýar we şonuň üçin, eger $x>81$ bolsa, onda $x^{\frac{3}{4}}>27$, eger $x<81$ bolsa, onda $x^{\frac{3}{4}}<27$ bolýar (36-njy surat). ▲

$x^r=b$ (munda $r\neq 0$, $b>0$) deňlemäniň hemişe položitel $x=b^{\frac{1}{r}}$ köke eýeligi, şunuň bilen birlikde, bu köküň ýeke-täkligi şuňa meňzeş subut edilýär. Diýmek, $y=x^r$ (munda $r>0$) funksiýa $x>0$ bolanda *ähli položitel bahalary kabul edýär.*

Bu bolsa, meselem, $y=x^{\frac{3}{4}}$ (36-njy surat) funksiýanyň haýallyk bilen artmagyna seretmezden, onuň grafiginiň Ox okdan islendikçe uzaklaşýandygyny



36-njy surat.

we $y = b$ göni çyzygy, b-niň nähili položitel san bolmagyna seretmezden, kesýändigini aňladýar.

2 -nji mesele. $y = x + \frac{1}{x}$ funksiýanyň $x > 1$ aralykda artýandygyny subut ediň.

△ $x_2 > x_1 > 1$ bolsun. $y(x_2) > y(x_1)$ bolýandygyny görkezýäris. $y(x_2) - y(x_1)$ tapawudy garaýarys:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ bolany üçin $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 > 1$, $x_1x_2 > 0$. Şonuň üçin $y(x_2) - y(x_1) > 0$, ýagny $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Gönükmeler

90. Funksiýanyň grafigini çyzyň hem-de artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $y=2x+3$; 2) $y=1-3x$; 3) $y=x^2+2$;
4) $y=3-x^2$; 5) $y=(1-x)^2$; 6) $y=(2+x)^2$.

91. (Ýatdan). Funksiýa $x > 0$ aralykda artýarmy ýa-da kemelýärmi:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

92. $x > 0$ bolanda funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzyň:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

93. Deňlemäniň položitel köküni tapyň:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$;
5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; 7) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$; 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$.

94. Millimetrli kagyza $y = \sqrt[4]{x}$ funksiýanyň grafigini çyzyň. Grafik boýunça:

1) $y = 0{,}5;\ 1;\ 4;\ 2{,}5$ bolanda x-iň bahalaryny tapyň;

2) $\sqrt[4]{1{,}5}; \sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2{,}5}; \sqrt[4]{3}$ bahalary takmynan tapyň.

95. Funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ we $y=625$; 2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ we $y=64$;

3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ we $y=216$; 4) $y = x^{\frac{7}{3}}$ we $y=128$.

96. 1) $y = x + \frac{1}{x}$ funksiýanyň $0<x<1$ aralykda kemelýändigini subut ediň;

2) $y = \frac{1}{x^2+1}$ funksiýanyň $x \geq 0$ aralykda kemelýändigini we $x \leq 0$ aralykda artýandygyny subut ediň;

3) $y=x^3-3x$ funksiýanyň $x \geq -1$ we $x \geq 1$ aralyklarda artýandygyny we $-1 \leq x \leq 1$ kesimde kemelýändigini subut ediň;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ funksiýanyň $x \geq 1$ aralykda artýandygyny we $0 \leq x \leq 1$ kesimde kemelýändigini subut ediň.

97. Funksiýanyň grafigini çyzyň hem-de artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $y = \begin{cases} x+2, \text{ eger } x \leq -1 \text{ bolsa,} \\ x^2, \text{ eger } x > -1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

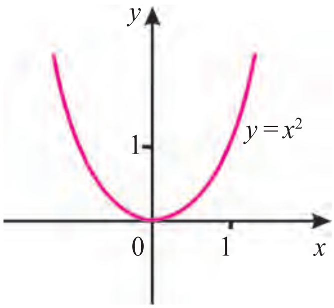
2) $y = \begin{cases} x^2, \text{eger } x \leq 1 \text{ bolsa,} \\ 2-x^2, \text{ eger } x > 1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -x-1, \text{ eger } x < -1 \text{ bolsa,} \\ -x^2+1, \text{ eger } x \geq -1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

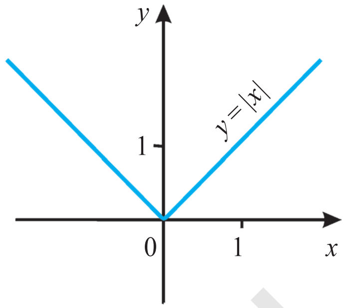
4) $y = \begin{cases} x^3, \text{ eger } x \leq 1 \text{ bolsa,} \\ -x^2+2x, \text{ eger } x \geq 1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

11-§. FUNKSIÝANYŇ JÜBÜTLIGI WE TÄKLIGI

Siz $y = x^2$ we $y = |x|$ funksiýalaryň grafikleriniň ordinatalar okuna görä simmetrikdigini (37 we 38-nji suratlar) bilýärsiňiz. Şeýle funksiýalara *jübüt funksiýalar* diýilýär.



37-nji surat.



38-nji surat.

> **!** **Eger $y(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan islendik x üçin $y(-x)=y(x)$ bolsa, bu funksiýa *jübüt funksiýa* diýilýär.**

Meselem, $y=x^4$ we $y=\frac{1}{x^2}$ funksiýalar jübüt funksiýalar, çünki islendik x üçin $(-x)^4=x^4$ we islendik $x\neq 0$ üçin $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$.

1-nji mesele. $y = x^3$ funksiýanyň grafiginiň koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdigini subut ediň we grafigini çyzyň.

△ 1) $y = x^3$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy – ähli hakyky sanlar toplumy.

2) $y = x^3$ funksiýanyň bahalary $x>0$ bolanda položitel, $x<0$ bolanda otrisatel, $x=0$ bolanda nola deň.

○ Aýdaly, $(x_0;\ y_0)$ nokat $y = x^3$ funksiýanyň grafigine degişli, ýagny $y_0=x_0^3$ bolsun. $(x_0;\ y_0)$ nokada koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolan nokat $(-x_0;\ -y_0)$ koordinatalara eýe bolýar. Bu nokat hem $y = x^3$ funksiýanyň grafigine degişli bolýar, çünki $y_0=x_0^3$ dogry deňligiň iki bölegini -1-e köpeldip, alarys: $-y_0=-x_0^3$ ýa-da $-y_0=(-x_0)^3$. ●

Bu häsiýet $y = x^3$ funksiýanyň grafigini gurmaga mümkinçilik berýär: ilki grafik $x \geq 0$ üçin gurulýar, soňra bolsa ony koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik şöhlelendirilýär.

3) $y = x^3$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň hemme ýerinde artýar. Bu položitel görkezijili derejeli funksiýanyň $x \geq 0$ bolanda artýan häsiýetinden

we grafigiň koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikliginden gelip çykýar.

4) $x \geq 0$-nyň käbir bahalary (meselem, $x = 0, 1, 2, 3$) üçin $y = x^3$ funksiýanyň bahalarynyň jedwelini düzýäris, $x \geq 0$ bolanda grafigiň bir bölegini gurýarys we soňra simmetriýanyň kömeginde grafigiň x-iň otrisatel bahalaryna laýyk gelýän bölegini gurýarys (39-njy surat). ▲

Grafikleri koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolan funksiýalara *täk* funksiýalar diýilýär. Şeýlelikde, $y = x^3$ – täk funksiýa.

Eger $y(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndan alnan islendik x üçin

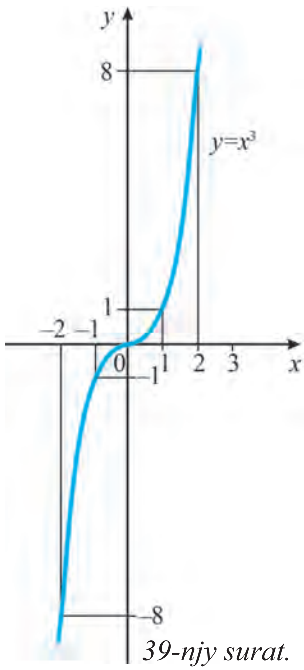
$$y(-x) = -y(x)$$

bolsa, bu funksiýa *täk funksiýa* diýilýär.

Meselem, $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ funksiýalar täk funksiýalardyr, çünki islendik x üçin $(-x)^5 = -x^5$ we islendik $x \neq 0$ üçin $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$.

Jübüt we täk funksiýalaryň *kesgitleniş ýaýlasy koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik*digini nygtap geçýäris.

Jübütlik ýa-da täklik häsiýetlerine eýe bolmadyk funksiýalar bar. Meselem, $y = 2x + 1$ funksiýanyň jübüt hem, täk hem däldigini görkezýäris. Eger bu funksiýa jübüt bolanda-dy, onda ähli x üçin $2(-x) + 1 = 2x + 1$ deňlik ýerine ýetirilen bolardy; ýöne, meselem, $x = 1$ bolanda bu deňlik nädogry: $-1 \neq 3$. Eger bu funksiýa täk bolanda-dy, onda ähli x üçin $2(-x) + 1 = -(2x - 1)$ deňlik ýerine ýetirilen bolardy; ýöne meselem, $x = 2$ bolanda bu deňlik nädogry: $-3 \neq -5$.



39-njy surat.

2-nji mesele. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

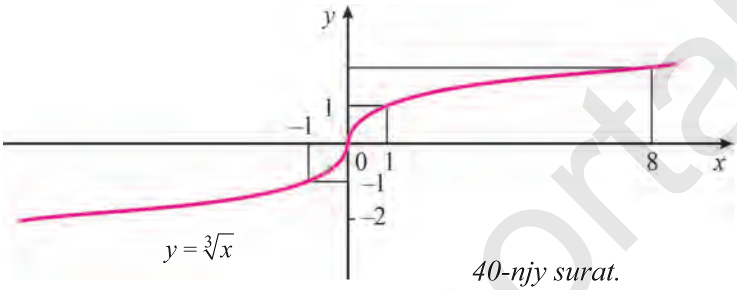
△ 1) Kesgitleniş ýaýlasy – ähli hakyky sanlar;

2) funksiýa – täk, çünki islendik x üçin $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) $x \geq 0$ bolanda funksiýa položitel görkezijili derejeli funksiýanyň häsiýetine görä artýar, çünki $x \geq 0$ bolanda $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) $x > 0$ bolanda funksiýanyň bahasy položitel; $y(0) = 0$;

5) grafige degişli birnäçe, meselem, (0; 0), (1; 1), (8; 2) nokatlary tapyp, $x \geq 0$-nyň bahalary üçin grafigiň bir bölegini guryarys we soňra simmetriýanyň kömeginde $x < 0$ üçin grafigiň ikinji bölegini guryarys (40-njy surat). ▲



40-njy surat.

$y = \sqrt[3]{x}$ funksiýa ähli x-ler üçin, $y = x^{\frac{1}{3}}$ funksiýa bolsa diňe $x \geq 0$ üçin kesgitlenenligini nygtap geçýäris.

Gönükmeler

Funksiýanyň täk ýa-da jübüt bolýandygyny anyklaň (**98–99**):

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzyň:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. Funksiýa jübüt hem, täk hem dälligini görkeziň:

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Funksiýanyň jübüt ýa-da täk bolýandygyny anyklaň:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Simmetriýadan peýdalanyp, jübüt funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

104. Simmetriýadan peýdalanyp, täk funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Funksiýanyň häsiýetlerini anyklaň we onuň grafigini çyzyň:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$;

106. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ eger } x\geq 0 \text{ bolsa,} \\ x^3, \text{ eger } x<0 \text{ bolsa;} \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, \text{eger } x>0 \text{ bolsa,} \\ x^2, \text{eger } x\leq 0 \text{ bolsa;} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{eger } x\leq 0 \text{ bolsa,} \\ -x^2, \text{eger } x\geq 0 \text{ bolsa;} \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^4, \text{ eger } x\leq 1 \text{ bolsa,} \\ -x^2+2x, \text{ eger } x\geq 1 \text{ bolsa.} \end{cases}$

Argumentiň nähili bahalarynda funksiýanyň bahalary položitel bolýandygyny anyklaň. Artýan we kemelýän aralyklaryny görkeziň.

107. y funksiýa berlen:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

$x>0$ bolanda y funksiýanyň grafigini çyzyň. $x<0$ üçin şu funksiýalardan her biriniň grafigini şeýle çyzyň, ýagny gurlan grafik: a) jübüt funksiýanyň; b) täk funksiýanyň grafigi bolsun. Alnan her bir funksiýany bir formula bilen beriň.

108. Funksiýanyň grafiginiň simmetriýa okunyň deňlemesini ýazyň:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Funksiýanyň grafiginiň simmetriýa merkeziniň koordinatalaryny görkeziň:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

12-§. DEREJE GATNAŞÝAN DEŇSIZLIKLER WE DEŇLEMELER

Derejeli funksiýanyň häsiýetlerinden her hili deňlemeleri we deňsizlikleri çözende peýdalanylýar.

1-nji mesele. $x^5>32$ deňsizligi çözüň.

△ $y=x^5$ funksiýa x-iň ähli hakyky bahalarynda kesgitlenen we artýar. $y(2)=32$ bolany üçin $x>2$ bolanda $y(x)>32$ we $x>2$ bolanda $y(x)>32$.

Jogaby: $x>2$. ▲

2-nji mesele. $x^4\leq 81$ deňsizligi çözüň.

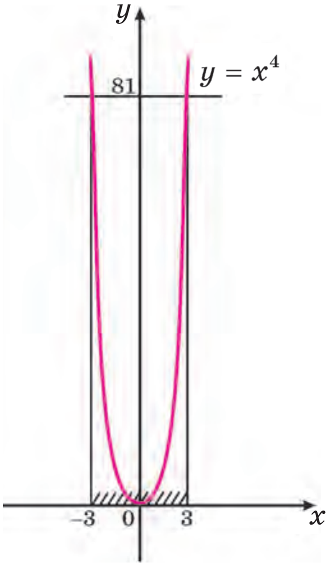
△ $y=x^4$ funksiýa $x\leq 0$ bolanda kemelýär we $x\geq 0$ bolanda artýar. $x^4=81$ deňleme iki hakyky köke eýe: $x_1=-3$, $x_2=3$. Şonuň üçin $x^4\leq 81$ deňsizlik $x\leq 0$ bolanda $-3\leq x\leq 0$ çözüwlere we $x\geq 0$ bolanda $0\leq x\leq 3$ çözüwlere eýe (41-nji surat).

Jogaby: $-3\leq x\leq 3$. ▲

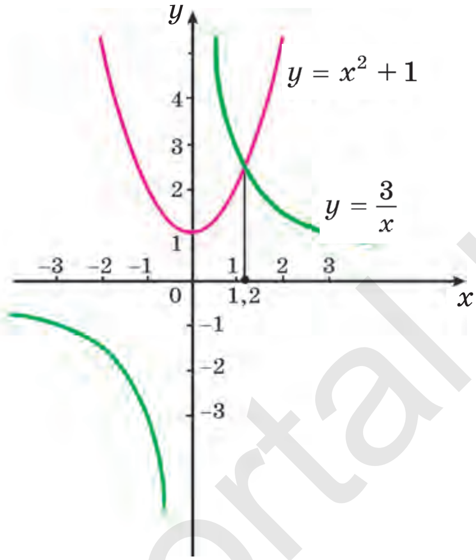
3-nji mesele. Funksiýalaryň grafikleriniň kömeginde $\frac{3}{x}=x^2+1$ deňlemäni çözüň.

Bir koordinatalar tekizliginde $y=\frac{3}{x}$ we $y=x^2+1$ funksiýalaryň grafiklerini guryarys (42-nji surat).

△ $x<0$ bolanda $\frac{3}{x}=x^2+1$ deňleme köklere eýe däl, çünki $\frac{3}{x}<0$, ýöne $x^2+1>0$. $x>0$ bolanda bu deňleme şu funksiýalaryň kesişme nokadynyň abssissasyna deň bolan bir köke eýe. 42-nji suratdan görnüşi ýaly, $x_1\approx 1{,}2$. Deňleme başga položitel köklere eýe däl, çünki $x>x_1$ bolanda $y=\frac{3}{x}$ funksiýa kemelýär, $y=x_2+1$ funksiýa bolsa artýar we diýmek, funksiýalaryň grafikleri



41-nji surat.



42-nji surat.

$x > x_1$ bolanda kesişmeýär. Edil şu sebäbe görä olar $0 < x < x_1$ bolanda hem kesişmeýär.

Jogaby: $x_1 \approx 1{,}2$. ▲

4-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$\sqrt{2-x^2} = x. \qquad (1)$$

△ Aýdaly, x – berlen deňlemäniň köki bolsun, ýagny x – şeýle san bolup, ol (1) deňlemäni dogry deňlige öwürýär. Deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip, alarys:

$$2-x^2=x^2. \qquad (2)$$

Mundan $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.

Diýmek, (1) deňleme köklere eýe, diýip çak edip, biz bu kökleriň diňe 1 we −1 sanlary bolmagy mümkinligini bildik, indi bu sanlar (1) deňlemäniň kökleri bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny barlaýarys. $x = 1$ bolanda (1) deňleme dogry deňlige öwrülýär: $\sqrt{2-1^2}=1$. Şonuň üçin $x=1$ (1) deňlemäniň köki.

$x=-1$ bolanda (1) deňlemäniň çep bölegi $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$ -e deň, sag bölegi bolsa −1-e deň, ýagny $x=-1$ (1) deňlemäniň köki bolup bilmeýär.

Jogaby: $x=1$. ▲

Garalan meselede (1) deňleme onuň iki bölegini hem kwadrata götermek ýoly bilen çözülýär. Munda (2) deňleme emele geldi.

(1) deňleme diňe bir köke eýe: $x=1$, (2) deňleme bolsa iki köke eýe: $x_{1,2}=\pm 1$, ýagny (1) deňlemeden (2) deňlemä geçende *del kökler* diýlip atlandyrylýan kökler peýda boldy. Bu şonuň üçin hem bolup geçdi, ýagny $x = -1$ bolanda (1) deňleme $1 = -1$-dan ybarat nädogry deňlige öwrüldi, bu nädogry deňligiň iki bölegini hem kwadrata göterende bolsa $1^2 = (-1)^2$-dan ybarat dogry deňlik emele geldi.

! **Deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterende del kökleriň peýda bolmagy mümkin.**

Deňlemäni onuň iki bölegini hem kwadrata götermek bilen çözende barlag geçirmeli.

(1) deňleme – *irrasional deňlemä* mysal.

Ýene irrasional deňlemelere mysallar getirýäris:

$$\sqrt{3-2x}=1 \quad x;\ \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}.$$

Birnäçe irrasional deňlemeleri çözeliň.

5-nji mesele. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterýäris:

$$5-2x=x^2-2x+1$$

ýa-da $x^2=4$, mundan $x_1=2$, $x_2=-2$. Tapylan kökleri barlaýarys.

$x = 2$ bolanda berlen deňlemäniň çep bölegi $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$-e deň, sag bölegi $1 - 2 = -1$-e deň. $1 \neq -1$ bolanýandygy üçin $x=2$ berlen deňlemäniň köki bolup bilmeýär.

$x=-2$ bolanda deňlemäniň çep bölegi $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=3$-e deň, sag bölegi $1-(-2)=3$-e deň. Diýmek, $x=-2$ berlen deňlemäniň köki.

Jogaby: $x=-2$. ▲

6-njy mesele. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Bu deňlemäni $\sqrt{x-2}=-3$ görnüşde ýazalyň.

Arifmetik kököň otrisatel bolmagy mümkin däl, diýmek, bu deňleme köklere eýe däl.

Jogaby: Kökleri ýok. ▲

7-nji mesele. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△ Deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip, alarys:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Meňzeş agzalary toparlap, deňlemäni şeýle görnüşde ýazýarys:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ ýa-da } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Ahyrky deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata götereliň:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ ýa-da } x^2-12x+20=0,$$

mundan $x_1=2$, $x_2=10$. Balamak 2 we 10 sanlaryndan her biri berlen deňlemäniň köki bolýandygyny görkezýär.

Jogaby: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

8-nji mesele. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{5-x}\le 7+x$.

△ Deňsizlik x-iň $-7\le x\le 5$ bahalarynda mana eýe. Eger deňsizlik ýözüwe eýe bolsa, çözüw şu $[-7;5]$ kesime degişli bolýar. Deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata göterýäris we toparlamadan soň $x^2+15x+44\ge 0$ deňsizlige gelýäris. Onuň çözüwi $x\le -11$, $x\ge -4$ bolýandygy aýdyň. Bu aralyklaryň $[-7;5]$ kesim bilen umumy bölegi $-4\le x\le 5$, ýagny $[-4;5]$kesim bolýar:

Jogaby: $-4\le x\le 5$. ▲

Gönükmeler

110. Deňsizligi çözüň:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\le 27$; 3) $y^3\ge 64$; 4) $y^3<125$;

5) $x^4\le 16$; 6) $x^4>625$; 7) $x^5\le 243$; 8) $x^6\ge 64$.

111. 1) Eger kwadratyň meýdany 361 cm^2-dan uludygy mälim bolsa, onuň tarapy nähili bolmagy mümkin?
2) Eger kubuň göwrümi 343 dm^3-dan uludygy mälim bolsa, onuň gapyrgasy nähili bolmagy mümkin?

112. (Ýatdan.) 7 sany deňlemäniň köki bolýandygyny görkeziň:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Ýatdan.) Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Deňlemäni çözüň (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;
4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;
4) $\sqrt{0,4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

118. Deňsizligi çözüň:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;
4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Berlen deňleme näme üçin köklere eýe dälligini düşündiriň:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;
4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Deňlemäni çözüň (**120–122**):

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. x-iň nähili bahalarynda funksiýalar birmeňzeş bahalary kabul edýär:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}, y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}, y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Deňsizligi çözüň:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\le 1$; 3) $\sqrt{2-x}\ge x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\le x+1$.

I baba degişli gönükmeler

125. x-iň $y = 2x^2 - 5x + 3$ kwadrat funksiýa: 1) 0-a; 2) 1-e; 3) 10-a; 4) –1-e deň bahalar kabul edýän bahasyny tapyň.

126. Deňsizligi çözüň:
1) $x^2 \le 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \ge 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Parabolanyň koordinata oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň:
1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Porabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapyň:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Funksiýanyň grafigini çyzyň we grafik boýunça onuň häsiýetlerini anyklaň:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Gönüburçlugyň perimetri 600 m. Gönüburçlugyň meýdany iň uly bolmagy üçin onuň esasy bilen beýikligi nähili bolmaly?

131. Eger $y = x^2 + px + q$ kwadrat funksiýa:

1) $x = 0$ bolanda 2-ä deň bahany, $x = 1$ bolanda bolsa 3-e deň bahany kabul etse, p we q koeffisiýentleri tapyň;
2) $x = 0$ bolanda 0-a deň bahany, $x = 2$ bolanda bolsa 6-a deň bahany kabul etse, p we q koeffisiýentleri tapyň.

132. x-iň nähili bahalarynda funksiýalar deň bahalary kabul edýär:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ we $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ we $y = |3x - 3|$?

Deňsizligi çözüň (**133–137**):

133. 1) $(x - 5{,}7)(x - 7{,}2) > 0$; 2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2{,}5)(3 - x) < 0$; 4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 > 36$; 3) $4 > x^2$; 4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$; 2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$; 2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$; 4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$; 6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$; 2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;
3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;
6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$; 8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Deňsizligi çözüň (**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x^2 \geq 1 - x;$ 2) $\frac{1}{3}x(x+1) \leq (x+1)^2;$

3) $x(1-x) > 1{,}5-x;$ 4) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \geq x(x-1).$

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3} > 0;$ 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2} < 0;$ 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1} \leq 0;$

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0;$ 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} > 0;$ 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2} \leq 0.$

140. Kater 4 sagatdan köp bolmadyk wagtyň dowamynda derýanyň akymy boýunça 22,5 km ýüzmeli we yzyna dolanmaly. Eger derýanyň akymynyň tizligi 3 km/h bolsa, kater suwa görä nähili tizlik bilen ýöremeli?

141. Funksiýalaryň grafiklerini bir koordinata sistemasynda çyzyň we x-iň nähili bahalarynda bir funksiýanyň bahasy ikinjiniňkiden uly (kiçi) bolýandygyny anyklaň, netijäni, degişli deňsizligi çözüp, barlaň:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x;$
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x;$
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x;$
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3.$

Funksiýalaryň grafikleriniň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň (**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3;$ 2) $y=\frac{1}{x}, y=2x;$ 3) $y=3x, y=\frac{3}{x}.$

143. 1) $y=\sqrt{x}, y=|x|;$ 2) $y=\sqrt[3]{x}, y=\frac{1}{x};$ 3) $y=\sqrt{x}, y=x.$

144. Deňsizligi çözüň:

1) $x^4 \leq 81;$ 2) $x^5 > 32;$ 3) $x^6 > 64;$ 4) $x^5 \leq -32.$

Deňlemäni çözüň (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2;$ 2) $\sqrt{3x+1}=7;$ 3) $\sqrt{3-11x}=2x.$

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2;$ 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x;$ 3) $\sqrt{2-2x}=x+3.$

147. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; | 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; | 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; | 5) $y=\sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x+7}}$; | 6) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Funksiýanyň görkezilen aralykda artýandygyny ýa-da kemelýändigini anyklaň:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}, x>3$ aralykda; 2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}, x<2$ aralykda;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}, x\geq 0$ aralykda; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x<-1$ aralykda.

Özüňizi Barlap görüň!

1. $y = -x^2 + 2x + 3$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde x-iň nähili bahasynda funksiýanyň bahasy 3-e deň bolýandygyny tapyň.

2. $y=1-x^2$ funksiýanyň grafigi boýunça x-iň funksiýa položitel; otrisatel bahalary kabul edýän bahalaryny tapyň.

3. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ funksiýa nähili aralyklarda artýar? Kemelýär? Şu funksiýanyň grafigini çyzyň.

4. Deňsizligi interwallar usuly bilen çözüň:

1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini anyklaň:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2;$ 2) $y=x^5-x^3+x;$

3) $y=\dfrac{1}{(x\ \ 2)^2}+1;$ 4) $y=x^7+x^5+1.$

150. Deňsizligi çözüň:

1) $(3x+1)^4>625;$ 2) $(3x^2+5x)^5\leq 32;$ 3) $(x^2-5x)^5>216.$

151. Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1;$ 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4;$

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{\ \ };$ 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}.$

152. Deňsizligi çözüň:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3;$ 2) $\sqrt{x^2-3x}<2;$ 3) $\sqrt{3x-2}>x-2;$

4) $\sqrt{2x+1}\leq x-1;$ 5) $\sqrt{3-x}>1-x;$ 6) $\sqrt{4x-x^2}>4-x.$

I baba degişli synag (test) gönükmeleri

Synag gönükmeleriniň her birine 4 sanydan „jogap“ berlen. 4 „jogabyň“diňe biri dogry, galanlary bolsa nädogry. Okuwçylardan synag gönükmelerini ýerine ýetirip ýa-da başga pikir ýöretmeleriň kömeginde ynha şu dogry jogaby tapmak (ony bellik etmek) talap edilýär.

1. a-niyň, $y = ax^2$ parabola bilen $y=5x+1$ göni çyzygyň kesişme nokatlaryndan biriniň abssissasy $x = 1$ bolar ýaly bahasyny tapyň.

A) $a = 6;$ B) $a = -6;$ C) $a = 4;$ D) $a = -4.$

Parabolanyň koordinata oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4.$

A) $(-1;\ 3);$ B) $(3;\ 1);$ C) $(1;\ 3);$ D) $(0;\ 4).$

3. $y = 6x^2 - 5x + 1.$

A) $(\frac{1}{3};\ 0),\ (\frac{1}{2};\ 0),\ (0;\ 1);$ B) $(-\frac{1}{3};\ 0),\ (-\frac{1}{2};\ 0),\ (1;\ 0);$

C) $(0;\ \frac{1}{3}),\ (0;\ \frac{1}{2}),\ (0;\ 1);$ D) $(\frac{1}{3};\ 0),\ (-\frac{1}{2};\ 0),\ (0;\ -1).$

Porabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapyň (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; –4); D) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) (–3; –4); B) (–5; –1); C) (–1; –5); D) (3; 4).

6. Abssissalar okuny $x=1$ we $x=2$ nokatlarda, ordinatalar okuny bolsa $y=\frac{1}{2}$ nokatda kesip geçýän parabolanyň deňlemesini ýazyň.

A) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; B) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$;

C) $y = x^2 - 3x + 2$; D) dogry jogap berilmedik.

Parabola haýsy çärýeklerde ýerleşen? (**7–8**):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, III, IV; D) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, II.

9. Iki položitel sanyň jemi 160-a deň. Eger şu sanlaryň kublarynyň jemi iň kiçi bolsa, şu sanlary tapyň.

A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80.

10. $y = x^2 - 4x + 3$ funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapyň.

A) –1; B) 1; C) 7; D) –8.

Deňsizligi çözüň (**11–17**):

11. $2x^2-8\le 0$.

A) $-2\le x\le 2$; B) $-2\le x$; C) $x\ge 2$; D) $0\le x\le 4$.

12. $3x^2-9\ge 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$; D) $x \ge 3$.

13. $6x^2+5x-6>0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; B) $x < \frac{3}{2}$; C) $x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\frac{x^2 \quad 7x+10}{x^2 \quad 3x \quad 10} \le 0.$

A) $-2<x\le 2$; B) $-2< x <5$; C) $x\ne -2,\ x\ne 5$; D) $-2<x<0$.

15. $\frac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \ge 0.$

A) $-2<x<3$; B) $x<-2;\ -1\le x\le 1,\ x>3$;

C) $-1\le x<3$; D) $x\ne -2,\quad x\ne 3$.

16. $x^2+6x+5<0$ deňsizligiň ähli bitin çözüwleriniň jemini tapyň.

A) 10; B) 9; C) –9; D) –10.

17. a-nyň nähili bahalarynda $ax^2+4x+9a<0$ deňsizlik x-iň ähli bahalarynda ýerlikli bolýar?

A) $a<-\frac{2}{3}$; B) $a>\frac{2}{3}$; C) $a<-1$; D) $a>1$.

18. a-nyň nähili bahasynda $ax^2-8x-2<0$ deňsizlik x-iň ähli bahalarynda ýerlikli bolýar?

A) $-8<a<8$; B) $a\ge 8$; C) $a<8$; D) $a<-8$.

19. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň: $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$.

A) $1\le x\le 2$; B) $1<x<2$; C) $x\ge 2,\ x\le 1$; D) $-2\le x\le -1$.

20. Funksiýalaryň haýsylary jübüt funksiýa?

1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=x^2+|x|$; 3) $y= \quad 3+\frac{5}{x^4}$; 4) $y=x^2-\frac{3}{x}$.

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.

21. Funksiýalaryň haýsylary täk funksiýa?

1) $y=6x$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=4x+7$; 4) $y=2x^3-10$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.

Amaly we predmetara bagly meseleler

1-nji mesele. Ýeňil awtomobil hemişelik v tizlik bilen hereketlenýär. Stop çyzygyna çenli 50 metr galanda swetoforyň ýaşyl çyrasy öçüp ýanyp başlady. Şundan ýarym sekunt geçenden soň sürüji tormozlanyp başlady we stop çyzygyna ýetmezden saklandy. Ýol hereketi kadalaryndan mälim bolşy ýaly, $\upsilon_0 = 50$ km/h tizlik bilen hereket eden awtomobiliň tormozlanma ýoly $S_0 = 23{,}5$ m, munda tormozlanma ýoly diýip tormozlanma başlanmagyndan gutarýança awtomobiliň geçen ýoluna aýdylýar. Awtomobilniň swetofor öçüp ýanmagy başlagandaky υ tizligini bahalaň.

△ Swetofor öçüp ýanyp başlanyndan tormozlanma başlanýança awtomobil 0,5 υ metr aralygy, soň bolsa fizika kursundan mälim bolan kw^2 tormozlanma ýoluny geçýär, munda

$$k = \frac{s_0}{\upsilon_0^2} = \frac{23{,}5}{13{,}88^2} \approx 0{,}12.$$

Diýmek, umumy geçilen aralyk, 50 km/h tizligiň metr sekuntlarda 13,88 m/s ekenligini hasaba alsak, 50 metrden geçmeli dälliginden

$$0{,}5\upsilon + 0{,}12\upsilon^2 \le 50,$$

ýagny

$$0{,}12\upsilon^2 + 0{,}5\upsilon - 50 \le 0. \qquad (1)$$

△ Bu deňsizligi çözmek üçin ilki $0{,}12\upsilon^2 + 0{,}5\upsilon - 50$ üçagzanyň köklerini tapýarys:

$$0{,}12\upsilon^2 + 0{,}5\upsilon - 50 = 0,$$

mundan

$$12\upsilon^2 + 50\upsilon - 5000 = 0.$$

Deňlemäni çözýäris:

$$\upsilon_{1,2} = \frac{-50 - \sqrt{50^2 - 4 \cdot 12(-5000)}}{2 \cdot 12} = \frac{-25(1 - \sqrt{97})}{12},$$

mundan $\upsilon_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ we $\upsilon_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Onda, (1) deňsizligiň çözüwi $\upsilon_1 \leq \upsilon \leq \upsilon_2$ aralykdaky sanlardan ybarat. Ýöne meseläniň mazmunyna görä, $\upsilon > 0$, diýmek, bahalanýan υ tizlik $0 < \upsilon \leq \upsilon_2$ aralykdan daşary çykyp gitmeli däl, ýagny $\upsilon \leq \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18{,}43$ m/s ýa-da 66,35 *km/h*-dan geçmeli däl.

Jogaby: tizlik 66,35 *km/h*-dan geçmeli däl. ▲

2-nji mesele. Bazarda mälim bir görnüşdäki harytlardan n sanysy bar we olar bir sanysy p pul birliginde satylýar diýeliň. Monitoringiň görkezişi ýaly, şu haryda bolan talap artanda onuň nyrhy artýar we getirilýän şeýle harytlaryň sany $n = 40p$ formula görä artýar. Ikinji tarapdan, bazara girip gelip, hyrydarlara hödürlenýän harytlaryň sany n barha artyp başlamagy bilen onuň nyrhy ters proporsional ýagdaýda peselýändigi mälim:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Bazara girip gelýän harytlar sanyna goýulýan şertni anyklaň.

△ Meselede soralaýan şerti anyklamak üçin teklip edilýän nyrh $\frac{150}{n-40}$ talap bilen bagly nyrh $\frac{n}{40}$-dan kem bolmazlyk şertinden peýdalanýarys:

$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

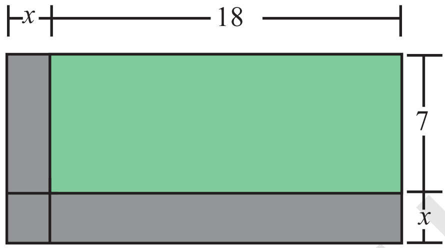
Mundan

$$n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

deňsizligi alarys. Onuň çözüwleri $-60 \leq n \leq 100$. Meseläniň mazmunyna görä bazara girip gelýän harytlar sany n natural san we ol 100-den geçmeli däl.

Jogaby: $n \leq 100$. ▲

3-nji mesele. Siz 7 metre 18 metrlik bagyňyzyň iki tarapynda daşdan ýoda etmekçisiňiz (43-nji surat). Ýöne Siz munuň üçin 54 kwadrat metrden artyk bolmaýan ýeri örtmäge ýetýän serişde göberip biljeksiňiz. Şeýle ýodanyň ini köpi bilen nähili bolmaly?



43-nji surat

△ Hany aýdyň, meseläniň çözüwini tapmak üçin umumy meýdan $(x + 18) \cdot (x + 7)$ kw.m-dan bagyň meýdany $18 \cdot 7 = 126$ kw.m-i aýryp, netije ýodanyň meýdany 54 kw.m-dan geçmeli däldigini hasaba almalydyrys:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \qquad (1)$$

Mundan

$$x^2 + 25x - 54 \leq 0 \qquad (2)$$

kwadrat deňsizligi alarys. $x^2+25x-54$ kwadrat üçagzanyň kökleri $x_1 = -27$ we $x_2 = 2$ bolany üçin (2) deňsizligiň çözüwleri $-27 \leq x \leq 2$ aralykdaky sanlardan ybarat bolýar. Ýöne meseläniň mazmunyna görä ýodanyň ini x otrisatel san ýa-da nol bolup bilmeýär. Şu sebäpli ýodanyň ini $0 < x \leq 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan san bolup bilýär. Diýmek, ýodanyň ini 2 metrden geçmeli däl.

Jogaby: ýodanyň ini köpi bilen 2 metr. ▲

Meseleler

1. Ýük maşyny v hemişelik tizlik bilen hereketlenýär. Stop çyzygyna çenli 50 metr galanda swetoforyň ýaşyl çyrasy öçüp-ýanyp başlady Şundan ýarym sekunt geçenden soň sürüji tormozlanmagy başlady we stop çyzygyna ýetmezden saklandy. Ýol hereketi kadalaryndan mälim bolşy ýaly, $v_0 = 50$ *km/h* tizlik bilen hereket eden ýük maşynynyň tormozlanma ýoly $S_0 = 28{,}9$ m. Ýük maşynynyň swetofor öçüp-ýanyp başlanandaky v tizligini 0,01 takyklykda bahalaň.

2. Bazarda mälim bir görnüşdäki harytlardan n sanysy bar we olar bir sanysy p pul birliginde satylýar diýeliň. Monitoringiň görkezmegine görä, şu haryda bolan talap artanda onuň nyrhy artýar we getirilýän şeýle harytlaryň sany $n = 60p$ formula görä artýar. Ikinji tarapdan, bazara girip gelip, hyrydarlara hödürlenýän harytlaryň sany n barha artyp başlamagy bilen onuň nyrhy ters proporsional ýagdaýda barha peselýändigi mälim:

$$p = \frac{60}{n - 40}.$$

Bazara girip gelýän harydyň sanyna goýulýan şerti anyklaň.

3. Kompaniýa reklama umumy x (100 müňlerde) som sarplasyn we onuň netijesinde P peýda gazansyn diýeliň, munda $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Reklama näçe pul sarplansa, netijede peýda iň köp bolar?

4. Önüm öndürýän kiçi kärhananyň aýlyk peýdasy $P = 250n - n^2$ (müň somlarda) model bilen aňladylýar diýeliň, bu ýerde n – öndürilen we satylan önümler sany. Iň uly peýda almak üçin kiçi kärhana aýyna näçe önüm öndürmeli we satmaly?

5. Günorta Amerikanyň ýagynly tokaýlarynyň birinde seýrek görnüşdäki mör-möjek tapyldy we daşky gurşawy öwrenýän hünärmen mör-möjekleri goralýan çäge geçirdi. Geçirilenden soň mör-möjekleriň sany t aýda

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t)$$

kanunalaýyklyk bilen barha artan bolsa:

1) $t = 0$ bolanda mör-möjekleriň sany näçe bolupdyr?
2) 10 ýyldan soň olaryň sany näçe bolar?
3) Haçan olaryň sany 549 bolar?

Taryhy maglumatlar

Abu Reýhan Biruny (973–1048)

„Funksiýa“ sözi latynça „*functio*“ sözünden alnan bolup, ol „bolup geçmek“, „ýerine ýetirmek“ diýen manyny aňladýar. Funksiýanyň ilkinji kesgitlemeleri **G.Leýbnisiň** (1646–1716), **I.Bernulliniň** (1667–1748), **N.I.Lobaçewskiýniň** (1792–1856) eserlerinde berlen.

Funksiýanyň häzirki kesgitlemesini bilmeseler-de, gadymky alymlar üýtgeýji mukdarlaryň arasynda funksional baglanyşygyň bolmalydygyna düşünipdirler.

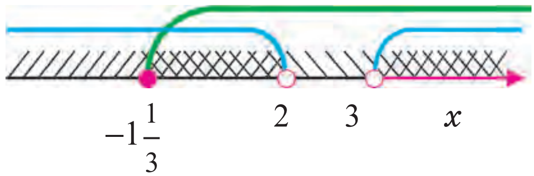
Dört müň ýyldan öňräk Mesopotamiýanyň alymlary radiusy r bolan tegelegiň meýdany üçin – ýalňyşlygy duýarly bolsa-da – $S=3r^2$ formulany çykarypdyrlar.

Sanyň derejesi baradaky ilkinji maglumatlar gadymky wawilonlylardan bize çenli ýetip gelen ýazgylarda bar. Hususanda, olarda natural sanlaryň kwadratlarynyň, kublarynyň jedwelleri berlen.

Sanlaryň kwadratlarynyň, kublarynyň jedweli, logarifmler jedweli, trigonometrik jedweller, kwadrat kökleriň jedweli diňe mukdarlaryň arasyndaky baglanyşygyň jedwel usulynda berlişi.

Beýik ensiklopedist alym **Abu Reýhan Biruny** hem öz eserlerinde funksiýa düşünjesinden, onuň häsiýetlerinden peýdalanypdyr. Abu Reýhan Biruny meşhur «Kanuny Ma’sudiý» eseriniň 6-njy makalasynda argumentiň we funksiýanyň özgeriş aralyklary, funksiýanyň alamatlary we iň uly, iň kiçi bahalaryny kesgitleýär.

II BAP. DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER SISTEMALARY



13-§. IKINJI DEREJELI DEŇLEME GATNAŞÝAN IŇ ÝÖNEKEÝ SISTEMALARY ÇÖZMEK

1-nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy $\sqrt{13}$ cm-e deň, onuň meýdany bolsa 3 cm^2. Üçburçlugyň katetlerini tapyň.

△ Üçburçlugyň katetleri x we y santimetre deň bolsun. Pifagoryň teoremasyndan we gönüburçly üçburçlugyň meýdanynyň formulasyndan peýdalanyp, meseläniň şertini şeýle ýazýarys:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \tag{1}$$

Sistemanyň birinji deňlemesine 4-e köpeldilen ikinji deňlemesini goşup, aşakdakyny alarys:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

mundan $(x + y)^2 = 25$ ýa-da $x + y = \pm 5$. x we y-ler položitel sanlar bolany üçin $x + y = 5$ bolýar. Bu deňlemede y -i x arkaly aňladýarys we (1) sistemanyň deňlemelerinden birine, meselem, ikinji deňlemä goýýarys:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Alnan deňlemäni çözýäris:

$$5x - x^2 = 6,\;\; x^2 - 5x + 6 = 0,\;\; x_1 = 2,\;\; x_2 = 3.$$

Bu bahalary $y = 5 - x$ formula goýup, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$-ni tapýarys. Iki ýagdaýda-da katetlerden biri 2 cm, ikinji bolsa 3 cm.

Jogaby: 2 cm, 3 cm. ▲

2-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ Wiýetiň teoremasyna ters teorema görä, x we y sanlar

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

kwadrat deňlemäniň kökleri bolýar. Bu deňlemäni çözüp, aşakdakyny alarys: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Diýmek, sistemanyň çözüwleri aşakdaky sanlaryň jübütlikleri bolýar: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ we $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Jogaby: (5; –2), (–2; 5). ▲

3-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

△ Bu sistemany ýerine goýmak usuly bilen çözýäris:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Bu deňlemäni ýönekeýleşdirip, aşakdakyny alarys: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, mundan $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. x-iň bahasyny $y = 3x - 6$ formula goýup, $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

4-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Sistemanyň birinji deňlemesini şeýle ýazýarys:

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Muňa $x-y=2$-ni goýup, $x+y=8$-i alarys. Şeýlelikde,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Bu sistemany goşmak usuly bilen çözüp, $x=5$, $y=3$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: (5; 3). ▲

Gönükmeler

153. Iki nämälimli birinji derejeli deňlemeler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Deňlemeler sistemasyny çözüň (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=7, \\ x+y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=-11, \\ xy=18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x+y=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2-y^2=-3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x+y=7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=10, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=5, \\ x^2+y^2=26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ xy=7. \end{cases}$

159. Iki sanyň jemi 18-e, olaryň köpeltmek hasyly bolsa 65-e deň. Şu sanlary tapyň.

160. Iki sanyň orta arifmetigi 20-ä, olaryň orta geometrigi bolsa 12-ä deň. Şu sanlary tapyň.

161. Deňlemeler sistemasyny çözüň (**161–163**):

1) $\begin{cases} x+2y=-3, \\ y^2-2x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=21, \\ x+y=7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-y^2=46, \\ xy=10; \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x-y)^2=4, \\ x+y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 4+xy=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=4, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1. \end{cases}$

164. Gönüburçluk şeklindäki uçastogy 1 km uzynlykdaky diwar bilen gurşamaly. Eger uçastoguň meýdany 6 ha bolsa, onuň uzynlygy we ini nähili bolmaly?

14-§. DEŇLEMELER SISTEMASYNY ÇÖZMEGIŇ DÜRLI USULLARY

1-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Sistemanyň deňlemelerini agzama-agza goşup, alarys: $2x+2y=8$, mundan $y=4-x$. Bu aňlatmany sistemanyň islendik, meselem, ikinji deňlemesine goýýarys:

$$x + 4 - x - 2x(4-x) = -2,$$
$$4 - 8x + 2x^2 = -2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$y=4-x$ bolýanlygyndan $y_1=3$, $y_2=1$.

Jogap. (1; 3), (3; 1). ▲

2-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Sistemanyň birinji deňlemesinden $y^2=x-3$. Bu aňlatmany sistemanyň ikinji deňlemesine goýýarys:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0,$$

Mundan $x_1=7$, $x_2=-4$.

$y^2=x-3$ bolýanlygyndan y-iň bahasyny tapýarys:

1) Eger-de $x=7$ bolsa, onda $y^2 = 7 - 3$, $y^2=4$, mundan $y=2$ ýa-da $y=-2$;
2) Eger-de $x=-4$ bolsa, onda $y^2=-4-3<0$, diýmek, hakyky kökler ýok.

Jogaby: (7; 2), (7; –2). ▲

Eger-de birinji deňlemede x -i y arkaly aňladyp, ikinji deňlemä goýulsa, bikwadrat deňlemäni çözmäge getirjekdigini belläp geçmek ýerliklidir.

3-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Eger-de $(x; y)$ – sistemanyň çözüwi bolsa, onda $x \neq 0$ we $y \neq 0$. Sistemanyň ikinji deňlemesini aşakdaky ýaly ýazýarys: $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$.

Emele gelen deňlemä $x + y = 12$ bahany goýýarys: $\frac{12}{xy} = \frac{3}{8}$, mundan $xy = 32$.

Berlen sistemany çözmek aşakdaky sistemany çözmäge getirildi:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Wiýetiň teoremasyna ters teorema esasan alarys: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Jogaby: (4; 8), (8; 4). ▲

4-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Sistemanyň ikinji deňlemesini $xy(x - y) = 2$ görnüşde ýazyp alýarys. Hany aýdyň, $x \neq 0$, $y \neq 0$, we $x - y \neq 0$, onda sistemanyň birinji deňlemesini ikinji deňlemä bölüp, alarys:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{7}{2};$$

$$2(x^2+xy+y^2)=7xy,$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Emele gelen deňlemäni x-e görä kwadrat deňleme hökmünde garap, köklerini tapýarys:

$$x_{1,2}=\frac{5y-\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y-3y}{4}.$$

Mundan $x_1=2y$ ýa-da $x_2=\frac{y}{2}$.

Sistemanyň ikinji deňlemesine x-iň y arkaly tapylan aňlatmalaryny goýup, alarys:

1) eger-de $x=2y$ bolsa, onda $4y^3-2y^3=2$, mundan $y^3=1$ we $x=2$;

2) eger-de $x=\frac{y}{2}$ bolsa, onda $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, mundan $y^3=-8$, $y=-2$ we $x=-1$.

Jogaby: (2; 1), (–1; –2).

5-nji mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases}x^2-2xy+4y^2=7,\\ x^3+8y^3=35.\end{cases}$$

Kublaryň jeminiň formulasyny ulanyp, sistemanyň ikinji deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Bu deňlemäni sistemanyň birinji deňlemesine bolup, tapýarys: $x+2y=5$.

Bu deňlemeden $2y$-i x arkaly aňladýarys: $2y=5-x$ we sistemanyň ikinji deňlemesine goýýarys:

$$x^3+(5-x)^3=35,$$
$$x^3+125-75x+15x^2-x^3=35,$$
$$15x^2-75x+90=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=3,\ \ x_2=2.$$

Degişlilikde y-iň bahalaryny tapýarys:

1) $2y=5-3$, mundan $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, mundan $y_2=\frac{3}{2}$.

Jogaby: $(3;\ 1)$, $(2;\ \frac{3}{2})$.

6-njy mesele. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x-y=5, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ diýip belgilesek, $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$, $t>0$ bolýar. Onda sistemanyň ikinji deňlemesi $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$ görnüşe gelýär. Bu deňlemäniň iki tarapyny hem t-ge köpeldýäris:

$$t^2-\frac{5}{6}t-1=0.$$

Mundan $t_{1,2}=\frac{5}{12}-\sqrt{\frac{25}{144}+1}=\frac{5}{12}-\frac{13}{12}$, $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{2}{3}$.

$t>0$ bolany üçin $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$ yoki $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$, mundan $x=\frac{9}{4}y$. x üçin bu aňlatmany sistemanyň birinji deňlemesine goýup, alarys: $\frac{9}{4}y-y=5$, $\frac{5}{4}y=5$, $y=4$, şu sebäpli $x=9$.

Jogaby: $(9;\ 4)$.

Gönükmeler

Deňlemeler sistemasyny çözüň (**165–175**):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

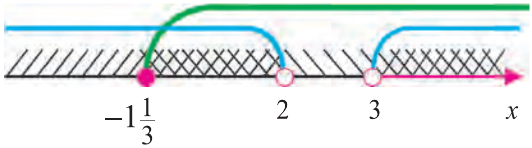
15-§. IKINJI DEREJELI BIR NOMÄLIMLI DEŇSIZLIKLER SISTEMALARY

1-nji mesele. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Bu deňsizliklerden birinjisi kwadrat deňsizlik , ikinjisi bolsa çyzykly deňsizlik. Birinji deňsizligiň çözüwleri 6-njy paragrafdaky 2-nji meselede görkezilişi ýaly $x < 2$ we $x > 3$ aralyklardaky ähli sanlardan ybarat. Ikinji deňsizligiň çözüwleri bolsa $x \geq -1\frac{1}{3}$ aralykdaky sanlardyr. Bir sanlar okunda hem birinji, hem ikinji deňsizlikleriň çözüwleri toplumyny şekillendireliň.

Hany aýdyň, sistemanyň iki deňsizligini hem bir wagtyň özünde kanagat-landyrýan sanlar $-1\frac{1}{3} \le x < 2$ we $x < 3$ aralyklardan ybarat (44-nji surat).



44-nji surat.

Jogaby: $-1\frac{1}{3} \le x < 2, x > 3.$ ▲

2-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$|x^2-x-1|<1.$$

△ $|x^2-x-1|<1$ deňsizlik iki taraplaýyn deňsizlige deňgüýçli bolýandygyny bilýäris:

$$-1<x^2-x-1<1.$$

Bu bolsa iki deňsizlikden ybarat sistema deňgüýçli:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

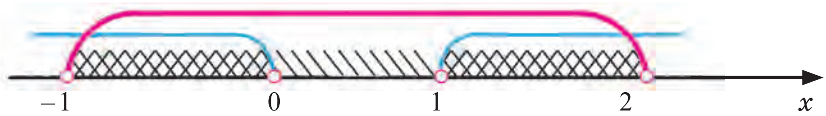
ýa-da

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Ilki birinji deňsizligi çözýäris: $D=(-1)^2-4(-2)=9>0$, diýmek, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Mundan birinji deňsizligi kanagatlandyrýan sanlar $-1<x<2$ aralykdygy gelip çykýar.

Ikinji deňsizligi çözýäris: $x^2-x=x(x-1)>0$. Diýmek, bu deňsizligiň çözüwi $x<0$ we $x>1$ aralyklardaky ähli sanlardyr.

Iki deňsizligiň çözüwlerini bir sanlar okunda şekillendirýäris (45-nji surat).



45-nji surat.

Mundan sistemanyň çözüwi $-1<x<0$ we $1<x<2$ aralyklarda ýatýan ähli sanlardan ybaratdygy gelip çykýar.

Jogaby: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

3-nji mesele. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

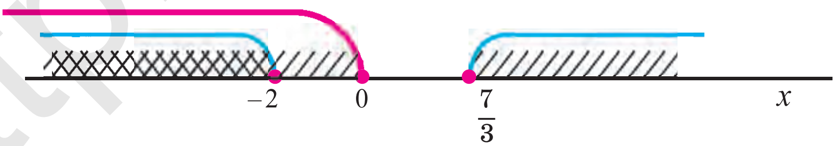
△ Kwadrat kök astynda duran sanlar otrisatel bolmazlygy şert bolany üçin berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy aşakdaky deňsizlikler sistemasynyň çözüwinden ybarat:

$$\begin{cases} 3x^2-x-14\geq 0, \\ -x\geq 0. \end{cases}$$

Ilki birinji deňsizligi çözýäris. $3x^2-x-14$ kwadrat üçagzanyň diskriminanty $D=(-1)^2-4\cdot 3(-14)=169$, diýmek, $x_1=\frac{1-13}{6}=-2$, $x_2=\frac{1+13}{6}=\frac{7}{3}$. şonuň üçin we kwadrat üçagzanyň şahalary ýokary ugrukdyrylany sebäpli birinji deňsizligiň çözüwleri $x\leq -2$ *va* $x\geq \frac{7}{3}$. aralyklardan ybarat.

Hany aýdyň, ikinji deňsizligi –1-e köpeldip, onuň çözüwleri $x\leq 0$ aralykdan alnan ähli sanlardan ybaratdygyny görmek mümkin.

Birinji we ikinji deňsizlikleriň çözüwlerini bir sanlar okunda aňladýarys (46-njy surat).



46-njy surat.

Mundan sistemanyň çözüwi $x\leq -2$ bolýandygy gelip çykýar.

Jogap. $x\leq -2$. ▲

Gönükmeler

176. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 4x+9>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

177. Deňsizligi çözüň:

1) $|x^2-6x|<27$; 2) $|x^2+6x|\le 27$;

3) $|x^2+4x|<12$; 4) $|x^2-4x|\le 12$.

Deňsizlikler sistemalaryni çözüň (**178–181**):

178. 1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x-x^2>0, \\ 36-x^2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+x^2<0, \\ 49-x^2>0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2+x+20\le 0, \\ x^2-x-2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x<0, \\ -x^2+x+2\ge 0. \end{cases}$

182. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $y=\sqrt{-x^2-6x-8}+\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$, 2) $y=\sqrt{x-x^2}-\sqrt{-x^2+12x-35}$.

16-§. ÝÖNEKEÝ DEŇSIZLIKLERI SUBUT ETMEK

Deňsizlikleri subut etmegiň dürli usullary bar. Olardan käbirleriniň ulanylyşyna garap geçýäris.

1-nji mesele. Iki položitel a we b sanyň orta arifmetigi şu sanlaryň orta geometriginden kiçi däldigini subut ediň:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Deňsizligi *göni kesgitlemä esasan* subut edýäris, munda $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ bolýandygyny subut etmek talap edilýär.

Bu deňsizligiň çep böleginiň şeklini çalşyryp, aşakdakyny alarys:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

(1) gatnaşykda deňlik belgisi diňe $a=b$ bolandaka dogrudygyny nygtaýarys. ▲

2-nji mesele. Iki položitel a we b sanyň orta geometrigi şu sanlaryň orta garmoniginden kiçi däldigini subut ediň:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Bu deňsizligi *öň subut edilen* (1) *deňsizlikden peýdalanyp* hem-de sanawjysy üýtgemän maýdalawjysy kiçelende položitel drobuň ulalmagyndan peýdalanyp subut edýäris:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$ ▲

3-nji mesele. Islendik položitel a san üçin deňsizligi subut ediň:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3)$$

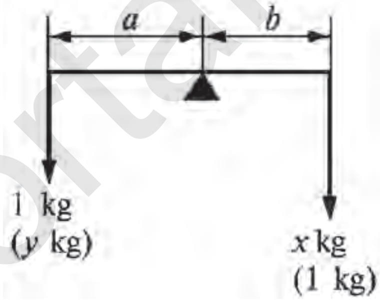
△ Bu deňsizligi *tersini çak etmek usuly* bilen subut edýäris. Munda (3) deňsizlik a-nyň käbir bir položitel bahasynda ýerine ýetirilmesin diýip çak edýäris, ýagny

$$a + \frac{1}{a} < 2$$

deňsizlik ýerlikli bolsun. Deňsizligiň iki bölegini hem a-ga köpeldip, alarys:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

ýagny $a^2 + 1 - 2a < 0$ ýa-da $(a - 1)^2 < 0$, bu bolsa nädogry deňsizlik, çünki islendik hakyky sanyň kwadraty (şol sanda $(a - 1)^2$ hem) otrisatel däl. Emele gelen gapma-garşylykdan (3) deňsizlik islendik položitel a-da dogry deňsizlikdigi gelip çykýar. ▲



47-nji surat.

4-nji mesele. Satyjy almalary jamly terezide çekýär. Hyrydar 1 kg alma aldy, soňra bolsa satyjydan ölçände almalar bilen daşlaryň ýerini çalşyryp çekmegi haýyş edip, ýene 1 kg alma aldy. Eger terezi dogurlanan bolsa, kim zyýan görer?

△ Aýdaly, tereziniň eginleri a we b-ge deň bolsun (47-nji surat). Suratdan görnüşi ýaly, $a \neq b$. Birinji gezek çekende hyrydar x kilogram alma aldy. Fizika kursundan mälim bolşy ýaly, $x \cdot b = 1 \cdot a$, mundan $x = \frac{a}{b}$. Ikinji gezek çekende hyrydar y kilogram alma aldy. Deňagramlylyk şertinden $y \cdot a = 1 \cdot b$, mundan $y = \frac{b}{a}$. Şeýlelikde, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ kilogram alma satyn alnypdyr.

$\frac{a}{b}$ we $\frac{b}{a}$ sanlaryň orta arifmetigi we orta geometrigi üçin deňsizlikden peýdalanyp, aşakdakyny alarys:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

mundan $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Jogaby: satyjy zyýan görýär. ▲

Gönükmeler

183. Islendik hakyky a, b, x-lerde deňsizlikleriň dogrudygyny subut ediň:

1) $\frac{a^2+1}{2} \geq a$; 2) $\frac{b^2+16}{4} \geq b$; 3) $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$; 4) $\frac{2x}{4x^2+9} \leq \frac{1}{6}$.

184. Eger-de $ab > 0$ bolsa, deňsizligi subut ediň:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

185. Eger-de $a \geq -1$, $a \neq 0$ bolsa, deňsizligi subut ediň:

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

186. $a \geq 0$, $b \geq 0$ we $a \neq b$ bolsa, onda $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ we $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ leriň haýsysy uly?

187. Deňsizligi subut ediň:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6) > 96a^2,$$

bu ýerde $a > 0$.

188. Eger-de $a > 0$ bolsa, deňsizligi subut ediň:

$$\frac{a+4}{2} + \frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}.$$

189. Eger-de a, b, c, d-ler položitel sanlar bolsa, onda

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

deňsizligi subut ediň.

190. Eger-de $a \geq 0$, $b \geq 0$ we $c > 0$ bolsa, onda $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ bolýandygyny subut ediň.

191. Eger-de $a>0$, $b>0$ bolsa, onda $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

192. Eger-de $a>0$, $b>0$ we $c>0$ bolsa, onda

$$\left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ac}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right)\geq 8$$

deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

II baba degişli gönükmeler

193. Berlen aňlatmany bir üýtgeýji boýunça kwadrat üçagza görnüşinde ýazyň:

1) $2y^2-xy+3$, eger-de $y=3x+1$;
2) $2xy+3x^2-7$, eger-de $x=2y+1$.

194. Deňlemeler sistemasyny ornuna goýmak usuly bilen çözüň:

1) $\begin{cases} x+y=-1, \\ y^2-7x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3y=13, \\ x-y=3. \end{cases}$

195. Wiýetiň teoremasyna ters teoremany ulanyp, deňlemeler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} x+\mathrm{y}=-10, \\ xy=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=-30, \\ x+y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=-16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=-10. \end{cases}$

Deňlemeler sistemasyny çözüň (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Deňlemeler sistemasyny çözüň (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Ikibelgili san özüniň sifrleriniň jeminden üç esse uly. Sifrleriniň jeminiň kwadraty bolsa berlen sandan üç esse uly. Şu sany tapyň.

2) Ikibelgili san özüniň sifrleriniň jeminden 4 esse uly. Sifrleriniň jeminiň kwadraty bolsa berlen sanyň $\frac{3}{2}$ bölegini düzýär. Şu sany tapyň.

206. 1) Iki kwadratyň taraplarynyň gatnaşygy 5:4 ýaly. Eger-de her bir kwadratyň taraplary 2 cm-e kemeldilse, onda emele gelen kwadratlar meýdanlarynyng tapawudy 2,8 cm^2-a deň bolýar. Berlen kwadratlaryň taraplaryny tapyň.

2) Gönüburçlugyň uzynlygynyň inine gatnaşygy 3:2 ýaly. Eger-de olary 1 cm-dan ulaltsak, täze emele gelen gönüburçlugyň meýdany birinji gönüburçlugyň meýdanyndan 3 cm^2-a uly bolýar. Birinji gönüburçlugyň uzynlygyny we inini tapyň.

207. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

208. 1) Eger-de $xy = 9$ we $x > 0$ bolýandygy mälim bolsa, $x + y$-iň iň kiçi bahasyny tapyň.
2) Eger-de $ab = 8$ we $b > 0$ bolsa, onda $2a+b$-niň iň kiçi bahasyny tapyň.

209. Aňlatmanyň iň kiçi bahasyny tapyň:

1) $4x + \frac{81}{25x}$, $(x > 0)$; 2) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$, $x > 0$;

3) $\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}$, $(y > 0)$; 4) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}$.

210. Eger-de $x+y=10$ we $x>0$, $y>0$ bolsa, onda xy-iň iň uly bahasyny tapyň.

211. Eger-de $2x+y=6$ we $x>0$, $y>0$ bolsa, onda xy-iň iň uly bahasyny tapyň.

212. Deňsizligi subut ediň:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

II baba degişli synag (test) gönükmeleri

1. Deňlemeler sistemasyny çözüň: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

A) $x = -4$, $y = -1$; B) $x = 1$, $y = -4$;
C) $x = 4$, $y = -1$; D) (1; 4) we (4; 1).

2. Deňlemeler sistemasyny çözüň: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

A) $x = 3$, $y = 1$; B) $x = 5$, $y = -1$;
C) $x = 4$, $y = 0$; D) $x = 1$, $y = 3$.

3. Iki sanyň tapawudy 3-e, olaryň köpeltmek hasyly 28-e deň. Şu sanlary tapyň.

A) 7 we 4; B) 5 we 2; C) 14 we 2; D) 11 we 8.

4. Gönüburçlugyň perimetri 30 m-e, meýdany bolsa 56 m^2-a deň. Onuň uzynlygy ininden näçe metr uzyn?

A) 1,2 m; B) 1 m; C) 2 m; D) 2,5 m.

5. 60 km aralygy bir welosipedçi ikinjä garanda 1 sagat gijräk geçdi. Eger birinji welosipedçiniň tizligi ikinjisiniň tizliginden 5 *km/h* kem bolsa, her bir welosipedçiniň tizligini tapyň.

A) 20 km/h, 25 km/h; B) 10 km/h, 15 km/h;
C) 15 km/h, 20 km/h; D) 12 km/h, 17 km/h.

6. Deňlemeler sistemasyny çözüň: $\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$

A) (0,6; 4) we (12; 0,2); B) (0,4; 6) we (0,12; 2);
C) (4; 0,6) we (12; 0,2); D) (4; 0,2) we (12; 0,6).

7. Deňlemeler sistemasyny çözüň: $\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$

A) (6; 4) we (4; 3); B) (–3; 6) we (6; –3);
C) (6; 3) we (3; –6); D) (6; 3) we (6; –3).

8. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

A) (–10; 5) we (2; 5); B) (–10; 2) we (5; 5);
C) (5; –10) we (–10; 2); D) (5; 5) we (–2; 10).

9. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$

A) (4; $\frac{1}{2}$) we (–2; –1); B) (–2; $\frac{1}{2}$) we (4; –1);

C) (4; 1) we (–4; –2); D) (–2; –1) we (2; 1).

10. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

A) (–1;12); B) (12;–1); C) (–1;11); D) (11;–1).

11. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

A) $-4 < y < \dfrac{2}{3}$; B) $-4,5 < y < \dfrac{2}{3}$; C) $x > -4,5$; D) $x < \dfrac{2}{3}$.

12. Deňsizligi çözüň: $|x^2 + x - 1| \leq 1$.

A) $-2 \leq x \leq 1$, $2 < x \leq 3$; B) $-2 \leq x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$;

C) $-1 \leq x \leq 0$, $1 < x \leq 2$; D) $x \leq -2$, $x \geq 1$.

Amaly we predmetara bagly meseleler

Mesele. Iki ýük maşyny bilelikde işläp, ýüki 6 sagatda daşamalydylar. Ikinji maşyn işiň başlanyşyna gijä galanlygy sebäpli, ol gelýänçe birinji maşyn ähli ýüküň $\frac{3}{5}$ bölegini daşap boldy. Ýüküň galan bölegini diňe ikinji maşyn daşady we şu sebäpli ýüki daşamaga 12 sagat wagt gitdi. Ýüki her bir maşynyň ýeke özi näçe wagtda daşan bolardy?

△ Ýük maşynlary daşamaly bolan ýüki bir diýip kabul edeliň. Ähli ýüki aýratyn özi daşamagy üçin birinji maşynyň sarplaýan wagtyny x sagat, ikinji maşyn sarplaýan wagty bolsa y sagat arkaly belgiläliň. Onda bir sagatda birinji maşyn ýüküň $\frac{1}{x}$ bölegini, ikinji bolsa $\frac{1}{y}$ bölegini daşan bolardy.

Bilelikde işläp, olar bir sagatda ähli ýüküň $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bölegini daşan bolardy we meseläniň şertine görä ýüki 6 sagatda daşan bolardy. Şu sebäpli, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1.$

Ýöne aslynda birinji maşyn, ýükining $\frac{3}{5}$ bölegini daşamaga öz wagtining $\frac{3}{5}$ bölegini sarfladi, ýüküň galan bölegini bolsa ikinji maşyn daşady we oňa öz wagtynyň $\frac{2}{5}$ bölegini sarplady. Munda ähli ýüki daşamaga 12 sagat gidenligini hasaba alsak, ikinji deňlemäni alarys:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Mesele aşakdaky deňlemeler sistemasyny çözmäge getirildi:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1,\\ \frac{3}{5}\mathrm{x}+\frac{2}{5}\mathrm{y}=12.\end{cases}$$

Ilki bilen sistemany ýönekeýleşdirip, soň ony ornuna goýmak usuly bilen çözýäris:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x=60-2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

mundan, $y^2-27y+180=0,$

$$y_{1,2} = \frac{27}{2} - \sqrt{\frac{729}{4} - 180} = \frac{27}{2} - \frac{3}{2},\ y_1 = 15,\ y_2 = 12.$$

$x = -20 - \frac{2}{3}y$ formuladan peýdalanyp, alarys

$$x_1 = 10,\ x_2 = 12.$$

Jogaby: 10 sagat we 15 sagat – eger-de maşynlaryň ýük göteriş mümkinçilikleri dürlüçe bolsa;

12 sagat we 12 sagat – eger-de maşynlaryň ýük göteriş mümkinçilikleri birmeňzeş bolsa. ▲

Meseleler

1. 1) Birinji tomaşa zalynda 420 sany, ikinji zalda bolsa 480 sany oturgyç bar. Ikinji zalda birinjä garanda 5 ta hatar kam, ýöne her bir hatarda birinji zaldaky her bir hatardan 10 sany oturgyç köpräk. Birinji zaldaky her bir hatarda näçe oturgyç bar?

2) Gyzyl zalda 320 sany, gök zalda 360 sany oturgyç bar. Gyzyl zalda gök zaldaka garanda 2 hatar köp, ýöne her bir hatarda gök zalyň her bir hataryndaka garanda 4 sanydan oturgyç kem. Gyzyl zalda näçe hatar bar?

2. 1) Iki nasos bilelikde işläp 80 m^3 göwrümli basseýni käbir wagtda dolduryarlar. Eger-de öndürijiligini $1\frac{1}{3}$ esse artdyran birinji nasosyň diňe özi işlände basseýni doldurmaga 2 sagat köpräk wagt gerek bolardy. Eger-de diňe ikinji nasos öz öndürijiligini sagadyna 1 m^3-e kemeldip işlände basseýni doldurmaga gidýän wagt $3\frac{1}{3}$ esse köpräk bolardy (iki nasos bilelikde işländäki wagta görä). Her bir nasosyň öndürijiligi nähili?

2) Hünärleri birmeňzeş dürli sandaky işçilerden guralan iki brigada detallar taýýarlaýarlar, munda her bir işçi iş gününiň dowamynda 2 detal taýýarlaýar. Ilki diňe birinji brigada işläp 32 detal taýýarlady. Soň ikinji brigadanyň özi işläp, ýene 48 detal taýýarlady. Bu işleriň hemmesine 4 gün wagt gitdi. Şundan soň bilelikde 6 gün işläp, 240 detal taýýarladylar. Her bir brigadada näçeden işçi bar?

3. 1) Önümiň ýarysy 10% peýda bilen, ikinji ýarymynyň ýarysy 20% peýda bilen satyldy. Eger-de hemme önümi satmakdan düşen umumy peýda 12% bolan bolsa, önümiň galan çärýegi näçe göterim peýda satylypdyr?

2) Söwda firmasy dükanlara harydy goşmaça nyrh bilen üpjün edýär: harytlaryň $\frac{3}{5}$ bölegine 5% goşmaça hak goýup, galan harytlaryň ýarysyna 4% goşmaça hak goýup satyldy. Eger-de hemme harytlara goýlan goşmaça hak 7% bolan bolsa, galan harytlaryň ikinji ýarysyna göterim hasabynda nähili goşmaça hak goýlan?

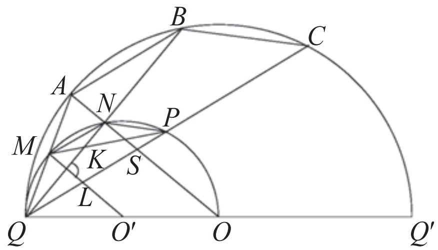
4. 1) Iki maddanyň garyndysy bar. Eger-de bu garynda ikinji maddadan 3 kg goşulsa, onda onuň garyndysyndaky mukdary göterimlerde iki esse köpelýär, eger-de başlangyç garynda birinji maddadan 3 kg goşulsa, onda ikinji maddanyň mukdary göterim hasabynda iki esse kemelýär. Her bir maddanyň başlangyç garyndydaky massasyny tapyň.

2) Iki suwuklygyň garyndysy bar. Eger-de bu garynda birinji suwuklykdan 8 litr guýulsa, onda onuň garyndydaky konsentrasiýasy iki esse artýar, eger-de başlangyç garynda ikinji suwuklykdan 8 litr guýulsa, onda birinji suwuklygyň konsentrasiýasy bir ýarym esse kemelýär. Her bir suwuklygyň garyndydaky göwrümini tapyň.

5. Samolýot A-dan B-ge çenli şemalyň ugrunda we B-den A-ga şemala garşy uçup geçdi, munda şemalyň tizligi üýtgemedi. Başga sapar samolýot şu marşrut boýunça reýsi şemalsyz howada amala aşyrdy. Iki ýagdaýda-da samolýotyň motorlary birmeňzeş kuwwatda işledi. Haýsy ýagdaýda umumy perwaza kemräk wagt gitdi?

6. Iki traktorçy ýer uçastoguny p günde sürüp bilýärler. Eger-de birinji traktorçy uçastoguň ýarysyny sürse, soň ikinji traktorçy galan bölegini sürse, onda q gün gerek bolardy. $q \geq 2p$ bolýandygyny subut ediň.

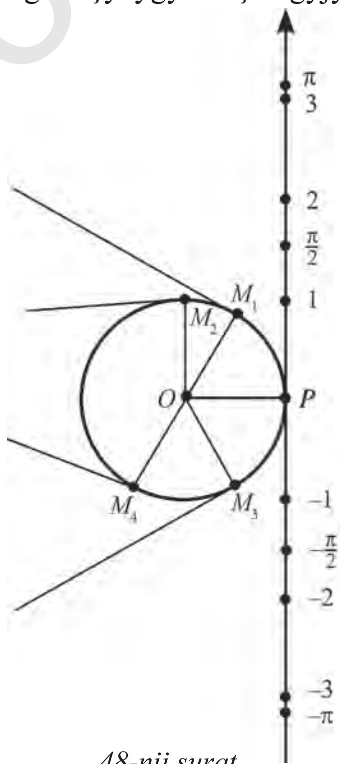
III BAP. TRIGONOMETRIÝANYŇ ELEMENTLERI



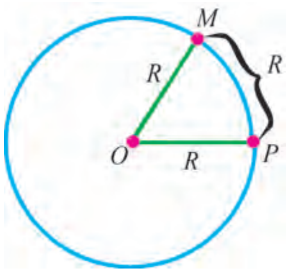
17-§. BURÇUŇ RADIAN ÖLÇEGI

Aýdaly, wertikal göni çyzygyň merkezi O nokatda we radiusy 1-e deň bolan töwerege P nokatda galtaşsyn (48-nji surat). Bu göni çyzygyň başlangyjy P nokatda bolan san oky diýip, ýokary ugry bolsa göni çyzykdaky položitel ugur diýip hasaplaýarys. San okunda uzynlyk birligi hökmünde töweregiň radiusyny alýarys. Göni çyzykda birnäçe nokady belgiläliň: ± 1, $\pm \frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm \pi$ (π – takmynan 3,14-e deň bolan irrasional sandygyny ýatladyp geçýäris). Bu göni çyzygy töwerekdäki P nokada berkidilen çözülmeýän ýüp hökmünde göz öňüne getirip, ony nyýalda töwerege dolap başlaýarys. Munda san (okunyň) göni çyzygynyň, meselem, 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2 koordinataly nokatlary töweregiň, degişlilikde, şeýle M_1, M_2, M_3, M_4 nokatlaryna geçýän bolup, PM_1 duganyň uzynlygy 1-e deň, PM_2 duganyň uzynlygy $\frac{\pi}{2}$-ge deň we başgalar.

Şeýlelikde, *göni çyzygyň her bir nokadyna töweregiň käbir nokady gabat getirilýär.*



48-nji surat.



49-njy surat.

Göni çyzygyň koordinatasy 1-e deň bolan nokadyna M_1 nokat gabat getirileni üçin, POM_1 burçy birlik burç diýip hasaplamak we bu burçuň ölçegi bilen başga burçlary ölçemek tebigydyr. Meselem, POM_2 burçy $\frac{\pi}{2}$-ge deň, POM_3 burçy –1-e deň, POM_4 burçy –2-ä deň diýip hasaplamaly. Burçlary ölçemegiň şeýle usuly matematikada we fizikada giňden ulanylýar. Munda burçlar *radian ölçeglerde ölçenýär* diýilýär, POM_1 bolsa 1 radiana (1 rad) deň burç diýilýär. Töweregiň PM_1 dugasynyň uzynlygy radiusa deňligini nygtap geçýäris (48-nji surat).

Indi islendik R radiusly töwerege garaýarys we onda uzynlygy R-e deň bolan PM dugany we POM burçy belgileýäris (49-njy surat).

> **!** **Uzynlygy töweregiň radiusyna deň bolan duga direlýän merkezi burça 1 *radian burç* diýilýär.**

Munda 1 radian burçuň uzynlygy $\boldsymbol{R}$-e deň dugany çekip durýar, diýýäris.

1 rad burçuň gradus ölçegini tapalyň. 180°-ly merkezi burçuň uzynlygy πR (ýarymtöwerek) bolan dugany çekip duranlygy üçin uzynlygy R bolan dugany π esse kiçi burç çekip durýar, ýagny

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.}$$

$\pi \approx 3{,}14$ bolany üçin 1 rad $\approx 57{,}3°$ bolýar.

Eger burç α radiandan ybarat bolsa, onda onuň gradus ölçegi aşakdaka deň bolýar:

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} a\right)^{\circ}.} \qquad (1)$$

1-nji mesele. 1) π rad; 2) $\frac{\pi}{2}$ rad; 3) $\frac{3\pi}{4}$ rad-a deň burçuň gradus ölçegini tapyň.

△ (1) formula boýunça tapýarys:

1) π rad $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90$; 3) . $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 135$.▲

1°-ly burçuň radian ölçegini tapalyň. 180°-ly burç π rad-a deň bolany üçin

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}}$$

bolýar.

Eger burç α gradusdan ybarat bolsa, onda onuň radian ölçegi

$$\boxed{\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ rad}} \qquad (2)$$

-a deň bolýar.

2-nji mesele. 1) 45°-a deň burçuň; 2) 15°-a deň burçuň radian ölçegini tapyň.

△ (2) formula boýunça tapýarys:

1) $45^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$; 2) $15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$. ▲

Köpräk duşýan burçlaryň gradus ölçeglerini we olara degişli radian ölçeglerini getirýäris:

Gradus	0	30	45	60	90	180
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Adatda, burçuň ölçegi radianlarda berilse, «rad» ady düşürlip galdyrylýar.

Burçuň radian ölçegi töweregiň dugalarynyň uzynlyklaryny hasaplamak üçin amatly. 1 radian burçuň uzynlygy R radiusa deň dugany çekip durýanlygy üçin α radian burç

$$l = \alpha R \qquad (3)$$

uzynlykdaky dugany çekip durýar.

3-nji mesele. Şäheriň kurantlary minut miliniň ujunyň radiusy $R \approx 0{,}8\,\text{m}$ bolan töwerek boýunça hereket edýär. Bu miliň ujy 15 minudyň dowamynda näçe ýoly geçýer?

△ Sagat mili 15 min dowamynda $\frac{\pi}{2}$ radiana deň burça gyşarýar. (3) formula boýunça $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bolanda tapýarys:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8\,\text{m} \approx 1{,}3\,\text{m}.$$

Jogaby: 1,3 m. ▲

(3) formula töweregiň radiusy $R=1$ bolanda has ýönekeý görnüşe eýe bolýar. Munda duganyň uzynlygy şu dugany çekip durýan merkezi burçuň ululygyna deň, ýagny $l=\alpha$ bolýar. Radian ölçegiň matematika, fizika, mehanika we başga ylymlarda ulanylyşynyň amatlylygy şunuň bilen düşündirilýär.

4-nji mesele. Radiusy R bolan tegelek sektor α rad burça eýe. Şu sektoryň meýdany

$$S = \frac{R^2}{2} a$$

deňigini subut ediň, munda $0 < \alpha < \pi$.

△ π rad-ly tegelek sektoryň (ýarymtegelegiň) meýdany $\frac{\pi R^2}{2}$ -a deň. Şonuň üçin 1 rad-ly sektoryň meýdany π esse kiçi, ýagny $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Diýmek, α rad-ly sektoryň meýdany $\frac{R^2}{2} a$ deň. ▲

Gönükmeler

213. Graduslarda aňladylan burçuň radian ölçegini tapyň:

1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Radianlarda aňladylan burçuň gradus ölçegini tapyň:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;

6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Sany 0,01-e çenli takyklykda ýazyň:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$..

216. Sanlary deňeşdiriň:

1) $\frac{\pi}{2}$ we 2; 2) 2π we 6,7; 3) π we $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ we 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ we $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ we $-\sqrt{10}$.

217. (Ýatdan.) a) deň taraply üçburçlugyň; b) deňýanly gönüburçly üçburçlugyň; ç) kwadratyň; d) dogry altyburçlugyň burçlarynyň gradus we radian ölçeglerini anyklaň.

218. Eger töweregiň 0,36 m uzynlykdaky dugasyny 0,9 rad-ly merkezi burç çekip dursa, töweregiň radiusyny hasaplaň.

219. Eger töweregiň radiusy 1,5 cm-e deň bolsa, töweregiň uzynlygy 3 cm bolan dugasyny çekip duran burçuň radian ölçegini tapyň.

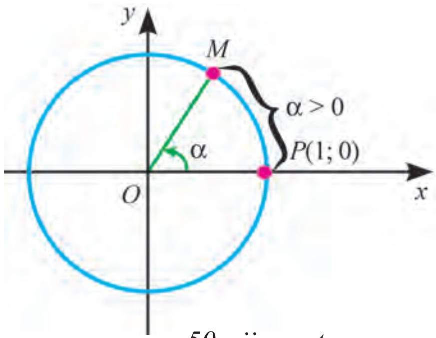
220. Tegelegiň sektorynyň dugasyny $\frac{3\pi}{4}$ rad-ly burç çekip durýar. Eger tegelegiň radiusy 1 cm-e deň bolsa, sektoryň meýdanyny tapyň.

221. Tegelegiň radiusy 2,5 cm-e deň, tegelek sektoryň meýdany bolsa 6,25 cm^2-a deň. Şu tegelek sektoryň dugasyny çekip durýan burçy tapyň.

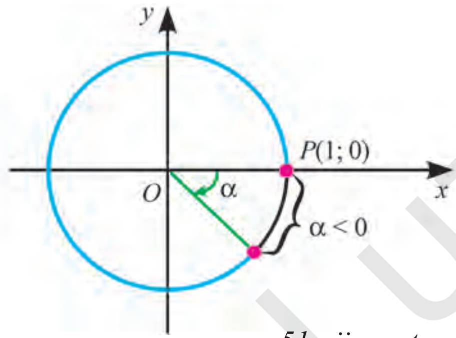
18-§. NOKADY KOORDINATALAR BAŞLANGYJYNYŇ DAŞYNDA ÖWÜRMEK

Öňki paragrafda san göni çyzygynyň nokatlary bilen töweregiň nokatlarynyň arasynda laýyklyk ornaşdyrmagyň görkezmeli usulyndan peýdalanyldy. Indi nädip hakyky sanlar bilen töweregiň nokatlarynyň arasynda töweregiň nokadyny öwürmek arkaly laýyklyk ornatmak mümkinligini görkezýäris.

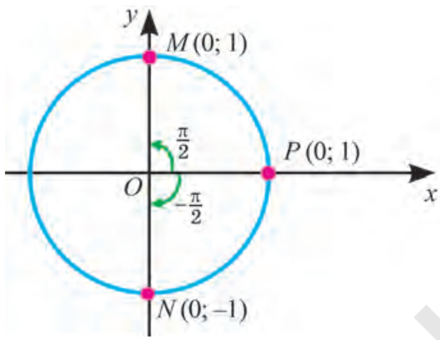
Koordinata tekizliginde radiusy 1-e deň we merkezi koordinata başlangyjynda bolan töwerege garaýarys. Oňa *birlik töwerek* diýilýär. Birlik töweregiň nokadyny koordinata başlangyjynyň daşynda α radian burça *öwürmek düşünjesini* girizýäris (bu ýerde α – islendik hakyky san).



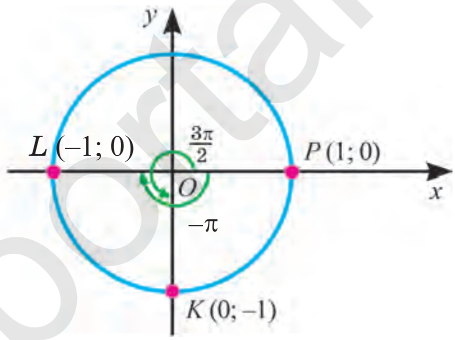
50-nji surat.



51-nji surat.



52-nji surat.



53-nji surat.

1. Aýdaly, $\alpha > 0$ bolsun. Nokat birlik töwerek boýunça P nokatdan sagat miliniň ugruna garşylykly hereket edip, α uzynlykdaky ýoly geçdi, diýeliň (50-nji surat). Ýoluň ahyrky nokadyny M bilen belgileýäris.

Munda M nokat P nokady koordinata başlangyjynyň daşynda α radian burça öwürmek bilen alynýar, diýýäris.

2. Aýdaly, $\alpha < 0$ bolsun. Munda α radian burça öwürmek hereket sagat miliniň ugrunda bolýandygyny we nokat $|\alpha|$ uzynlykdaky ýoly geçenligini aňladýar (51-nji surat).

0 rad-a öwürmek nokat öz ornunda galanlygyny aňladýar.

Mysallar:

1) $P(1;\ 0)$ nokady $\frac{\pi}{2}$ rad burça öwürmekde $(0;\ 1)$ koordinataly M nokat alynýar (52-nji surat).

2) $P(1;\ 0)$ nokady $-\frac{\pi}{2}$ rad burça öwürende $N(0;\ -1)$ nokat alynýar (52-nji surat).

3) $P(1;\ 0)$ nokady $\frac{3\pi}{2}$ rad burça öwürende $K(0;\ -1)$ nokat alynýar (53-nji surat).

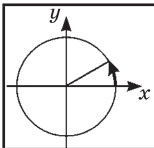
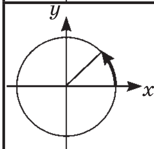
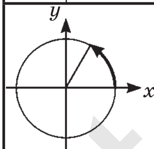
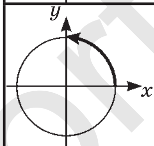
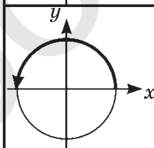
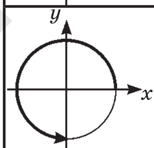
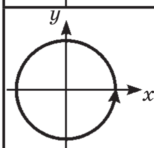
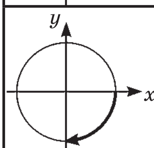
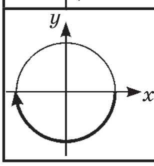
4) $P(1;\ 0)$ nokady $-\pi$ rad burça öwürende $L(-1;\ 0)$ nokat alynýar (53- surat).

Geometriýa kursunda 0°-dan 180°-a çenli bolan burçlara garalan. Birlik töweregiň nokatlaryny koordinatalar başlangyjynyň daşynda öwürenden peýdalanyp, 180°-dan uly burçlary, şonuň ýaly-da, otrisatel burçlara hem garamak mümkin. Öwrüm burçuny graduslarda hem, radianlarda hem bermek mümkin. Meselem, $P\ (1;\ 0)$ nokady $\frac{3\pi}{2}$ burça öwürmek ony 270°-a öwürmegi aňladýar; $-\frac{\pi}{2}$ burça öwürmek –90°-a öwürmekdir.

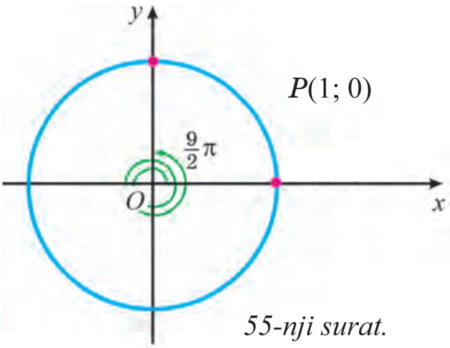
Käbir burçlary öwürmegiň radian we gradus ölçegleri jedwelini getirýäris (54-nji surat).

$P(1;\ 0)$ nokady 2π-ge, ýagny 360°-a öwürende nokat ilkinji ýagdaýyna gaýdýandygyny nygtap geçýäris (jedwele garaň). Şu nokady -2π-ge, ýagny –360°-a öwürende ol ýene ilkinji ýagdaýyna dolanýar.

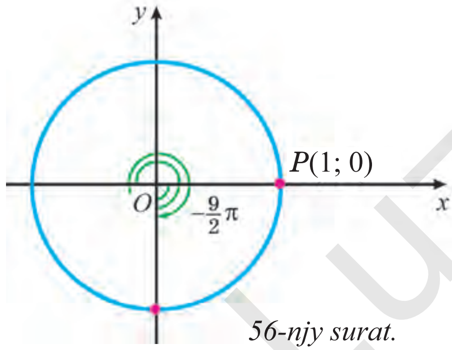
Nokady 2π-den uly burça we -2π-den kiçi burça öwürmäge degişli mysallara garaýarys. Meselem, $\frac{9\pi}{2} = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ burça

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

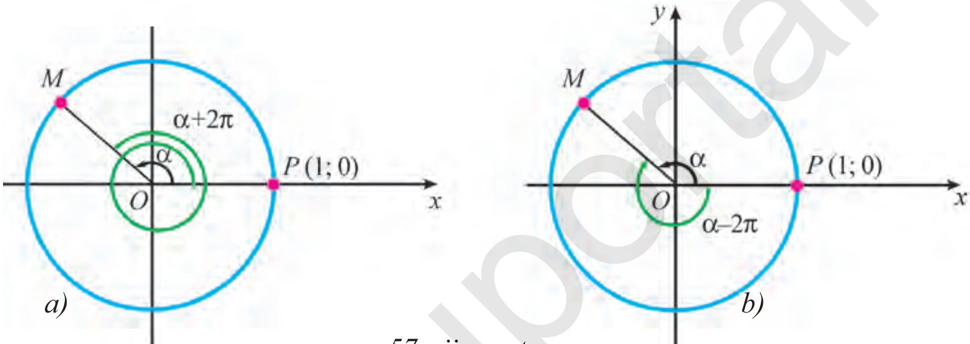
54-nji surat.



55-nji surat.



56-njy surat.



57-nji surat.

öwürende nokat sagat miliniň hereketine garşylykly iki doly aýlawy we ýene $\frac{\pi}{2}$ ýoly geçýär (55-nji surat).

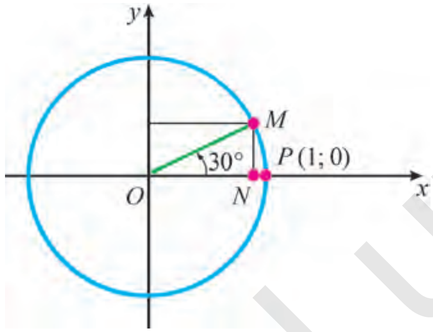
$-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ burça öwürende nokat sagat miliniň hereketi ugrunda iki doly aýlanýar we ýene şu ugurda $\frac{\pi}{2}$ ýoly geçýär (56-njy surat).

$P(1;\,0)$ nokady $\frac{9\pi}{2}$ burça öwürende $\frac{\pi}{2}$ burça öwürendäki nokadyň hut özi emele gelýändigini nygtaýarys (55-nji surat). $-\frac{9\pi}{2}$ burça öwürende $-\frac{\pi}{2}$ burça öwürendäki nokadyň hut özi emele gelýär (56-njy surat).

Umuman, eger $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ (munda k – bitin san) bolsa, onda α burça öwürende α_0 burça öwürendäki nokadyň hut özi emele gelýär.

Şeýlelikde, her bir hakyky α sana birlik töweregiň (1; 0) nokadyny α rad burça öwürmek bilen alynýan ýekeje nokady laýyk gelýär.

Ýöne, birlik töweregiň şol bir M nokadyna (P(1; 0) nokady öwürende M nokat emele gelýän) çäksiz köp $\alpha + 2\pi k$ hakyky sanlar laýyk gelýär, k – bitin san (57-nji surat).



58-nji surat.

1-nji mesele. P (1; 0) nokady: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$ burça öwürenden emele gelen nokadyň koordinatalaryny tapyň.

△ 1) $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$ bolany üçin 7π-ge öwürende π-ge öwürendäki nokadyň özi, ýagny (–1; 0) koordinataly nokat emele gelýär.

2) $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ bolany üçin $-\frac{5\pi}{2}$-ge öwürende $-\frac{\pi}{2}$-ge öwürendäki nokadyň özi, ýagny (0; –1) koordinataly nokat emele gelýär. ▲

2-nji mesele. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nokady almak üçin (1; 0) nokady öwürmeli bolan ähli burçlary ýazyň.

△ NOM gönüburçly üçburçlukdan (58-nji surat) NOM burç $\frac{\pi}{6}$-ge deňligi gelip çykýar, ýagny mümkin bolan öwürme burçlaryndan biri $\frac{\pi}{6}$-ge deň. Şonuň üçin $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nokady almak üçin (1; 0) nokady öwürmeli bolan ähli burçlar şeýle aňladylýar: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, bu ýerde k – islendik bitin san, ýagny $k = 0$; ± 1; ± 2; ... ▲

Gönükmeler

222. Birlik töweregiň $P(1; 0)$ nokadyny:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.

223. Birlik tözwerekde $P(1; 0)$ nokady:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokady bellik ediň.

224. $P(1; 0)$ nokady:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokat ýerleşen koordinatalar çärýegini anyklaň.

225. $P(1; 0)$ nokady:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) $540°$; 6) $810°$; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) $450°$

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokadyň koordinatalaryny tapyň.

226. 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$ nokatlary almak üçin $P(1; 0)$ nokady öwürmeli bolan ähli burçlary ýazyň.

227. P $(1; 0)$ nokady berlen:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokat ýerleşen koordinatalar çärýegini tapyň.

228. Eger:

1) $a = 6{,}7\pi$; 2) $a = 9{,}8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$

bolsa, $a = x + 2\pi k$ deňlik ýerine ýetirilýän x sany (bu ýerde $0 \le x \le 2\pi$) we k natural sany tapyň.

229. Birlik töwerekde $P(1; 0)$ nokady:

1) $\frac{\pi}{4}-2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}-2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}-6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4}-8\pi$;
5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π

burça öwürenden emele gelen nokady çyzyň.

230. $P(1; 0)$ nokady:

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$

burça (bu ýerde k – bitin san) öwürenden emele gelen nokadyň koordinatalaryny tapyň.

231. $(1; 0)$ nokady:

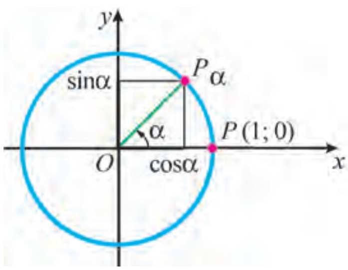
1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

koordinataly nokat almak üçin öwürmek gerek bolan ähli burçlary ýazyň.

19-§. BURÇUŇ SINUSYNYŇ, KOSINUSYNYŇ, TANGENSININŇ WE KOTANGENSININŇ KESGITLEMELERI

Geometriýa kursunda graduslarda aňladylan burçuň sinusy, kosinusy we tangensi girizilipdi. Bu burç 0°-dan 180°-a çenli bolan aralykda garalan. Islendik burçuň sinusy we kosinusy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

! **1-nji kesgitleme.** α ***burçuň sinusy diýip (1; 0) nokady koordinatalar başlangyjynyň daşynda α burça öwürmek netijesinde emele gelen nokadyň ordinatasyna aýdylýar*** **(sinα ýaly belgilenýär).**



2-nji kesgitleme. α ***burçuň kosinusy diýip (1; 0) nokady koordinatalar başlangyjynyň daşynda*** α ***burça öwürmekden emele gelen nokadyň abssissasyna aýdylýar*** **(cosα ýaly belgilenýär).**

Bu kesgitlemelerde α burç graduslarda, şonuň ýaly-da, radianlarda hem aňladylmagy mümkin.

Meselem, (1; 0) nokady $\frac{\pi}{2}$ burça, ýagny 90°-a öwürende (0; 1) nokat alynýar. (0; 1) nokadyň ordinatasy 1-e deň, şonuň üçin

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90 = 1;$$

bu nokadyň abssissasy 0-a deň, şonuň üçin

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90 = 0.$$

Burç 0°-dan 180°-a çenli aralykda bolmak bilen sinuslaryň we kosinuslaryň kesgitlemeleri geometriýa kursundan mälim bolan sinus we kosinus kesgitlemeleri bilen gabat gelýändigini nygtaýarys.

Meselem,

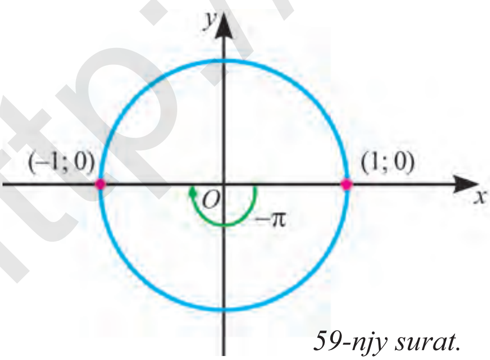
$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30 = \frac{1}{2}, \cos\pi = \cos 180 = -1.$$

1-nji mesele. sin(–π) we cos(–π)-ni tapyň.

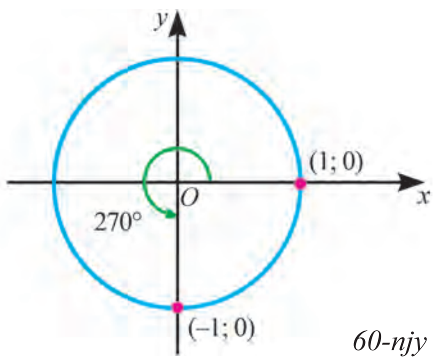
△ (1; 0) nokady –π burça öwürende ol (–1; 0) nokada geçýär (59-njy surat). Şonuň üçin sin (–π)= 0, cos (–π) = –1. ▲

2- nji mesele. sin 270° we cos 270°-y tapyň.

△ (1; 0) nokady 270°-a öwürende ol (0; –1) nokada geçýär (60-njy surat). Şonuň üçin cos 270°=0, sin 270°= –1. ▲



59-njy surat.



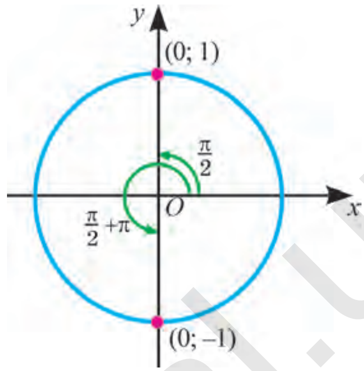
60-njy surat.

3-nji mesele. sin$t$=0 deňlemäni çözüň.

△ sin$t$=0 deňlemäni çözmek – bu sinusy nola deň bolan ähli burçlary tapmak diýmekdir.

Birlik töwerekde ordinatasy nola deň bolan iki nokat bar: (1; 0) we (–1; 0) (59-njy surat). Bu nokatlar (1; 0) nokady 0, π, 2π, 3π we başgalar, şonuň ýaly-da, –π, –2π, –3π we başgalar burçlara öwürmek bilen alynýar.

Diýmek, $t=k\pi$ bolanda (munda k – islendik bitin san) sin$t$ = 0 bolýar. ▲



61-nji surat.

Bitin sanlar toplumy ***Z*** harpy bilen belgilenýär. k san ***Z***-e degişlidigini belgilemek üçin $k\in\boldsymbol{Z}$ ýazgydan peýdalanylýar („k san Z-e degişli“ diýlip okalýar). Şonuň üçin 3-nji meseläniň jogabyny şeýle ýazmak mümkin:

$$t = \pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

4-nji mesele. cos$t$ = 0 deňlemäni çözüň.

△ Birlik töwerekde abssissasy nola deň bolan iki nokat bar: (0, 1) we (0; –1) (61-nji surat).

Bu nokatlar (1; 0) nokady $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi$ we başgalar, şonuň ýaly-da, $\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi$ we başga burçlara, ýagny $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (munda $k\in\boldsymbol{Z}$) burçlara öwürmek bilen alynýar.

Jogaby: $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

5-nji mesele. Deňlemäni çözüň: 1) sin$t$= 1; 2) cos$t$ = 1.

△ 1) Birlik töweregiň (0; 1) nokady bire deň ordinata eýe. Bu nokat (1; 0) nokady $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ burça öwürmek bilen alynýar.

2) (1; 0) nokady $2k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$ burça öwürmek bilen alnan nokadyň abssissasy bire deň bolýar.

Jogaby: $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ bolanda sin$t$ = 1,

$t=2\pi k$ bolanda cos$t$ = 1, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

3-nji kesgitleme. α ***burçuň tangensi diýip*** α ***burçuň sinusynyň onuň kosinusyna gatnaşygyna aýdylýar*** **(tgα ýaly belgilenýär).**

Şeýlelikde, $tga = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Meselem, $tg0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0, \ tg\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Käte α *burçuň kotangensinden* peýdalanylýar (ctgα ýaly belgilenýär). Ol $ctga = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ formula bilen anyklanýar.

Meselem, $ctg270 = \frac{\cos 270}{\sin 270} = \frac{0}{-1} = 0, \ ctg\frac{\pi}{4} = \frac{1}{tg\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$

$\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ lar islendik burç üçin kesgitlenenligini, olaryň bahalary bolsa –1-dan 1-e çenli aralykdadygyny nygtap geçýäris; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ diňe $\cos\alpha \neq 0$ bolan burçlar üçin, ýagny $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$-den başga islendik burçlar üçin kesgitlenen.

Sinuslaryň, kosinuslaryň, tangensleriň we kotangensleriň köpräk duşýan bahalarynyň jedwelini getirýäris.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ýok	0	Ýok	0
$ctg\alpha$	Ýok	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Ýok	0	Ýok

6-njy mesele. Hasaplaň:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}.$$

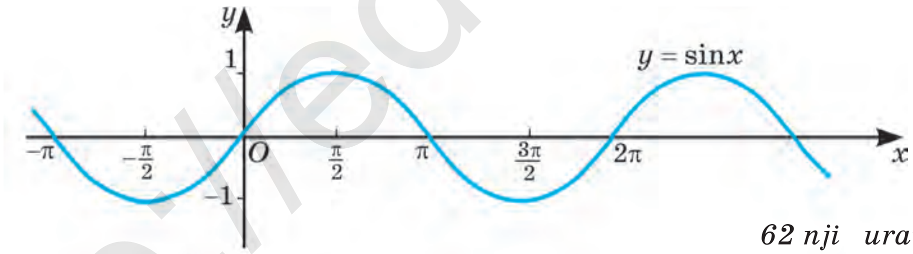
△ Jedwelden peýdalanyp, alarys:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2,5\,.$$ ▲

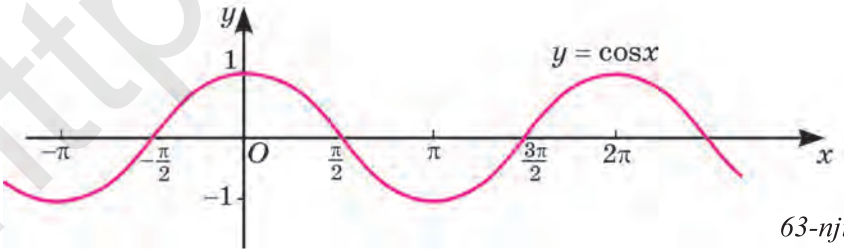
Sinuslaryň, kosinuslaryň, tangensleriň we kotangensleriň bu jedwele girmedik burçlar üçin bahalaryny W.M.Bradisiň dörtbelgili matematik jedwellerinden, şonuň ýaly-da, mikrokalkulýatoryň kömeginde tapmak mümkin.

Eger her bir hakyky x sana $\sin x$ san laýyk getirilse, onda hakyky sanlar toplumynda $y=\sin x$ funksiýa berlen bolýar. $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ we $y=\mathrm{ctg}x$ funksiýalar şuňa meňzeş kesgitlenýär. $y = \cos x$ funksiýa ähli $x\in\boldsymbol{R}$-de kesgitlenen, $y=\mathrm{tg}x$ funksiýa $x\neq\frac{\pi}{2}+\ k, k\in\boldsymbol{Z}$, $y=\mathrm{ctg}x$ bolsa $x\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ bolanda kesgitlenen. $y = \sin x$ we $y = \cos x$ funksiýalaryň grafikleri 62-nji we 63-nji suratlarda şekillendirilen.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ funksiýalara *trigonometrik* funksiýalar diýilýär.



62 nji urat.



63-nji surat.

Gönükmeler

232. Hasaplaň:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Eger:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

bolsa, birlik töwerekde α burça laýyk gelýän nokady şekillendiriň.

Hasaplaň (**234–236**):

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi$; 6) $\cos 0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\operatorname{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\operatorname{tg}0°-\operatorname{tg}180°$; 3) $\operatorname{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\operatorname{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Deňlemäni çözüň:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Ýatdan.) sinα ýa-da cosα:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $\sqrt{2}$; 4) 2 $\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$

-e deň bolmagy mümkinmi?

239. α-nyň berlen bahasynda aňlatmanyň bahasyny tapyň:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, munda $\alpha=\frac{\pi}{4}$; | 2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, munda $\alpha=60°$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$, munda $\alpha=\frac{\pi}{6}$; | 4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, munda $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Deňlemäni çözüň:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;
4) $\cos 0{,}5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Deňlemäni çözüň:

1) $\sin(x+\pi) = -1$; 2) $\sin \frac{1}{2}(x-1) - 0$; 3) $\cos(x+\pi) = -1$;
4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x-2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

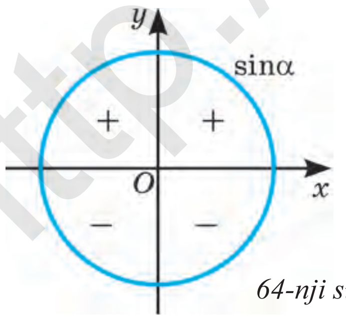
20-§. SINUSYŇ, KOSINUSYŇ WE TANGENSIŇ ALAMATLARY

1. Sinusyň we kosinusyň alamatlary

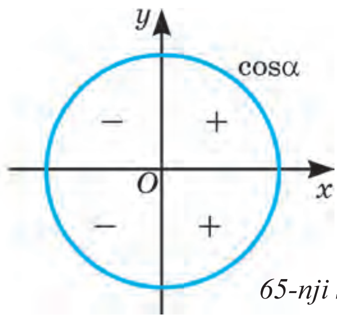
Aýdaly, (1; 0) nokat birlik töwerek boýunça sagat mili hereketine garşylykly hereket edýär. Munda birinji çärýekde (kwadrant)ýerleşen nokatlaryň ordinatalary we abssissalary položitel. Şonuň üçin, eger $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha > 0$ we $\cos \alpha > 0$ bolýar (64, 65-nji suratlar).

Ikinji çärýekde ýerleşen nokatlar üçin ordinatalar položitel, abssissalar bolsa otrisatel. Şonuň üçin, eger $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ bolýar (64, 65-nji suratlar). Şuňa meňzeş, üçünji çärýekde $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, dördünji çärýekde bolsa $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (64, 65-nji suratlar). Nokadyň töwerek boýunça mundan soňky hereketinde sinuslaryň we kosinuslaryň alamatlary nokat haýsy çärýekde duranlygy bilen kesgitlenýär.

Sinusyň alamatlary 64-nji suratda, kosinusyň alamatlary bolsa 65-nji suratda görkezilen.



64-nji surat.



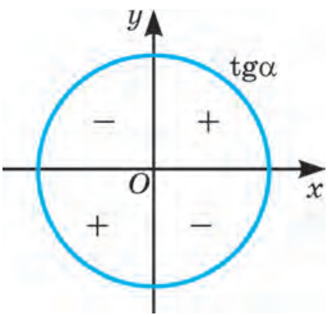
65-nji surat.

Eger (1; 0) nokat sagat miliniň ugrunda hereketlense, *onda hem sinusyň we kosinusyň alamatlary nokat haýsy çärýekde ýerleşendigine garap kesgitlenýär;* muny 64, 65-nji suratlardan bilmegem mümkin.

1-nji mesele. Burçuň sinuslarynyň we kosinuslarynyň alamatlaryny anyklaň:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) $\frac{3\pi}{4}$ burça birlik töweregiň ikinji çärýeginde ýerleşen nokat laýyk gelýär. Şonuň üçin $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.



66-njy surat.

2) $745° = 2 \cdot 360° + 25°$ bolany üçin (1; 0) nokady $745°$-a öwrüm etmäge birinji çärýekde ýerleşen nokat laýyk gelýär. Şonuň üçin sin745°>0, cos745°>0.

3) $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ bolany üçin (1; 0) nokady $-\frac{5\pi}{7}$ burça öwrüm edilende üçünji çärýekde ýerleşen nokat alynýar. Şonuň üçin $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

2. Tangensiň alamatlary

Kesgitlemä görä $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Şonuň üçin, eger $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ birmeňzeş alamata eýe bolsa, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ garşylykly alamatlara eýe bolsa, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ bolýar. Tangensiň alamatlary 66-njy suratda şekillendirilen.

ctgα-nyň alamatlary tgα-nyň alamatlary bilen birmeňzeşdir.

2-nji mesele. Burçuň tangensiniň alamatlaryny anyklaň:

1) 260°; 2) 3.

△ 1) 180° < 260° < 270° bolany üçin tg260° > 0.

2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ bolany üçin tg3 < 0. ▲

Gönükmeler

242. Eger:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;

5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

bolsa, (1; 0) nokady α burça öwürende emele gelen nokat haýsy çärýekde ýatýandygyny anyklaň.

243. Eger:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;

5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$

bolsa, $\sin\alpha$ sanyň alamatyny anyklaň.

244. Eger:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;

5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$

bolsa, $\cos\alpha$ sanyň alamatyny anyklaň.

245. Eger:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;

5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$

bolsa, $\mathrm{tg}\alpha$ we $\mathrm{ctg}\alpha$ sanlaryň alamatlaryny anyklaň.

246. Eger:

1) $<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;

4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\le 1{,}8\pi$

bolsa, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ sanlaryň alamatlaryny anyklaň.

247. Eger:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$

bolsa, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ sanlaryň alamatlaryny anyklaň.

248. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bolsun. Sanyň alamatyny anyklaň:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;	2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;	3) $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;	4) $\sin(\pi-\alpha)$;
5) $\cos(\alpha-\pi)$;	6) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$;	7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;	8) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

249. Sinuslaryň we kosinuslaryň alamatlary birmeňzeş (dürli) bolýan α sanyň 0-dan 2π çenli aralykda ýerleşen ähli bahalaryny tapyň.

250. Sanyň alamatyny anyklaň:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Aňlatmalaryň bahalaryny deňeşdiriň:

1) $\sin 0{,}7$ we $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ we $\cos 2{,}3$.

252. Deňlemäni çözüň:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

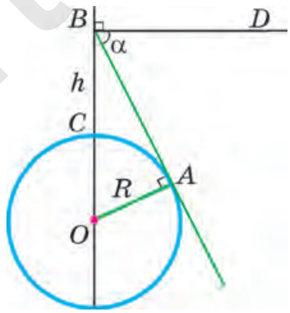
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. Eger:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1{,}2$

bolsa, α sana laýyk gelýän nokat haýsy çärýekde ýerleşen?

254. (*Birunynyň meselesi.*) Dagyň beýikligi $h=BC$ we $\alpha=\angle ABD$ burç mälim bolsa, Ýeriň R radiusyny tapyň (67-nji surat).



67 nji urat.

21-§. ŞOL BIR BURÇUŇ SINUSYNYŇ, KOSINUSYNYŇ WE TANGENSINIŇ ARASYNDAKY GATNAŞYKLAR

Sinus bilen kosinusyň arasyndaky gatnaşygy anyklaýarys.

Aýdaly, birlik töweregiň $M(x; y)$ nokady $(1; 0)$ nokady α burça öwürmek netijesinde alnan bolsun (68-nji surat). Onda sinusyň we kosinusyň kesgitlemesine görä,

$$x=\cos\alpha,\ \ y=\sin\alpha$$

bolýar.

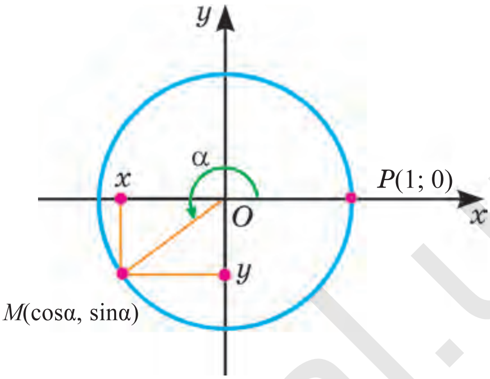
M nokat birlik töwerege degişli, şonuň üçin onuň $(x; y)$ koordinatalary $x^2+y^2=1$ deňlemäni kanagatlandyrýar.

Diýmek,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

(1) deňlik α-nyň islendik bahasynda ýerine ýetirilýär we *esasy trigonometrik toždestwo* diýilýär.

(1) deňlikden $\sin\alpha$-ny $\cos\alpha$ arkaly we, tersine, $\cos\alpha$-ny $\sin\alpha$ arkaly aňlatmak mümkin:



68 nji urat.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,. \qquad (3)$$

Bu formulalarda köküň öňündäki alamat formulanyň çep böleginde duran aňlatmanyň alamaty bilen anyklanýar.

1-nji mesele. Eger $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ we $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$-ny hasaplaň.

△ (2) formuladan peýdalanýarys. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolany üçin $\sin\alpha < 0$ bolýar, şonuň üçin (2) formulada köküň öňüne „–“ alamatyny goýmaly:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ ▲$$

2-nji mesele. Eger $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ we $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ bolsa, $\cos\alpha$-ny hasaplaň.

△ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ bolany üçin $\cos\alpha > 0$ bolýar we şonuň üçin (3) formulada köküň öňüne „+“ alamatyny goýmaly:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Indi *tangens bilen kotangensiň arasyndaky baglanyşygy* kesgitleýäris. Tangensiň we kotangensiň kesgitlemesine görä:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Bu deňlikleri köpeldip,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1} \qquad (4)$$

deňligi alarys. (4) deňlikden tgα-ny ctgα arkaly, we tersine, ctgα-ny tgα arkaly aňlatmak mümkin:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

(4)–(6) deňlikler $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \boldsymbol{Z}$ bolanda ýerliklidir.

3-nji mesele. Eger tgα = 13 bolsa, ctgα-ny hasaplaň.

△ (6) formula boýunça tapýarys: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

4-nji mesele. Eger $\sin\alpha = 0,8$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, tgα-ny hasaplaň.

△ (3) formula boýunça cosα-ny tapýarys. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolany üçin $\cos\alpha < 0$ bolýar. Şonuň üçin

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,64} = -0,6.$$

Diýmek, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Esasy trigonometrik toždestwodan we tangensiň kesgitlemesinden peýdalanyp, *tangens bilen kosinusyň arasyndaky gatnaşygy* tapýarys.

△ $\cos\alpha \neq 0$ diýip çak edip, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ deňligiň iki bölegini hem $\cos^2\alpha$ bölýäris: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, mundan

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}\,. \qquad (7)$$

Eger $\cos\alpha \neq 0$ bolsa, ýagny $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ bolsa, (7) formula dogry bolýar.

(7) formuladan tangensi kosinus we kosinusy tangens arkaly aňlatmak mümkin.

5-nji mesele. Eger $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, $\mathrm{tg}\alpha$-ny hasaplaň.

△ (7) formuladan alarys:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Tangens ikinji çärýekde otrisatel, şonuň üçin $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ▲

6-njy mesele. Eger $\mathrm{tg}\alpha=3$ we $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\cos\alpha$-ny hasaplaň.

△ (7) formuladan tapýarys:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolany üçin $\cos\alpha<0$ we şonuň üçin $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$. ▲

Gönükmeler

255. Eger:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ we $\frac{3p}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\mathrm{tg}\alpha$-ny;

2) $\sin\alpha=0,8$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, $\cos\alpha$ we $\mathrm{tg}\alpha$-ny;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ we $\mathrm{ctg}\alpha$-ny;

4) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ we $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ we $\mathrm{ctg}\alpha$-ny;

5) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ we $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$-ny;

6) $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ we $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$-ny hasaplaň.

256. Esasy trigonometrik toždestwonyň kömeginde deňlikleriň bir wagtda ýerine ýetirilýändigini ýa-da ýerine ýetirilmeýändigini anyklaň:

1) $\sin\alpha = 1$ we $\cos\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$ we $\cos\alpha = -1$;

3) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ we $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ we $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

257. Deňlikler bir wagtda ýerine ýetirilmegi mümkinmi:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ we $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ we $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

258. Aýdaly, gönüburçly üçburçlugyň burçlaryndan biri bolsun. Eger $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$ bolsa, $\cos\alpha$ we $\mathrm{tg}\alpha$-ny tapyň.

259. Deňýanly üçburçlugyň depesindäki burçunyň tangensi $2\sqrt{2}$ -ä deň. Şu burçuň kosinusyny tapyň.

260. Eger $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{8}$ bolsa, $\cos\alpha$-ny tapyň.

261. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ bolsa, $\cos\alpha$-ny tapyň;

2) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bolsa, $\sin\alpha$-ny tapyň.

262. $\mathrm{tg}\alpha = 2$ bolýandygy mälim. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

1) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

263. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ bolýandygy mälim. 1) $\sin\alpha\ \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ aňlatmalaryň bahalaryny tapyň.

264. Deňlemäni çözüň:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$; 2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$; 4) $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

22-§. TRIGONOMETRIK TOŽDESTWOLAR

1-nji mesele. $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ bolanda

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{1}$$

deňligiň dogry bolýandygyny subut ediň.

△ Kotangensiň kesgitlemesine görä $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ we şonuň üçin

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

Bu şekil çalşyrmalar dogry, çünki $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ bolanda $\sin\alpha \neq 0$. ▲

(1) deňlik α-nyň mümkin bolan ähli (ýerlikli) bahalary üçin ýerlikli, ýagny onuň çep we sag bölekleri mana eýe bolýan ähli bahalary üçin dogry bolýar. Şular ýaly deňliklere *toždestwolar* diýilýär, şeýle deňlikleri subut etmäge degişli meselelere toždestwolary subut etmäge degişli meseleler diýilýär.

Indikide toždestwolary subut edende, eger meseläniň şertinde talap edilmedik bolsa, burçlaryň ýerlikli bahalaryny gözlemeýäris.

2-nji mesele. Toždestwony subut ediň: $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

$$△\ (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.\ ▲$$

3-nji mesele. Toždestwony subut ediň: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△ Bu toždestwony subut etmek üçin onuň çep we sag bölekleriniň tapawudynyň nola deňdigini görkezýäris:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0.\ ▲$$

1–3-nji meseleleri çözende *toždestwolary subut etmegiň aşakdaky usullaryndan* peýdalanyldy: sag böleginde şekil çalşyryp, ony çep bölegine deňligini görkezmek; sag we çep bölekleriniň tapawudynyň nola deňdigini görkezmek. Käte toždestwolary subut edende onuň sag we çep bölekleriniň şekilini çalşyryp birmeňzeş aňlatma getirmek amatly.

4-nji mesele. Toždestwony subut ediň: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

$$\triangle\ \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Toždestwo subut edildi, çünki onuň çep we sag bölekleri $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ deň. ▲

5-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.\ ▲$$

Trigonometrik aňlatmalary ýönekeýleşdirmäge degişli meseleleri çözende, eger meseläniň şertinde talap edilmedik bolsa, burçlaryň kabul etmegi mümkin bolan ýerlikli bahalaryny tapmaýarys.

Gönükmeler

265. Toždestwony subut ediň:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$; 2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 1$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = tg^2\alpha$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = ctg^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+tg^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$; 6) $\frac{1}{1+ctg^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$.

266. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\cos\alpha \cdot tg\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot ctg\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$; 5) $\frac{tg\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň san bahasyny tapyň:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, munda $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$, munda $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, munda $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, munda $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

268. Toždestwony subut ediň:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

269. α-nyň ähli ýerlikli bahalarynda aşakdaky aňlatma şol birmeňzeş bahany kabul edýändigini, ýagny α bagly däldigini subut ediň:

1) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha$.

270. Toždestwony subut ediň:

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň san bahasyny tapyň:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$, munda $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, munda $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

272. Eger $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$ bolsa, $\sin\alpha\cos\alpha$-nyň bahasyny tapyň.

273. Eger $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$ bolsa, $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$-nyň bahasyny tapyň.

274. Deňlemäni çözüň:

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$; | 2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

23- §. α WE – α BURÇLARYŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI

Aýdaly, birlik töweregiň M_1 we M_2 nokatlary $P(1; 0)$ nokady degişlilikde, α we –α burçlara öwürmek netijesinde alnan bolsun (69-njy surat). Onda Ox ok M_1OM_2 burçy deň ikä bölýär we şonuň üçin M_1 we M_2 nokatlar Ox oka görä simmetrik ýerleşen. Bu nokatlaryň abssissalary birmeňzeş bolýar, ordinatalary bolsa diňe alamatlary bilen tapawutlanýar. M_1 nokat (cosα; sinα) koordinatalara, M_2 nokat (cos(–α); sin(–α)) koordinatalara eýe. Şonuň üçin

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \quad (1)$$

Tangensiň kesgitlemesinden peýdalanyp, alarys:

$$\boxed{\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.}$$

Diýmek,

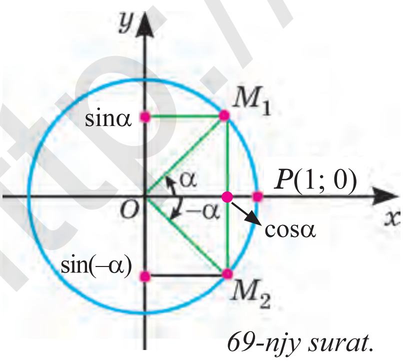
$$\boxed{\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.} \quad (2)$$

Şuňa meňzeş,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \quad (3)$$

(1) formula α-nyň islendik bahasynda ýerlikli bolýar, (2) formula bolsa $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in$ bolanda ýerliklidir.

Eger $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ bolsa, onda ctg(–α) = –ctgα bolýandygyny görkezmek mümkin.



69-njy surat.

(1)–(2) formulalar otrisatel burçlar üçin sinusyň, kosinusyň we tangensiň bahalaryny tapmaga mümkinçilik berýär.

Meselem:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Gönükmeler

275. Hasaplaň:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\frac{1+\mathrm{tg}^2(-30^o)}{1+\mathrm{ctg}^2(-30^o)}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

---

277. Toždestwony subut ediň: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\mathrm{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Hasaplaň:

1) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7{,}5\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

24-§. GOŞMAK FORMULALARY

Goşmak formulalary diýip $\cos(\alpha \pm \beta)$ we $\sin(\alpha \pm \beta)$-lary α we β burçlaryň sinuslary we kosinuslary arkaly aňladýan formulalara aýdylýar.

T e o rema. Islendik α *we* β *üçin aşakdaky deňlik ýerlikli bolýar:*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

○ M_0 (1; 0) nokady koordinatalar başlangyjynyň daşynda α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ radian burçlara öwürmek netijesinde, degişlilikde, M_α, $M_{-\beta}$ we $M_{\alpha+\beta}$ nokatlar emele gelýär, diýeliň (70-nji surat).

Sinusyň we kosinusyň kesgitlemesine görä, bu nokatlar aşakdaky koordinatalara eýe:

$$M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

$\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$ bolany üçin $M_0OM_{\alpha+\beta}$ we $M_{-\beta}OM_\alpha$ deňýanly üçburçluklar deň we, diýmek, olaryň $M_0M_{\alpha+\beta}$ we $M_{-\beta}M_\alpha$ esaslary hem deň. Şonuň üçin

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

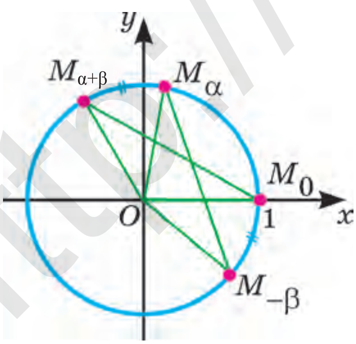
Geometriýa kursundan mälim bolan iki nokadyň arasyndaky aralyk formulasyndan peýdalanyp, alarys:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

23-§ dagi (1) formuladan peýdalanyp, bu deňligiň şekilini çalşyrýarys:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Esasy trigonometrik toždestwodan peýdalanyp, alarys:



70 nji   urat.

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

mundan $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●

1-nji mesele. $\cos75°$-y hasaplaň.

△ (1) formula boýunça tapýarys:

$$\cos75°=\cos(45°+30°)=$$
$$=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$ ▲

(1) formulada β ni –β-a çalşyryp, alarys:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

mundan

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad \mathbf{(2)}$$

2-nji mesele. cos15°-y hasaplaň.

△ (2) formula görä, alarys:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$ ▲

3-nji mesele. Şu formulalary subut ediň:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin -,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

△ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bolanda (2) formula esasan:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta,$$

ýagny

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Bu formulada β-ny α çalşyryp, alarys:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

(4) formulada $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ diýip çak etsek:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$ ▲

(1)–(4) formulalardan peýdalanyp, *sinus üçin goşmak formulasyny* getirip çykarýarys:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin -\cos\beta + \cos -\sin\beta.$$

Şeýlelikde

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

(5) formulada β-ny –β çalşyryp, alarys:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

mundan

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

4-nji mesele. sin210°-y hasaplaň.

$$\triangle \ \sin210° = \sin(180° + 30°) =$$

$$= \sin180°\cos30° + \cos180°\sin30° = 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

5-nji mesele. Hasaplaň:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle \ \sin\frac{8}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0. \ \blacktriangle$$

6-njy mesele. Deňligi subut ediň:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (7)$$

$$\triangle \ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Bu drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny cosαcosβ bölüp, (7) formulany alarys. ▲

(7) formula hasaplamalarda peýdaly bolmagy mümkin.

Meselem, şu formula boýunça tapýarys:

$$\operatorname{tg}225^{\circ} = \operatorname{tg}(180^{\circ} + 45^{\circ}) = \frac{\operatorname{tg}180^{\circ} + \operatorname{tg}45^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}180^{\circ}\operatorname{tg}45^{\circ}} = 1.$$

Gönükmeler

Goşmak formulalarynyň kömeginde hasaplaň (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) cos57°30'cos27°30' + sin57°30'sin27°30';

2) cos19°30'cos25°30' – sin19°30'sin25°30';

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, munda $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ we $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, munda $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň (**283–284**):

283. 1) $\cos3\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin3\alpha$; 2) $\cos5\beta\cos2\beta+\sin5\beta\sin2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)$.

Goşmak formulalarynyň kömeginde hasaplaň (**285–286**):

285. 1) sin73°cos17° + cos73°sin17°;

2) sin73°cos13° – cos73°sin13°;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;   4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, munda $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ we $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, munda $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

287. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Eger $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ we $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ bolsa, $\cos(\alpha+\beta)$ we $\cos(\alpha-\beta)$-ny hasaplaň.

289. Eger $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ we $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin(\alpha-\beta)$ -ny hasaplaň.

290. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Toždestwony subut ediň:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\ }{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\ }{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

292. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\frac{\mathrm{tg}29^\circ+\mathrm{tg}31^\circ}{1-\mathrm{tg}29^\circ\,\mathrm{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi-\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi\,\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

25-§. IKELDILEN BURÇUŇ SINUSY WE KOSINUSY

Goşmak formulalaryndan peýdalanyp, *ikeldilen burçuň sinusynyň we kosinusynyň formulalaryny* getirip çykarýarys.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Şeýlelikde,

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad \mathbf{(1)}$$

1-nji mesele. Eger $\sin\alpha = -0{,}6$ we $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin 2\alpha$-ny hasaplaň.

△ (1) formula boýunça tapýarys:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot \cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolany üçin $\cos\alpha < 0$ bolýar we şonuň üçin:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Diýmek, $\sin 2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$
Şeýlelikde,

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \qquad \mathbf{(2)}$$

2-nji mesele. Eger $\cos\alpha = 0{,}3$ bolsa, $\cos 2\alpha$-ny hasaplaň.

△ (2) formuladan we esasy trigonometrik toždestwodan peýdalanyp, alarys:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \ ▲$$

3-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$△ \ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2\alpha. \ ▲$$

4-nji mesele. Eger $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ bolsa, $\mathrm{tg}\,2\alpha$-ny hasaplaň.

$$△ \ \mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

formulada $\beta = \alpha$ diýip çak edip (24-§ -a garaň), alarys:

! $$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Eger $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ bolsa, onda (3) formula boýunça tapýarys:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

Gönükmeler

Hasaplaň **(293–294)**:

293. 1) $2\sin15°\cos15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $(\cos75° - \sin75°)^2$; 4) $(\cos15° + \sin15°)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Eger:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ we $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
bolsa, $\sin2\alpha$-ny hasaplaň.

296. Eger:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ bolsa, $\cos2\alpha$-ny hasaplaň.

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň **(297–298)**:

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos2\alpha+1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$.

299. Toždestwony subut ediň:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Eger:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$

bolsa, $\sin 2\alpha$-ny hasaplaň.

301. Toždestwony subut ediň:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

302. Hasaplaň:

1) $2\cos^2 15° - 1$; | 2) $1 - 2\sin^2 22{,}5°$; | 3) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; | 4) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Toždestwony subut ediň:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

305. Eger $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}6$ bolsa, $\mathrm{tg}\,2\alpha$-ny hasaplaň.

306. Hasaplaň: 1) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 15^\circ}$; 3) $\dfrac{4\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 75^\circ}$.

26-§. GETIRME FORMULALARY

Sinus, kosinus, tangens we kotangens bahalarynyň jedwelleri 0°-dan 90°-a çenli (ýa-da 0-dan $\frac{\pi}{2}$ -ge çenli) burçlar üçin düzülýär. Bu ýagdaý olaryň başga burçlar üçin bahalary ýiti burçlar üçin bahalaryna getirilmegi bilen düşündirilýär.

1 -nji mesele. sin870° we cos870°-y hasaplaň.

△ $870° = 2\cdot360° + 150°$. Şonuň üçin $P(1;\ 0)$ nokady koordinatalar başlangyjynyň daşynda 870°-a öwrüm edende nokat iki doly aýlawy ýerine ýetirýär we ýene 150° burça öwrülýär, ýagny 150°-a öwürendäki M nokadyň edil özi emele gelýär (71-nji surat). Şonuň üçin $\sin870° = \sin150°$ $\cos870° = \cos150°$.

M nokada Oy oka görä simmetrik bolan M_1 nokady guryarys (72-nji surat). M we M_1 nokatlaryň ordinatalary birmeňzeş, abssissalary bolsa diňe alamatlary bilen tapawutlanýar. Şonuň üçin $\sin150^o = \sin30^o = \frac{1}{2}$;

$\cos150^o = -\cos30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Jogaby: $\sin870^o = \frac{1}{2}$, $\cos870^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

1-nji meseläni çözende

$$\sin(2\cdot360° + 150°) = \sin150°,\ \cos(2\cdot360° + 150°) = \cos150°, \qquad (1)$$

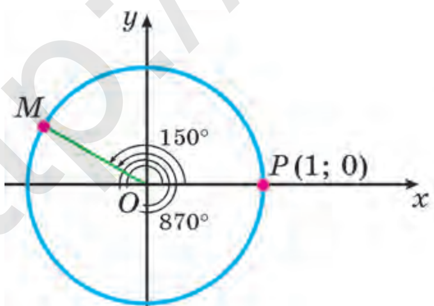
$$\sin(180° - 30°) = \sin30°,\ \cos(180° - 30°) = -\cos30° \qquad (2)$$

deňliklerden peýdalanyldy.

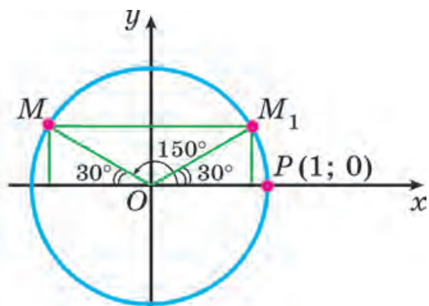
(1) deňlik dogry deňlik, çünki $P(1;\ 0)$ nokady $\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ burça öwrüm edende ony α burça öwrüm edendäki nokadyň hut özi emele gelýär.

şonuň üçin şu formulalar dogry bolýar:

! $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z.$ **(3)**



71 nji urat.



72 nji urat.

Hususan-da, $k = 1$ bolanda:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

deňlikler ýerliklidir.

(2) deňlik

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (4)$$

formulalaryň hususy haly hasaplanýar.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ formulany subut edýäris.

Sinus üçin goşmak formulasyny ulanyp, alarys:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

(4) formulalaryň ikinji hem şuňa meňzeş subut edilýär. (4) formulalara *getirme formulalary* diýilýär. (3) we (4) formulalaryň kömeginde islendik burçuň sinusyny we kosinusyny hasaplamagy olaryň ýiti burç üçin bahalaryny hasaplamaga getirmek mümkin.

2 -nji mesele. $\sin930°$-y hasaplaň.

(3) formuladan peýdalanyp, alarys:

$$\sin930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°).$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ formula boýunça $\sin(-150°) = -\sin150°$-y alarys.

(4) formula boýunça tapýarys:

$$-\sin150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}.$$

Jogaby: $\sin930° = -\frac{1}{2}$.

3-nji mesele. $\cos\frac{15\pi}{4}$ -ni hasaplaň.

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Indi islendik burçuň tangensini hasaplamagy ýiti burçuň tangensini hasaplamaga nähili getirmek mümkinligini görkezýäris.

(3) formuladan we tangensiň kesgitlemesinden

$$\mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{tg}\alpha,\ k\epsilon \boldsymbol{Z}$$

deňlik gelip çykýar.

Bu deňlik we (4) formuladan peýdalanyp, alarys:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \mathrm{tg}(\alpha - \pi) = -\mathrm{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\ \ -\alpha)}{\cos(\ \ -\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

şonuň üçin şu formula ýerlikli bolýar:

! $$\mathbf{tg}(\alpha + \pi \boldsymbol{k}) = \mathbf{tg}\alpha,\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}. \qquad \mathbf{(5)}$$

4-nji mesele. Hasaplaň: 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{13}{4}$.

△ 1) $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3} = \mathrm{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4} = \mathrm{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

24- § -da (3-nji mesele)

! $$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

formulalar subut edilipdi, olar hem *getirme formulalary* diýlip atlandyrylýar. Bu formulalardan peýdalanyp, meselem, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ -ni alarys.

x-iň islendik bahasy üçin $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ deňlikleriň dogrudygy mälim.

Bu deňliklerden görnüşi ýaly, argument 2π-ge özgerende sinusyň we kosinusyň bahalary döwürleýin gaýtalanýar. Şeýle funksiýalaryň *döwri* 2π *bolan döwürleýin funksiýalar* diýilýär.

Eger şeýle $T \neq 0$ san bar bolup, $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyndaky islendik x üçin

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

deňlik ýerine ýetirilse, $f(x)$ *döwürleýin funksiýa* diýilýär. T sana $f(x)$ funksiýanyň *döwri* diýilýär.

Şu kesgitlemeden görnüşi ýaly, eger x san $f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolsa, onda $x + T$, $x - T$ sanlar we, umuman, $x + Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$ sanlar hem şu döwürleýin funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli we $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ bolýar.

2π sany $y = \cos x$ funksiýanyň *iň kiçi položitel döwri* bolýandygyny görkezýäris.

○ $T > 0$ kosinusyň döwri bolsun, ýagny islendik x üçin $\cos(x + T) = \cos x$ deňlik ýerine ýetirilýär. $x = 0$ diýip, $\cos T = 1$-i alarys. Mundan bolsa $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $T > 0$ bolanyndan T aşakdaky 2π, 4π, 6π, ... bahalary kabul edip bilýär we şonuň üçin T-niň bahasy 2π-den kiçi bolmagy mümkin däl. ●

$y = \sin x$ funksiýanyň iň kiçi položitel davri ham 2π ga deň bolýandygyny subut etmek mümkin.

Gönükmeler

Hasaplaň (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;

5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\, 570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\, 960°$;

5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\, 585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Aňlatmanyň san bahasyny tapyň:

1) $\cos630^\circ - \sin1470^\circ - \operatorname{ctg}1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg}1800^\circ - \sin495^\circ + \cos945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Hasaplaň:

1) $\cos7230^\circ + \sin900^\circ$; 2) $\sin300^\circ + \operatorname{tg}150^\circ$;

3) $2\sin6,5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos4,25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\frac{\sin(-6,5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16,25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^o)+\sin480^o}{\operatorname{tg}405^o-\operatorname{ctg}330^o}$.

314. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

315. Üçburçlugyň iki içki burçunyň jeminiň sinusy üçünji burçunyň sinusyna deňligini subut ediň.

316. Toždestwony subut ediň:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+-\right)=\cos-$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Deňlemäni çözüň:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$; ;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; 5) $\cos(\pi-2x)=1$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

27-§. SINUSLARYŇ JEMI WE TAPAWUDY. KOSINUSLARYŇ JEMI WE TAPAWUDY

1 -nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Goşmak formulasyndan we ikeldilen burçuň sinusynyň formulasyndan peýdalanyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha. \blacktriangle$$

Eger *sinuslaryň jeminiň formulasy*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (1)$$

dan peýdalanilsa, bu meseläni ýönekeýräk çözmek mümkin. Şu formulanyň kömeginde aşakdakyny alarys:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,.$$

Indi (1) formulanyň ýerlikli bolýandygyny subut edýäris.

○ $\frac{\alpha+\beta}{2}=x, \frac{\alpha-\beta}{2}=y$ belgileme girizýäris. Onda $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ we şonuň üçin $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+$ $+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

(1) formula bilen bir hatarda aşakdaky *sinuslar tapawudy formulasyndan, kosinuslaryň jemi* we *tapawudy formulalaryndan* hem peýdalanylýar:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

(3) we (4) formulalar hem (1) formulanyň subut edilişine meňzeş subut edilýär; (2) formula β-ny –β çalşyrmak bilen (1) formuladan alynýar (*muny özbaşdak subut ediň*).

2-nji mesele. $\sin75^\circ+\cos75^\circ$-y hasaplaň.

△ $\sin75^\circ+\cos75^\circ=\sin75^\circ+\sin15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$ ▲

3-nji mesele. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ ni köpeltmek hasylyna çalşyryň.

△ $2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

4-nji mesele. sinα + cosα aňlatmanyň iň kiçi bahasy $\sqrt{2}$ -ä, iň uly bahasy bolsa $\sqrt{2}$ -ä deň bolýandygyny subut ediň.

△ Berlen aňlatmany köpeltmek hasylyna çalşyrýarys:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Kosinusyň iň kiçi bahasy –1-e, iň uly bahasy bolsa 1-e deň bolany üçin berlen aňlatmanyň iň kiçi bahasy $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$ -ä, iň uly bahasy bolsa $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ -ä deň. ▲

Gönükmeler

318. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$; 2) $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$;

3) $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$; 4) $\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{4})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

319. Hasaplaň:

1) $\cos105°+\cos75°$; 2) $\sin105°-\sin75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin105°+\sin165°$.

320. Köpeltmek hasylyna çalşyryň:

1) 1 + 2sinα; 2) 1 – 2sinα; 3) 1 + 2cosα;

4) 1 + sinα; 5) 1 – cosα; 6) 1 + cosα;

321. Toždestwony subut ediň:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\mathrm{tg}2\alpha$; 2) $\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos4\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

322. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Toždestwony subut ediň (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$.

324. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

325. Köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyň:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}$.

326. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ toždestwony subut ediň we hasaplaň:

1) $\operatorname{tg}267^\circ + \operatorname{tg}93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg}99^\circ + \operatorname{tg}81^\circ$.

327. Köpeldijilere dagydyň:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

III baba degişli gönükmeler

328. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsun. $P(1; 0)$ nokady:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; | 2) $\alpha - \pi$; | 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; | 4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; | 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; | 6) $\pi - \alpha$

burça öwürmek netijesinde emele gelen nokat haýsy çärýekde ýatýandygyny anyklaň.

329. Burçuň sinusynyň we kosinusynyň bahasyny tapyň:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 7) $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Hasaplaň:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2k\pi$, munda k – bitin san;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, bu ýerde k – bitin san.

331. Tapyň:

1) eger $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\cos\alpha$-ny;

2) eger $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ we $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\mathrm{tg}\alpha$-ny;

3) eger $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ we $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$-ny;

4) eger $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ we $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$-ny.

332. Toždestwony subut ediň:

1) $5\sin^2\alpha + \mathrm{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $(1-\mathrm{tg}(-\alpha))(1-\mathrm{tg}(\pi+\alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1+\mathrm{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň san bahasyny tapyň:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$, munda $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$, munda $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Hasaplaň:

1) $2\sin75°\cos75°$; 2) $\sin15°$; 3) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
4) $\sin75°$; 5) $\cos75°$; 6) $\sin135°$.

ÖZÜŇIZI BARLAP GÖRÜŇ!

1. Eger: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin2\alpha$-ny,

2) $\cos\alpha = -0,6$ va $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos2\alpha$-ny hasaplaň.

2. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos150°$; 3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (*Giýasiddin Jemşit al-Koşynyň meselesi.*)
$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ bolýandygyny subut ediň.

4. Toždestwony subut ediň:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2\alpha + \cos2\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi+\alpha) - \sin^2(\alpha+2\pi)}{2\cos(\alpha+2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha-\pi)}$.

Hasaplaň (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;
3) $3\cos3660°+\sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°)+\operatorname{tg}1035°$.

339. Sanlary deňeşdiriň.
1) $\sin3$ we $\cos4$; 2) $\cos0$ we $\sin5$; 3) $\sin1$ we $\cos1$.

340. Sanyň alamatyny anyklaň:
1) $\sin3{,}5\operatorname{tg}3{,}5$; 2) $\cos5{,}01\sin0{,}73$; 3) $\frac{\operatorname{tg}13}{\cos15}$;
4) $\sin1\cos2\operatorname{tg}3$; 5) $\sin2\cos2$; 6) $\operatorname{tg}1\cos1$.

341. Hasaplaň:
1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin165°$; 3) $\sin105°$;
4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:
1) $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. Berlen: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$-laryň bahalaryny hasaplaň.

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha+\sin4\alpha}$;
3) $\frac{\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha-\cos2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;
3) $\frac{\sin^2x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

347. 1) Eger $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ we tgβ = 2,4 bolsa, tg(α + β)-ny;

2) eger $\text{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ we ctgβ = –1 bolsa, ctg(α + β)-ny hasaplaň.

348. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

III baba degişli synag (test) gönükmeleri

1. 153°-yň radian ölçegini tapyň.

A) $\frac{17\pi}{20}$; B) $\frac{19\pi}{20}$; C) 17π; D) $\frac{2\pi}{9}$.

2. 0,65π-niň gradus ölçegini tapyň.

A) 11,7°; B) 117°; C) 116°; D) 118°.

3. Köpeltmek hasylynyň haýsysy otrisatel?

A) cos314°sin147°; B) tg200°ctg201°;
C) cos163°cos295°; D) sin170°ctg250°.

4. Köpeltmek hasylynyň haýsysy položitel?

A) sin2cos2sin1sin1°; B) $\text{tg}8^{\circ}\text{ctg}8\text{ctg}10^{\circ}\,\text{ctg}\sqrt{10}$;
C) $\sin9^{\circ}\sin9\cos9^{\circ}\cos9$; D) $\cos10^{\circ}\cos10\cos11^{\circ}\cos\sqrt{11}$.

5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nokada düşmek üçin (1; 0) nokady öwürmeli bolan ähli burçlary tapyň?

A) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; B) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$;

C) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; D) $2\pi + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

6. (1; 0) nokady $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ burça öwürenden emele gelýän nokadyň koordinatalaryny tapyň.

A) (0; 1); B) (0; –1); C) (1; 0); D) (–1; 0).

7. Sanlary artýan tertipde ýazyň:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

A) $a < c < b$; B) $b < c < a$; C) $c < a < b$; D) $b < a < c$.

8. Sanlary kemelýän tertipde ýazyň:

$$a = \cos 2; \quad b = \cos 2°; \quad c = \sin 2; \quad d = \sin 2°.$$

A) $a > c > d > b$; B) $d > c > b > a$;
C) $b > c > d > a$; D) $c > d > b > a$.

9. Hasaplaň: $\dfrac{\sin 136\ \cdot \cos 46\ - \sin 46\ \cdot \cos 224}{\sin 110\ \cdot \cos 40\ - \sin 20\ \cdot \cos 50}$.

A) $\cos 40°$; B) 0,5; C) $\sin 44°$; D) 2.

10. Hasaplaň: $\dfrac{\sin 10\ \cdot \sin 130\ - \sin 100\ \cdot \sin 220}{\sin 27\ \cdot \cos 23\ - \sin 157\ \cdot \cos 153}$.

A) 1; B) –1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Hasaplaň: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

A) 1; B) –1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin\alpha = 0{,}6$ bolsa, $\mathrm{tg}2\alpha$-ny tapyň $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

A) 3,42; B) $3\frac{3}{7}$; C) $\frac{7}{24}$; D) $-\frac{7}{24}$.

13. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{5}$ bolsa, $\sin 2\alpha$-ny tapyň.

A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$.

14. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ bolsa, $\cos 2\alpha$-ny tapyň.

A) $\frac{4}{3}$; B) $-\frac{4}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $-\frac{3}{4}$.

15. Ýönekeýleşdiriň: $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) -1; B) 1; C) $0{,}5$; D) $-\frac{1}{2}$.

16. Ýönekeýleşdiriň: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$; B) $\frac{1}{3}\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}$ bolsa, $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$-ny hasaplaň.

A) $0{,}59$; B) $0{,}49$; C) $-0{,}49$; D) $0{,}2$.

18. $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$ bolsa, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$-ny tapyň.

A) $\frac{81}{49}$; B) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; C) $\frac{49}{81}$; D) $-1\frac{32}{49}$.

19. Hasaplaň: $\sin 100^\circ\cdot\cos 440^\circ+\sin 800^\circ\cdot\cos 460^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) -1; D) 0.

20. Ýönekeýleşdiriň: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$; B) $-2\sin 4\alpha$; C) $\sin 4\alpha$; D) $2\cos 2\alpha$.

21. $8x^2-6x+1=0$ deňlemäniň kökleri $\sin\alpha$ we $\sin\beta$ bolup, α, β-lar I çärýekde bolsa, $\sin(\alpha+\beta)$-ny tapyň.

A) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; C) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; D) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. $6x^2-5x+1=0$ deňlemäniň kökleri $\cos\alpha$ we $\cos\beta$ bolup, α, β-lar I çärýekde bolsa, $\cos(\alpha+\beta)$-ny tapyň.

A) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$; B) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. x-i tapyň: $2(x+\sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$.

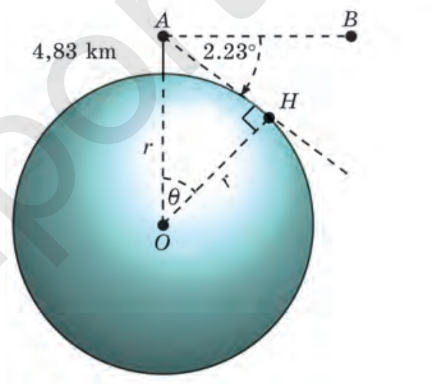
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$.

24. $x^2 - 7x + 12 = 0$ deňlemäniň kökleri tgα we tgβ bolsa, tg$(\alpha+\beta)$-ny tapyň:

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$.

Amaly we predmetara bagly meseleler

Mesele. (Birunynyň meselesi.) Gözegçi deňiz derejesinden 4,83 km beýiklikdäki dagyň depesinde durup, okeanyň gorizontyna gyşarma burçy 2,23° bolýandygyny ölçedi. Ýeriň radiusyny tapyň.



73-nji surat.

Orta asyrlaryň beýik ensiklopedist alymy Abu Reýhan Muhammet ibn Ahmet Biruny (973–1048) Ýer şarynyň radiusyny uly takyklykda ölçän bolup, meseläniň aşakda getirilen çözmek usuly oňa degişli.

△ Yeri şar diýip çak edýäris. r arkaly Ýeriň radiusyny, A arkaly dagyň depesini we H arkaly A nokatdan çykan göni çyzykda ýatýan gorizont nokadyny 73-nji suratda görkezilişi ýaly belgiläliň. O nokat Ýeriň merkezi we B nokat A nokatdan çykýan we $\overline{A}$ perpendikulýar bolan gorizontal çyzygyň nokady bolsun. $\angle AOH$ burçy θ arkaly belgiläliň.

A nokat deňiz derejesinden 4,83 km beýiklikde bolany üçin $OA = r + 4{,}83$. Mundan daşary, $OH = r$. $\overline{AB}$ çyzyk $\overline{A}$ perpendikulýar bolany üçin $\angle OAB$=90° we şu sebäpli $\angle OAH$=90°—2,23°=87,77°. Ýeriň üstüni suratdaky ýaly töwerek hökmünde garasak, $\overline{AH}$ bu töwerege galtaşma we, diýmek, $\overline{AH}$ we $\overline{H}$ özara perpendikulýar bolýar, netijedeΔOHA=90°. $\angle OAH$ burçlarynyň jemi 180° bolýanlygyndan $\theta = 180° - 90° - 87{,}77° = 2{,}23°$. Diýmek, $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r+4{,}83}$, mundan $\dfrac{r}{r+4,83} = \cos 2,23^{\circ}$.

Bu deňlemäni r-e görä çözýäris:

$$r = (r + 4,83)\cos 2,23^{\circ} \Rightarrow r - r\cos 2,23^{\circ} = 4,83\cos 2,23^{\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4,83\cos 2,23^{\circ}}{1 - \cos 2,23^{\circ}} \Rightarrow r = 6372,91.$$

Şuny aýtmak ýerliklidir, ýagny alnan netije Ýeriň asyl ortaça radiusy 6371 km-e gaty ýakyn.

Jogaby: $r = 6372,91$ km. ▲

Meseleler

1. Gözegçi Ýeriň hemrasy Ýer meýdanyndan h(km) aralykda töwerek boýunça hereket etsin. Çak edeliň, d hemradan Ýeriň üstüniň gözegçilik etmek mümkin bolan aralygynyň uzynlygy bolsun (74-nji surat).

1) Merkezi burç θ (radianlarda) we h beýikligi baglaýan deňlemäni tapyň;

2) gözegçilik edilmegi mümkin bolan aralygyň d uzynlygy bilen θ-ni baglaýan deňlemäni tapyň;

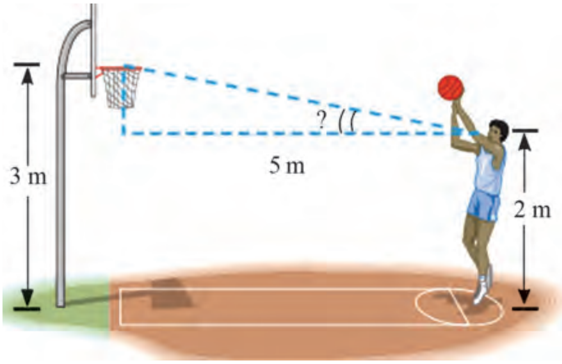
3) d we h-y baglaýan deňlemäni tapyň;

4) eger-de $d = 4000$ km bolsa, Ýeriň hemrasy nähili beýiklikde bolmaly?

5) eger-de Ýeriň hemrasy 100 km beýiklikde bolsa, d nähili bolýar?

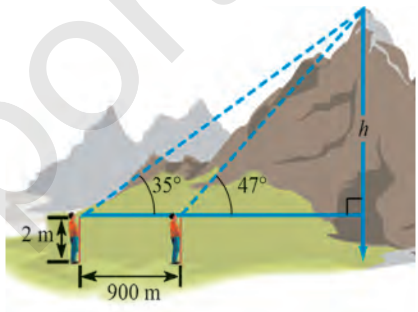
74-nji surat.

2. Basketbol sebedinden 5 metr aralykda duran basketbolçynyň gözleri poldan 2 metr beýiklik derejesinde, munda sebetjigiň halkasy poldan 3 metr beýiklikde (75-nji surat). Onuň gözlerinden sebetjigiň halkasynyň merkezine garama burçy nähili?



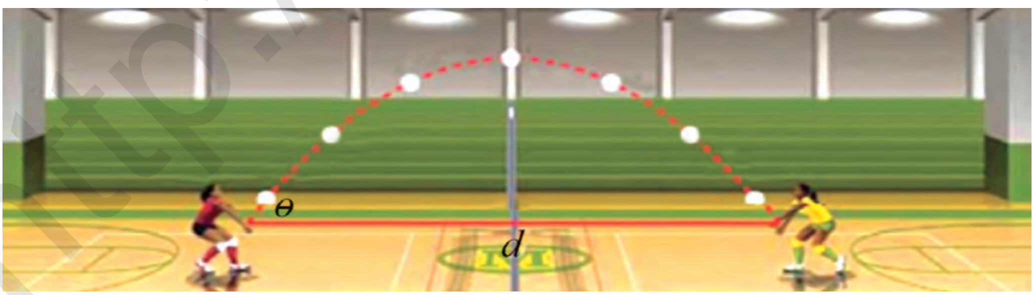
75-nji surat.

3. Markşeýder (känleri planlaşdyryjy we olardan dogry peýdalanmak boýunça hünärmen) dagyň beýikligini ölçemek maksadynda aralaryndaky aralyk 900 metr bolan iki nokatdan ýokary galyş burçlaryny ölçedi (76-njy surat). Netijede birinji burç 47° we ikinji 35° ekenligi anyklandy. Eger-de teodolitiň (burçy ölçeýji abzal) beýikligi 2 metr bolsa, dagyň beýikligini tapyň.



76 njy urat.

4. Woleýbol oýnunda ýokary galyş burçy θ we başlangyç tezligi v m/s bilen zyňlan top $d = \frac{v}{9,75}\sin 2(\theta)$ formula esasan d gorizontal aralyga uçup barýar. Eger-de $\theta = 60°$ we tizlik 12 m/s bolsa, d-ni tapyň (77-nji surat).

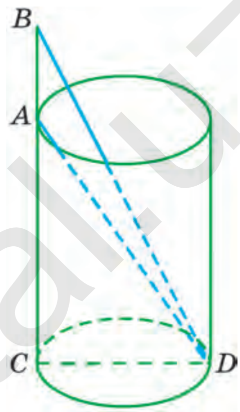


77 nji urat.

Taryhy meseleler

Abu Reýhan Birunynyň meseleleri

1. Guýy silindr şeklinde bolup, onuň düýbi guýynyň agzyndaky A nokatdan α burç astynda, guýynyň diwarynyň dowamyndaky B nokatdan β burç astynda görünýär (78-nji surat). Eger $AB = a$ bolsa, guýynyň çuňlugyny tapyň:



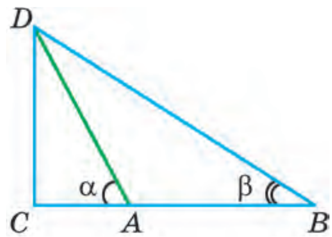
78-nji surat.

Berlen:

$\angle CAD = \alpha, \ \angle ABD = \beta, \ \ AB = a.$

Tapmaly: $AC = ?$

2. Minara ýerdäki A nokatdan α burç astynda, B nokatdan bolsa β burç astynda görünýär (79-njy surat). $AB = a$ bolsa, minaranyň beýikligini tapyň.



79-njy surat.

Berlen:

$\angle CAD = \alpha, \ \angle ABD = \beta, \ AB = a.$

Tapmaly: $CD = ?$

Giýasiddin Jemşit al-Koşynyň meselesi

3. Islendik α burç üçin

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

bolýandygyny subut ediň.

Meşhur matematik Abulwepa Muhammet al-Buzjanynyň (940–998) meselesi

4. Islendik α we β üçin

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

bolýandygyny subut ediň.

Taryhy maglumatlar

Matematikanyň, hususan-da, trigonometriýanyň ösmegine beýik alymlar Muhammet al-Horezmi, Ahmet Fergany, Abu Reýhan Biruny, Mürze Ulugbek, Ali Guşçy, Giýasiddin Jemşit al-Koşy uly goşant goşupdyrlar. Ýyldyzlaryň asman sferasyndaky koordinatalaryny anyklamak, planetalaryň hereketlerini synlamak, Aýyň we Günüň tutulmagyny öňünden aýdyp bermek we başga ylmy, amaly ähmiýete eýe meseleleriň takyk hasaplary, bu hasaplara esaslandyrylan jedwelleri düzmegi talap edýärdi. Ynha şeýle astronomik (trigonometrik) jedwellеr Gündogarda „Zij“ler diýlip atlandyrylypdyr.

Mürze Ulugbek (1394–1449)

Muhammet al-Horezmi, Abu Reýhan Biruny, Mürze Ulugbek ýaly alymlarymyzyň matematiki eserleri bilen birlikde „Zij“leri hem meşhur bolan, olar latyn we başga dillere terjime edilip, Ýewropada matematikanyň, astronomiýanyň ösmegine saldamly täsir edipdir.

Birunynyň „Kanuny Ma’sudiý“ eserinde sinuslar jedweli 15 minut aralyk bilen, tangensler jedweli 1° aralyk bilen 10^{-8}-e çenli takyklykda berlen. Has takyk „Zij“lerden biri Mürze Ulugbekiň „Zij“i – „Ziji Koragany“dyr. Munda sinuslar jedweli 1 minut aralyk bilen, tangensler jedweli 0°-dan 45°-a çenli 1 minut aralyk bilen, 46°-dan 90°-a çenli bolsa 5 minut aralyk bilen 10^{-10}-a çenli takyklykda berlen.

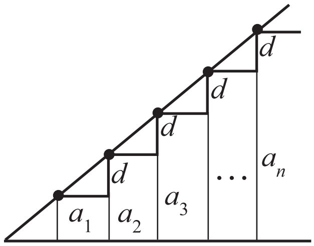
Giýasiddin Jemşit al-Koşy „Horda we sinus barada risala“ eserinde $\sin 1^\circ$-y oturdan soň 17 öýjük takyklykda hasaplaýar:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Töweregiň uzynlygy oňa içinden we daşyndan çyzylan dogry $3\cdot 2^n$ – köpburçluklaryň perimetrleriniň orta arifmetigine deň diýip, $n = 28$ bolanda Jemşit al-Koşy „Töwerek barada risala“ eserinde 2π üçin aşakdaky netijäni alypdyr:

$$2\pi = 6{,}2831853071795865...$$

IV B A P. SAN YZYGIDERLIGI. PROGRESSIÝALAR



28-§. SAN YZYGIDERLIGI

Gündelik amalyýetde dürli zatlaryň ýerleşiş tertibini görkezmek üçin olary nomerlemekden peýdalanylýar. Meselem, her bir köçede ýerleşen öýler nomerlenýär. Kitaphanada kitap okyjylarynyň abonementleri nomerlenýär we olary berlen nomerler tertibinde ýörite kartotekalara ýerleşdirilýär.

Bankda amanatçynyň hasap belgisi nomeri boýunça ondaky serişdäniň mukdaryny görmegi mümkin. Diýeliň, №1 hasap belgisinde a_1 som, №2 hasap belgisinde a_2 som we başgalar bolsun. Netijede

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$$

san yzygiderligini alarys, bu ýerde $N-$ähli hasap belgileriniň sany. Munda 1-den N-e çenli bolan her bir natural n sanyna a_n sany laýyk goýlan.

Matematikada *tükeniksiz* san yzygiderligi öwrenilýär:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

a_1 – san yzygiderliginiň birinji agzasy, a_2 – yzygiderligiň ikinji agzasy, a_3 – yzygiderligiň üçünji agzasy diýilýär we başgalar. a_n – sany yzygiderliginiň n-(eninji) agzasy diýlip, natural n sany bolsa onuň nomeri diýlip atlandyrylýar. Meselem, natural sanlar kwadratlaridan ybarat 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... san yzygiderligi üçin $a_1=1$ yzygiderligiň birinji agzasy; $a_n=n^2$ yzygiderligiň n- agzasy; $a_{n+1}=(n+1)^2$ yzygiderligiň $(n+1)$- agzasy.

San yzygiderligi köplenç umumy n-nji agzasynyň formulasynyň kömeginde beriljýär. Meselem, $a_n = \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, ...)$ formulanyň kömeginde $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},..., \frac{1}{n}, ...$ san yzygiderligi berlen.

1-nji mesele. San yzygiderligi $a_n=n(n-2)$ formulanyň kömeginde berlen. Onuň ýüzünji agzasyny hasaplaň.

$$\triangle\ a_{100}=100\cdot(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

2-nji mesele. San yzygiderligi $a_n=2n+3$ formulanyň kömeginde berlen. 1) Yzygiderligiň 43-e deň bolan agzasynyň nomerini anyklaň; 2) 50 sany yzygiderligiň agzasy bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň.

$\triangle$**1)** Şerte görä $2n+3=43$, mundan $n=20$.

2) Eger-de 50 sany yzygiderligiň n- nomerli agzasy bolsa, onda $2n+3=50$, mundan $n=23{,}5$. Emele gelen n-iň bahasy natural san bolmanlygy üçin, ol yzygiderligiň agzasynyň nomeri bolup bilmeýär. Şu sebäpli, 50 sany yzygiderligiň agzasy däl. $\blacktriangle$

Käte yzygiderlik şeýle formula arkaly beriljýär, ýagny munda onuň käbir nomerden başlap islendik agzasyny ondan öňki bir ýa-da birnäçe agzalarynyň kömeginde hasaplamak mümkin bolýar. Yzygiderligiň şeýle berilmek usulyna *rekurrent* (latynça *recuro* – gaýtmak) usuly diýilýär.

3-nji mesele. San yzygiderligi $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$ rekurrent formulanyň we $b_1=1$, $b_2=3$ şertleriň kömeginde berlen. Bu yzygiderligiň bäşinji agzasyny hasaplaň.

$\triangle$ $b_3=b_2+b_1=3+1=4.$

$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$

$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$

Jogaby: $b_5=11.$ $\blacktriangle$

Gönükmeler

349. Natural sanlaryň kwadratlaryndan ybarat 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... san yzygiderligi berlen.
1) Yzygiderligiň üçünji, altynjy, n-agzalaryny aýdyň.
2) Yzygiderligiň 4, 25, n^2, $(n+1)^2$ -ä deň bolan agzalarynyň nomerlerini görkeziň.

350. n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen yzygiderligiň birinji üç agzasyny hasaplaň:
1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;
4) $a_n = \frac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Ýatdan). San yzygiderligi $x_n = n^2$ formula bilen berlen. Yzygiderligiň 100; 144; 225-e deň bolan agzalarynyň nomeri nähili? 48, 49, 169 sanlary şu yzygiderligiň agzalary bolarmy?

352. Yzygiderlik $a_n = n^2 - 2n - 6$ formula bilen berlen.
1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9
sanlary yzygiderligiň agzalary bolarmy?

353. 1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$
rekurrent formula we $a_1 = 2$ şert bilen berlen yzygiderligiň ilkinji dört agzasyny tapyň.

354. San yzygiderliginiň n-nji agzasynyň formulasy $a_n = (n-1)(n+4)$ bilen berlen. Eger-de
1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ bolsa, n-i tapyň.

355. $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ rekurrent formula we $a_1 = 256$ şert bilen berlen yzygiderligiň birinji dört agzasyny hasaplaň.

356. $a_1 = 1$ şert we
1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$;
rekurrent formula bilen berlen yzygiderligiň ilkinji alty agzasyny ýazyň.

357. San yzygiderligi $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ rekurrent formula we $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, şert bilen berlen. Yzygiderligiň bäşinji agzasyny hasaplaň.

358. *n*-nji agzasynyň formulasy bilen berlen san yzygiderliginiň, $(n + 1)$-, $(n + 2)$-nji we $(n + 5)$-nji agzalaryny ýazyň:

1) $a_n = -5n + 4$; 2) $a_n = 2(n - 10)$; 3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

29- §. ARIFMETIK PROGRESSIÝA

Aşakdaky meselä garalyň.

Mesele. Okuwçy synagdan geçmek üçin taýýarlanyp, her gün 5 sanydan synag meselelerini çözmegi planlaşdyrdy. Her bir gün çözülmeli bolan synag meseleleriniň sany nähili üýtgeýär?

Planlaşdyrylan meseleler sany her bir güne gelip aşakdaky ýaly üýtgäp barýar:

1-nji gün	2-nji gün	3-nji gün	4-nji gün...
5 sany	10 sany	15 sany	20 sany ...

Netijede aşakdaky yzygiderligi alarys:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \dots .$$

a_n arkaly *n*-nji güne gelip çözülmeli bolan ähli meseleler sanyny kesgitläliň. Meselem:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ \dots .$$

Alnan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

sanlara *san yzygiderligi* diýilýär.

Bu yzygiderlikde ikinjiden başlap onuň her bir agzasy öňki agza şol birmeňzeş 5 sanyny goşulanyna deň. Şeýle yzygiderlige *arifmetik progressiýa* diýilýär.

Kesgitleme. ***Eger $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ san yzygiderliginde ähli natural n-ler üçin***

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(bu ýerde d – käbir san) deňlik ýerine ýetirilse, şeýle yzygiderlik arifmetik progressiýa diýilýär.

Bu formuladan $a_{n+1} - a_n = d$ bolýandygy gelip çykýar. d sana *arifmetik progressiýanyň tapawudy* diýilýär. Meselem,

1) Sanlaryň 1, 2, 3, 4 ..., n, ... natural hatary arifmetik progressiýany düzýär. Bu progressiýanyň tapawudy $d = 1$.

2) Bitin otrisatel sanlaryň –1, –2, –3, ..., $-n$, ... yzygiderligi tapawudy $d = -1$ bolan arifmetik progressiýadyr.

3) 3, 3, 3, ..., 3, ... yzygiderligiň tapawudy $d = 0$ bolan arifmetik progressiýadan ybarat.

1-nji mesele. $a_n = 1{,}5 + 3n$ formula bilen berlen yzygiderlik arifmetik progressiýa bolýandygyny subut ediň.

△ $a_{n+1} - a_n$ tapawut ähli n üçin şol birmeňzeşdigini (n-e bagly däl) görkezmek talap edilýär.

Berlen yzygiderligiň $(n + 1)$-nji agzasyny ýazýarys:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Şonuň üçin

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Diýmek, $a_{n+1} - a_n$ tapawut n-e bagly däl. ▲

Arifmetik progressiýanyň kesgitlemesine görä $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$, mundan

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n > 1.$$

Şeýlelikde, arifmetik progressiýanyň ikinji agzasyndan başlap her bir agzasy oňa goňşy bolan iki agzanyň orta arifmetigine deň. „Arifmetik“ progressiýa diýen at şunuň bilen düşündirilýär.

Eger a_1 we d berlen bolsa, onda arifmetik progressiýanyň galan agzalaryny $a_{n+1} = a_n + d$ formula boýunça hasaplamak mümkindigini nygtaýarys. Şeýle usul bilen progressiýanyň birnäçe ilkinji agzasyny hasaplamak kynçylyk döretmeýär; ýöne, meselem, a_{100} üçin ençeme hasaplamalar talap edilýär. Adatda, munuň üçin n-nji agzanyň formulasyndan peýdalanylýar.

Arifmetik progressiýanyň kesgitlemesine görä

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ we h.k.}$$

Umuman,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (1)$$

çünki arifmetik progressiýanyň n-nji agzasy onuň birinji agzasyna d sanyny $(n - 1)$ gezek goşmak netijesinde alynýar.

(1) formula *arifmetik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasy* diýilýär.

2 -nji mesele. Eger $a_1 = -6$ we $d = 4$ bolsa, arifmetik progressiýanyň ýüzünji agzasyny tapyň.

△ (1) formula boýunça: $a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$. ▲

3 -nji mesele. 99 sany 3, 5, 7, 9, ... arifmetik progressiýanyň agzasy. Şu agzanyň nomerini tapyň.

△ Aýdaly, n – gözlenýän nomer bolsun. $a_1 = 3$ we $d = 2$ bolany üçin $a_n = a_1 + (n - 1)d$ formula görä: $99 = 3 + (n - 1) \cdot 2$. Şonuň üçin $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Jogaby: $n = 49$. ▲

4 -nji mesele. Arifmetik progressiýada $a_8 = 130$ we $a_{12} = 166$. n-nji agzasynyň formulasyny tapyň.

△ (1) formuladan peýdalanyp, tapýarys:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

a_8 we a_{12} -leriň berlen bahalaryny goýup, a_1 we d-ge görä deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Ikinji deňlemeden birinji deňlemäni aýryp, alarys:

$$4d = 36, \; d = 9.$$

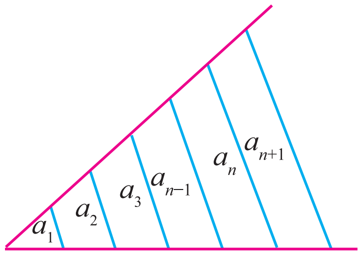
Diýmek, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny ýazýarys:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Jogaby: $a_n = 9n + 58$. ▲

5-nji mesele. Burçuň bir tarapynda onuň depesinden başlap deň kesimler bölünýär. Olaryň ahyrlaryndan parallel göni çyzyklar geçirilýär (80-nji surat). Şu göni çyzyklaryň burç taraplarynyň arasyndaky a_1, a_2, a_3, ... kesimleriniň uzynlyklary arifmetik progressiýany düzýändigini subut ediň.



80 nji urat.

△ Esaslary a_{n-1} we a_{n+1} bolan trapesiýada onuň orta çyzygy a_n-e deň. Şonuň üçin

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Mundan $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ ýa-da

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Yzygiderligiň her bir agzasy bilen ondan öňki agzasynyň tapawudy şol birmeňzeş san bolany üçin bu yzygiderlik arifmetik progressiýa bolýar. ▲

Gönükmeler

359. (Ýatdan.) Arifmetik progressiýanyň birinji agzasyny we tapawudyny aýdyň:

1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Eger:

1) $a_1 = 2$ we $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ we $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ we $d = -1$ bolsa, arifmetik progressiýanyň ilkinji bäş agzasyny ýazyň.

361. n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen aşakdaky yzygiderligiň arifmetik progressiýa bolýandygyny subut ediň:

1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Arifmetik progressiýada:

1) eger $a_1 = 2$, $d = 3$ bolsa, a_{15}-i tapyň;
2) eger $a_1 = 3$, $d = 4$ bolsa, a_{20} -ni tapyň;

3) eger $a_1 = -3,\ d = -2$ bolsa, a_{18}-i tapyň;
4) eger $a_1 = -2,\ d = -4$ bolsa, a_{11}-i tapyň.

363. Arifmetik progressiýanyň *n*-nji agzasynyň formulasyny ýazyň:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. –22 sany 44, 38, 32, ... arifmetik progressiýanyň agzasy. Şu sanyň nomerini tapyň.

365. 12 sany –18, –15, –12, ... arifmetik progressiýanyň agzasy bolarmy?

366. –59 sany 1, –5 ... arifmetik progressiýanyň agzasy. Onuň nomerini tapyň. –46 sany şu progressiýanyň agzasy bolarmy?

367. Eger arifmetik progressiýada:
1) $a_1 = 7,\ a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4,\ a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8,\ a_{10} = 64$ bolsa, onuň tapawudyny tapyň.

368. Arifmetik progressiýanyň tapawudy 1,5-e deň. Eger:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$ bolsa, a_1 ni tapyň.

369. Eger arifmetik progressiýada:
1) $d = -3,\ a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10,\ a_{22} = -5{,}5$;
3) $a_3 = -1,\ a_9 = 17$ bolsa, onuň birinji agzasyny tapyň.

370. Eger arifmetik progressiýada:
1) $a_3 = 13,\ a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7,\ a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11,\ a_{13} = 29$ bolsa, onuň *n*-nji agzasynyň formulasyny tapyň.

---

371. *n*-iň nähili bahalarynda 15, 13, 11, ... arifmetik progressiýanyň agzalary otrisatel bolýar?

372. Arifmetik progressiýada $a_1 = -10,\ d = 0{,}5$ bolsa, *n*-iň nähili bahalarynda $a_n < 2$ deňsizlik ýerine ýetirilýär?

373. Eger arifmetik progressiýada:
1) $a_8 = 126,\ a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64,\ a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7,\ a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5,\ a_{10} = -2{,}5$
bolsa, onuň dokuzynjy agzasyny we tapawudyny tapyň.

30-§. ARIFMETIK PROGRESSIÝANYŇ ILKINJI *N* SANY AGZASYNYŇ JEMI

1-nji mesele. 1-den 100-e çenli bolan ähli natural sanlaryň jemini tapyň.

△ Bu jemi iki usul bilen ýazýarys:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1.$$

Bu deňlikleri agzama-agza goşýarys:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101}_{100 \text{ sany qoşulyjy}}$$

Şonuň üçin $2S = 101 \cdot 100$, mundan $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Indi islendik

$$a_1, a_2, ... , a_n, ...$$

arifmetik progressiýa garaýarys. S_n – şu progressiýa ilkinji n sany agzasynyň jemi bolsun:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Teorema. Arifmetik progressiýanyň ilkinji *n* sany agzasynyň jemi aşakdaka deň:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \qquad \textbf{(1)}$$

○ S_n ni iki usul bilen ýazyp alýarys:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Arifmetik progressiýanyň kesgitlemesine görä, bu deňlikleri aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1)d), \qquad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-1)d). \qquad (3)$$

(2) we (3) deňlikleri agzama-agza goşýarys:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ sany } 100 \text{ qoşulyjy}}$$

Diýmek, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, mundan $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$. ●

2-nji mesele. Ilkinji n sany natural sanyň jemini tapyň.

△ Natural sanlaryň

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...,\ n,\ ...$$

yzygiderligi tapawudy $d = 1$ bolan arifmetik progressiýadyr. $a_1 = 1$ we $a_n = n$ bolany üçin (1) formula boýunça tapýarys:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1+n}{2} \cdot n .$$

Şeýlelikde,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} . \ ▲$$

3-nji mesele. Eger $38 + 35 + 32 + ... + (-7)$ jemiň goşulyjylary arifmetik progressiýanyň yzygider agzalary bolsa, şu jemi tapyň.

△ Şerte görä, $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. Indi $a_n = a_1 + (n-1)d$ formulany ulanyp, $-7 = 38 + (n-1)(-3)$-i alarys, mundan $n = 16$.

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ formula boýunça tapýarys:

$$S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248 . \ ▲$$

4-nji mesele. Jem 153-e deň bolmagy üçin 1-den başlap näçe yzygider natural sanlary goşmaly?

△ Sanlaryň natural hatary – tapawudy $d = 1$ bolan arifmetik progressiýa. Şerte görä $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Ilkinji n sany agzanyň jeminiň formulasyny aşakdaky ýaly üýtgedýäris:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n .$$

Berlenlerden peýdalanyp, nämälim n-e görä deňleme alarys:

$$153 = \frac{2 \cdot 1+(n-1) \cdot 1}{2} \cdot n ,$$

mundan

$$306 = 2n + (n-1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Bu deňlemäni çözüp, tapýarys:

$$n_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1-35}{2},$$

$$n_1 = -18, \; n_2 = 17.$$

Goşulyjylaryň sanynyň otrisatel bolmagy mümkin däl, şonuň üçin $n = 17$. ▲

Gönükmeler

374. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1=1, \; a_n=20, \; n=50$; 3) $a_1=-1, \; a_n=-40, \; n=20$;

2) $a_1=1, \; a_n=200, \; n=100$; 4) $a_1=2, \; a_n=100, \; n=50$

bolsa, onuň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

375. 2-den 98-e çenli bolan ähli natural sanlaryň jemini tapyň (98 hem jeme girýär).

376. 1-den 133-e çenli bolan ähli täk sanlaryň jemini tapyň (133 hem jeme girýär).

377. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1=-5, \; d=0{,}5$; 2) $a_1=\frac{1}{2}, \; d=-3$; 3) $a_1=36, \; d=-2{,}5$

bolsa, onuň ilkinji on iki agzasynyň jemini tapyň.

378. 1) eger $n = 11$ bolsa, 9; 13; 17; ...;

2) eger $n = 12$ bolsa, –16; –10; –4; ...

arifmetik progressiýanyň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

379. Eger:

1) $3 + 6 + 9 + ... + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + ... + (-60)$

jemiň goşulyjylary arifmetik progressiýanyň yzygider agzalary bolsa, şu jemi tapyň.

380. Ähli ikibelgili, ähli üçbelgili sanlaryň jemini tapyň.

381. Arifmetik progressiýa n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen. Eger:
1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$ bolsa, S_{50}-ni tapyň.

382. Jem 75-e deň bolmagy üçin 3-den başlap näçe yzygider natural sany goşmaly?

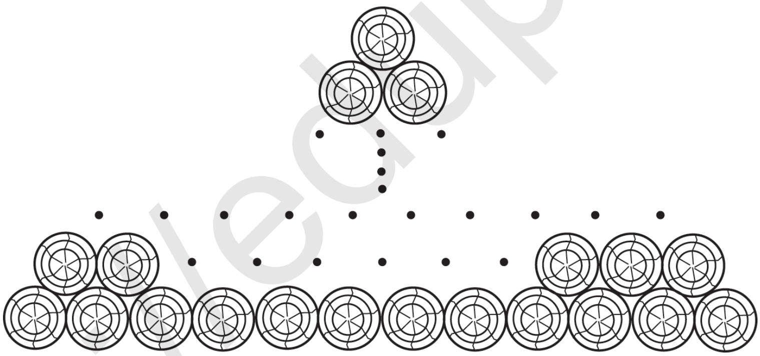
383. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$
bolsa, a_n we d-ni tapyň.

384. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; | 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$; | 3) $a_{20} = 65$, $S_{20} = 350$ bolsa, a_1 we d-ni tapyň.

385. Gurluşykbap pürsleri saklanda olary 81-nji suratda görkezilişi ýaly rejeleýärler. Eger rejäniň esasynda 12 sany pürs duran bolsa, bir rejede näçe pürs bolar?



81-nji surat.

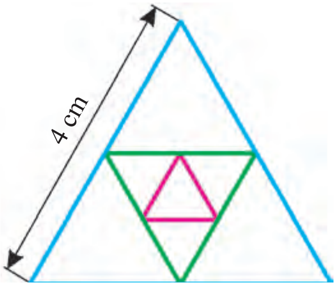
386. Arifmetik progressiýada $a_3 + a_9 = 8$. S_{11}-i tapyň.

387. Eger arifmetik progressiýada $S_5 = 65$ we $S_{10} = 230$ bolsa, onuň birinji agzasyny we tapawudyny tapyň.

388. Arifmetik progressiýa üçin $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ deňligiň ýerine ýetirilýändigini subut ediň.

31-§. GEOMETRIK PROGRESSIÝA

Tarapy 4 cm bolan deň taraply dogry üçburçluga garaýarys. Depeleri berlen üçburçlugyň taraplarynyň ortalaryndan ybarat bolan üçburçluk gurýarys (82-nji surat). Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetine görä ikinji üçburçlugyň tarapy 2 cm-e deň. Şuňa meňzeş gurmagy dowam etdirip, taraplary 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ cm we başgalar bolan üçburçluklary alarys. Şu üçburçluklaryň taraplarynyň uzynlyklarynyň yzygiderligini ýazýarys:



82-nji surat.

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \dots .$$

Bu yzygiderlikde, ikinjiden başlap, onuň her bir agzasy öňki agzany şol birmeňzeş $\frac{1}{2}$ sana köpeldilenine deň. Şeýle yzygiderliklere *geometrik progressiýalar* diýilýär.

Kesgitleme. ***Eger***

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n,\ \dots$$

san yzygiderliginde ähli natural n üçin

$$b_{n+1} = b_n q$$

deňlik ýerine ýetirilse, şeýle yzygiderlige geometrik progressiýa diýilýär, bu ýerde $b_n \neq 0$, q – nola deň bolmadyk käbir san.

Bu formuladan $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ bolýandygy gelip çykýar. q sana *geometrik progressiýanyň maýdalawjysy* diýilýär.

Mysallar.

1) 2, 8, 32, 128, ... – maýdalawjysy $q = 4$ bolan geometrik progressiýa;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – maýdalawjysy $q = \frac{2}{3}$ bolan geometrik progressiýa;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – maýdalawjysy $q=-12$ bolan geometrik progressiýa;
4) 7, 7, 7, 7, ... – maýdalawjysy $q=1$ bolan geometrik progressiýa.

1-nji mesele. $b_n = 7^{2n}$ formula bilen berlen yzygiderligiň geometrik progressiýa bolýandygyny subut ediň.

△ Ähli n-lerde $b_n = 7^{2n} \neq 0$ bolýandygyny nygtap geçýäris. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ paý ähli n-ler üçin n-e bagly bolmadyk şol birmeňzeş sana deňligini subut etmek talap edilýär. Hakykatdan hem,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

ýagny $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ paý n-e bagly däl. ▲

Geometrik progressiýanyň kesgitlemesine görä

$$b_{n+1}=b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

mundan

$$b^2_{n+1} = b_{n-1}\, b_{n+1}, \quad n>1.$$

! **Eger progressiýanyň ähli agzalary položitel bolsa, onda $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ bolýar, ýagny geometrik progressiýanyň ikinjiden başlap her bir agzasy oňa goňşy bolan iki agzanyň orta geometrigine deň. „Geometrik“ progressiýa diýen at şunuň bilen düşündirilýär.**

Eger b_1 we q berlen bolsa, onda geometrik progressiýanyň galan agzalaryny $b_{n+1} = b_n q$ rekurrent formula boýunça hasaplamak mümkinligini nygtaýarys. Ýöne, n uly bolanda bu köp zähmet talap edýär. Adatda n-nji agzanyň formulasyndan peýdalanylýar.

Geometrik progressiýanyň kesgitlemesine görä

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ we ş.m.}$$

Umuman,

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

çünki geometrik progressiýanyň n-nji agzasy onuň birinji agzasyny q sana (n–1) gezek köpeltmek bilen alynýar.

(1) formula geometrik progressiýanyň *n-nji agzasynyň formulasy* diýilýär.

2-nji mesele. Eger $b_1 = 81$ we $q = \frac{1}{3}$ bolsa, geometrik progressiýanyň ýedinji agzasyny tapyň.

△ (1) formula görä:

$$b_7 = 81 \cdot (\tfrac{1}{3})^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \ ▲$$

3-nji mesele. 486 sany 2, 6, 18, ... geometrik progressiýanyň agzasy. Şu agzanyň nomerini tapyň.

△ Aýdaly, n – gözlenýän nomer bolsun. $b_1 = 2$, $q = 3$ bolany üçin $b_n = b_1 q^{n-1}$ formula görä:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \ 243 = 3^{n-1}, \ 3^5 = 3^{n-1},$$

mundan $n-1=5$, $n=6$. ▲

4-nji mesele. Geometrik progressiýada $b_6 = 96$ we $b_8 = 384$. n-nji agzasynyň formulasyny tapyň.

△ $b_n = b_1 q^{n-1}$ formula görä: $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. b_6 we b_8-iň berlen bahalaryny goýup, alarys: $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Bu deňliklerden ikinjini birinjisine bölýäris:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

mundan $4 = q^2$ ýa-da $q^2 = 4$. Ahyrky deňlikden $q = 2$ ýa-da $q = -2$ bolýandygyny tapýarys.

Progressiýanyň birinji agzasyny tapmak üçin $96 = b_1 q^5$ deňlikden peýdalanýarys:

1) $q = 2$ bolsun. Onda $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96 = b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$.

Diýmek, $b_1 = 3$ we $q = 2$ bolanda n-nji agzanyň formulasy

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

bolýar.

2) $q = -2$ bolsun. Onda $96 = b_1(-2)^5$, $96 = b_1(-32)$, $b_1 = -3$.
Diýmek, $b_1 = -3$ we $q = -2$ bolanda, n-nji agzanyň formulasy

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

bolýar.

Jogaby: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ýa-da $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

5-nji mesele. Kwadrat töweregiň içinden çyzylan, onuň içinden bolsa ikinji töwerek çyzylan. Ikinji töweregiň içinden ikinji kwadrat çyzylan, onuň içinden bolsa üçünji töwerek çyzylan we başgalar (83-nji surat). Töwerekleriň radiuslarynyň geometrik progressiýany düzýändigini subut ediň.

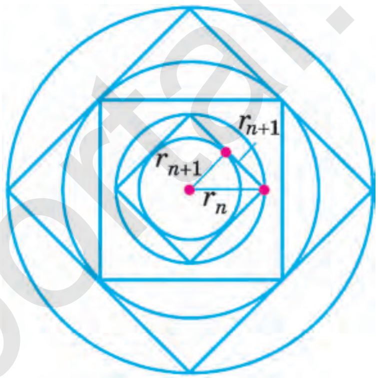
△ n-nji töweregiň radiusy r_n bolsun. Onda Pifagoryň teoremasyna görä

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

mundan

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ ýagny } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n.$$

Diýmek, töwerekleriň radiuslarynyň yzygiderligi maýdalawjysy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bolan geometrik progressiýany düzýär. ▲



83-nji surat.

Gönükmeler

389. (Ýatdan.) Şu geometrik progressiýanyň birinji agzasy we maýdalawjysy nämä deň:

1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ;
3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Eger geometrik progressiýada:
1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$
bolsa, onuň ilkinji bäş agzasyny ýazyň.

391. n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen aşakdaky yzygiderligiň geometrik progressiýa bolýandygyny subut ediň:

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 3$ we $q = 10$ bolsa, b_4-i;

2) $b_1 = 4$ we $q = \frac{1}{2}$ bolsa, b_7 -ni;

3) $b_1 = 1$ we $q = -2$ bolsa, b_5 -i;

4) $b_1 = -3$ we $q = -\frac{1}{3}$ bolsa, b_6-ny hasaplaň.

393. Geometrik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny ýazyň:

1) 4, 12, 36, ...;	2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...;	3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;
4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ;	5) 16, 8, 4, 2, ... ;	6) –9, 3, –1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Geometrik progressiýada aşagy çyzylan agzanyň nomerini tapyň:

1) 6, 12, 24, ... , $\underline{192}$, ...; 2) 4, 12, 36, ... , $\underline{324}$, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , $\underline{128}$, ...

395. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$;
3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$;
4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

bolsa, onuň maýdalawjysyny tapyň.

396. 2, 6, 18, ... geometrik progressiýa berlen.

1) şu progressiýanyň sekizinji agzasyny hasaplaň;

2) yzygiderligiň 162-ä deň agzasynyň nomerini tapyň.

397. Eger položitel agzaly geometrik progressiýada:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

bolsa, onuň ýedinji agzasyny we maýdalawjysyny tapyň.

398. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$ bolsa, onuň bäşinji we birinji agzalaryny tapyň.

399. Amanatçy banka 2009-njy ýylyň 4-nji ýanwar güni 300 000 som pul goýdy. Eger bank ýylyna amanadyň 30%-i mukdarynda girdeji berse, amanatçynyň puly 2012-nji ýylyň 4-nji ýanwaryna baryp näçe bolar?

400. Tarapy 4 cm bolan kwadrat berlen. Onuň taraplarynyň ortalary ikinji kwadratyň depeleri bolýar. Ikinji kwadratyň taraplarynyň ortalary üçünji kwadratyň depeleri bolýar we başgalar. Şu kwadratlaryň meýdanlarynyň yzygiderligi geometrik progressiýany düzýändigini subut ediň. Ýedinji kwadratyň meýdanyny tapyň.

32-§. GEOMETRIK PROGRESSIÝANYŇ ILKINJI *N* SANY AGZASYNYŇ JEMI

1-nji mesele. Şu jemi tapyň:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

△ Deňligiň iki bölegini hem 3-e köpeldýäris:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

(1) we (2) deňlikleri şeýle ýazyp çykýarys:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Ýaýlaryň içinde duran aňlatmalar birmeňzeş. Şonuň üçin aşakdaky deňlikden ýokardaky deňligi aýryp, alarys:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \ ▲$$

Indi maýdalawjysy $q \neq 1$ bolan islendik b_1, b_1q, ..., b_1q^n, ... geometrik progressiýa garaýarys. S_n – şu progressiýanyň ilkinji n sany agzasynyň jemi bolsun:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Teorema. ***Maýdalawjysy $q \neq 1$ bolan geometrik progressiýanyň ilkinji n sany agzasynyň jemi aşakdaka deň:***

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad \mathbf{(4)}$$

○ (3) deňligiň iki bölegini hem q -a köpeldýäris:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^n. \qquad (5)$$

(3) we (5) deňlikleri, olardaky birmeňzeş goşulyjylary dagydyp, ýazyp çykýarys:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Ýaýlaryň içinde duran aňlatmalar deň. Şonuň üçin ýokardaky deňlikden aşakdakysyny aýryp, alarys:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Mundan

$$S_n(1-q) = b_1(1-q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Eger $q = 1$ bolsa, onda

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + ... + b_1}_{n \text{ sany goşulyjy}} = b_1n, \text{ ýagny } S_n = b_1n.$$

2-nji mesele. 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... geometrik progressiýanyň ilkinji bäş agzasynyň jemini tapyň.

△ Bu progressiýada $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. (4) formula boýunça tapýarys:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = \frac{242}{27}. \ ▲$$

3-nji mesele. Maýdalawjysy $q = \frac{1}{2}$ bolan geometrik progressiýada ilkinji alty agzanyň jemi 252-ä deň. Şu progressiýanyň birinji agzasyny tapyň.

△ (4) formuladan peýdalanyp, alarys:

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Mundan $252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right), 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, b_1 = 128$. ▲

4-nji mesele. Geometrik progressiýa ilkinji n sany agzasynyň jemi –93-e deň. Bu progressiýanyň birinji agzasy –3-e, maýdalawjysy bolsa 2-ä deň. n-i tapyň.

△ (4) formuladan peýdalanyp, alarys:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Mundan $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

5-nji mesele. 5, 15, 45, ..., 1215, ... – geometrik progressiýa. 5 + 15 + 45 + ... + 1215 jemi tapyň.

△ Bu progressiýada $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Ilkinji n sany agzanyň jeminiň formulasyny şeýle çalşyrýarys:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Meseläniň şertinden peýdalanyp, tapýarys:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645-5}{2} = 1820.$$ ▲

Gönükmeler

401. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$

bolsa, onuň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

402. Geometrik progressiýanyň ilkinji ýedi agzasynyň jemini tapyň:

1) 5, 10, 20, ... ; 2) 2, 6, 18, ... ; 3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. Eger geometrik progressiýada:

1) $q = 2$, $S_7 = 635$ bolsa, b_1 we b_7-ni tapyň;

2) $q = -2$, $S_8 = 85$ bolsa, b_1 we b_8-i tapyň.

404. Eger geometrik progressiýada:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2$;

2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2$;

3) $S_n = 170, b_1 = 256, \ q = -\frac{1}{2}$;

4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

bolsa, onuň agzalary sany n-i tapyň.

405. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 7, \ q = 3, \ S_n = 847$ bolsa, n we b_n -i;

2) $b_1 = 8, \ q = 2, \ S_n = 4088$ bolsa, n we b_n -i;

3) $b_1 = 2, \ b_n = 1458, \ S_n = 2186$ bolsa, n we q-ny;

4) $b_1 = 1, \ b_n = 2401, \ S_n = 2801$ bolsa, n we q-ny

tapyň.

406. Eger sanlaryň jeminiň goşulyjylary geometrik progressiýanyň yzygider agzalary bolsa, şu jemi tapyň:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128$; 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243$;

3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128$; 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405$.

---

407. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_2=15, \ b_3=25$; | 2) $b_2=14, \ b_4=686$, | 3) $b_2=15, \ b_4=375, q > 0$

bolsa, b_5 we S_4 -i tapyň.

408. Geometrik progressiýa n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ bolsa, S_5 -i tapyň;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bolsa, S_6-ny tapyň.

409. Toždestwony subut ediň:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1$,

munda n dereje görkezijisi we ol 1-den uly natural san.

410. Geometrik progressiýada:

1) $b_3 = 135, S_3 = 195$ bolsa, b_1 we q-ny tapyň;

2) $b_1 = 12, S_3 = 372$ bolsa, q we b_3-i tapyň.

411. Geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 1$ we $b_3 + b_5 = 90$ bolsa, q-ny;
2) $b_2 = 3$ we $b_4 + b_6 = 60$ bolsa, q-ny;
3) $b_1 - b_3 = 15$ we $b_2 - b_4 = 30$ bolsa, S_{10}-y;
4) $b_3 - b_1 = 24$ we $b_5 - b_1 = 624$ bolsa, S_5-i tapyň.

33-§. TÜKENIKSIZ KEMELÝÄN GEOMETRIK PROGRESSIÝA

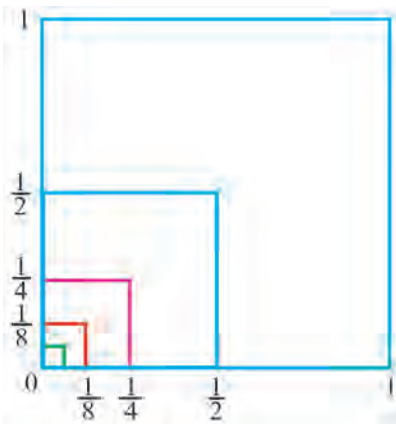
84-nji suratda şekillendirilen kwadratlara garaýarys. Birinji kwadratyň tarapy 1-e deň, ikinjiniňki $\frac{1}{2}$ -e, üçünjisiniňki bolsa $\frac{1}{2^2}$ -e deň we başgalar. Şeýlelikde, kwadratyň taraplary maýdalawjysy $\frac{1}{2}$ bolan aşakdaky geometrik progressiýany düzýär:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ... \qquad (1)$$

Bu kwadratlaryň meýdanlary bolsa maýdalawjysy $\frac{1}{4}$ bolan şu geometrik progressiýany düzýär:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, ..., \frac{1}{4^{n-1}}, ... \qquad (2)$$

84-nji suratdan görnüşi ýaly, kwadratlaryň taraplary we olaryň meýdanlary n nomeriň artmagy bilen barha kemelip, nola ýakynlaşýar. Şonuň üçin (1) we (2) progressiýalara tükeniksiz kemelýän progressiýalar diýilýär. Bu progressiýalaryň maýdalawjylary birden kiçidigini nygtap geçýäris.



84-nji surat.

Indi aşakdaky geometrik progressiýa garaýarys:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, ..., \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, ... \qquad (3)$$

Bu progressiýanyň maýdalawjysy $q = -\frac{1}{3}$, agzalary bolsa $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ we başgalar.

n nomeriň artmagy bilen bu progressiýanyň agzalary nola ýakynlaşýar. (3) progressiýa hem *tükeniksiz kemelýän progressiýa* diýilýär. Onuň maýdalawjysynyň modulynyň birden kiçidigini nygtap geçýäris: $|q| < 1$.

Maýdalawjysynyň moduly birden kiçi bolan geometrik progressiýa *tükeniksiz kemelýän* geometrik progressiýa diýilýär.

1-nji mesele. n-nji agzasynyň $b_n = \frac{3}{5^n}$ formulasy bilen berlen geometrik progressiýanyň tükeniksiz kemelýän bolýandygyny subut ediň.

△ Şerte görä $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, mundan $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. $|q| < 1$ bolany üçin berlen geometrik progressiýa tükeniksiz kemelýän bolýar. ▲

85-nji suratda tarapy 1 bolan kwadrat şekillendirilen. Onuň ýarysyny ştrihleýäris. Soňra galan böleginiň ýarysyny ştrihleýäris we başgalar. Ştrihlenen gönüburçluklaryň meýdanlary aşakdaky tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýany düzýär:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots .$$

Eger şeýle ýol bilen alnan ähli gönüburçluklary ştrihläp çyksak, onda bitin kwadrat ştrih bilen örtülýär. Hemme ştrihlenen gönüburçluklaryň meýdanlarynyň jemini 1-e deň diýip hasaplamak tebigydyr, ýagny:

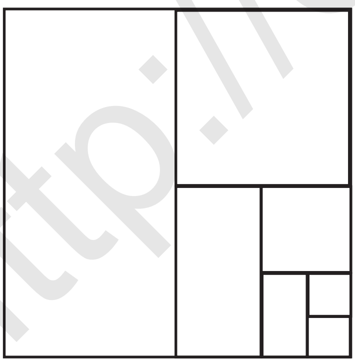
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

Bu deňligiň çep böleginde çäksiz sandaky goşulyjylaryň jemi dur. Ilkinji n sany goşulyjynyň jemine garaýarys:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Geometrik progressiýa ilkinji n sany agzasynyň jeminiň formulasyna görä:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$



85-nji surat.

Eger n tükenikksiz artsa, onda $\frac{1}{2^n}$ nola islendikçe barha ýakynlaşýar (nola ymtylýar). şeýle ýagdaý aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\mathrm{n} \to \infty \text{ da } \frac{1}{2^n} \to 0$$

(okalyşy: n çäksizlige ymtylanda $\frac{1}{2^n}$ nola ymtylýar) ýa-da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(okalyşy: n çäksizlige ymtylanda $\frac{1}{2^n}$ yzygiderligiň limiti nola deň).

Umuman, käbir a_n yzygiderlik üçin $n\to\infty$ da $a_n - a \to 0$ bolsa, onda a_n yzygiderlik a sana ymtylýar (a_n yzygiderligiň $n\to\infty$ -däki limiti a-ga deň) diýilýär we bu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ýaly ýazylýar.

$n\to\infty$ bolanda $\frac{1}{2^n} \to 0$ bolany üçin $n\to\infty$ bolanda $\left(1-\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right) \to 1$, ýagny $n\to\infty$ bolanda $S_n \to 1$. Şonuň üçin $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ çeksiz jem 1-e deň diýip hasaplanýar.

Indi islendik tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa garaýarys:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots,$$

bu ýerde $|q| < 1$.

Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemi diýip $n \to \infty$ bolanda onuň ilkinji n sany agzasynyň jemi ymtylýan sana aýdylýar.

$S_n = \frac{b_1(1-\mathrm{q}^{\mathrm{n}})}{1-q}$ formuladan peýdalanýarys. Ony şeýle ýazýarys:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.} \qquad (4)$$

Eger n çeksiz artsa, $|q|<1$ bolany üçin $q^n \to 0$. Şonuň üçin $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ hem $n\to\infty$ bolanda nola ymtylýar. (4) formulada birinji goşulyjy n-e bagly däl. Diýmek, $n\to\infty$ bolanda S_n jem $\frac{b_1}{1-q}$ sana ymtylýar.

Şeýlelikde, tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň S jemi aşakdaka deň:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

Hususy halda, $b_1 = 1$ bolanda, $S = \frac{1}{1-q}$ -i alýarys. Bu deňlik adatda şu görnüşde ýazylýar:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Bu deňlik we (5) deňlik diňe $|q| < 1$ bolanda ýerlikli bolýandygyny nygtap geçýäris.

2-nji mesele. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$ tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň.

△ $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$ bolany üçin $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}, S = \frac{b_1}{1-q}$ formula boýunça:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}. \blacktriangle$$

3-nji mesele. Eger $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$ bolsa, tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň.

△ $n = 3$ bolanda $b_n = b_1 q^{n-1}$ formulany ulansak, $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$ emele gelýär, mundan $b_1 = -49$.

(5) formula boýunça S jemi tapýarys:

$$S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}. \blacktriangle$$

4-nji mesele. (5) formuladan peýdalanyp, $a = 0,(15) = 0,151515\ldots$ çäksiz onluk periodik droby ady drob şeklinde ýazyň.

△ Berlen çäksiz drobuň ýakynlaşan bahalarynyň aşakdaky yzygiderligini düzýäris:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$
$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Ýakynlaşan bahalary şeýle ýazmak berlen periodik droby tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemi şeklinde ýazmak mümkinligini görkezýär:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \ldots .$$

(5) formula görä:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}.$$

Gönükmeler

412. Şu geometrik progressiýanyň tükeniksiz kemelýän bolýandygyny subut ediň:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots;$ 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots;$ 3) $-81, -27, -9, \ldots;$
4) $-16, -8, -4, \ldots;$ 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots;$ 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots .$

413. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 40, \; b_2 = -20;$ 2) $b_7 = 12, \; b_{11} = \frac{3}{4};$
3) $b_7 = -30, \; b_6 = 15;$ 4) $b_5 = -9, \; b_9 = -\frac{1}{27}$

bolsa, ol tükeniksiz kemelýän bolarmy? Şony anyklaň.

414. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots;$ 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots;$ 3) $-25, -5, -1, \ldots;$
4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots;$ 5) $128, 64, 2, \ldots;$ 6) $-81, -27, -9, \ldots .$

415. Eger tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýada:

1) $q = \frac{1}{2}, \; b_1 = \frac{1}{8};$ 2) $q = -\frac{1}{3}, \; b_1 = 9;$
3) $q = \frac{1}{3}, \; b_5 = \frac{1}{81};$ 4) $q = -\frac{1}{2}, \; b_4 = -\frac{1}{8}$

bolsa, onuň jemini tapyň.

416. n-nji agzasynyň formulasy bilen berlen aşakdaky yzygiderlik tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa bolup bilermi?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) 100, –10, 1 ... ; 3) 98, 28, 8, ...

418. Eger tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýada:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

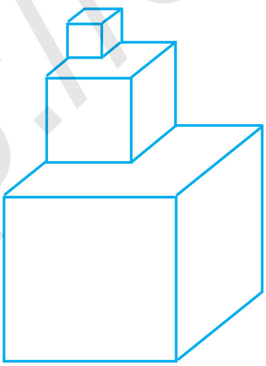
bolsa, onuň jemini tapyň.

419. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemi 150-e deň. Eger:

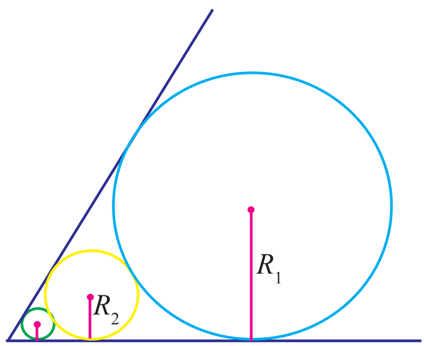
1) $q = \frac{1}{3}$ bolsa, b_1-i; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

bolsa, q-ny tapyň.

420. Gapyrgasy a bolan kubuň üstüne gapyrgasy $\frac{a}{2}$ bolan kub goýdular, onuň üstüne gapyrgasy $\frac{a}{4}$ bolan kub goýdular, soňra onuň üstüne gapyrgasy $\frac{a}{8}$ bolan kub goýdular we başgalar (86-njy surat). Emele gelen şekiliň beýikligini tapyň.



86-njy surat.



87-nji surat.

421. 60°-ly burça bir-birine galtaşýan töwerekler yzygider içinden çyzylan (87-nji surat). Birinji töweregiň radiusy R_1-e deň. Galan töwerekleriň R_2, R_3, ..., R_n, ... radiuslaryny tapyň we olar tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýany düzýändigini görkeziň. $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ jem birinji töweregiň merkezinden burçuň depesine çenli bolan aralyga deňligini subut ediň.

422. Çäksiz periodik onluk droby ady drob şeklinde ýazyň:

1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

IV baba degişli gönükmeler

423. Arifmetik progressiýanyň tapawudyny tapyň, onuň dördünji we bäşinji agzalaryny ýazyň:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots;$ 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots;$

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ \ldots;$ 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ \ldots.$

424. n-nji agzasy $a_n=-2(1-n)$ formula bilen berlen yzygiderlik arifmetik progressiýa bolýandygyny subut ediň.

425. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1 = 6,\ d = \frac{1}{2}$ bolsa, a_5 -i; 2) $a_1 = -3\frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{3}$ bolsa, a_7 -ni;

3) $a_1=4{,}8,\ d=1{,}2$ bolsa, a_{11}-i hasaplaň.

426. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1 = -1,\ a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3,\ a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2,\ a_5 = 6$ bolsa, onuň ilkinji ýigrimi agzasynyň jemini tapyň.

427. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1=-2,\ a_n=-60,\ n=10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = 25\frac{1}{2},\ n = 11$

bolsa, onuň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

428. Eger:

1) $-38 + (-33) + (-28) + ... + 12$;

2) $-17 + (-14) + (-11) + ... + 13$

jemiň goşulyjylary arifmetik progressiýanyň yzygider agzalary bolsa, şu jemi tapyň.

429. Geometrik progressiýanyň maýdalawjysyny tapyň hem-de onuň dördünji we bäşinji agzalaryny ýazyň:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \dots;$ 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \dots;$ 3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \dots;$

4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \dots;$ 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Geometrik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny ýazyň:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \dots;$ 3) –27, –9, –3... .

431. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = 2,\ q = 2,\ n = 6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{8},\ q = 5,\ n = 4;$

3) $b_1 = -8,\ q = \frac{1}{2},\ n = 5$ bolsa, b_n -i tapyň.

432. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -4,\ n = 5;$ 2) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 10;$

3) $b_1 = 10,\ q = 1,\ n = 6;$ 4) $b_1 = 5,\ q = -1,\ n = 9$

bolsa, onuň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

433. Geometrik progressiýanyň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6;$ 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5;$

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \dots,\ n = 5;$ 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ n = 4.$

434. Berlen geometrik progressiýa tükeniksiz kemelýändigini subut ediň we onuň jemini tapyň:

1) $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \dots;$ 2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \dots;$ 3) $7,\ 1,\ \frac{1}{7},\ \dots.$

435. Eger arifmetik progressiýada $a_1 = 2\frac{1}{2}$ we $a_8 = 23\frac{1}{2}$ bolsa, onuň tapawudyny tapyň.

436. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1 = 5,\ a_3 = 15;$ 2) $a_3 = 8,\ a_5 = 2;$ 3) $a_2 = 18,\ a_4 = 14$

bolsa, onuň ilkinji bäş agzasyny ýazyň.

437. –10 we 5 sanlary arasyna bir sany, netijede arifmetik progressiýanyň yzygider üç agzasy emele geler ýaly edip goýuň.

438. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_{13} = 28,\ a_{20} = 38;$ 2) $a_{18} = -6,\ a_{20} = 6;$ 3) $a_6 = 10,\ a_{11} = 0$

bolsa, onuň on dokuzynjy we birinji agzasyny tapyň.

ÖZÜŇIZI BARLAP GÖRÜŇ!

1. Arifmetik progressiýada: 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$ bolsa, a_{10} -y we ilkinji onta agzanyň jemini tapyň.

2. Geometrik progressiýada: 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ bolsa, b_6 -ny we ilkinji alty agzanyň jemini tapyň.

3. 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...$; 2) $128, 32, 8 ...$, yzygiderligiň tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýadygyny subut ediň we onuň ähli agzalarynyň jemini tapyň.

439. x-iň nähili bahalarynda:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x - 1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$; 3) x^2, $10x$, 25

sanlar arifmetik progressiýanyň yzygider agzalary bolýar?

440. Aşakdaky sanlar arifmetik progressiýanyň yzygider üç agzasy bolýandygyny görkeziň:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha - \beta)$;
2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha - \beta)$;
3) $\cos2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1; 4) $\sin5\alpha$, $\sin3\alpha\cos2\alpha$, $\sin\alpha$.

---

441. Jem 252-ä deň bolmagy üçin 5-den başlap näçe yzygider täk natural sany goşmaly?

442. Eger arifmetik progressiýada:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;
3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$ bolsa, a_n we d-ni tapyň.

443. Geometrik progressiýada:

1) eger $b_1 = 4$ we $q = -1$ bolsa, b_9 -y hasaplaň;
2) eger $b_1 = 1$ we $q = \sqrt{3}$ bolsa, b_7-ni hasaplaň.

444. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$

bolsa, onuň bäşinji agzasyny tapyň.

445. 4 we 9 sanlary arasyna bir položitel sany, netijede geometrik progressiýanyň yzygider üç agzasy emele geler ýaly edip goýuň.

446. Eger yzygiderlik n-nji agzasynyň:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

formulasy bilen berlen bolsa, ol tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa bolup bilermi?

447. Eger geometrik progressiýada:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$

bolsa, onuň tükeniksiz kemelýändigini görkeziň.

448. Dynç alyjy lukmanyň maslahatyna amal edip, birinji gün Gün şöhlesinde 5 minut taplandy, soňky her bir günde bolsa taplanmagy 5 minutdan barha artdyrdy. Eger ol taplanmagy çarşenbe gününden başlan bolsa, hepdäniň haýsy güni onuň Güneşde taplanmasy 40 minuda deň bolar?

449. Eger arifmetik progressiýada $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ we $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ bolsa, onuň birinji agzasyny we tapawudyny tapyň.

450. Eger arifmetik progressiýada $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ we $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ bolsa, onuň birinji agzasyny we tapawudyny tapyň.

451. Sagat 1-de sagat 1 gezek, 2-de 2 gezek, ..., 12-de 12 gezek jaň kakýar. Sagat mili nobatdaky her sagadyň ýarysyny görkezende bolsa bir gezek jaň kakýar. Bu sagat bir sutkada näçe gezek jaň kakar?

IV baba degişli synag (test) gönükmeleri

1. Arifmetik progressiýada $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101}-i tapyň.

A) –9797; B) –9798; C) –7979; D) –2009.

2. Arifmetik progressiýada $d = 4$, $S_{50} = 5000$ bolsa, a_1-i tapyň.

A) –2; B) 2; C) 100; D) 1250.

3. Arifmetik progressiýada $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ bolsa, d-ni tapyň.

A) 4; B) 2; C) 3; D) 3,5.

4. Arifmetik progressiýada $a_2 + a_9 = 20$ bolsa, S_{10}-y tapyň.

A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.

5. 8-e bolanda 7 galyndy berýän yzygiderligiň 5-nji agzasyny bellik ediň.

A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.

6. 701 sany 1, 8, 15, 22, ... progressiýanyň näçenji nomerli agzasy?

A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.

7. 1002, 999, 996, ... progressiýanyň näçenji nomerli agzasyndan başlap, onuň agzalary otrisatel sanlar bolýar?

A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.

8. Arifmetik progressiýada $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ bolsa, a_{100} -i tapyň.

A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.

9. Arifmetik progressiýada $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$ bolsa, n-i tapyň.

A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.

10. Arifmetik progressiýa $a_{12} + a_{15} = 20$ bolsa, S_{26} -ny tapyň.

A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.

11. 1 we 11 sanlarynyň arasynda 99 sany, olar bu sanlar bilen bilelikde arifmetik progressiýany düzer ýaly edip ýerleşdiriň. Şu progressiýa üçin S_{50}-ni tapyň.

A) $172\frac{1}{2}$; B) 495; C) 300; D) 178.

12. Arifmetik progressiýada $a_1 = -20{,}7$, $d = 1{,}8$ bolsa, haýsy nomerli agzadan başlap progressiýanyň ähli agzalary položitel bolýar?

A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.

13. 7-ä kratny ilkinji näçe natural sany goşanda 385 emele gelýär?

A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.

14. Geometrik progressiýada $b_1 = 2$, $q = 3$ bolsa, S_6 -ny tapyň.

A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.

15. Geometrik progressiýada $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$ bolsa, b_1 -i tapyň.

A) $242\frac{2}{3}$; B) 81; C) $121\frac{1}{3}$; D) 240.

16. Geometrik progressiýada $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ bolsa, q-ny tapyň:

A) 4; B) 2; C) 8; D) $\frac{1}{2}$.

17. Geometrik progressiýada 6 agza bar. Ilkinji 3 agzasynyň jemi 26 -a, soňky 3 agzasynyň jemi bolsa 702-ä deň. Progressiýanyň maýdalawjysyny tapyň.

A) 4; B) 3; C) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$.

18. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýada $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ bolsa, q-ni tapyň.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{64}{65}$; C) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$.

19. Geometrik progressiýada $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2 - \sqrt{3}$ bolsa, S-i tapyň.

A) $2+\sqrt{3}$; B) 3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2.

Amaly we predmetara bagly meseleler

1-nji mesele. Erkin gaçýan jisim birinji sekuntda 4,9 m, her bir soňky sekuntda bolsa öňküsine garanda 9,8 m-e köpräk gaçýar. Jisim 4 410 metr beýiklikden näçe wagtda ýere gaçar?

△ Meseläniň şertine görä jisim birinji sekuntda $a_1=4{,}9$, ikinji sekuntda $a_2=4{,}9+9{,}8$, üçünji sekuntda $a_3=a_2+9{,}8=a_1+2\cdot 9{,}8$ we başgalar n-nji sekuntda $a_n=a_{n-1}+9{,}8=a_1+(n-1)9{,}8$ metr pese gaçýar, ýagny her sekuntda gaçýan aralyklar arifmetik progressiýany düzýär. Diýmek, jisim n sekuntda ýere gaçýar diýsek, arifmetik progressiýanyň n sany agzasynyň jeminiň formulasyna esasan

$$4410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$$

$$= \frac{2 \cdot 4{,}9 + (n-1) \cdot 9{,}8}{2} \cdot n.$$

Mundan $4{,}9n^2=4\,410$, $n^2=900$, $n=30$-y alarys.

Jogaby: Jisim 30 sekuntda ýere gaçýar. ▲

2-nji mesele. Amanatçy b som puluny banka ýylyna p%-den goýdy we n ýyl geçenden soň hemme puly gaýtaryp aldy. Eger-de $b=4\,000\,000$, $p=8$ bolsa, amanatçy iki ýyldan soň näçe pul alypdyr?

△ Başlangyç goýlan puly b som bolsa, bir ýýldan soň amanatçynyň puly $b_1=b\cdot(1+\frac{p}{100})$ som bolýar. Soňky ýyllar üçin aşakdaky wariantlardan biri bolmagy mümkin:

1) Soňky her ýylda göterim başlangyç pul b somdan hasaplanýar. Munda ikinji ýyldan soň $b_2=b+1+\frac{bp}{100}+\frac{bp}{100}=b\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ som we başgalar n-nji ýyldan soň $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ som bolýar. Göterimi hasaplamagyň bu usulyna *ýönekeý göterim* diýilýär. Munda, eger $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ bolsa, onda $b_2=4\,000\,000\cdot1{,}16=\ 4\,640\,000$.

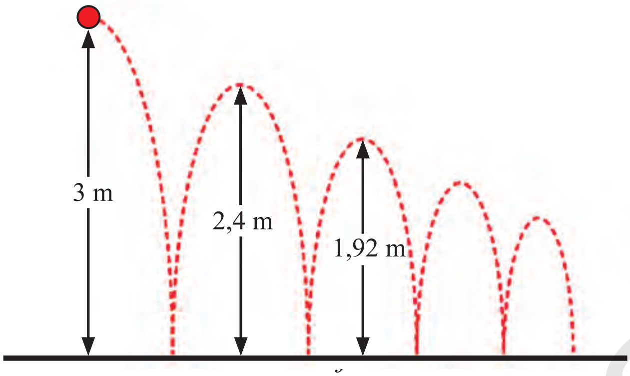
2) Soňky her ýylda göterim öňki ýyl ýygylan puldan hasaplanýar. Iki ýyldan soň $b_2=b_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ som we başgalar n ýyldan soň $b_n=b_{n\text{-}1}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ bolýar. Göterimi hasaplamagyň bu usulyna *çylşyrymly göterim* diýilýär. Munda eger $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ bolsa, onda $b_2=4\ 000\ 000\cdot1{,}08^2=\ =4\ 665\ 600$ som.

Jogaby: ýönekeý göterim halynda $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ som; 4 640 000,

çyşyrymly göterim halynda $b_n=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ som; 4 665 600 som. ▲

Meseleler

1. Erkin gaçýan jisim birinji sekuntda 4,9 m ýol geçýär, soňky her bir sekuntda bolsa öňküsinden 9,8 m artyk ýol geçýär. Gaçýan jisim bäşinji sekuntda näçe aralygy geçer?
2. Sirkiň sektorlaryndan birinde her bir soňky hatarda öňküsine garanda bir sanydan oturgyç köpräk. Eger-de
   1) birinji hatarda 8 oturgyç, hatarlar bolsa 22;
   2) birinji hatarda 10 oturgyç, hatarlar bolsa 21 sany bolsa, şu sektorda näçe ýer bar?
3. Syýahatçylar derýa boýunça 140 km ýöremegi planlaşdyrdylar. Birinji gün 5 km, her bir soňky gün bolsa, ondan öňki güne görä 2 km köpräk ýöreýän bolsalar, olar syýahatda näçe gün bolarlar?
4. Hamyrmaýanyň öýjükleri her bir öýjügiň ikä bölünmegi arkaly köpelýär. Eger başlangyç ýagdaýda 6 öýjük bolsa, 10 gezek bölünmeden soň öýjükleriň sany näçe bolar?
5. Kalendar ýylynyň dowamynda zawodyň işgäriniň aýlyk iş haky her aý birmeňzeş mukdara artdyrylýar. Iýunda, iýulda, awgustda alan aýlyk iş haklarynyň umumy mukdary 9 900 000 som, sentýabr, oktýabr, noýabr üçin alnan iş haklarynyň jemi bolsa 10 350 000 som boldy. Işgäriň ýylyň dowamynda alan umumy iş hakyny tapyň.
6. Howa wannasyny almak ýoly bilen bejerilmekde birinji gün bejerilme 15 min dowam edýär, soňky her bir günde ony 10 min-dan artdyryp barylýar. Wanna almak köpi bilen 1 sagat 45 min dowam etmegi üçin görkezilen tertipde howa wannasyny almak näçe gün dowam eder?
7. Saýlanan elastik pökgi ýere urlup ýene ýokary çykanda her gezek öňki beýikliginiň 80%-e göterilse, onda 3 metrden taşlanan pökginiň aşak we ýokary geçen umumy wertikal aralyklarynyň jemini tapyň (88-nji surat).



Taryhy meseleler

1. *Birunynyň meselesi.* Eger agzalary položitel geometrik progressiýanyň: agzalaryň sany täk bolsa, onda $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$; agzalary sany jübüt bolsa, $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ bolýandygyny subut ediň.
2. *Ahmes papirusyndan alnan mesele (eramyzdan öňki 2000-nji ýyllar).* 10 ölçeg gallany 10 adamyň arasynda, bu adamlaryň biri bilen ondan soňkusy (ýa-da öňküsi) alan gallanyň tapawudy $\frac{1}{8}$ ölçege deň bolar ýaly edip paýlaň.

Taryhy maglumatlar

„Gadymky halklardan galan ýadygärlikler“ eserinde Abu Reýhan Biruny küştüň açyş edilişi baradaky rowaýat bilen bagly birinji agzasy $b_1 = 1$ we maýdalawjysy $q = 2$ bolan geometrik progressiýanyň birinji 64 agzasynyň jemini hasaplaýar; küşt tagtasyndaky k-nji gözenege laýyk sandan 1 sany aýrylsa, tapawut k-nji gözenekden öňki ähli gözeneklere laýyk sanlaryň jemine deň bolýandygyny görkezýär, ýagny

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}$$

bolýandygyny subut edýär.

V BAP. ÄHTIMALLYK NAZARYÝETINIŇ WE MATEMATIKI STATISTIKANYŇ ELEMENTLERI

34-§ HADYSALAR

Ähtimallyk nazaryýeti we matematik statistika tötänleýin hadysalaryň arasyndaky baglanyşyklary, kanunalaýyklyklary öwrenmek we olardan gelip çykýan netijeleri amalyýet meselelerini çözmäge ulanmaga bagyşlanan ylymdyr.

1. Mümkin bolmadyk, gutulgysyz we tötänleýin hadysalar.

Durmuşda hadysa diýip bolup geçýän ýa-da bolup geçmeýän islendik prosese aýdylýar. Ondan daşary adamlar tarapyndan amala aşyrylýan tejribeler ýa-da synaglar, gözegçilikler we ölçemek işleriniň netijeleri hem hadysalardyr. Ähli hadysalary mümkin bolmadyk, gutulgysyz we tötänleýin hadysalara bölmek mümkin.

Mümkin bolmadyk hadysa diýip, berlen şertlerde ýüze çykmagy mümkin bolmadyk hadysa aýdylýar. Mümkin bolmadyk hadysalara mysallar getireliň:

1) kölüň suwy +30°C-da doňýar;

2) taraplary 1-den 6-a çenli sifrler bilen belgilenen oýun kubigi taşlananda 8 sifriniň peýda bolmagy.

Gutulgysyz hadysa diýip, berlen şertlerde hökman ýüze çykjagy anyk bolan hadysa aýdylýar. Meselem:1) gyşdan soň bahar geldi; 2) oýun kubigini taşlananda altydan uly bolmadyk (0-dan tapawutly) sifr düşdi.

Tötänleýin hadysa diýip berlen şertlerde ýüze çykmagy hem, ýüze çykmazlygy hem mümkin bolan hadysa aýdylýar. Aşakdaky hadysalar tötänleýin hadysalara mysal bolup biler: 1) 1-den 50-ä çenli natural sanlaryň arasyndan tötänden saýlanan san 7-ä bölünýär; 2) taşlanan teňňe gerb tarapy bilen düşdi.

2. Bilelikde bolmagy mümkin we bilelikde bolmadyk hadysalar.

Berlen şertlerde bir wagtda ýüze çykmagy mümkin bolan iki hadysa bilelikde bolmagy mümkin diýilýär, bir wagtyň özünde ýüze çykyp bilmeýän hadysalara bolsa bilelikde bolmadyk hadysalar diýilýär. Meselem, „gün çykdy“ we „gün sowuk“ bilelikde bolmagy mümkin hadysalar, „gün batdy“ we „güneş çykdy“ hadysalary bolsa bilelikde bolmadyk hadysalardyr. Oýun kubigi bilen bagly aşakdaky hadysalara garalyň: 1) 3 oçko düşdi; 2) 4 oçko düşdi; 3) 3 oçkodan köpräk düşdi; 4) üçe kratny oçko düşdi. Bu hadysalaryň içinde aşakdaky üç jübütlik bilelikde bolmagy mümkin hadysalardyr: 1-nji we 4-nji (3 sany üçe kratny bolany üçin); 2-nji we 3-nji (4 oçko 3 oçkodan uly bolany üçin); 3-nji we 4-nji (meselem, 6 oçko). Aşakdakylar bolsa bilelikde bolmadyk hadysalardyr: 1-nji we 2-nji (bir wagtyň özünde iki dürli sanyň düşmegi mümkin däl); 1-nji we 3-nji (3 oçkodan ýokary, ýagny 4, 5, 6 oçkolary 3 oçko bilen bir wagtda düşüp bilmeýär); 2-nji we 4-nji (4 sany 3-e kratny däl).

3. Deň mümkinçilikli hadysalar.

Aşakdaky ýaly hadysalar toparlaryna mysallara garalyň:

Gerb tarapy *Sifrli tarapy*

89-njy surat.

1) teňňäni bir gezek taşlanda „sifrli tarapynyň düşmegi“ we „gerbli tarapynyň düşmegi“(89-njy surat);

2) oýun kubigi bir gezek taşlanda „1 oçkonyň düşmegi“ „2 oçkonyň düşmegi“,..., „6 oçkonyň düşmegi“;

3) bir tarapy gök, galan taraplary gyzyla boýalan kubik taşlananda „gök tarapy ýokarda bolup düşmegi“ we „gyzyl tarapy ýokarda bolup düşmegi“;

4) içinde 10 sany ak we bir sany gara şar bolan gutudan bir şar alnanda onuň „ak şar çykmagy“ we „gara şar çykmagy“.

1-nji we 2-nji mysallarda hadysalardan käbiriniň ýüze çykmagy üçin hadysalardan birinde başgasyna görä käbir üstünlik bar diýip bolmaýar (teňňeler we kubikler dogry bolsa elbetde). Şeýle hadysalar ***deň mümkinçilikli hadysalar*** diýlip atlandyrylýar.

3-nji we 4-nji mysallarda deň mümkinçilikli bolmadyk hadysalara mysallar görkezilen. Hakykatdan hem, boýalan kubigiň 5 tarapy gyzyl, bir tarapy bolsa gara we, diýmek, gyzyl tarapy düşmegi üçin mümkinçilikler gara tarapy düşmegine garanda köpräk. Şular ýaly, ak şarlaryň çykmak mümkinçilikleri gara şaryň çykmak mümkinçiliginden köpräk.

Gönükmeler

Gönükmelerde şertler we bu şertlerde ýüze çykýan hadysalar şekillendirilen. Her bir hadysa üçin (ýatdan) onuň mümkin bolmadyk ýa-da gutulgysyz, ýa-da tötänleýindigini anyklaň **(452–456):**

452. Mekdepdäki okuwçylardan: 1) ikisiniň ady birmeňzeş; 2) hemmesiniň boýy birmeňzeş.

453. Algebra dersligi tötänleýin açylyp, sag sahypasyndaky üçünji söz tapyldy. Bu söz: 1) „ähtimallyk“ sözi; 2) „!“ belgisinden başlanýar.

454. IX synp (onda gyzlar hem oglanlar hem bar) žurnalyndaky sanawdan tötänleýin bir okuwçy saýlap alyndy: 1) ol gyz çaga; 2) saýlanan okuwçynyň ýaşy 16-da; 3) saýlanan okuwçy 15 aýlyk; 4) bu okuwçynyň ýaşy 3-den artyk.

455. Bu gün Samarkantda barometr normal atmosfera basyşyny görkezýär. Munda: 1) Samarkantda ýaýaýan aýalyň gazanyndaky suw t = 70°C-da gaýnady; 2) howanyň temperaturasy –5°C-a düşende, lüýkdäki suw doňdy.

456. Iki oýun kubigi taşlanýar: 1) birinji kubikde 4 oçko, ikinjide bolsa 6 oçko düşdi; 2) iki kubikde düşen oçkolaryň jemi 1-e deň; 3) iki kubikde düşen oçkolar jemi 14-e deň; 4) iki kubigiň her birinde 5 oçkodan düşdi;

5) iki kubikde düşen oçkolaryň jemi 12-dan uly däl.

Berlen hadysalaryň jübütlikleriniň haýsylary bilelikde bolýandygyny, haýsylary bolsa bilelikde bolmaýandygyny görkeziň(**457–459**):

457. Sona bilen Şöhrat oýnan şaşka oýnunda: 1) Sona utdy; Şöhrat utuldy; 2) Sona utuldy; Şöhrat utuldy.

458. Oýun kubigi taşlandy. Onuň ýokary tarapy: 1) 5 oçkony; 3 oçkony; 2) 1 oçkony; täk oçkony görkezdi.

459. Domino toplumyndan bir domino çöpi alyndy, onda: 1) sanlaryndan biri 4-den uly, ikinji 6-a deň; 2) bir san 5-den kiçi däl, ikinji 5-den uly däl; 3) sanlardan biri 5, iki sanyň jemi 12-ä deň; 4) iki san 4-dan uly, sanlaryň jemi 9-dan uly däl.

460. Aşakdaky: 1) „gar ýagýar“; 2) „asmanda ýekeje-de bulut ýok“; 3) „howanyň temperaturasy +37°C“ hadysalaryndan mümkin bolan ähli jübütlikleri düzüp, olaryň arasynda bilelikde bolmagy mümkin we bilelikde bolmagy mümkin bolmadyk hadysalar jübütliklerini anyklaň.

461. Aşakdaky hadysalar: 1) „bahar geldi“; 2) „ders jedweline görä bu gün 6 ders bolýar“; 3) „bu gün 1-nji ýanwar“; 4) „Daşkentdäki howanyň temperaturasy +40°C“-dan mümkin bolan ähli jübütlikleri düzüp, olaryň arasynda bilelikde bolmagy mümkin we bilelikde bolmagy mümkin bolmadyk hadysalar jübütliklerini anyklaň.

462. Dört otluçöp gutusyndan biriniň içi boş, galanlarynda otluçöpler bar. Tötänleýin ýagdaýda saýlanan gutujyklardan biri açyldy. „Otluçöp gutusynyň içi boş çykdy“ we „otluçöp gutusynyň içi boş däl“ hadysalary deň mümkinçilikli bolarmy?

463. Oýun kubiginiň: 1) 1 tarapy; 2) 2 tarapy ýaşyla, galan taraplary bolsa gyzyla boýaldy. „Ýaşyl tarapy düşdi“ we „gyzyl tarapy düşdi“ hadysalary deň mümkinçilikli bolarmy?

464. Birden alta çenli nomerlenen 6 sany ak, 6 sany gyzyl, 6 sany gök, 6 sany sary şarlar bir halta salyndy we garyşdyryldy. Haltadan töwekgel edip bir şar alyndy. Aşakdaky hadysalar deň mümkinçilikli bolarmy: 1) „saýlanan şar ak“ we „saýlanan şar gök“; 2) „saýlanan şaryň nomeri 5“

we „saýlanan şaryň nomeri 4“; 3) „saýlanan şar gyzyl we nomeri 2“ we „saýlanan şar sary we nomeri 6“; 4) „saýlanan şar gyzyl“ we „saýlanan şar gyzyl däl“; 5) „saýlanan şaryň nomeri 2-den uly däl“ we „saýlanan şaryň nomeri 2-den uly“?

35-§ HADYSANYŇ ÄHTIMALLYGY

Durmuşda dürli hadysalar bilen çaknyşanda, köp halatlarda bu hadysalaryň ýüze çykmagynyň ynamlylyk derejesine baha berýäris. Munda käbir hadysalar barada „şeýle bolmagy mümkin däl“ diýip aýtsak, başga bir hadysalar barada „bu elbetde bolar“ ýa-da „bu hadysanyň ýüze çykjagyna ynam uly“ ýa-da „bu hadysa ýüze çykjagyna ynam az“ diýip aýdýarys. Hadysalaryň ýüze çykmagynyň ynamlylyk derejesini bahalamak ähtimallyk düşünjesi bilen bagly.

XVII asyr fransuz alymlary Blez Paskal (1623 – 1662) bilen Pýer Fermanyň (1601 – 1665) arasynda ençeme matematiki meseleler boýunça ýazyşan hatlarynda birinji gezek ähtimallyk bilen bagly meseleleri çözmegiň ilkinji gezek umumy çemeleşmeleri şekillendi. Blez Paskal 1654-nji ýylyň 28-nji oktýabrynda Pýer Ferma ýazan hatynda şol sanda aşakdaky ýaly ikirleri ýöredýär:

„Oýunçy kubigi taşlanda nähili san düşjegini bilmeýär. Ýöne ol 1, 2, 3, 4, 5 we 6 sanlary deň mümkinçilikli ýagdaýda düşjegini bilýär. Mundan daşary, oýunçy tejribe (kubik taşlamak) netijesinde görkezilen sanlardan käbiriniň düşjegi bu gutulgysyz hadysadygyny hem bilýär. Eger-de biz gutulgysyz hadysanyň ý0№ze çykyş mümkinçiligini 1 diýip kabul etsek, onda şu sanlardan biriniň, meselem, 6-nyň (edil şeýle başga sanlaryň hem) çykmagy 6 esse kiçi, ýagny $\frac{1}{6}$ -e deň bolýar“.

Ol ýa-da bu hadysanyň üstünlikli ýüze çykmak mümkinçiligini matematikler ***hadysanyň ähtimallygy*** diýip atlandyrýarlar we latynça *probabilitas* – ähtimallyk sözüniň birinji harpyna degişlilikde *P* arkaly belgileýärler.

Eger-de *A* arkaly oýun kubigi bir gezek taşlananda „5 oçko düşdi“ hadysasy belgilense, onda *A* hadysanyň ähtimallygy *P(A)* arkaly belgilenýär, $P(A)=\frac{1}{6}$ görnüşde ýazylýar we hadysanyň ähtimallygy $\frac{1}{6}$ diýlip okalýar.

1-nji mesele. Birmeňzeş kartoçkalara 1-den 20-ä çenli sanlar ýazyldy (her bir kartoçka bir sanydan san ýazyldy). Kartoçkalar stola tersi bilen goýuldy we garyşdyryldy. Tötänden alnan kartoçkadaky sanyň 7 bolmak ähtimallygyny tapyň.

△ Kartoçkalar 20 sany we her bir kartoçka 1-den 20-ä çenli sanlar bir gezekden ýazylany üçin saýlamak netijesinde 20 sany deň mümkinçilikli hadysalaryň ýüze çykmagy mümkin (tejribe netijeleri): 1) 1 sany çykdy; 2) 2 sany çykdy; ….; 20) 20 sany çykdy.

Munda „käbir san çykdy“ hadysasy bolsa gutulgysyz hadysa. Bu gutulgysyz hadysanyň ähtimallygy 1-e deň we A – „7 sany çykdy“ hadysasynyň ähtimallygy bolsa 20 esse kiçi, ýagny $P(A)=\frac{1}{20}$.

Jogaby: $\frac{1}{20}$ ▲.

Ýokarda garalan ***elementar hadysalardan*** daşary çylşyrymlyrak hadysalary hem öwrenmek mümkin. Meselem, 1-nji meseledäki saýlanan kartoçkadaky sanyň düýp san bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly bolsun. A – „20-den uly bolmadyk düýp sanyň çykmagy“ hadysasyna garalyň. Bu hadysa 8 ýagdaýda (netijede) ýüze çykýar – ýagny 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 düýp sanlaryň käbiri çykanda. Şu netijeler A hadysa üçin *amatlylyk döredýän mümkinçilikler* diýlip atlandyrylýar. Mümkin bolan ähli netijeleriň (olar 20 sany) içinde 8 sanysy amatlylyk döredýän mümkinçiliklerdir, şu sebäpli-de A hadysanyň ähtimallygy

$$P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

! Eger-de käbir tejribede *n* sany deň mümkinçilikli, özara jübüt-jübütden bilelikde bolmadyk netije bar bolup, olardan *m* sanysy *A* hadysa üçin amatlylyk döredýän mümkinçilikler bolsa, onda $\frac{m}{n}$ gatnaşyk *A hadysanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy* diýilýär we aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

2-nji mesele. Oýun kubigi bir gezek taşlananda täk sanly oçko çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

△ A – „täk sanly oçko çykmak“ hadysasyna amatlylyk döredýän 3 sany netije (1-iň çykmagy, 3-üň çykmagy we 5 oçkonyň çykmagy) bar, ýagny $m = 3$. Deň mümkinçilikli ähli netijeleriň sany bolsa $n = 6$, şu sebäpli

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Jogaby: $\frac{1}{2}$. ▲

3-nji mesele. Gutuda 6 sany gyzyl we 4 sany gök şar bar. Olardan biri tötänden saýlanyp, gutudan alyndy. Alnan şaryň gyzyl bolmaklyk ähtimallygyny tapyň.

△ Tejribäniň 10 sany deň mümkinçilikli netijeleri bar: 1-nji şar alyndy, 2-nji şar alyndy, …, 10-njy şar alyndy, ýagny $n = 10$. Amatlylyk döredýän netijeleriň sany bolsa $m = 6$. Şu sebäpli

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Jogaby: $\frac{3}{5}$. ▲

Gutulgysyz, mümkin bolmadyk we tötänleýin hadysalaryň ähtimallyklary barada (1) formula esasan aşakdakylary aýtmak mümkin:

Eger-de A hadysa gutulgysyz ýüze çykýan hadysa bolsa, onda ähli netijeler oňa amatlylyk döredýän bolýar, ýagny $m = n$. Onda $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Eger-de A hadysa ýüze çykmagy mümkin bolmadyk hadysa bolsa, onda oňa amatlylyk döredýän netijeler ýok, ýagny $m = 0$. Diýmek, munda $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Eger-de A hadysa tötänleýin hadysa bolsa, onda oňa amatlylyk döredýän netijeler üçin $0 < m < n$ şert ýerine ýetirilýär. Şu sebäpli, şeýle ýagdaýlarda $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Gönükmeler

465. Aşakda getirilen ýagdaýlarda ýüze çykmagy mümkin bolan ähli elementar deň mümkinçilikli hadysalary sanap geçiň: 1) teňňe taşlamak; 2) oýun kubigini taşlamak; 3) taraplarynyň reňki ak, gyzyl, sary we gök bolan tetraedri taşlamak; 4) üsti A, B, C, D, E we F arkaly belgilenen 6 sany sektora bölünen ruletkanyň strelkasyny öwürmek.

466. Domino oýnunyň doly komplektinden bir sanysy tötänden alyndy. Bu çöpüň:
1) 6 we 5 sanlary; 2) 0 we 1 sanlary; 3) birmeňzeş sanlar; 4) dürli sanlar çykmak ähtimallygyny tapyň.

467. Gutuda 4 sany gyzyl we 5 sany gök şar bar. Tötänden bir şar alyndy. Alnan şaryň:
1) gyzyl; 2) gök; 3) ýaşyl; 4) gyzyl ýa-da gök bolmaklyk ähtimallygy nähili?

468. Gutuda 3 sany gök, 4 sany sary, 5 sany gyzyl şar bar. Tötänden bir şar alyndy. Alnan şaryň:
1) gök; 2) sary; 3) gyzyl; 4) gök däl; 5) sary däl; 6) gyzyl dällik ähtimallygy nähili?

469. Birmeňzeş kartoçkalara 1-den 12-ä çenli sanlar ýazyldy (her bir kartoçka bir sanydan san ýazyldy). Kartoçkalar stola tersi bilen goýuldy we garyşdyryldy. Tötänden alnan kartoçkanyň:
1) 5; 2) jübüt; 3) 3-e kratny; 4) 4-e kratny; 5) 5-e bölünýän; 6) düýp san bolmak ähtimallygy nähili?

470. Nigara jorasynyň telefon belgisiniň ahyrky iki sifrini ýatdan çykarypdyr we ony tötänden ýygdy. Nigaranyň öz jorasynyň telefonyna düşmek ähtimallygy nähili?

471. Lotereýada 1000 sany bilet bolup, ondan 30 sanysy utuşly. Bir bilet satyn alyndy. Satyn alnan biletiň:
1) utuşly; 2) utuşsyz bolmaklyk ähtimallygy nähili?

472. Talyp synaga taýýarlanan mahalynda onda berilýän 30 biletiň birine taýýarlanmaga ýetişmedi. Synagda talyba bilýän bileti düşmeginiň ähtimallygy nähili?

473. Teňňe 6 gezek yzygider taşlananda her sapar gerb tarapy bilen düşdi. Teňňe ýene bir gezek taşlansa, gerb tarapy bilen düşmek ähtimallygy nähili?

474. 52 sanylyk kartalar dessesinden bir karta tötänleýin ýagdaýda alyndy. Şu kartanyň
1) alty kerpiç; 2) sekiz; 3) gyzyl reňkli walet; 4) sanly garahal; 5) täk sanly kerpiç bolýandygynyň ähtimallygy nähili?

36-§ TÖTÄNLEÝIN HADYSANYŇ OTNOSITEL ÝYGYLYGY

Ähtimallygyň öňki paragrafda berlen kesgitlemesi *ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi* diýilýär. Klassyky kesgitleme synagyň ýa-da tejribäniň hökman geçirilmegini talap etmeýär: hadysanyň ähli deň mümkinçilikli we amatlylyk döredýän netijeleri nazary taýdan anyklanýar.

Şeýle kesgitlemä görä tejribäniň elementar deň mümkinçilikli netijeleri sany çäkli we belli bir san bilen aňladylýar. Ýöne amalyýetde, ýagny tebigaty öwrenişde, ykdysadyýetde, lukmançylykda, önümçilikde we başga ugurlardaky tötänleýin prosesler öwrenilende şeýle synaglar ýa-da tejribeler ýygy-ýygydan duşýar, olardaky mümkin bolan netijeler sanynyň öz içine almagyň mümkinçiligi bolmadyk derejede köp. Başga ençeme ýagdaýlarda tejribeleri amalda geçirmeýänçe netijeleriň deň mümkinçilikli bolýandygyny anyklamak kyn ýa-da mümkin däl. Meselem, firma öndüren köp lampoçkalary barlap görmeýänçe „ýaramly“ ýa-da „ýaramsyz“ lygu deň mümkinçilikli bolşuny ýa-da bolmazlygyny göz öňüne getirmek kyn. Şu sebäpli, klassyky kesgitleme bilen bir hatarda, amalyýetde *ähtimallygyň statistik kesgitlemesi*nden hem peýdalanýarlar. Bu kesgitleme bilen tanyşmak üçin *otnositel ýygylyk* düşünjesini girizmeli bolýarys.

! **Berlen tejribeler hatarynda *A hadysanyň otnositel ýygylygy* diýip, şu hadysa ýüze çykan tejribeler sany *M*-iň geçirilen ähli tejribeler sany *N*-e gatnaşygyna aýdylýar. Munda *M* sany *A* hadysanyň *ýygylygy* diýlip atlandyrylýar.**

A hadysanyň otnositel ýygylygy $W(A)$ arkaly belgilenýär. Onda kesgitlemä görä

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

1-nji mesele. Synpda 30 sany okuwçy bar. Geçirilen barlag işinden 6 sany okuwçy 5 baha aldy. Synpda geçirilen barlag işinden alnan ýokary bahalaryň otnositel ýygylygyny tapyň.

△ A – „5 baho alyndy“ hadysasy bolsa, bu hadysa 6 gezek ýüze çykdy, ýagny $M = 6$. Umumy tejribeler sany $N = 30$, şu sebäpli

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Jogaby: $\frac{1}{5}$. ▲

Fransuz barlagçysy Býuffon (1707–1788) teňňäni 4 040 gezek taşlap görüpdir, şundan 2 048 ýagdaýda teňňe gerb tarapy bilen düşüpdir. Diýmek, munda şu tejribeler hatarynda gerb düşmeginiň otnositel ýygylygy $W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,5069$ -a deň. Iňlis matematigi Karl Pirson bolsa teňňäni 24 000 gezek taşlanynda gerb tarapy 12 012 gezek düşüpdir. Diýmek, teňňe taşlamagyň bu tejribelerinde gerb tarapy düşmeginiň otnositel ýygylygy $W(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005$ -e deň.

Bu iki ýagdaýdaky netijäni deňeşdirsek, otnositel ýygylyklaryň bahasy, umuman alanda, belli bir tejribelere we olaryň sanyna garap üýtgemek mümkinligini görüp bileris.

Ýöne tötänleýin hadysanyň otnositel ýygylygynyň esasy aýratynlygy şundan ybarat eken, ýagny tejribeler sany artdygy saýyn otnositel ýygylyk barha durnuklaşyp, käbir san töwereginde yranyp durýan eken. Şu san tötänleýin hadysanyň *statistik ähtimallygy* hökmünde kabul edilýär. Meselem, teňňe taşlanda bu san 0,5, ýagny Býuffonyň tejribesindäki hem, Pirsonyň tejribesindäki hem emele gelen otnositel ýygylyklar 0,5-e örän ýakyn sanlardyr. Diýmek, teňňe taşlananda onuň statistik ähtimallygy 0,5-e deň.

Teňňe taşlamaga meňzeş dürli hili prosesleri öwrenmek boýunça uly sandaky tejribeler dürli barlagçylar tarapyndan geçirilen we olaryň netijeleri esasynda şweýsariýaly matematik alym Ýakob Bernulli (1654–1705) *uly sanlar kanuny*ny esaslandyryp berdi:

Tejribeler sany uly bolanda hadysanyň otnositel ýygylygy $W(A)$ bu hadysanyň ähtimallygyndan $P(A)$ amaly taýdan tapawutlanmaýanlygy, ýagny uly sanly tejribelerde $P(A) = W(A)$ bolýandygy baradaky delili gutulgysyz diýip hasaplamak mümkin.

2-nji mesele. Bir ýurtda daşary ýurtdan gelen syýahatçylar we şu ýurduň içinde syýahat eden ýurduň raýatlary (içki syýahatçylar) barada aşakdaky maglumatlar berlen bolsun:

Ýyllar	Syýahatçylaryň umumy sany	
	Daşary ýurtly syýahatçylar sany	Içki syýahatçylar
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Garalýan ýyllarda ýurduň içinde syýahat eden ýurduň raýatlarynyň sanynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

Ýurduň içinde syýahat eden raýatlar sany:

$M = 403989 + 348953 + 316897 + 346103 + 351028 = 1766970$,

daşary ýurtly syýahatçylaryň sany bolsa: $610623 + 746224 + 822558 + 774262 + 811314 = 3764981$.

Umumy syýahatçylar sany: $N = 1766970+3764981=5531951$.

Onda,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

Jogaby: $W \approx 0,3194$.

Gönükmeler

475. Jedweliň ahyrky sütünini dolduryň:

Tertip nomeri	Tejribe	Tejribeler sany (N)	A hadysa	A hadysanyň ýygylygy	A hadysanyň otnositel ýygylygy $\left(W(A)=\right)\frac{M}{N}$
1	Teňňe taşlamak	150	Sifrli tarap düşmegi	78	
2	Sportçy kemandan nyşana atýar	200	Nyşana degişi	182	
3	Oýun kubigi taşlanýar	400	4 düşmegi	67	

476. Bir şäherde 920 adamdan işe nähili ýetip barýandyklary soralanda olaryň: 350 sanysy maşynda, 420 sanysy jemgyýetçilik transportynda, 80 sanysy welosipedde, 70 sanysy pyýada barýandyklary mälim bolan bolsa, 1) maşynda; 2) jemgyýetçilik transportynda; 3) welosipedde; 4) pyýada barýanlar sanynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

477. Taýýarlanan 5000 sany gaty diskden 70 sanysy ýaramsyz çykdy. Ýaramsyz gaty disk çykmagynyň otnositel ýygylygyny tapyp, ony göterimlerde aňladyň.

478. Ýaş basketbolçylar topary topy sebede düşürmek maşklaryny geçirdiler. Netijeler aşakdaky jedwelde berlen:

Sebede zyňlan toplaryň sany (N)	10	50	100	250	500
Sebede düşen toplaryň ýygylygy (M)	6	32	68	155	320
Sebede düşen toplaryň otnositel ýygylygy (W)					

Jedweliň ahyrky setirini dolduryň. Toplaryň sebede düşmeklik ähtimallygy P-niň bahasy barada näme diýmek mümkin (ondan bire çenli takyklykda)?

37-§ TÖTÄNLEÝIN MUKDARLAR

Statistika dürli tötänleýin mukdarlar baradaky maglumatlary ýygmak, toparlamak, maglumatlary jedweller, diagrammalar, grafikler we başga görnüşlerde görkezmeli suratlandyrmak hem-de bu maglumatlaryň analizi bilen meşgullanýan ylymdyr.

! ***Tötänleýin mukdar*** **diýip, gözegçilikleri ýa-da tejribeleri geçirmek dowamynda dürli bahalary tötänleýin ýagdaýda kabul etmegi mümkin bolan ululyga aýdylýar. Şeýle mukdarlar barada olaryň bahalary tötänlige bagly diýip aýdyp bileris.**

Meselem, kosmosdan mekdep howlusyna gaçýan kosmiki bölejikleriň sany, telefon stansiýasyna gelip düşýän jaňlar sany, käsedäki çaýyň molekulalarynyň tizligi, oýun kubigini taşlanda nähili sifr çykmagy we başgalar tötänleýin mukdarlara mysal bolup bilýär.

1-nji mesele. Iki oýun kubigi taşlandy. Iki kubikden düşýän nähili oçkolaryň jemi iň uly ähtimallyk bilen bolýandygyny anyklamak mümkinmi?

Her bir jemiň peýda bolmaklyk ähtimallygyny tapýarys. Umumy netijeler sany bu iki kubigiň düşmeginden emele gelýän ähli jemler sany $6 \cdot 6 = 36$-a deň. Jemiň oçkolar jedwelini düzýäris:

1-nji kubik	2-nji kubik					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Jedweliň kömeginde her bir belli jem üçin amatlylyk döredýän netijeler sany m-i anyklaýarys:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ \ m_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Iki kubigi taşlanda ol ýa-da bu jemiň emele gelmeklik ähtimallygyny aşakdaky jedwel görnüşinde aňlatmak mümkin:

Jemi oçkolar	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ähtimallyk $\left(p = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Jedwelden oçkolaryň jemi 7 bolmagy iň uly ähtimallyk $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ -e eýe bolýandygy görnüp dur.

Jogaby: iň uly ähtimallyga eýe bolan oçkolaryň jemi 7. ▲

1-nji meselede iki kubigi taşlandaky oçkolaryň jemi – *tötänleýin mukdar*. Ony X arkaly belgiläliň. Onda $X_1 = 2,\ X_2 = 3, ...,\ X_{10} = 11,\ X_{11} = 12$ sanlary X tötänleýin mukdaryň bahalarydyr. X-iň her bir bahasyna laýyk gelýän $P_1,\ P_2, ...,\ P_{10}, P_{11}$ ähtimallyklaryň bahasy aşakdaky jedwelde görkezilen:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bu jedweliň kömeginde, meselem, X mukdaryň birmeňzeş ähtimallyk bilen nähili bahalary kabul edýändigini; X mukdaryň nähili bahasy köpräk ähtimallyk bilen peýda bolýar we başga soraglara jogaby aňsatlyk bilen anyklamak mümkin. Bu jedwel iki kubigi taşlandaky oçkolaryň jeminden ybarat bolan tötänleýin mukdara X-iň ähtimallyklar boýunça *paýlama jedweli* diýilýär.

Tötänleýin mukdar *X*-iň bahalaryny we her bir bahany kabul etmek ähtimallygyny aňladýan jedwele *tötänleýin mukdaryň ähtimallyklar boýunça paýlama jedweli* diýilýär.

Ähtimallyklar boýunça paýlama jedwelleri, ähtimallyklary nazary taýdan hasaplamak netijeleri esasynda düzülýär.

Amalyýetde, real tejribeler geçirilenden soň, tötänleýin mukdarlaryň bahalarynyň *ýygylyklar ýa-da otnositel ýygylyklar boýunça paýlama jedwelleri* düzülýär. Ondan soň anyk bolmagy üçin, paýlamalar jedwelleri *diagramma* ýa-da *ýygylyklar poligony* görnüşinde şekillendirilýär. Maglumatlary diagramma we ýygylyklar poligony arkaly şekillendirmek bilen Siz 8-nji synp Algebra kursunda tanşypdyňyz.

2-nji mesele. Kompaniýalarda işleýän işgärleriň sanyny öwrenmek maksadynda 36 sany kompaniýadan olarda işleýänleriň sany boýunça maglumat alyndy we olar aşakdaky jedwele girizildi:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Bu maglumatlary 1) ýygylyklaryň (*M*) we otnositel ýygylyklar (*W*) boýunça paýlamalar jedweliniň; 2) ýygylyklar poligonynyň kömeginde şekillendiriň.

△ 1) Jedwelden görnüşi ýaly, işgärler sanyny *X* arkaly belgilesek, ol tötänleýin mukdar bolýar. Gönüden-göni jedweli öwrenip, bu tötänleýin mukdaryň bahalary 23-den 33-e çenli bahalary kabul edýändigini görýäris we şu sanlary jedwelde näçe gezek gatnaşandygyny sanap, ýygylyklar boýunça paýlama jedwelini düzýäris:

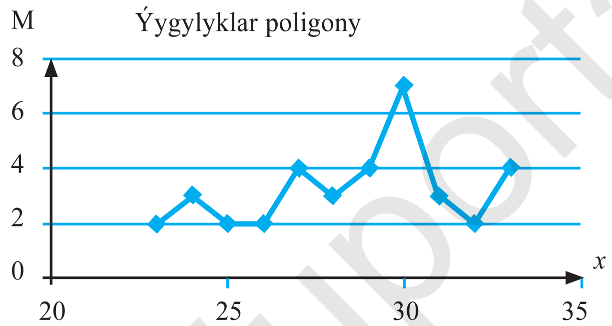
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Ýygylyklaryň her birini kompaniýalar sanyna $N = 36$-a bölüp, otnositel ýygylyklar boýunça paýlama jedwelini alarys:

	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Munda ähli ýygylyklaryň jemi $N = 36$ we ähli otnositel ýygylyklaryň jemi bolsa 1-e deňdigini ýatladyp geçýäris.

2) Kompaniýalaryň işgärleriniň sanynyň ýygylyklar poligonyny 90-njy suratdan görmek mümkin:



90-njy surat.

Käbir mukdaryň ähli bahalarynyň jemini tapmakçy bolsak, L.Eýler tarapyndan girizilen $\sum$ belgisinden peýdalanýarys. Meselem, eger-de M ýygylyk M_1, M_2,...,M_k bahalary kabul etse, onda aşakdaky ýaly belgilemeden peýdalanýarys:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Tötänleýin mukdaryň ähli ýygylyklarynyň jemi tejribeler sany N-e deň:

$$\sum M = N.$$

Islendik tötänleýin mukdar üçin onuň otnositel ýygylyklarynyň jemi 1-e deň.

$$\sum W = \sum\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} =$$
$$= \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Şu paragrafda garalan tötänleýin mukdarlar bir-birinden bölünen bahalary kabul edýär. Şeýle mukdarlar *diskret* (latyn dilindäki *diskretus* – bölünen, üzülmeli sözünden) *mukdarlar* diýlip atlandyrylýar.

Eger-de tötänleýin mukdar käbir aralykdaky ähli bahalary kabul etmegi mümkin bolsa, onda şeýle mukdar *üznüksiz tötänleýin mukdar* diýlip atlandyrylýar. jedwele tötänleýin mukdarlara mysal hökmünde howanyň temperaturasynyň üýtgeýşini, öýden mekdebe çenli barmaga gidýän wagty, ösýän deregiň boýuny, beketde garaşylýan awtobusyň gelýän wagtyny we başgalary getirmek mümkin.

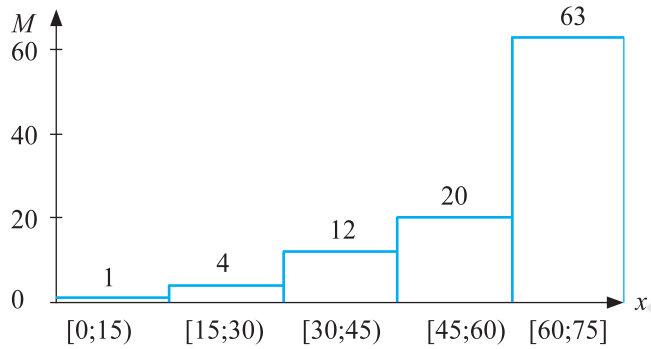
Üznüksiz tötänleýin mukdarlar çäksiz köp bahalary kabul etse-de, olaryň paýlamasyny bermek mümkin. Munuň üçin, üznüksiz mukdar bahalarynyň özgeriş aralygy böleklere bölünýär we tötänleýin ululygyň her bir bölege düşmeginiň ýygylyklary (ýa-da ähtimallyklary) hasaplanýar.

Meselem, okuwçy 100 gün sport zalynda bolandygyny we her sapar maşklara 1 sagat 15 minutdan artyk bolmadyk wagt sarplandygyny bellik eden bolsun. Onda sarplanan wagtlaryň minutlarda [0;75] aralygynda bolýandygyny hasaba alyp, bu aralygy, meselem, 5 sany deň wagt aralyklaryna bölüp, maşklara sarplanan wagtlaryň ýygylyklar jedweline girizmek mümkin:

T (minut)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Gönüden-göni ýygylyklar jemini hasaplap, $\sum M = N = 100$ bolýandygyny görmek mümkin.

Şu jedweldäki maglumatlary *ýygylyklar gistogrammasy* –basgançaklaýyn şekil görnüşinde şekillendirmek mümkin (91-nji surat). Munda her bir basgançak esasy h uzynlyga eýe bolsa, onda sütüniň beýikligini $\frac{M}{h}$, bu ýerde M bu X tötänleýin ululygyň degişli aralykdaky ýygylygy. Onda şeýle sütüniň meýdany $\frac{M}{h} \cdot h = M$ -e, gistogrammanyň astyndaky şekiliň meýdany bolsa $\sum M = N$-e deň bolýar.

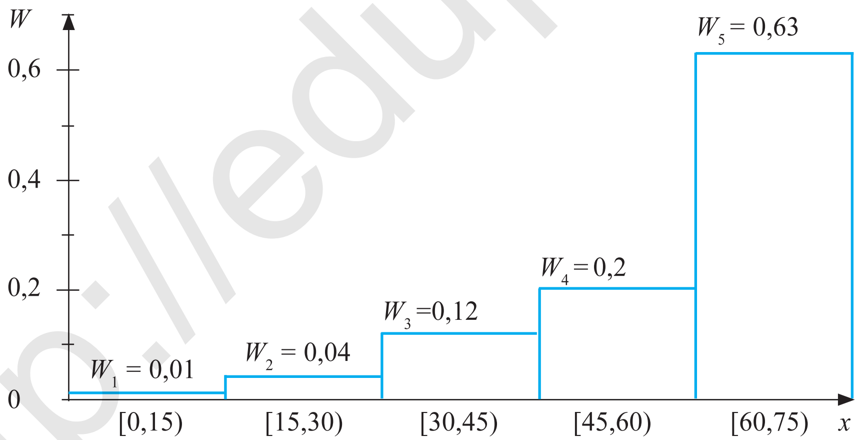


91-nji surat.

Eger-de ýygylyklaryň kömeginde otnositel ýygylyklar anyklansa:

T (minut)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W = \frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

onda olaryň kömeginde çyzylan basgançaklaýyn şekile (92-nji surat) tötänleýin ululygyň *otnositel ýygylyklar boýunça gistogrammasy* diýilýär.



92-nji surat.

Otnositel ýygylyklar gistogrammasynyň her bir sütün astyndaky meýdany W-niň degişli bahasyna deň bolýar. Onda gistogrammanyň astyndaky şekiliň meýdany bire deň bolýar ($\sum W = 1$).

479. 1) Ýönekeý oýun kubigi; 2) iki tarapynda 1 oçko, iki tarapynda 2 oçko, iki tarapynda 3 oçko belgilenen kubik; 3) üç tarapynda 1 oçko, iki tarapynda 2 oçko, bir tarapynda 3 oçko belgilenen kubik; 4) iki tarapynda 1 oçko, üç tarapynda 2 oçko, bir tarapynda 3 oçko belgilenen kubik taşlananda düşýän „oçkolar sany“ – X tötänleýin mukdaryň bahalarynyň P ähtimallyklar boýunça paýlama jedwelini düzüň.

480. Stola iki teňňe taşlandy. Netije „gerb tarap“ düşse şertli ýagdaýda 0 sanly baha, netije „sifrli tarap“ düşse 1 sany bahany berýäris. Teňňeler düşende berlen sanly bahalaryň jemi – X tötänleýin mukdaryň P ähtimallyklar boýunça paýlama jedwelini düzüň.

481. Granlary 1,2,3,4 sanlary bilen belgilenen iki tetraedr bir wagtda stola taşlanýar, munda tetraedrleriň stola degip duran granyndaky oçko hasaba alynýar. Iki tetraedrden düşýän nähili oçkolar: 1) jeminiň; 2) köpeltmek hasylynyň iň uly ähtimallyk bilen bolýandygyny anyklamak mümkinmi?

482. Iki oýun kubigi taşlandy. Iki kubikden düşýän oçkolar köpeltmek hasylynyň ähtimallyklar boýunça paýlama jedwelini düzüň.

483. Kafeniň eýesi günortanlyk wagtynda naharlanýanlara öz wagtynda hyzmat etmek, şu wagtda hyzmat edijileriň sanyny dogry kesgitlemek we taýýarlanýan tagamlar sarplanýan harajatlary dogry planlaşdyrmak maksadynda onuň kafesinde günortanlyga gatnaşýanlaryň sanyny 50 günüň dowamynda jedwele bellik edýär:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Şu jedweliň kömeginde kafede günortanlyk edýänleriň sany – X tötänleýin mukdaryň; 1) ýygylyklar (M) we otnositel ýygylyklar (W) boýunça paýlama jedwelini; 2) ýygylyklar poligonyny düzüň.

484. Ýapyk suw basseýnine ýüzmäge gelen oglanlar we gyzlaryň sany bäş aýyň dowamynda hasaba alnyp, aşakdaky jedwel düzüldi:

Aý	Suw basseýnine gelen çagalar	
	Gyzlar	Oglanlar
Aprel	311	357
Maý	284	404
Iýun	278	417
Iýul	340	412
Awgust	322	406

Suw basseýnine gelen oglanlar sany – X tötänleýin mukdaryň ýygylygyny, otnositel ýygylygyny tapyň we ýygylyklar gistogrammasyny düzüň.

485. Bahalary aşakdaky telefon belgilerinde gatnaşýan sifrler bolan X tötänleýin mukdaryň ýygylyklar boýunça paýlama jedwelini düzüň:

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

486. Paýlamasy aşakdaky jedwelde berlen X tötänleýin mukdaryň ýygylyklar poligonyny we otnositel ýygylyklar poligonyny düzüň:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. Jedwelde 16 sany 9-njy synp oglanlarynyň aýakgaplarynyň ölçegleri ýazylan:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

9-njy synpyň oglanlarynyň aýakgaplarynyň ölçegi – X tötänleýin mukdaryň ýygylyklar boýunça we otnositel ýygylyklar boýunça paýlama jedwellerini düzüň.

38- §. TÖTÄNLEÝIN MUKDARLARYŇ SANLY HÄSIÝETNAMALARY

Siz 8-nji synp „Algebra“ kursunyň maglumatlar derňewine bagyşlanan IV babynda baş toplum, saýlanma, orta baha, moda, mediana ýaly düşünjeler bilen tanşypdyňyz. Edil şeýle düşünjeleri tötänleýin mukdarlar üçin hem girizmek mümkin.

Statistikada maglumatlar toplumy hökmünde tötänleýin mukdarlaryň sanly bahalaryny, olaryň ýygylyklaryny hasaba almak bilen, garalýar. Munda tötänleýin mukdarlaryň ähli bahalary *baş toplum* diýlip atlandyrylýar, olaryň saýlanyp alnan käbir bölegi bolsa *saýlanma* diýlip atlandyrylýar. Saýlanma *reprezentatiw saýlanma* diýilýär, eger-de saýlanmada tötänleýin mukdaryň baş toplumdaky we diňe ondaky bahalary gatnaşsa we ondaky bahalaryň ýygylyklarynyň gatnaşygy baş toplumdaky ýaly bolsa.

Mysal. X tötänleýin mukdaryň M ýygylyklar boýunça paýlamasy aşakdaky ýaly berlen bolsun:

X	– 3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

we bu tötänleýin mukdaryň ähli bahalary (üns beriň, olaryň sany 17000) baş toplum diýip kabul edilen bolsun. Aşakdaky ýaly üç saýlanma garalyň:

1-nji jedwel

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

2-nji jedwel

X	–3	9	11
M	5	7	3

3-nji jedwel

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

Paýlamasy 1-nji jedwelde berlen saýlanma reprezentatiw saýlanma, çünki onda-da –3, 5, 9, 11 bahalar we diňe şu bahalar gatnaşýar hem-de baş toplumda hem bu saýlanmada hem ýygylyklar gatnaşygy birmeňzeş: 5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5 :2:7:3.

Paýlamasy 2-nji jedwelde berlen saýlanmadaky reprezentatiw saýlanma däl, çünki onda X tötänleýin mukdaryň 5-e deň bahasy gatnaşmaýar.

Paýlamasy 3-nji jedwelde berlen saýlanmadaky hem reprezentatiw saýlanma däl, çünki onda ýygylyklar gatnaşygy saklanmadyk: 5 000:2 000:7 000:3 0 00≠5:6:7:3.

Berlen maglumatlary, şol sanda, tötänleýin mukdarlaryň bahalaryny käte bir san bilen häsiýetlendirmek ýa-da bahalamak mümkin. Bu san berlen maglumatlaryň düzümindäki sanlaryň ýa-da tötänleýin mukdarlaryň bahalary *merkezi tendensiýasynyň ölçegi* hem diýilýär. Merkezi tendensiýa ölçeglerine mysal hökmünde moda, mediana we orta baha ýalylary getirmek mümkin.

Tötänleýin mukdaryň garalýan saýlanmadaky ýygylygy iň uly bolan bahasy *moda* diýlip atlandyrylýar we M_0 ýaly belgilenýär.

Meselem, saýlanma 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3-dan ybarat bolsa, onda onuň modasy 8-e deň. 5, 6, 11, 3, 3, 5 saýlanmanyň modasy bolsa iki – M_2= 3, M_2= 5. Egerde 1, 3, 7, 20, 6, 11 saýlanmany garasak, onuň modasy ýok.

Eger-de saýlanma bahalaryny artýan tertipde ýazyp alsak, onda saýlanmany berlenleriň sany taýdan deň ikä bölýän san *mediana* diýlip atlandyrylýar we M_e ýaly belgilenýär. Eger-de tertiplenen saýlanmada berlenleriň sany täk bolsa, onda mediana olaryň ortasynda duran sana deň. Eger-de tertiplenen saýlanmada berlenleriň sany jübüt bolsa, onda mediana ortada duran iki sanyň orta arifmetigine deň.

1-nji mesele. Tötänleýin mukdaryň bahalarynyň saýlanmasynyň medianasyny tapyň:

1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Saýlanma elementlerini artýan tertipde ýerleşdirýäris: – 5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Berlenleriň sany täk. 5 sanyndan çepde we sagda üç sanydan san bar, ýagny 5 saýlanmanyň orta sany, şu sebäpli M_e=5.

2) Berlen 8, 5, 3, 4, 7, 2 saýlanma elementlerini artýan tertipde ýazýarys: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Berlenleriň sany jübüt. Saýlanmanyň ortasynda duran sanlar: 4 we 5, şu sebäpli $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5.$

Jogaby: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Saýlanmalary öwrenmekde ähmiýetli bolan ýene bir düşünje – saýlanmanyň giňligi düşünjesi bilen Siz 8-nji synpda tanşypdyňyz. *Saýlanmanyň giňligi* diýip tötänleýin mukdaryň iň uly bahasy bilen iň kiçi bahasynyň tapawudyna aýdylýar we ol R arkaly belgilenýär.

Saýlamanyň giňligi tötänleýin mukdaryň bahalarynyň nähili derejede dagynyklygyny görkezýär.

Mysal. 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 we 190, 187, 198, 189, 195, 190 saýlanmalaryň giňligini deňeşdiriň.

1-nji saýlanmanyň iň uly bahasy 27, iň kiçi bahasy bolsa 8. Diýmek, 1-nji saýlanmanyň giňligi $R_1=27–8=19$.

2-nji saýlanmanyň iň uly bahasy 198, iň kiçi bahasy bolsa 186. Netijede, 2-nji saýlanmanyň giňligi $R_2=198–186=12$.

Diýmek, birinji saýlanmanyň bahalary ikinji saýlanmadaka garanda dagynyk ýerleşen.

Tötänleýin mukdaryň bahalarynyň *ortaça bahasy (ýa-da orta arifmetigi)* diýip saýlanmadaky ähli sanlaryň jeminiň olaryň sanyna gatnaşygyna aýdylýandygyny ýatladyp geçýäris. X tötänleýin mukdaryň ähli bahalarynyň ortaçasy $\bar{X}$ arkaly belgilenýär.

2-nji mesele. Ýygylyklary boýunça paýlama aşakdaky jedwelde berlen tötänleýin mukdaryň saýlanmasynyň ortaçasyny tapyň:

4-nji jedwel

	3	4	5	7	10
	3	1	2	1	3

$$\bar{X}=\frac{3\cdot 3+4\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 1+3\cdot 10}{3+1+2+1+3}=\frac{9+4+10+7+30}{10}=6.$$

Jogaby: 6.

Ähtimallyklary boýunça paýlamasy mälim bolan tötänleýin mukdaryň saýlanmasyny häsiýetlendirýän düşünjelerden ýene biri bu *matematiki garaşylma* düşünjesidir.

Eger-de X tötänleýin mukdaryň X_1, X_2, ..., X_n bahalary kabul etmek ähtimallyklary, degişlilikde, P_1, P_1, ...P_n bolsa, onda

$$E=X_1P_1+X_2P_2+...+X_nP_n \tag{1}$$

sany X tötänleýin mukdaryň *matematiki garaşylmasy* diýlip atlandyrylýar.

Meselem, X tötänleýin mukdaryň ähtimallyklar boýunça paýlamasy aşakdaky ýaly berlen bolsun:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Onda bu tötänleýin mukdaryň matematiki garaşylmasy:

$$E = 6\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Tötänleýin mukdaryň bahasy bilen saýlanmanyň ortaçasynyň arasyndaky tapawut *ortaçadan daşlaşma* diýlip atlandyrylýar.

Meselem, tötänleýin mukdaryň bahasy $X_1 = 35$, ortaçanyň bahasy bolsa $\overline{X} = 32$ bolsa, onda X_2 -niň ortaçadan daşlaşmasy $X_1 - \overline{X} = 35 - 32 = 3.$

Saýlanmanyň ähli bahalarynyň ortaçadan daşlaşmalarynyň jemi nola deň bolýandygyny görkezmek aňsat:

$$(X_1-\overline{X})+(X_2-\overline{X})+...+(X_n-\overline{X})=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\overline{X} =$$
$$=(X_1+X_2+...+X_n)-n\cdot\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} = 0.$$

Şu sebäpli, tötänleýin mukdaryň bahalaryny häsiýetlendirmek üçin ortaça daşlaşmalaryň jeminiň ýerine ortaça daşlaşmalaryň kwadratlarynyň orta arifmetiginden peýdalanylýar. Şeýle ululyk *dispersiýa* (latynçadan *dispersion* – saçylmak, ýaýylmak) diýlip atlandyrylýar.

Eger-de X tötänleýin mukdar N sany dürli bahalary kabul etse we onuň ortaçasy $\overline{X}$ bolsa, onda onuň dispersiýasy aşakdaky formulanyň kömeginde tapylýar:

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 + \cdots + (X_n-\bar{X})^2}{N}. \qquad (2)$$

Diýmek, dispersiýa – tötänleýin mukdaryň bahalarynyň ortaçadan daşlaşmalarynyň kwadratlarynyň orta arifmetigine deň.

Eger-de X tötänleýin mukdaryň $X_1, X_2,..., X_k$ bahalary degişlilikde, M_1, $M_2,..., M_k$ ýygylyklar bilen gaýtalansa, onda onuň dispersiýasyny

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_\text{k} - \bar{X})^2 Mk}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}. \qquad (3)$$

formulanyň kömeginde hasaplamak mümkin, munda

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_\text{k} M_\text{k}}{M_1 + M_2 + \cdots Mk}.$$

Meselem, 4-nji jedweldäki tötänleýin mukdaryň ortaçasy $\overline{X} = 6$ bolýandygyny anyklapdyr. Indi şu mukdaryň dispersiýasyny hasaplalyň:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \quad + (Xk - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + Mk} =$$

$$= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3+1+2+1+3} =$$

$$= \frac{27+4+2+1+48}{10} = \frac{82}{10} = 8,2.$$

Eger-de tötänleýin mukdar käbir ölçege (meselem, santimetr) eýe bolsa, onda onuň ortaçasy $\overline{X}$ we ortaçadan daşlaşmasy $X - \overline{X}$ hem X mukdar bilen birmeňzeş ölçege (santimetr) eýe. Daşlaşmanyň kwadraty we dispersiýa bolsa X mukdaryň ölçeginiň kwadraty (kwadrat santimetr) ölçegine eýe. Ortaçadan daşlaşmany bahalamak üçin X tötänleýin mukdar bilen birmeňzeş ölçege eýe bolan ululykdan peýdalanmak amatly. Şu sebäpli, dispersiýadan alnan kwadrat kök, ýagny $\sqrt{D}$ -niň bahalaryndan peýdalanylýar.

Dispersiýadan alnan kwadrat kök *ortaça kwadrat daşlaşma* diýilýär we σ arkaly belgilenýär, ýagny $\sigma = \sqrt{D}$.

Meselem, 4-nji jedweldäki tötänleýin mukdaryň dispersiýasy $D = 8,2$ bolýandygyny hasaplapdyk. Indi dispersiýanyň şu bahasyndan kalkulýatoryň kömeginde kwadrat kök alsak, ortaça kwadrat daşlaşmasyny alarys:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{8,2} \approx 2,86.$$

Dispersiýany we ortaça kwadrat daşlaşmany statistikada tötänleýin mukdaryň bahalarynyň orta bahanyň daşyndaky ýaýylmasynyň ölçegleri hem diýip aýdýarlar.

Gönükmeler

488. Tötänleýin mukdaryň X bahalarynyň baş toplumdaky paýlamasy aşakdaky jedwelde getirilen:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Berlen baş toplum üçin aşakdakylardan haýsylary reprezentatie saýlanma bolýar:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Saýlanmanyň modasyny tapyň:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Saýlanmanyň medianasyny tapyň:
1) 18, 13, 35, 19, 7;
2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11;
4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Saýlanmanyň giňligini tapyň:

1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Saýlanmanyň ortaçasyny tapyň:
1) 34, –10, 23, –18;
2) –3, 6, –19, –12, 1;
3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0,7, 0,6, 0,4;
4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Saýlanmanyň modasyny, medianasyny we ortaçasyny tapyň:
1) 4, –3, 2, 0, 3, –2; 2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Ýygylyklary boýunça paýlamasy aşakdaky jedwelde berlen X tötänleýin mukdaryň bahalarynyň saýlanmasynyň orta arifmetigini tapyň:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Ähtimallyklary boýunça paýlamasy aşakdaky jedwelde berlen X tötänleýin mukdaryň bahalarynyň matematiki garaşylmasyny tapyň:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Saýlanmanyň dispersiýasyny tapyň
1) 9 cm, 11 cm, 8 cm, 10 cm; 2) 18 kg, 16 kg, 15 kg, 19 kg;
3) 8 s, 11 s, 8 s, 9 s, 9s; 4) 1 m, 9 m, 4 m, 8 m, 8 m.

497. Ýygylyklary boýunça paýlamasy aşakdaky jedwelde berlen X tötänleýin mukdaryň bahalarynyň toplumynyň dispersiýasyny tapyň.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Saýlanma elementleriniň orta bahadan orta kwadrat daşlaşmasyny hasaplaň:
1) 4 g, 5 g, 8 g, 3 g, 5 g;
2) 9 cm, 12 cm, 7 cm, 10 cm, 12 cm.

499. Ýygylyklary boýunça paýlamasy berlen X tötänleýin mukdaryň orta kwadrat daşlaşmasyny tapyň:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

500. (Ýatdan). Aşakdaky tejribede ýüze çykmagy mümkin bolan ähli elementar hadysalary aýdyň: 1) tötänleýin ýagdaýda ýyldaky aýlaryň ady aýdylýar; 2) iki teňňe taşlanyp, düşýän taraplary synlanýar; 3) käbir 50-den kiçi düýp sana aýdylýar; 4) tötänleýin ýagdaýda ikibelgili 3-e kratny sana aýdylýar.

501. Gutuda 4 sany gara, 5 sany gyzyl, 6 sany gök şar bar. Tötänleýin ýagdaýda gutudan bir şar alyndy. Alnan şar: 1) gara; 2) gyzyl; 3) gök; 4) gara däl; 5) gyzyl däl; 6) gök däl; 7) ýaşyl; 8) ýa-da gara, ýa-da gyzyl, ýa-da gök bolmaklyk ähtimallygyny tapyň.

502. Töwekgel edip 1-den 50-ä çenli bolan natural san aýdyldy. Bu sanyň: 1) 7; 2) 7 däl; 3) 7-ä kratny; 4) 10-a kratny; 5) düýp san däl; 6) 30-dan uly däldigini ähtimallygyny anyklaň.

503. Stola oýun kubigi bilen teňňe taşlandy. Munda 1) kubikde 5, teňňe sifrli tarapy bilen; 2) kubikde çykan san düýp, teňňäniň gerb tarapy bilen düşmegi ähtimallygyny tapyň.

Saýlanmanyň giňligini, modasyny, medianasyny we ortaçasyny tapyň (**504–507**):

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Saýlanmanyň dispersiýasyny we orta kwadrat daşlaşmasyny anyklaň:
1) 6, 11, 8, 9; 2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4; 4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4; 6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Ýygylyklary boýunça paýlamasy bilen berlen Z tötänleýin mukdaryň dispersiýasyny we orta kwadrat daşlaşmasyny tapyň:

1)

Z	–1	0	2	4
	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
	1	2	3	1

510. Saýlanmalaryň dispersiýalaryny deňeşdiriň:

1) 4, 5, 7, 5, 9 we 6, 9, 7, 8; 2) –2, 2, 3 we –3, –1, 1, 3, 4.

511. Ähtimallyklar boýunça paýlama jedweli:

1)

	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

bilen berlen X tötänleýin mukdaryň matematiki garaşylmasyny tapyň.

V baba degişli synag (test) gönükmeleri

1. Birmeňzeş kartoçkalar 1-den 15-e çenli sanlar ýazyldy (her bir kartoçka bir sanydan san ýazyldy). Kartoçkalar stola tersi bilen goýuldy we garyşdyryldy. Tötänden alnan kartoçkadaky sanyň düýp san bolmaklyk ähtimallygyny tapyň.

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{3}{5}$.

2. Gutuda 3 sany ak we 7 sany gara şar bar. Olardan biri tötänden saýlanyp gutudan alyndy. Alnan şaryň ak bolmaklyk ähtimallygyny tapyň.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

3. Synpdaky 27 okuwçydan 15 sanysy oglan. Synpa bir oglan we iki gyz gelip goşuldy. Munda oglanlaryň sany – X tötänleýin mukdaryň otnositel ýygylygy näçä üýtgedi?

A) $\frac{1}{45}$ -e artdy; B) $\frac{1}{45}$ -e kemeldi;

C) $\frac{2}{45}$ -ä artdy ; D) $\frac{2}{45}$ -ä kemeldi.

4. Tötänleýin mukdaryň bahalarynyň saýlanmasynyň modasy bilen medianasynyň jemini tapyň: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

A) 14; B) 17; C) 16; D) 13 .

5. Tötänleýin mukdaryň bahalarynyň saýlanmasynyň modasy bilen medianasynyň köpeltmek hasylyny tapyň: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.

6. Ýygylyklary boýunça paýlamasy aşakdaky jedwelde berlen X tötänleýin mukdaryň saýlanmasynyň ortaçasyny tapyň:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

A) $1\frac{5}{9}$; B) $1\frac{4}{9}$; C) $1\frac{1}{9}$; D) 1.

7. X tötänleýin mukdaryň ähtimallyklar boýunça paýlamasyna görä matematiki garaşylmasyny tapyň:

	–1	2	3	5	7
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

A) $\frac{25}{9}$; B) $\frac{26}{9}$; C) $\frac{29}{9}$; D) $\frac{30}{9}$.

8. X tötänleýin mukdaryň ýygylyklar boýunça paýlamasyna görä orta kwadrat daşlaşmasyny tapyň:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.

9. X tötänleýin mukdaryň ähtimallyklar boýunça paýlamasyna görä dispersiýasyny tapyň:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

Amaly we predmetara bagly meseleler

1-nji mesele. 5000 p.b. (pul birliginde) awtomobil, her biri 250 p.b.-den 4 sany telewizor, her biri 200 p.b-den 5 sany el telefony utuşly lotereýa oýnalýar. Jemi, 7 p.b.-den 1000 sany bilet satylýar. Bir bilet satyn alan lotereýa gatnaşyjysynyň arassa utuşynyň paýlama jedwelini düzüň we matematiki garaşylmasyny hasaplaň.

△ X – bir bilete düşen arassa utuş bolsa, onda onuň bahasy:

ýekeje-de utuş çykmasa, $0 - 7 = -7$;

el telefony utulan bolsa, $200 - 7 = 193$;

telewizor utulan bolsa, $250 - 7 = 243$;

awtomobil utulan bolsa, $5\,000 - 7 = 4\,993$

pul birliginde bolýar. 1000 sany biletden 990 sanysyna utuş çykmazlygyny we utuşlar sanynyň $5 + 4 + 1 = 10$ bolýandygyny hasaba alyp, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä alarys:

X– tötänleýin mukdar

– 7 bahany kabul etmek ähtimallygy $\frac{990}{1000} = 0{,}990$;

193 bahany kabul etmek ähtimallygy bolsa $\frac{4}{1000} = 0{,}004$;

243 bahany kabul etmek ähtimallygy $\frac{1}{1000} = 0{,}001$.

4 993 bahany kabul etmek ähtimallygy $\frac{5}{1000} = 0{,}005$;

Diýmek, X – tötänleýin mukdaryň ähtimallyklar boýunça paýlama jedweli aşakdaky ýaly bolýar:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Paýlama jedweli esasynda matematiki garaşylmany hasaplamak mümkin:

$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0,$

ýagny ortaça utuş nola deň. Emele gelen netije, lotereýa biletlerini satmakdan düşen hemme pul utuşlara gidýändigini aňladýar.

Jogaby: paýlama jedweli:

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

we matematiki garaşylma $E = 0$.▲

2-nji mesele. Bir firmanyň terjimeçilik işine iki dalaşgär hereket edýär. Olara birmeňzeş synag möhleti bellendi we 125 sahypaly birmeňzeş tekst terjimä berildi. Olaryň her gün näçe sahypa teksti terjime edendikleri aşakdaky jedwelde berlen:

Hepdäniň günleri	Günlük terjime edilen sahypalar sany	
	1-nji dalaşgär (X)	2-nji dalaşgär (Y)
Duşenbe	24	25
Seşenbe	26	31
Çarşenbe	25	27
Penşenbe	23	22
Anna	27	20

Iş beriji jedweldäki maglumatlary derňemek bilen, dalaşgärleriň haýsysyny işe kabul etmegi makul görýär?

△ Dalaşgärleriň her biri 5 günde 125 sahypadan terjime etdiler, diýmek, iki dalaşgäriň hem ortaça zähmet öndürijiligi birmeňzeş:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (sah/gün).}$$

Iki tötänleýin mukdar X we Y-iň hem modasy ýok, medianalary bolsa birmeňzeş (25 we 25). Dalaşgärlerden haýsysyny işe almak maksada laýyk eken? Munda dalaşgärleriň zähmet öndürijiliginiň *durnuklylygyny* deňeşdirmek arkaly amala aşyrmak mümkin. Muny bolsa daşlaşmalaryň kwadratlarynyň jemlerini ýa-da dispersiýalary deňeşdirmek arkaly amala aşyrmak bolýar:

Hepdäniň günleri	Tötänleýin mukdaryň bahasy		Ortaçadan daşlaşma $\overline{X}=\overline{Y}=25$		Daşlaşmalaryň kwadratlary	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Duşenbe	24	25	–1	0	1	0
Seşenbe	26	31	1	6	1	36
Çarşenbe	25	27	0	2	0	4
Penşenbe	23	22	–2	–3	4	9
Anna	27	20	2	–5	4	25
Jemi	125	125	0	0	10	74

Görnüşi ýaly, daşlaşmalaryň kwadratlarynyň jemi X üçin 10, Y üçin bolsa 74, ýa-da dipersiýalary hasaplasak:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Diýmek, X tötänleýin mukdaryň dispersiýasy Y tötänleýin mukdaryň dispersiýasyndan kiçi. Amaly taýdan bu netije ikinji dalaşgäriň zähmet öndürijiliginiň durnukly däldigini görkezýär: käbir günleri ol mümkinçiliklerinden doly peýdalanmazdan işledi, başga günlerde bolsa mümkinçilik derejesinden köpräk işlemäge çalyşdy, bu bolsa, elbetde, ýerine ýetirilýän işiň hiline erbet täsir etmegi mümkin. Görnüşi ýaly, netijede iş beriji birinji dalaşgäri işe almagy makul görýär.

Jogaby: iş beriji birinji dalaşgäri işe almagy makul görýär. ▲

3-nji mesele. Iki kemançy nyşana kemandan ok atanda alýan oçkolary – X we Y tötänleýin mukdarlaryň ähtimallyklar boýunça paýlama jedweli mälim:

1-nji kemançy üçin

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

we 2-nji kemançy üçin

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Kemançylardan haýsysy kemandan nyşana gowurak atýar?

△ Hany aýdyň, kemançylardan haýsysynyň nyşana degýän ortaça oçkosy köpräk bolsa, şol ýagşy nyşana alýan diýmek mümkin. Şu sebäpli, X we Y tötänleýin mukdarlaryň matematiki garaşylmasyny hasaplaýarys:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \dots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \dots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

ýagny, iki kemançynyň hem nyşana degýän oçkolary ortaça birmeňzeş.

Indi X we Y-laryň dispersiýa we orta kwadrat daşlaşmalaryny hasaplap göreliň:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Şeýlelikde, nyşana degýän oçkolaryň orta bahalary deň $E(X) = E(Y)$ bolsa-da, ikinji kemançy üçin dispersiýa birinji kemança garanda kiçiräk: $D(Y) < D(X)$, ýagny ikinji kemançynyň nyşana degýän oçkolarynyň „merkez“ ($E(Y) = 5{,}36$) daşynda ýerleşiş dagynyklygy birinji kemança görä kiçiräk. Başgaça aýdanda, onuň netijeleri birinji kemançynyň netijelerine garanda 5,36 -dan uzagraga gitmändir. Diýmek, ol birinji kemança garanda ýokarrak netijeleri gazanmagy üçin nyşana ýagşyrak çenäp, $E(Y)$-ni sagraga (ýokarraga) süýşürmäge hereket etmeli.

Jogaby: kemançylardan birinjisi nyşana ýagşyrak atýar. ▲

4-nji mesele. Ýaryşlar döwründe futbol komandasynyň oýunçylary tarapyndan bäsdeşiň derwezesine girizen toplarynyň sany X-iň ýygylyklar boýunça paýlamasy berlen:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

Ähli girizilen toplaryň sanynyň ortaça bahadan orta kwadrat daşlaşmasyny hasaplaň.

△ Ilki ortaçany hasaplaýarys:

$$\bar{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \dots + X_5M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{0\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1}{3+3+2+1+1} = \frac{0+3+4+3+4}{10} = \frac{14}{10} = 1{,}4.$$

Soňky hasaplama netijeleri aşakdaky jedwelde getirilen:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X-\bar{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X-\bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X-\bar{X})^2\cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Onda, dispersiýa we orta kwadrat daşlaşma aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$\mathrm{D} = \frac{(X_1-\bar{X})^2\mathrm{M}_1 1 + (X_2-\bar{X})^2\mathrm{M}_2 + \dots + (X_5-\bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} =$$

$$= \frac{5{,}88 + 0{,}48 + 0{,}72 + 2{,}56 + 6{,}76}{10} = \frac{16{,}4}{10} = 1{,}64,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}64} \approx 1{,}28.$$

Jogaby: $\sigma \approx$ 128. ▲

Gönükmeler

1. Köp ýyllyk statistik maglumatlar esasynda 4 sany perzendli maşgalalardaky oglanlaryň sany – X tötänleýin mukdaryň paýlama kanuny aşakdaky jedwelde berlen bolsa, onuň matematiki garaşylmasyny we dispersiýasini hasaplaň.

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Iki gimnastçynyň sport ýaryşyndaky çykyşyna 9 sudýa 10 ballyk ulgamda goýan ballary aşakdaky jedwelde berlen:

Gimnastçynyň nomeri	Sudýanyň nomeri we goýan ballary								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Her bir gimnastçy alan ballaryny, degişlilikde, X we Y tötänleýin mukdarlar diýlip garalsa, olaryň matematiki garaşylmasyny we dispersiýasyny hem-de orta kwadrat daşlaşmalaryny hasaplaň we deňeşdiriň.

3. Hyrydarlaryň aýakgaplara bolan talabyny öwrenýän talyp iki dükanda her gün satylan aýakgaplaryň sanyny 25 günüň dowamynda bellik edýär. Eger-de X_1 birinji dükanda, X_2 ikinji dükanda satylan aýakgaplaryň sany bolsa, onda aşakdaky jedwellerde getirilen maglumatlara esasan X_1 we X_2 tötänleýin mukdarlaryň matematiki garaşylmasyny we orta kwadrat daşlaşmasyny hasaplaň. Alnan netijeleri deňeşdirip, dükanlardaky aýakgabyň satylyşyny deňeşdiriň.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

4. Silindr görnüşindäki polatdan ýasalan töňňejikler partiýasyndan alnan ýigrimi sany töňňejigiň esaslarynyň d diametrleri iki dürli ölçeg esbaplarynyň kömeginde ölçendi. Birinji ölçeg esbabynyň kömeginde (1 mm-e çenli takyklykda) alnan netijeler çepdäki, ikinjide alnan netijeler bolsa sagdaky jedwelde getirilen:

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

d_1 we d_2 tötänleýin mukdarlaryň dispersiýalaryny deňeşdiriň.

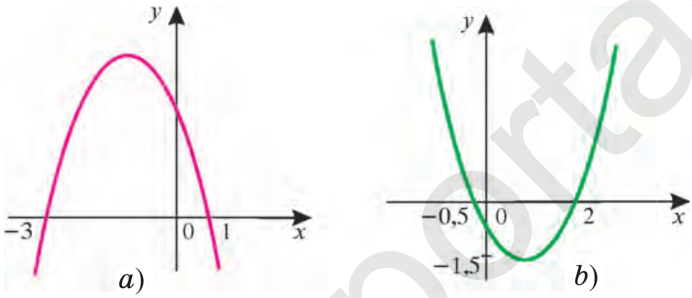
IX SYNP „ALGEBRA“ KURSUNY GAÝTALAMAK ÜÇIN GÖNÜKMELER

512. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Ýatdan.) $y = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp (93-nji surat), onuň häsiýetlerini anyklaň.



93-nji surat.

514. Funksiýanyň grafigini çyzyň we häsiýetlerini anyklaň:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. Funksiýanyň grafigini bir koordinata tekizliginde çyzyň:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ we $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ we $y = 3x^2 - 2$.

Deňsizligi çözüň (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \leq 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \leq 0$; 6) $x^2 - 7 \geq 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\leq 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\geq 0$.

Deňsizligi interwallar usuly bilen çözüň (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\leq 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\geq 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\leq 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\geq 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\geq 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\leq 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Trapesiýanyň meýdany 19,22 sm^2-dan artyk. Onuň orta çyzygy beýikliginden iki esse uly. Trapesiýanyň orta çyzygyny we beýikligini tapyň.

524. Parallelogramyň tarapy şu tarapa geçirilen beýiklikden 2 cm artyk. Eger parallelogramyň meýdany 15 cm^2-dan artyk bolsa, şu tarapyň uzynlygyny tapyň.

525. Deňsizligi interwallar usuly bilen çözüň:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geq 2$.

526. Eger x^2+px+q kwadrat üçagza $x=0$ bolanda –14-e deň bahany, $x=-2$ bolanda bolsa –20-ä deň bahany kabul etse, şu kwadrat üçagzanyň p we q koeffisiýentlerini tapyň.

527. Eger $y=x^2+px+q$ parabola:

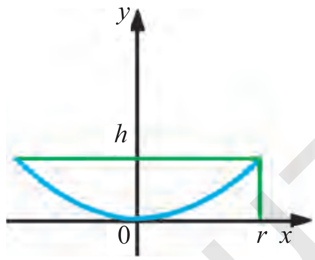
1) abssissalar okuny $x=-\frac{1}{2}$ va $x=\frac{2}{3}$ nokatlarda kesse;

2) abssissalar oky bilen $x=-7$ nokatda galtaşsa;

3) abssissalar okuny $x=2$ we ordinatalar okuny $y=-1$ nokatda kesip geçse, $p-q$-ny tapyň.

528. Eger parabola abssissalar okuny 5 nokatda kesse we onuň ujy $\left(2\frac{3}{4};10\frac{1}{8}\right)$ nokat bolsa, şu parabolanyň deňlemesini ýazyň.

529. Teleskopyň (reflektoryň) serpiji aýnasy ok kesimi boýunça parabola şekline eýe (94-nji surat). Şu parabolanyň deňlemesini ýazyň.



94-nji surat.

530. Eger $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigi:

1) $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ we $C(0;\ -6)$ nokatlardan geçse;

2) $K(-2;0)$, $L(1;0)$, $M(0;\ 2)$ nokatlardan geçse, onuň koeffisiýentlerini tapyň.

531. Islendik otrisatel däl a we b sanlar üçin

1) $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$; 2) $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$

deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

532. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y = \sqrt{x^2}$; 2) $y = |x-1|$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

533. Deňlemäniň hakyky köklerini tapyň:

1) $x^2 - |x| - 2 = 0$; 2) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$; 3) $|x^2 - x| = 2$;
4) $|x^2 + x| = 1$; 5) $|x^2 - 2| = 2$; 6) $|x^2 - 26| = 10$.

534. Kök çykaryň:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, a $\neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

535. Ýönekeýleşdiriň:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0{,}5\sqrt{343}$.

536. Aňlatmalaryň bahalaryny deňeşdiriň:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ va $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ va $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Kök belgisiniň daşyna köpeldijini çykaryň:

1) $\sqrt{9a^2b}$, bunda $a < 0, b > 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, bunda $a > 0, b > 0$;

539. Köpeldijini kök belgisiniň içine giriziň:

1) $x\sqrt{5}$, bunda $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, bunda $x < 0$;
3) $-a\sqrt{3}$, bunda $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, bunda $a < 0$.

540. $y = -\frac{25}{x}$ funksiýanyň grafigine:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1; 250)$
nokadyň degişli bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň.

541. $y = \sqrt{1-2x}$ funksiýa grafigine: 1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; E (–4;
3) nokat degişli bölmek ýa-da bo‘lmasligini anyklaň.

542. Funksiýanyň grafigini çyzyň:
1) $y = x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -x^2 - 7x - 6$.

543. P(1; 0) nokady: 1) A(0; 1); 2) B) (0; –1); 3) C(–1; 0); 4) D(1; 0) nokada geçirýän birnäçe öwrüm burçlaryny görkeziň.

544. Hasaplaň: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Sanyň položitel ýa-da otrisateldigini anyklaň:

1) $\sin\frac{\neq}{5}\sin\frac{4\neq}{5}\cos\frac{\neq}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

546. Berlen: $\sin\alpha = 0{,}6$, $\sin\beta = -0{,}28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Hasaplaň: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Köpeldijilere dagydyň:

1) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha - \sin 2\alpha$; 4) $1 - \sin 2\alpha - \cos^2\alpha$.

548. Eger 1) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ va $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{5}{13}$ va $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ bolsa $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$-ny hasaplaň.

549. Eger

1) $a_1=10,\ d=6,\ n=23;$ 2) $a_1 = 42,\ d = \frac{1}{2},\ n = 12;$

3) $a_1=0,\ d=-2,\ n=7;$ 4) $a_1 = \frac{1}{3},\ d = \frac{2}{3},\ n = 18$

bolsa, arifmetik progressiýanyň n-nji agzasyny we ilkinji n sany agzasynyň jemini hasaplaň.

550. Eger $a_1 = 2,\ a_n = 120,\ n= 20$ bolsa, arifmetik progressiýanyň ilkinji n sany agzasy jemini tapyň.

551. n-nji agzasy $a_n = \frac{1-2n}{3}$ formula bilen berlen yzygiderlik arifmetik progressiýa bolýandygyny subut ediň.

552. Eger geometrik progressiýa üçin

1) $b_1 = 5$ we $q = -10$ bolsa, b_4-i tapyň;

2) $b_4 = -5000$ we $q = -10$ bolsa, b_1-i tapyň.

553. Eger:

1) $b_1=3,\ q=2,\ n=5;$ 2) $b_1 = 1,\ q = 5,\ n = 4$ bolsa, geometrik progressiýanyň n-nji agzasyny we ilkinji n sany agzasynyň jemini hasaplaň.

554. Eger: 1) $b_1=\frac{1}{4},\ q=2,\ n=6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{5},\ q = -5,\ n = 5$ bolsa, geometrik progressiýanyň ilkinji n sany agzasynyň jemini tapyň.

555. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň.

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots;$ 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots;$ 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$.

556. Kök belgisi astyndan köpeldijini çykaryň:

1) $\sqrt{20a^4b}$, munda $a<0,\ b>0;$ 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, munda $a<1;$

557. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, munda $a>b;$ 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, munda $b>a$.

558. Maýdalawjydaky irrasionallygy ýok ediň:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}};$ 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}};$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}};$ 4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$.

559. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}}-\dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Deňlemäni çözüň:

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Toždestwony subut ediň:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha$.

564. Toždestwony subut ediň:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

565. Arifmetik progressiýada $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Progressiýanyň ilkinji on ýedi agzasynyň jemini tapyň.

566. Geometrik progressiýada $q=3$, $S_6=1\,820$ bolsa, b_1 we b_5-i tapyň.

567. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemi $\frac{8}{5}$ -e deň, ikinji agzasy $-\frac{1}{2}$ -e deň. Üçünji agzasyny tapyň.

Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

568. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

569. Eger: 1) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$-ny hasaplaň.

JOGAPLAR

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2=1$; 4) x-iň berlen funksiýanyň bahasy –5-e deň bolýan hakyky bahalary ýok. **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$. $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2) nollary ýok; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) nollary ýok. **6.** 2) $p=3$, $q=-4$; 4) $p=-2$, $q=-15$. **7.** $x_{1,2}=\pm 2$. **9.** B we C. **12.** 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) (0; 0), (2; 4); 6) (1; 1). **13.** 2) Hawa. **14.** 2) Hawa; 4) ýok; **16.** 1) $x<-3$, $x>3$; 2) $-5 \le \le x \le 5$; 3) $x \le -4$, $x \ge 4$; 4) $-6 < x < 6$. **20.** 2) (–3; –4,5), (2; –2). **21.** 2) Ha; 4) ýok. **22.** 1) Artýan; 2) kemelýän; 3) artýan; 4) artýan hem, kemelýän hem bolmaýar. **23.** 3 m/s^2. **26.** 2) (0; –5); 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x=-2$; 4) $x=2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2) Ýok; 4) ýok. **29.** 2) (1; 0), (0,5; 0), (0; –1); 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **30.** $y=x^2-2x+3$. **32.** 2) $k=-10$. **34.** 1) $y=2(x-3)^2$; 2) $y=2x^2+4$; 3) $y=2(x+2)^2-1$; 4) $y=2(x-1,5)^2+ +3,5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) (1;0), (–5; 0), (0; 10); 4) (0; 14). **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 we 5. **42.** Diwara parallel tarap 6 m; galan taraplary 3 m-dan. **43.** Ýok. **44.** 2) $x=1$ bolanda $y=-5$ iň kiçi baha; 4) $x=1$ bolanda $y=-2$ iň kiçi baha. **45.** 1) $a>0$, $b>0$, $c>0$; 2) $a<0$, $b>0$, $c<0$. **46.** 1) 5 s-dan soň iň uly beýiklik 130 m-e deň; 2) $(5+\sqrt{26})$s. **48.** 2) $3x^2-x-1>0$; 4) $2x^2+x-5<0$. **50.** 2) $3<x<11$; 4) $x<-7$, $x>-1$. **51.** 2) $x<-3$, $x>3$; 4) $x<0$, $x>2$. **52.** 2) $-2<x<1$; 4) $x<-3$, $x>1$; 6) $x<-1$, $x>\frac{1}{3}$. **53.** 2) $x=\frac{1}{6}$; 4) $x<-4$, $x>2$. **56.** Položitel bahalar $x<-3$, $x>2$ aralyklarda, otrisatel bahalar $-3<x<2$ interwalda. **58.** 2) $x \le -1$, $x \ge 4$; 4) $-1<x<4$. **59.** 2) $x<-\frac{1}{3}$, $x>2$; 4) $x \le -0,25$; $x \ge 1$. **60.** 2) $x=7$; 4) çözüwleri ýok. **61.** 2) Çözüwleri ýok; 4) çözüwleri ýok; 6) x – islendik hakyky san. **62.** 2) $x<-\sqrt{7}$, $x>\sqrt{7}$; 4) $x<-2$; $x>0$. **64.** 2) $x<-\frac{5}{3}$ $x>\frac{5}{3}$; 4) $-1<x<4$; 6) x – islendik hakyky san. **65.** 2) x – islendik hakyky san; 4) $x \ne \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \le x \le 0$. **66.** 2) Çözüwleri ýok; 4) $-0,5<x<3$. **67.** **2)** $x=1$; 4) x – islendik hakyky san. **69.** $-6<r<2$. **71.** 2) $-5<x<8$; 4) $x<-5$, $x>2\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x<0$, $x>9$; 4) –3

$< x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x < < 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \le x < 7$; 6) $-2 \le x < -1$, $x \ge 3$. **76.** 2) $x < 0{,}5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \le x \le -1$, $4 \le x \le 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \le x < 2$, $x \ge 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5$, $x > 2$; 3) $-1 < x \le -\frac{2}{5}$. **81.** 2) $x = 2$ bolanda $y = 1$; $x = 0$ we $x = 4$ bolanda $y = 5$; $x = -1$ we $x = 5$ bolanda $y = 10$; $x = -2$ we $x = 6$ bolanda $y = 17$. **82.** 1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 11$, $y(3) = 4$; 2) $x = \frac{1}{2}$ bolanda $y = -3$; $x = -1$ bolanda $y = -2$; $x = \frac{3}{2}$ bolanda $y = 13$; $x = \frac{4}{3}$ bolanda $y = 19$.

84. 2) $x \le 2$, $x \ge 5$; 4) $-2 \le \le x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = 1$; 2) $x = 2$ da $y = -2$; $x = 0$ we $x = 4$ bolanda $y = 0$; $x = -2$ we $x = 6$ bolanda $y = 2$; $x = -4$ we $x = 8$ bolanda $y = 4$. **86.** 2) $x \ne -1$; 5) $-1 \le x \le 1$, $x \ge 4$; 6) $-5 \le x \le 1$, $x > 2$. **87.** 2) Hawa; 4 hawa. **93.** 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2) täk; 4) jübüt hem, täk hem bolmaýar. **99.** 2) täk; 4) täk. **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110**. 2) $x \le 3$; 4) $y < < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2) Kubuň gapyrgasy 7 dm-dan artyk. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **117.** $x = \frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **121.** 2) $x = 2{,}25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x = 4$. **124.** 2) $2 \le x \le 3$; 4) $1 < x \le \le 2$; 6) $x \ge 1$. **125.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; 4) x-iň şeýle bahasy ýok. **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 m we 150 m. **131.** 2) $p = 1$, $q = 0$. **132.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2$, $x > 4$; 4) $x < 3$, $x > 4$. **134.** 2) $x < -6$, $x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}$, $x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) Çözüwleri ýok; 4) çözüwleri ýok; 6) çözüwleri ýok. **137.** 2) $x < -1$, $1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4 < x \le 7$; 6) $x \ge 2$, $-\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** 12 km/h-dan kem däl. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$.

143. 2) (–1; –1); (1; 1). **144**. 2) $x > 2$; 4) $x \le -2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2) x – islendik san; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < -7$, $-3 \le x < -1$, $x \ge 3$. **148.** 2) kemelýär; 4) kemelýär. **149.** 2) täk; 4) jübüt hem, täk hem bolmaýar. **150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1$, $x > 9$; 2) $-1 < x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154**. 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 we 13. **160.** 4 we 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 m, 200 m. **165.** 2) (4; 5) we (5; 4). **166.** 2) (1; –2) we (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) we (5; 2); 4) (1; 3) we (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) we (–20; –4); 4) (3; 6) we (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) we (9; 1). **176.** 2) sistema ýözüwe eýe däl. **177.** 2) $-9 \le x \le 3$; 4) $-6 \le x \le 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ we $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \le -2$ we $1 \le x \le 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) we (4; 4); 2) (2; –2) we (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) we (6; –5); 4) (–1; 10) we (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) we (2; 3); 4) (2; 6) we (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) we (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) we (1; 5). **200.** 2) (–2; 1) we (2; 1); 4) (–1; 4) we (24; 0,6). **201.** 2) (4; $\sqrt{3}$) we (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) we (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ we $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Uzynlygy 1,2 cm we ini 0,8 cm. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **214.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{o}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{o}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 m. **219.** 2 rad. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ cm². **221.** 2 rad. **222.** 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) ikinji çärýek; 4) dördünji çärýek; 6) ikinji çärýek. **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$; 4)

$\frac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,-1,-2,\ldots$. **227.** 2) ikinji çärýek; 4) dördünji çärýek. **228.** 2) $x = 1{,}8\pi$, $k=4$; 4) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 6) $x=\frac{5}{3}\pi$ $k=2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **231.** 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) –1; 6) –1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) –1; 4) –1; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) –1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **241.** 2) $x=2\pi k-1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=k\pi-1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3}+1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **242.** 2) ikinji çärýek; 4) ikinji çärýek; 6) ikinji çärýek. **243**. 2) položitel; 4) položitel; 6) položitel. **244.** 2) otrisatel; 4) otrisatel; 6) položitel. **245.** 2) položitel, položitel; 4) otrisatel, otrisatel; 6) otrisatel, otrisatel; 8) položitel, položitel. **246.** 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. **247.** 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1{,}3) < 0$, $\cos(-1{,}3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$. **248.** 2) otrisatel; 4) položitel; 6) položitel; 8) otrisatel. **249.** Eger $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ýa-da $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ sanlarynyň alamatlary gabat gelýär; eger $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ ýa-da $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$ sanlary garşylykly alamatlara eýe. **250.** 2) otrisatel; 4) položitel. **251.** 2) $\cos 1{,}3 > \cos 2{,}3$. **252.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **253.** 2) ikinji çärýek. **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) ýerine ýetirilýär; 4) ýerine ýetirilmeýär. **257.** 2) ýerine ýetirilmeýär. **258.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$,

$k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **266.** 1) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **276.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) $-2\cos\alpha$. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) $\cos3\beta$; 4) -1. **284.** $-\sin\alpha-\sin\beta$. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) $-\sin\alpha-\cos\beta$; 4) $\sin\alpha-\cos\beta$. **288.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta)=\frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta$. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) $2\mathrm{ctg}\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) $\cos6\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **312.** 2) $\cos2\alpha$. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos-}$.

317. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **318.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin2\alpha$. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320.** 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2) $2\sin\alpha$. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **328.** 2) üçünji çärýek; 4) ikinji çärýek; 6) ikinji çärýek. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **330.** 2) 2; 4) -1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) $\sin2\alpha$; 4) $\mathrm{tg}2\alpha$. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) $\cos0>\sin5$.

340. 2) položitel; 4) otrisatel. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.**

$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin 2 = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$. **344.** 2) $\mathrm{tg}\alpha$.

345. 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) $\cos 4\alpha$. **350**. 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) Bolýar; 4) bolýar. **354.** 2) $n=9$. **360.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) −42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.** Hawa, $n = 11$. **366.** $n = 11$, ýok. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) −13. **369.** 2) −100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) −192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$ $d = \frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78 sany pürs. **388.** 44. **389.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **392.** 2) −3, 12, −48, 192, −768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. . **400.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ ýa-da $b_5 = -6$, $\beta_1 = -30\frac{3}{8}$.. **401.** 659100 som. **402.** 0,25 cm². **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) −400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = 4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ ýa-da $q = -6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ ýa-da $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ ýa-da $S_5 = 521$. **415.** 2) hawa; 4) hawa. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. **417.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) ýok; 4) hawa. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6 + 4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** $2a$. **423.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot R_1$.. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **427.** $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) −1080. **429.** 143. **430.** 2) −22. **431.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **432.** 2) $b_n = -0{,}5\cdot(-2)^{n-1}$.

433. 2) $b_n = \frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$. **437.** $24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. **441.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$; 4) $x_2 = -4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) -27; 4) $-\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) Ýok; 4) hawa. **450.** Çarşenbe güni. **451.** $a_1 = 8$ $d = -3$ ýa-da $a_1 = 2$, $d = 3$. **452.** $a_1 = 5$, $d = -5$ ýa-da $a_1 = -5$, $d = 5$. **453.** 180 esse. **453.** 2) Mümkin bolmadyk. **454.** 2) Tötänleýin; 4) gutulgysyz. **457.** 2) Bilelikde bolmadyk. **462.** Deň mümkinçilikli däl. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$; **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4%. **482.** 2) Mümkin, 4 oçko. **488.** 3 saýlanma. **489.** 2) 11; 4) 5 we 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 kg^2, 4) 6m^2. **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 we 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15 < x < 2$; 4) $x \le 12, x \ge 12$. **517.** 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$. **518.** 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0,1$; 6) $x \le \frac{1}{8}$, $x \ge 2$. **519.** 2) $x = -12$; 4) x – islendik hakyky san; 6) çözüwleri ýok. **520.** 2) $-0,7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \le x \le 1$. **521.** 2) $x \le -2$, $x = 1$; 4) $x \le -\frac{1}{3}$, $0 \le x \le 2$. **522.** 2) $-0,5 \le x < 2$. **523.** Beýiklik 3,1 cm-dan artyk, orta çyzyk 6,2 cm-dan artyk. **524.** 5 cm artyk. **525.** 2) $x < -7$, $-1 \le x \le 2$; 4) $-1 \le x < \frac{1}{3}$., $x > \frac{1}{3}$. **526**. $p = 5$, $q = -14$. **527.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **528.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **529.** $y = \frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. **531.** *Görkezme*. 1) $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ ýaly belgiläp we $ABC = 1$ deňligi hasaba alyp, berlen deňsizligi $A^3 + B^3 + C^3 \ge 3ABC$ görnüşde ýazyň, ony $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \ge 0$ görnüşde çalşyryň. ($A^2 + B^2 + C^2 \ge AB + AC + BC$ deňsizlik şu $A^2 + B^2 \ge 2AB$, $A^2 + C^2 \ge 2AC$, $B^2 + C^2 \ge 2BC$ deňsizlikleri goşmak bilen alynýar; 2) orta arifmetik we orta geometrik mukdarlara degişli deňsizlikleri goşuň: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c$, $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a$, $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b$; 3) deňsizligiň çep böleginden sag bölegini aýryň we emele gelen drobuň sanawjysyny şeýle görnüşde ýazyň: $(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2$; 1) $x_{1,2}=\pm 2$; 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 3) $x_{3,4}=\pm 3$; 3) $x_1=-1$, $x_2=2$; 4) $x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$; 6) $x_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm 6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}<(2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) Ýok. **541.** 2) Ýok. **544.** –1. **545.** 2) Otrisatel. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha=\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12}=47,5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1=5$. **553.** 2) $b_4=125$, $S_4=156$; 4) $b_4=81$, $S_5=61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0,1(5-\sqrt{5})5+\sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **560.** 2) $x=61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x=\frac{}{2}+\pi n,\ x=n+2n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1=5$, $b_5=405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 ýa-da 20, 13, 6. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$.

«Özüňizi barlap görüň» ýumuşlaryna jogaplar

I bap. **1.** $x_1=0$, $x_2=2$. **2.** $-1<x<1$ bolanda $y>0$; $x<-1$ bolanda $y<0$; $x>1$. **3.** 1) $x>0$ bolanda funksiýa artýar; $x<0$ bolanda funksiýa kemelýär. **4**. 1) $x\geq 1$; $-2\leq x\leq 0$. **5.** 1) $x\neq 1$; 2) $-3\leq x\leq 3$. **6.** 1) $x=28$; 2) $x=1$.

III bap. **1.** 1) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

IV bap. **1.** 1) $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **2.** 1) $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q=\frac{1}{3}$, $S=1{,}5$.

Amaly we predmetara bagly meselelere jogaplar

I bap. **1.** Tizlik 60,01 km/h dan geçmeli däl. **2.** $n\leq 30$. **3.** 2 mln. 10 m. **4.** 125 sany. **5.** 1) 135 sany; 2) 17739 sany; 3) ≈ 4,9 aýda.

II bap. **1.** 2) 20 hatar. **2.** Birinji brigadada 8 sany, ikinjide 12 sany işçi. **3.** 2) 16%. **4.** 2) 4 *l* we 12 *l*. **5.** Şemalsyz howa.

III bap. **1.** 4) ≈335,42 km; 5) ≈2243,3 km. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 m. **4.** ≈12,8 m.

IV bap. **1.** 420. **2.** 10 km. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 som. **5.** 27 metr.

V bap. **1.** $E(X)=26$, $D(X)=0{,}9964$. 2. $E(X)\approx 8{,}94$, $E(Y)\approx 8{,}93$, $D(X)\approx 0{,}07$, $D(Y)\approx 0{,}03$, $G(X)\approx 0{,}071$, $\sigma(Y)\approx 0{,}76$. 3. $E(X_1)=E(X_2)=3{,}36$, $\sigma(X_1)\approx 1{,}47$, $\sigma(X_2)\approx 1{,}41$. 4. $E(d_1)=60$, $D(d_1)=1{,}2$, $E(d_2)=60{,}02$, $D(d_2)=0{,}76$.

MAZMUNY

Alimow Ş.A.

A 48 Algebra: Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 9-njy synpy üçin derslik/ Ş.A.Alimow, A.R.Halmuhamedow, M.A.Mirzahmedow. – 4-nji neşir. – Daşkent: „O‘qituvchi“ NÇDÖ, 2019. – 240 s.

ISBN 978-9943-5750-8-0

UO‘K: 512(075.3)=512.164
KBK 22.14ya72

Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov, Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Turkman tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining

9-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4- nashri

„O‘qituvchi“ nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket „Davr nashriyoti“ MCHJ da tayyorlandi.

Terjime eden K. Hallyýew
Redaktor *J. Metýakubow*
Bezegçi dizaýner *R. Zaparow*
Korrektor *J. Metýakubow*
Kompýuterde sahaplaýjy *H. Safaraliýew*
Teksti ýygan *S . Niyazova*

Neşirýat lisenziýasy AI № 012. 20.07.2018.
Original-maketden çap etmäge 25.07. 2019 rugsat edildi. Möçberi $70\times90^{1}/_{16}$.
Times garniturasy. Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 17,55. Hasap-neşir listi 16,6.
1 030 nusgada çap edildi. Buýurma № 19-196.

Özbegistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň „O‘qituvchi“ neşirýat-çaphana döredijilik öýi.
Daşkent – 206, Ýunusabat tümeni, Ýangişäher köçesi, 1. Şertnama № 77-19.

Original-maketden Özbegistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň „O‘zbekiston“ neşirýat-çaphana döredijilik
öýüniň çaphanasynda çap edildi. Daşkent şäheri, Nowaýy köçesi, 30.

Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýol-başçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylan-daky ýagdaýy	Synp ýol-başçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanylyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütin, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
Kanagatlanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyralary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
Kanagatlanarsyz	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.