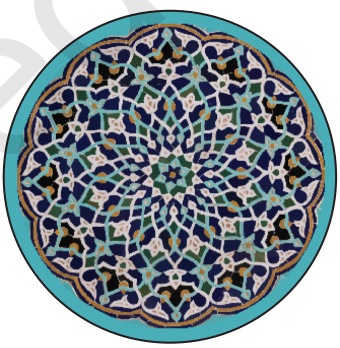
Б. Хайдаров, Э. Сариқов, А. Қучқоров

ГЕОМЕТРИЯ 9

Жалпы орта білім беретін мектептердің 9-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі тарапынан ұсынылған

Толықтырылған және қайта өңделген төртінші басылым



Ташкент — 2019

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ya7
X-18

Пікір білдірушілер:
М. Шаниязова – Сіргелі ауданындағы №300 ММОМ-ның жоғары санатты математика пәні оқытушысы;
И. Соибова – Юнусабад ауданындағы №307 ММОМ-ның жоғары санатты математика пәні оқытушысы;
Ш. Тажаддинова – Сіргелі ауданындағы №104 мектептің жоғары санатты математика пәні оқытушысы;

Өзбекстан Республикасы Ғылым академиясының толық мүшесі, физика-математика ғылымының докторы, профессор А. Аъзамовтың редакторлығымен.

9-сыныпта геометрияның планиметрия бөлімін — жазықтықтағы геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйрену жалғасады. Мұнда сен геометриялық түрлендірулер, фигуралардың ұқсастығы, үшбұрыштың қабырғалары және бұрыштары арасындағы қатынастар, шеңбердің ұзындығы мен дөңгелектің ауданы, үшбұрыш және шеңбердің метрикалық қатынастарымен танысасың.

Бұл оқулықтың мазмұны тұрақты аксиомалық жүйе негізіне құрылған. Мұнда теориялық материалдар мүмкіндігінше қарапайым және анық тілде баяндалған. Барша тақырыптар мен ұғымдарды өмірден алынған әртүрлі мысалдар арқылы мазмұнын ашып беруге әрекет жасалынды. Әрбір тақырыптан соң берілген сұрақтар, дәлелдеу, есептеу және сызуға байланысты есеп пен мысалдар оқушыны шығармашылықпен пікірлеуге үндейді, оған меңгерілген білімдерді тереңдетуге және нығайта түсуге көмектеседі. Оқулық өзінің айрықша дизайны және сабақ материалының көрнекі етіп берілуімен де өзгешеленеді. Онда келтірілген сурет және сызбалар сабақ материалын тиянақты меңгеруге қызмет етеді.

Республикалық мақсатты кітап қоры қаржысы есебінен жалға беру үшін басылды.

ISBN 978-9943-07-296-1

М А З М Ұ Н Ы

Қайталау

І тарау. Геометриялық түрлендірулер мен ұқсастық

ІІ тарау. Үшбұрыштардың қабырғалары және бұрыштары арасындағы қатынастар

III тарау. Шеңбердің ұзындығы және дөңгелектің ауданы

IV тарау. Үшбұрыш және шеңбердегі метрикалық қатынастар

5-8- СЫНЫПТАРДА ӨТКЕНДЕРДІ ҚАЙТАЛАУ

Бұл бөлімдегі есептер 5-8-сыныптарда үйренілген геометриялық фигуралар мен олардың қасиеттерін еске түсіру үшін берілген.

Бөлімде PISA және TIMSS - оқушылар білімін бағалаудың халықаралық бағдарламалары есептері де келтірілген.

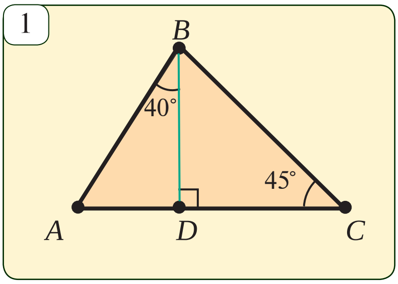
Бұл бөлімдегі материалдарды үйрену нәтижесінде төмендегі білім мен дағдыларды жаңалау мүмкіндігіне ие боласың:

√ 5-8-*сыныптарда геометриядан өтілген тақырыптарды қайталап, алған білімдеріңді еске түсіресің және үйренген дағдыларыңды пысықтайсың.*

√ *PISA және TIMSS - оқушылар білімін бағалаудың халықаралық бағдарламалары есептерімен танысасың;*

√ *Бұл саған 9-сыныпта геометрияны меңгеруді табысты жалғастыруыңа негіз болады.*

Бұл бөлімдегі есептерді шешу үшін оқулықтың соңында берілген негізгі геометриялық фигураларға байланысты мәліметтерді және олардың қасиеттерін сипаттайтын формулаларды пайдалануыңа болады.



1.1. ABC үшбұрыштың BD биіктігі жүргізілген *(1-сурет)*. Егер $\angle ABD = 40°$, $\angle BCD = 45°$ болса, үшбұрыштың A және B төбесіндегі бұрышын тап.

Шешуі. 1) Тікбұрышты ABD үшбұрышта $\angle ABD = 40°$ және үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болғандықтан

$$\angle A = 180° - (90° + 40°) = 50°.$$

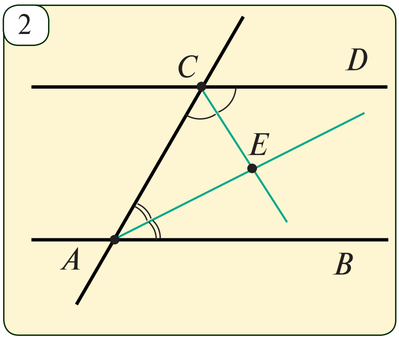
2) Тік бұрышты BCD үшбұрышта $\angle BCD = 45°$ болғандықтан

$$\angle DBC = 180° - (90° + 45°) = 45°.$$

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ болғандықтан

$$\angle B = 40° + 45° = 85°.$$

Жауабы: 50°, 85°.



1.2. Екі параллель түзу сызықты қиюшымен қиғанда пайда болған ішкі ортақ қабырғалы бұрыштардың биссектрисалары арасындағы бұрышты тап.

Шешуі. AC түзу сызық AB және CD – параллель түзу сызықтарды 2-суретте бейнеленгендей қиып өткен болсын. Ішкі ортақ қабырғалы BAC және ACD бұрыштардың биссектрисалары E нүктеде қиылысқан болып, $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ болсын. Онда, бұрыш биссектрисасының анықтамасы бойынша

$$\angle BAC = x + x = 2x, \ \angle ACD = y + y = 2y.$$

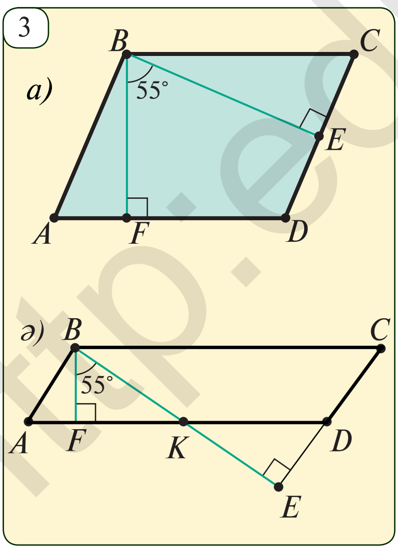
$AB \parallel CD$ болғандықтан ішкі ортақ қабырғалы бұрыштардың қасиеті бойынша,

$$2x + 2y = 180°, \qquad x + y = 90°.$$

Енді ACE үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болғандықтан

$$\angle AEC = 180° - (x + y) = 180° - 90° = 90°.$$

Жауабы: 90°.



1.3. Егер параллелограмның доғал бұрышының төбесінен оның екі қабырғасына түсірілген биіктіктері арасындағы бұрыш 55°-қа тең болса, параллелограмның бұрыштарын тап.

Шешуі. Параллелограмның BF және BE биіктіктері арасындағы бұрыш $55°$ болсын *(3-сурет)*. Суретте бейнеленген екі жағдай: а) BE биіктік CD қабырғаға; ә) BE биіктік CD қабырғаның жалғасына түскен болуы мүмкін.

а) жағдайда $BEDF$ төртбұрышы бұрыштарының қосындысы $360°$ болғандықтан, $55° + 90° + \angle D + 90° = 360°$. Бұдан, $\angle D = 125°$.

ә) жағдайда BE биіктік AD қабырғамен қиылысқан нүкте K болсын. Онда, $\angle DKE = \angle BKF = 90° - 55° = 35°$.

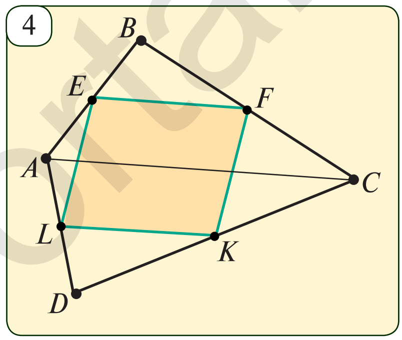
Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиетіне орай,

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35° + 90° = 125°.$$

Демек, әр екі жағдайда да $\angle D = 125°$. Онда, $\angle A = \angle C = 180° - \angle D = 55°$, $\angle B = \angle D = 125°$. *Жауабы:* $55°$, $125°$, $55°$, $125°$.

1.4. Төртбұрыш қабырғаларының орталары параллелограмның төбелері болуын дәлелде.

Шешуі. $ABCD$ төртбұрыштың AB, BC, CD және DA қабырғаларының орталары сәйкесінше E, F, K және L нүктелер болсын. AC диагоналын жүргіземіз *(4-сурет)*. $EFKL$ – параллелограмм екенін көрсетеміз.



EF кесінді ABC үшбұрыштың, ал KL кесінді ACD үшбұрыштың орта сызығы болады. Онда үшбұрыш орта сызығының қасиеттеріне орай,

$$EF \| AC, KL \| AC, EF = \frac{1}{2} AC, \ KL = \frac{1}{2} AC.$$

Бұдан $EF \| KL$ және $EF = LK$. Сондықтан параллелограмм белгілеріне орай, $EFKL$ — параллелограмм.

1.5. ABC үшбұрышта $\angle A = 47°$, $\angle C = 83°$ болса, үшбұрыштың үшінші ішкі бұрышын және сыртқы бұрыштарын тап.

1.6. ABC үшбұрыштың AC қабырғасына параллель түзу сызық AB және BC қабырғаларды сәйкесінше E және F нүктелерде қиып өтеді. Егер $\angle BEF = 65°$ және $\angle EFC = 135°$ болса, ABC үшбұрыштың бұрыштарын тап.

1.7. ABC үшбұрыштың биссектрисалары I нүктеде қиылысады. Егер $\angle A = 80°$ және $\angle B = 70°$ болса, AIB, BIC және CIA бұрыштарды тап.

1.8. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы $70°$-қа тең. Үшбұрыштың бұрыштарын тап.

1.9. ABC үшбұрыштың AK биссектрисасы түсірілген. Егер $\angle BAK = 47°$ және $\angle AKC = 103°$ болса, үшбұрыштың бұрыштарын тап.

1.10*. ABC үшбұрыштың биіктіктері H нүктеде қиылысады. Егер $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ болса, AHB, BHC және CHA бұрыштарды тап.

1.11. Үшбұрыш ортасындағы сызық оны тең 4 үшбұрышқа бөлуін дәлелде.

1.12*. ABC үшбұрышта CD медиана соңына сол медианаға тең DE кесінді қойылған. AF медиананың соңына AF медианаға тең FN кесінді қойылған. B, H, E нүктелер бір түзу сызықта жататынын дәлелде.

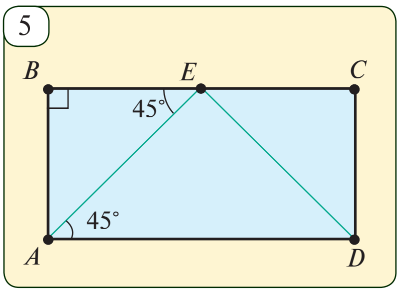
1.13. *ABC* тең бүйірлі үшбұрышта (*AB*=*BC*) *AN* және *CK* биссектрисалар жүргізілген. а) *KN* кесінді *AC* қабырғаға параллель екенін көрсет. ә) *AK*=*KN* = *NC* теңдік орынды болатынын дәлелде.

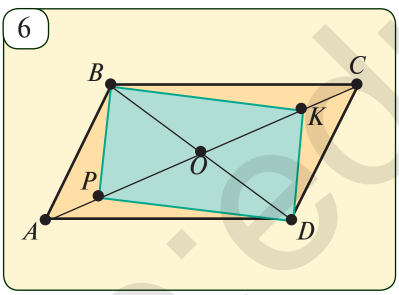
1.14. *ABCD* тік төртбұрыштың *A* және *D* бұрыштары биссектрисалары *BC* қабырғада қиылысады. *AB* = 4 *см* болса, осы тік төртбұрыштың ауданын тап.

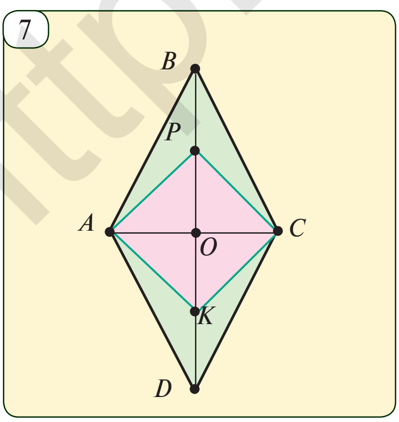
Шешуі. Тік төртбұрыштың *A* және *D* бұрыштарының биссектрисалары қиылысқан нүкте *E* болсын *(5-сурет)*. $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAE = 45^\circ$ болғандықтан $\angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Яғни, *ABE* — тең бүйірлі үшбұрыш. Онда, $AB = BE = 4$ (*см*). Дәл осыған ұқсас $EC = CD = 4$ (*см*) екенін көруге болады. Бұдан $BC = BE + EC = 8$ (*см*) және

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32\ (см^2).$$ *Жауабы:* 32 $см^2$.

1.15. Төртбұрыштың үш бұрышы 47°,83° және 120° -қа тең екендігі белгілі. Оның төртінші бұрышын тап.







1.16. Параллелограмм екі бұрышының қосындысы 156°-қа тең. Оның бұрыштарын тап.

1.17. Тік төртбұрыш диагональдары арасындағы бұрыш 74°. Оның бір диагоналы мен қабырғалары арасындағы бұрыштарды тап.

1.18. Тең бүйірлі трапецияның екі бұрышының айырмасы 40°-қа тең. Оның бұрыштарын тап.

1.19. Ромб бұрыштарының бірі екіншісінен үш есе үлкен. Ромбының бұрыштарын тап.

1.20. *ABCD* тік төртбұрышы *A* бұрышының биссектрисасы *BC* қабырғасын 2 *см* және 6 *см*-ге тең кесінділерге бөледі. Тік төртбұрыштың периметрін тап.

1.21. Қабырғалары 3 *см* және 6 *см*, ал үлкен қабырғалары арасындағы қашықтық 2 *см* болған параллелограмм сал.

1.22. *ABCD* параллелограмның *AC* диагоналында *P* және *K* нүктелері алынған *(6-сурет)*. Егер *OP* = *OB* = *OK* болса, *BKDP* тік төртбұрыш болуын дәлелде.

1.23*. *ABCD* ромбының *BD* үлкен диагоналында *P* және *K* нүктелері алынған *(7-сурет)*. Егер *OA* = *OP* = *OK* болса, *APCK* төртбұрышы квадрат екенін дәлелде.

1.24*. *ABCD* параллелограмының *BD* диагоналында *P* және *K* нүктелері алынған. Егер *BP* = *KD* болса, *APCK* төртбұрышы параллелограмм екендігін дәлелде.

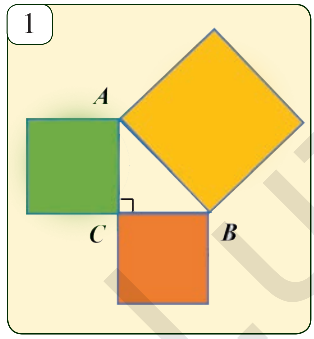
2 ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Осы атақты теореманың 3 түрлі өрнегін келтіріп, оны еске түсіреміз.

а) мәтінді өрнегі: Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты катеттері квадраттарының қосындысына тең.

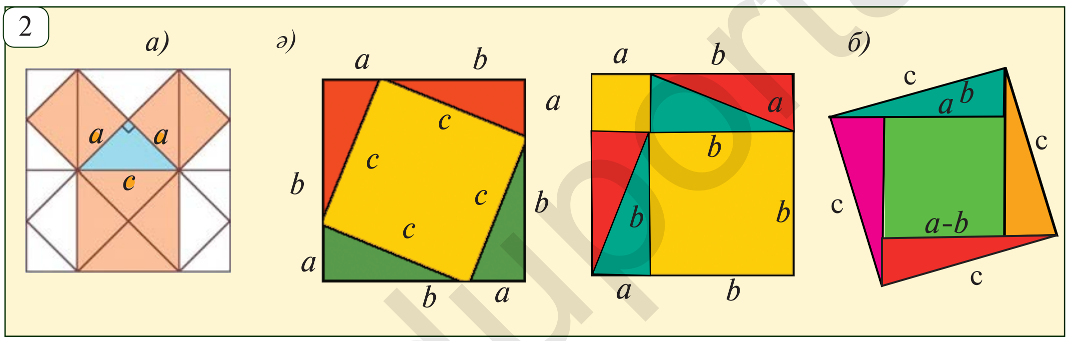
ә) математикалық өрнегі: ABC үшбұрышта: $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ болса, $c^2 = a^2 + b^2$ болады.

б) бейнелі өрнегі: (1-сурет).

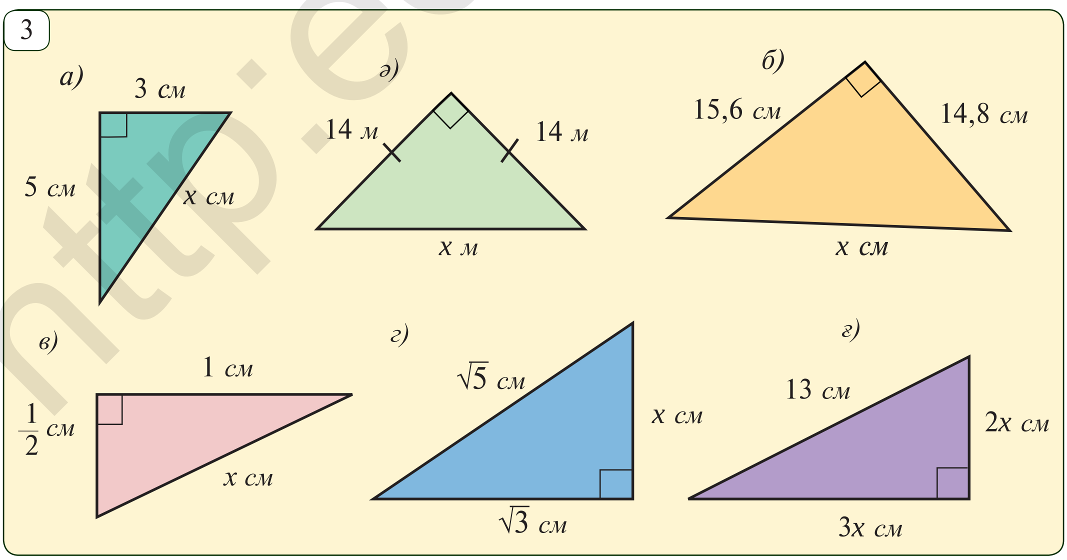


Есептер мен тапсырмалар

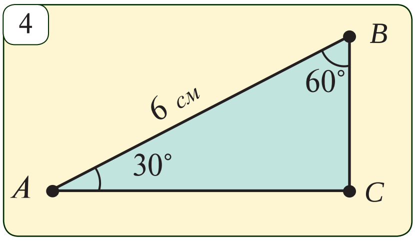
2.1. 2-суретте келтірілген фигуралардың негізінде Пифагор теоремасының бірнеше дәлелін тіктеңдер.



2.2. 3-суретте берілгендерге орай белгісізді тап.



2.3. *ABC* үшбұрыштың *AB* қабырғасы 6 *см*, *A* және *B* бұрыштары, сәйкесінше, 30° және 60° болса, *ABC* үшбұрыштың ауданын тап.



Шешуі. Үшбұрыштың *C* бұрышын табамыз:
$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$.

Демек, тік бұрышты *ABC* үшбұрыштың *AB* гипотенузасы 6 *см* және *A* бұрышы 30° екен. Тік бұрышты үшбұрышта 30°-тық бұрышқа қарама-қарсы катет гипотенузаның жартысына тең болғандықтан, *BC*=3 *см* (*4-сурет*).

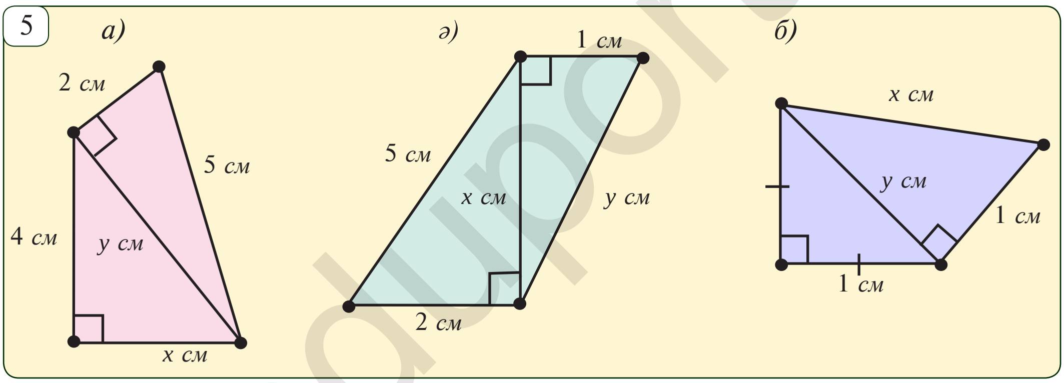
Пифагор теоремасын пайдаланып *AC* катетті табамыз:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 3\sqrt{3}, \quad AC = 3\sqrt{3}\ см.$$

Енді үшбұрыштың ауданын табамыз:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ (см^2).$$

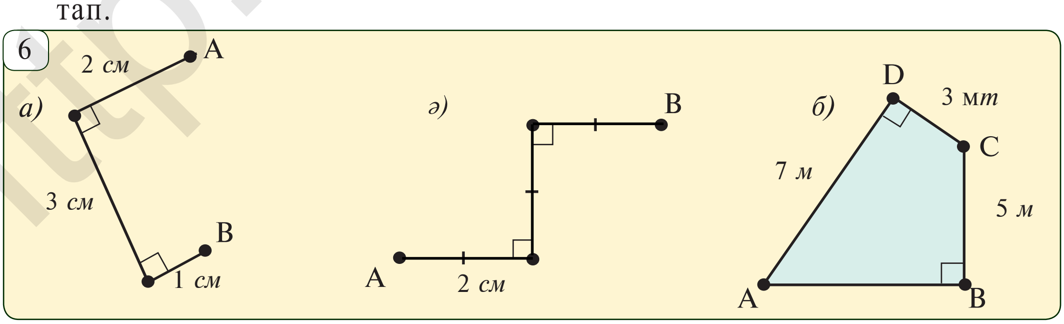
Жауабы: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $см^2$.



2.4. 5-суретте берілгендерге орай белгісіздерді тап.

2.5. Катеттері 15 *см* және 20 *см* тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген биіктігін тап.

2.6 6-суретте тиісті кесінді(лерді) салып, белгісіз AB кесіндінің ұзындығын тап.

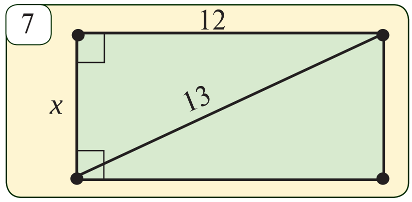


2.7. 7-суретте берілгендерді пайдаланып, тік төртбұрыштың ауданын тап.

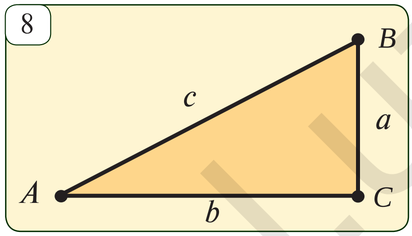
Шешуі. Тік төртбұрыштың кіші қабырғасын *x*-пен белгілесек, онда Пифагор теоремасына орай: $x^2 + 12^2 = 13^2$;

$x^2 + 144 = 169$; $x^2 = 169 - 144 = 25$; $x = \pm 5$. Ұзындық оң шама, сол үшін $x = 5$ *см*. Онда тік төртбұрыш ауданы
$S = a \quad b = 5 \cdot 12 = 60$ (см^2).

Жауабы: 60 *см*^{2}.

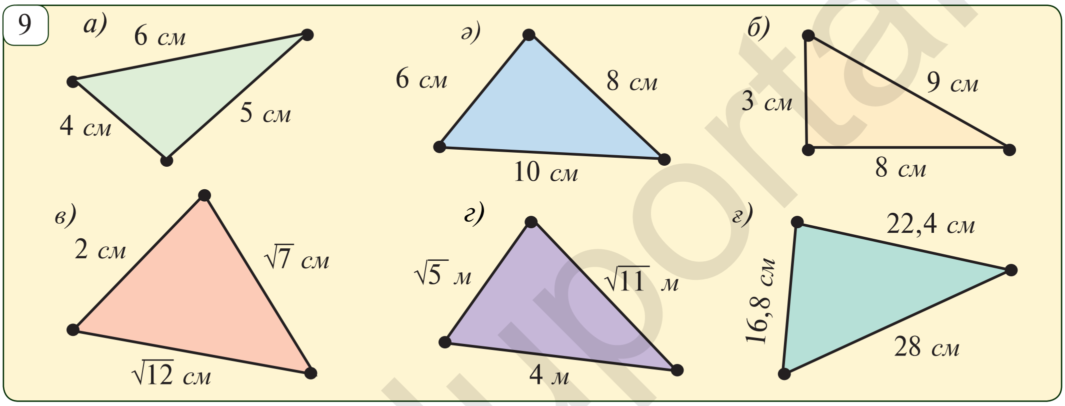


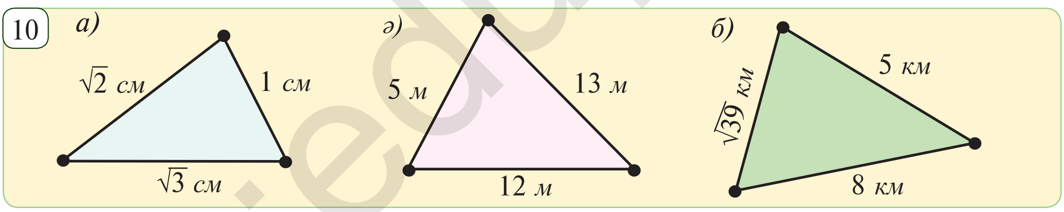
Теорема. ***Егер қабырғалары a, b және c болған үшбұрышта $c^2 = a^2 + b^2$ болса, бұл үшбұрыш тік бұрышты болады (8-сурет).***



2.8. 9-суреттегі үшбұрыштар дәл емес. Олардың қай бірі тік бұрышты?

2.9. 10-суреттегі үшбұрыштар дәл өрнектелмеген. Олардың қай бірі тік бұрышты?





2.10. 11-суретте өрнектелген белгісіз ауданды тап.

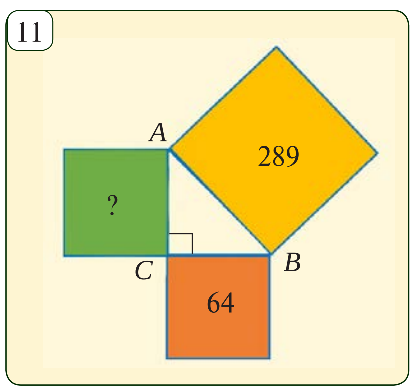
2.11. 12-суреттегі ромбтың диагональдары 6 *см* және 8 *см* болса, оның қабырғаларын тап.

2.12. 13-суреттегі тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 6 *м* болса, оның биіктігін тап.

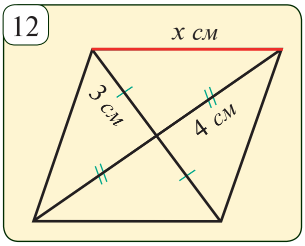
2.13. 14-суретте өрнектелген фигураның периметрін тап.

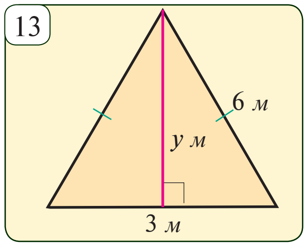
2.14. 15-суретте берілгендерді пайдаланып, белгісіз ұзындықты тап.

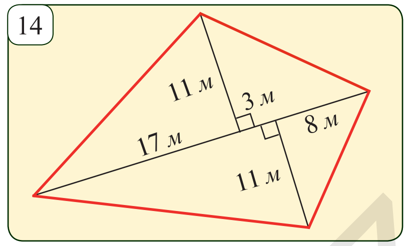
2.15. 16-суретте берілгендерді пайдаланып, *AB* кесіндінің ұзындығын тап.

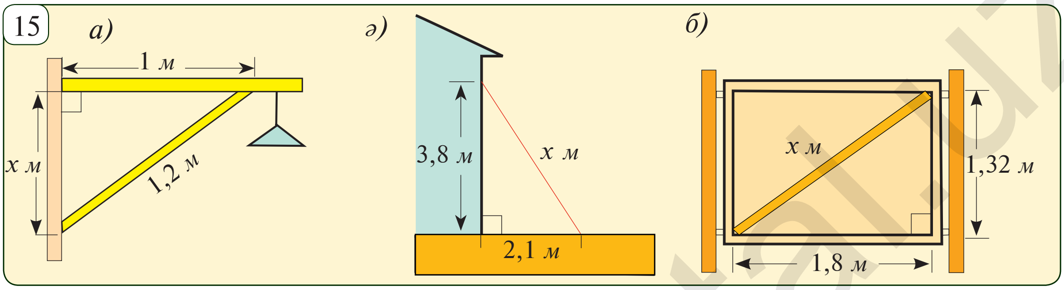


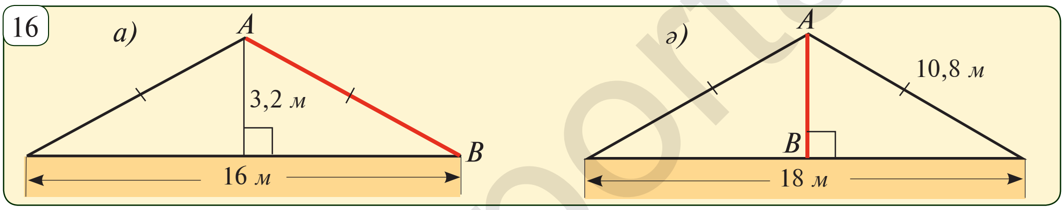
2.16. 17-суреттегі шатырдың алдыңғы жағы тең қабырғалы үшбұрыш пішінінде. Берілгендерді пайдаланып шатырдың табанының ауданын тап.

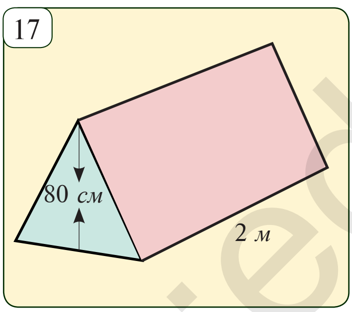


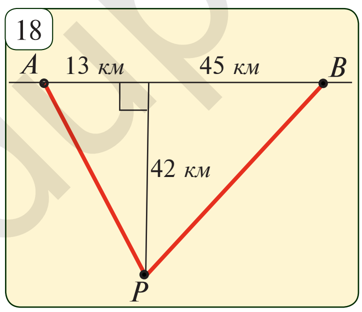


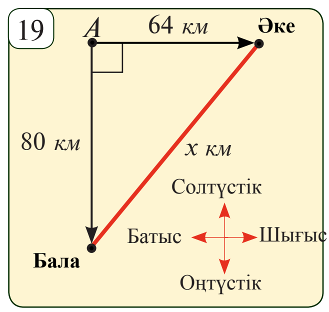












2.17. 18-суретте P электр станциясынан A және B қалаларына сым желілер тартылуда. Бұл үшін қанша сым керек болады?

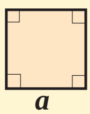
2.18. A нүктеден әке 16 *км/сағ* жылдамдықпен шығысқа, ал баласы 20 *км/сағ* жылдамдықпен велосипедте оңтүстікке қарай қозғалуда (19-сурет). 4 сағаттан соң олардың арасындағы қашықтық қанша болады?

2.19. Екі капитан Джек пен Хук Жұмабай аралынан өз кемелерімен аттанды (20-сурет). Біріншісі 15 *км/сағ* жылдамдықпен солтүстікке, ал екіншісі 19 *км/сағ* жылдамдықпен батысқа қарай жүзіп кетті. 2 сағаттан соң олардың арасындағы қашықтық қанша болады?

3 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАРДЫҢ ПЕРИМЕТРІ МЕН АУДАНЫН ТАБУҒА ҚАТЫСТЫ ЕСЕПТЕР

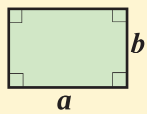
Төменде жазықтықтағы геометриялық фигуралардың периметрін және ауданын табуға қатысты түрлі есептерді қарастырамыз.

Квадрат



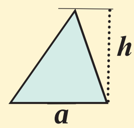
$P = 4a$
$S = a^2$

Тік төртбұрыш



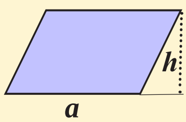
$P = 2(a+b)$
$S = a\,b$

Үшбұрыш



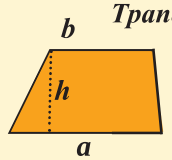
$S = \frac{1}{2}\,a\,h$

Параллелограмм



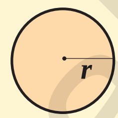
$S = a\,h$

Трапеция



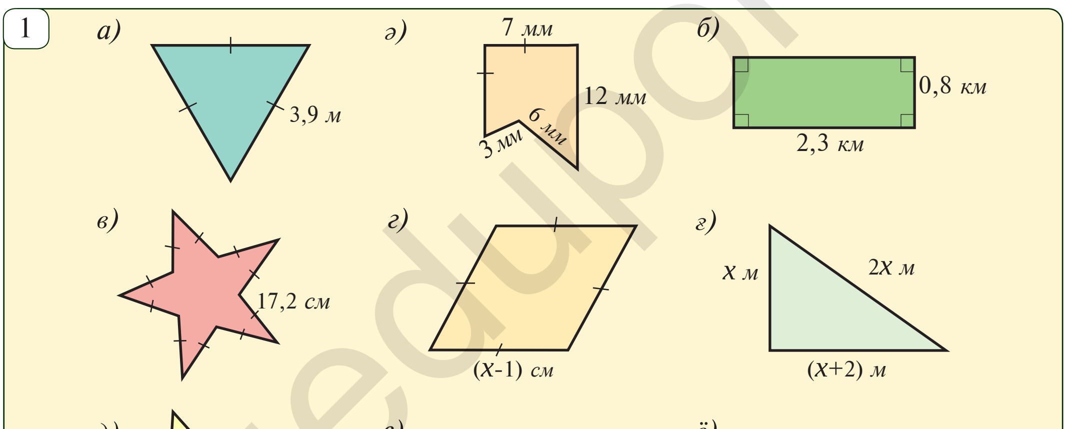
$S = \frac{a+b}{2}\,h$

Дөңгелек

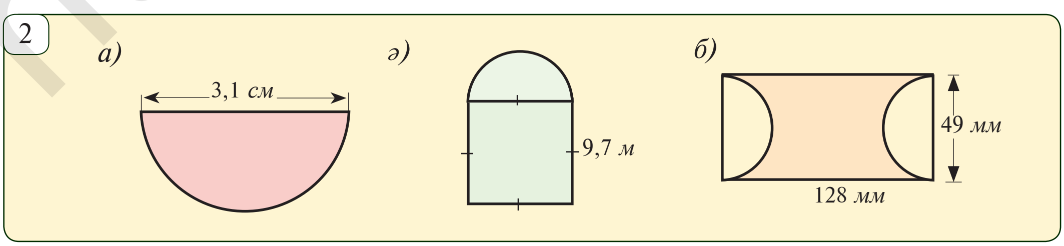


$l = 2\pi r$
$S = \pi r^2$

3.1. 1-суретте өрнектелген көпбұрыштардың периметрін тап.



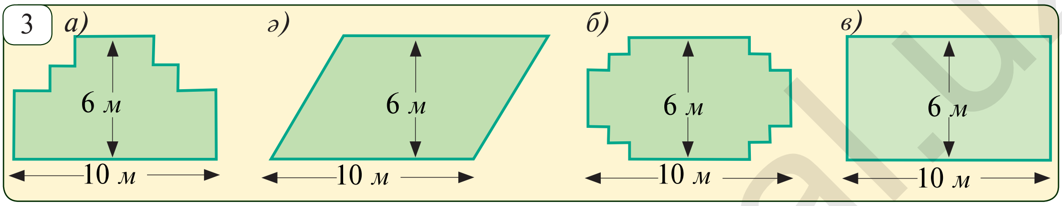
3.2. 2-суретте өрнектелген геометриялық фигуралардың периметрін (шекарасының ұзындығын) тап.

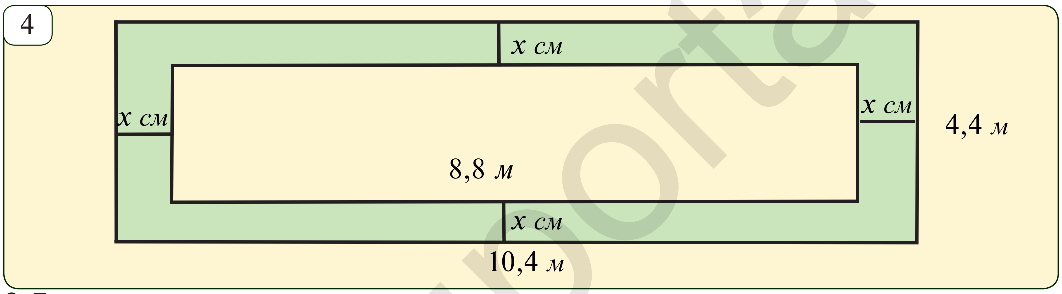


3.3. 3-суреттегі гүлзарларды 32 *м*-лік сым темірмен қоршауға бола ма?

3.4. 4-суретте бөлменің төбесі бейнеленген. Бөлменің ішкі бөлігін ақ, сыртқы бөлігін жасыл түспен бояу керек. 1. Суретте берілген белгісіз кесіндінің ұзындығын тап. 2. Бөлменің жасыл түске боялған бөлігінің ауданын тап. 3. Бөлменің ақ түске боялған бөлігінің ауданын тап.

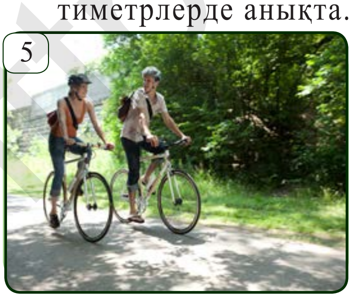
3.5. Велосипед дөңгелегінің диаметрі 64 *см*.(5-сурет) Асан велосипедте 100 *м* қашықтықты жүріп өтті. Велосипедтің әр дөңгелегі неше рет толық айналады? (дөңгелек ұзындығы $C=2\pi r$ формуламен анықталады).





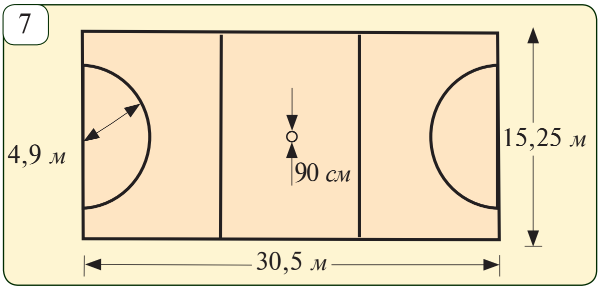
3.7. Автомобиль шинасының сыртындағы жазу белгілі бір өлшемді білдіреді (6.а-сурет). Мысалы, 195/55 R16 жазуындағы 195 саны шинаның кеңдігін мм-де көрсетеді (6.ә-сурет). Екінші сан 55 – шина профилі биіктігінің шина кеңдігіне қатынасының пайызын көрсетеді. Біздің жағдайда шина профилінің биіктігі $195 \cdot 55\% = 107$ мм $= 10{,}7$ *см*. Ал R16 жазуы шинаның ішкі диаметрінің дюймдегі өрнектелуі. 1 дюйм шамамен 2,54 *см*, демек біздің шинаның ішкі диаметрі $16 \cdot 2{,}54 = 40{,}64$ *см*-ге тең болады.

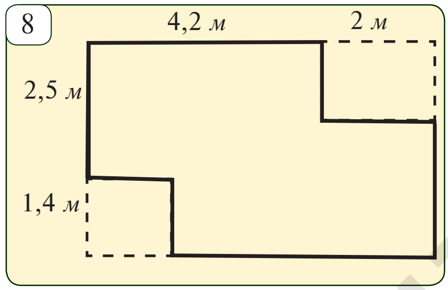
Равон моделіндегі Нексия автомобилінің шинасында 175/60 R15 жазуы бар. Осы автомобиль шинасының кеңдігін, профилінің биіктігін, ішкі диаметрі мен дөңгелегінің биіктігін, яғни сыртқы диаметрін сантиметрлерде анықта.



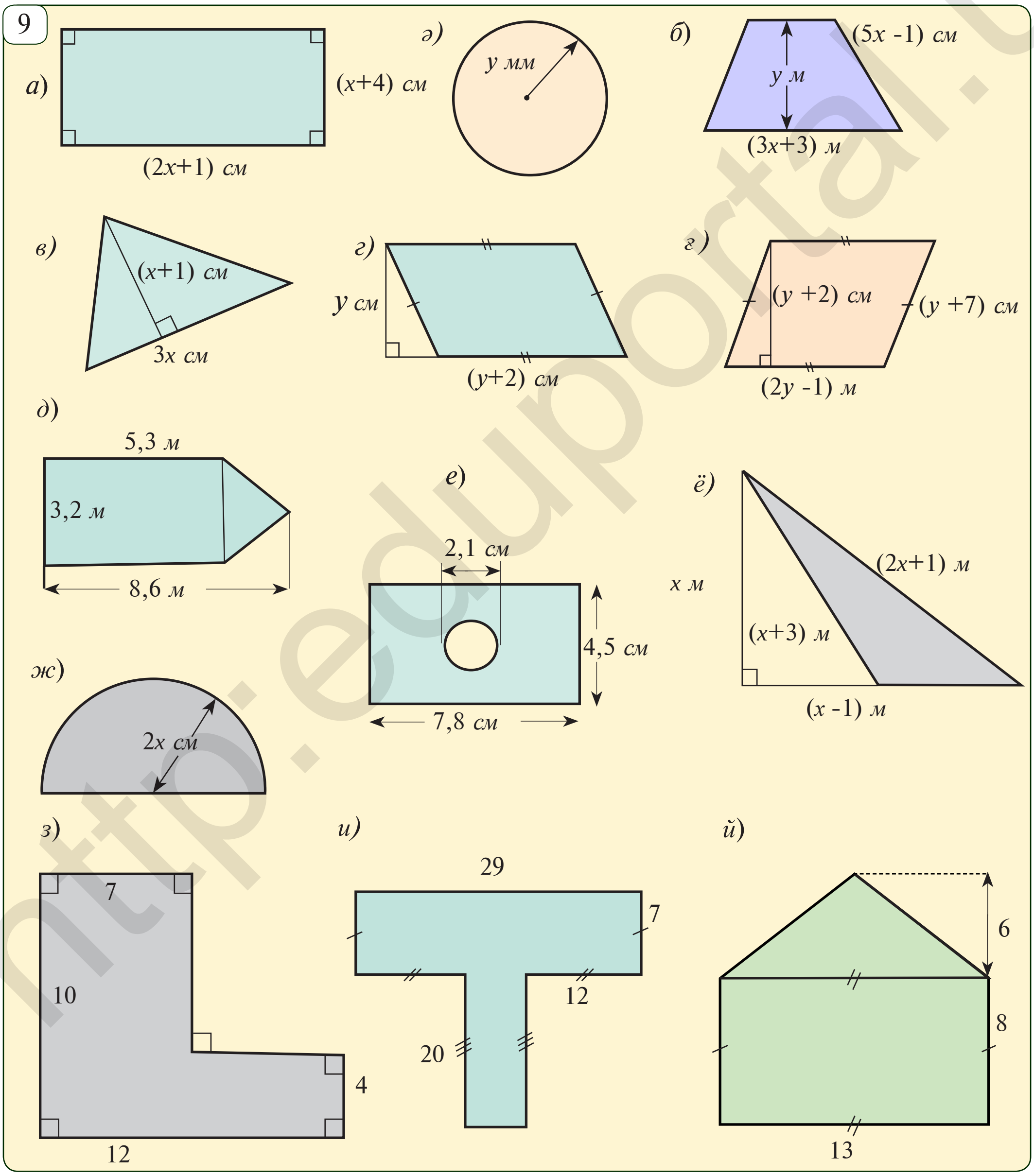
3.8. 7-суреттегі американ футбол стадионының периметрін есепте. Стадионның алаңын белгілеп алу үшін сызылатын сызықтардың жалпы ұзындығын тап.

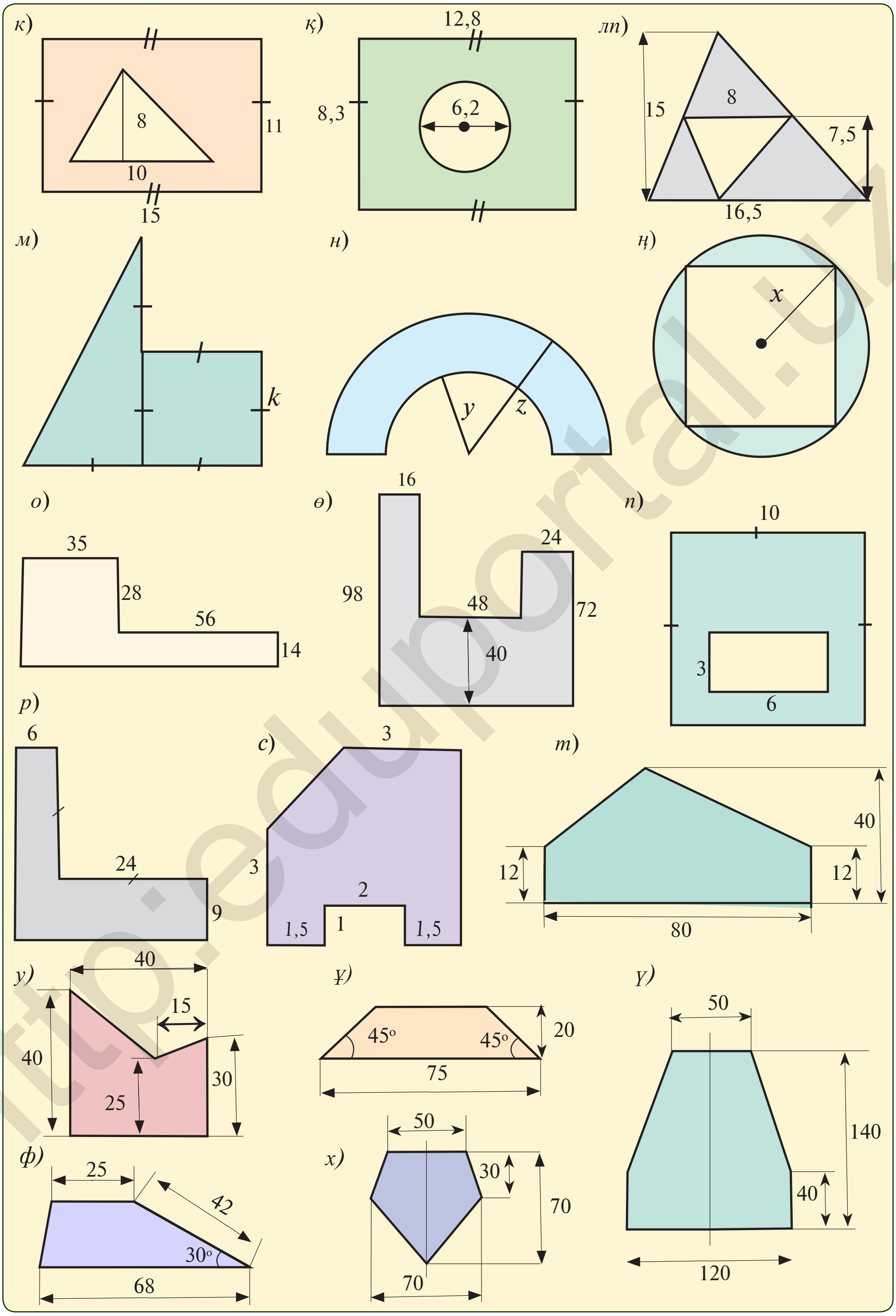
3.9. 8-суретте бейнеленген жер алаңының периметрін тап.





3.10. 9-суретте бейнеленген түрлі пішіндегі алаңдардың ауданын тап.




к)
8
10
11
15
қ)
12,8
8,3
6,2
лп)
15
8
7,5
16,5
м)
k
н)
y
z
ң)
x
о)
35
28
56
14
ө)
16
24
98
48
72
40
п)
10
3
6
р)
6
24
9
с)
3
3
2
1,5
1
1,5
т)
40
12
12
80
у)
40
15
40
25
30
ұ)
45°
45°
20
75
ү)
50
140
40
120
ф)
25
42
30°
68
х)
50
30
70
70

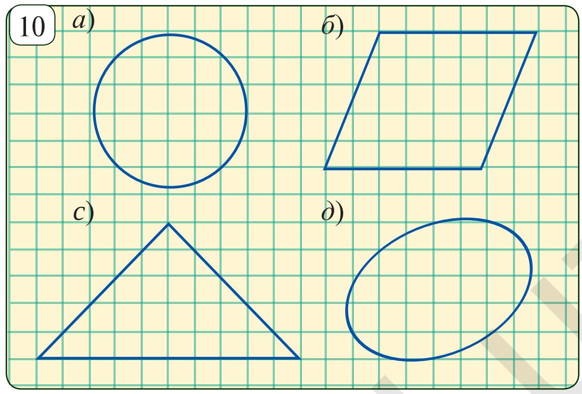
3.11. Іс жүзіндік тапсырма. 10-суретте келтірілген фигураларды торкөзді дәптеріңе сал. Олардың ауданын табу үшін қандай тәсілдерді ұсынасың? Дәптеріңнің торкөздерін пайдаланып, олардың ауданын қалай жуықтап анықтауға болады?

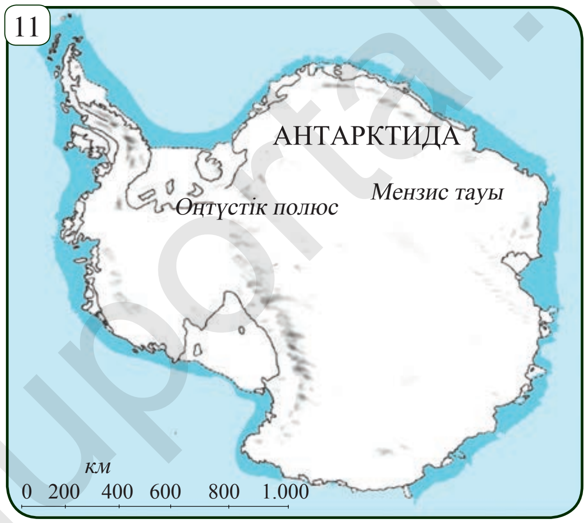
3.12. 11-суретте Антарктида құрлығының картасы көрсетілген. Берілген масштабты пайдаланып және тиісті көмектесетін салуларды орындап, құрлықтың ауданын жуықтап тап.

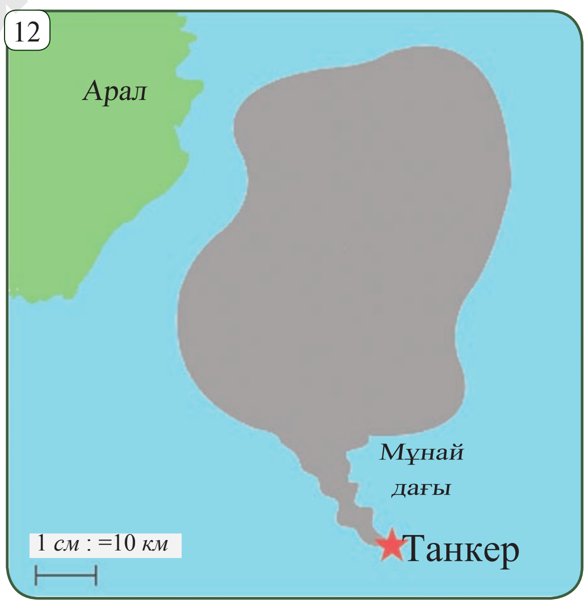
3.13. 12-суретте мұнай таситын танкер апатқа ұшырап, теңіз бетінде үлкен мұнай дағы пайда болған. Берілген масштабты және тиісті өлшеу істерін орындап, мұнай дағының ауданын тап.

3.14. Егін алаңының периметрі 48 *м* болған квадрат пішінінде. Ол 8 теңдей тік төртбұрыш пішініндегі учаскелерге бөлінген. Пайда болған тік төртбұрышты учаскелердің а) қабырғаларын; ә) ауданын тап. Учаскелердің ауданы егін алаңының ауданынан неше пайызға кіші?

3.15. Периметрі 20 *м*, ұзындығы енінен 1,5 есе ұзын болған тік төртбұрыш пішініндегі егін алаңы шағын учаскелерге бөлінген. Егер учаскелер а) квадрат; ә) тік төртбұрыш пішінінде болса, олардың арасындағы ауданы ең үлкен болғанының өлшемдерін анықта.





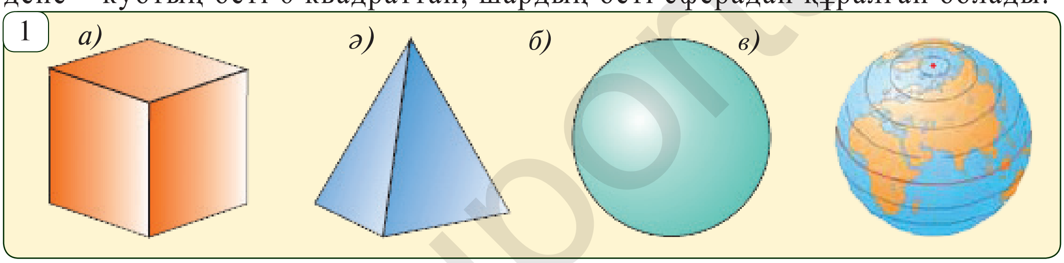


4 3D-ГЕОМЕТРИЯ – КЕҢІСТІКТЕГІ ДЕНЕЛЕРДЕ ПЛАНИМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІ

Жазықтықтағы фигураларды геометрияның планиметрия, ал кеңістіктегі денелерді стереометрия бөлімі үйренеді. Тік төртбұрыш – жазықтықтағы фигура, оның ұзындығы мен ені, яғни екі өлшемі бар. Ал параллелепипед кеңістіктегі фигура, оның ұзындығы, ені және биіктігі, яғни үш өлшемі бар.

Кеңістіктегі денелер туралы алдыңғы сыныптарда түсінікке ие болғансың. Оларды 10-11-сыныптарда стереометрия курсында жан-жақты, жүйелі түрде үйренесің. Дегенмен стереометрияның бірқатар есептерін тек планиметрияның көмегімен де шешуге болады. Төменде планиметрияға қатысты осындай 3D (3 demention - 3 өлшемді) геометриялық есептерді келтіреміз. Кеңістіктегі денелер туралы негізгі ұғымдарды қысқаша еске түсіруді қажет деп таптық.

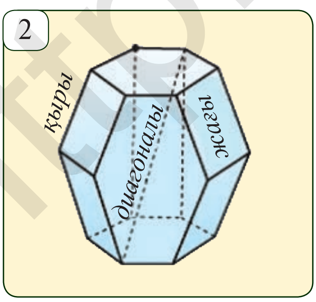
Кеңістіктің шекараланған бөлігі *кеңістіктегі дене* деп аталады. Кеңістіктегі дененің шекарасы (қабығы) оның *беті* делінеді. Мысалы, кеңістіктегі дене – кубтың беті 6 квадраттан, шардың беті сферадан құралған болады.

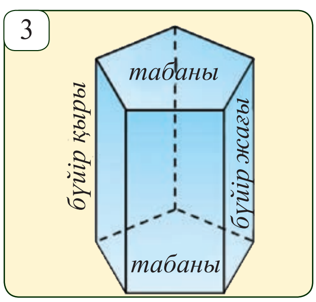


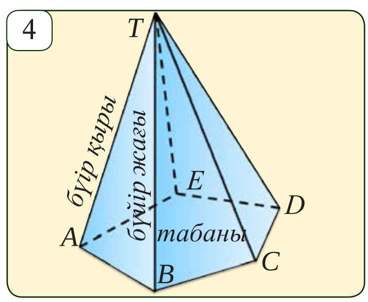
Екі беттің қиылысуынан сызық пайда болады. Мысалы, 1-суреттегі куб пен пирамиданың қырлары осындай жазықтықтардың қиылысуынан пайда болған. Сфера мен жазықтықтың қиылысуынан шеңбер пайда болады.

Екі сызық қиылысуынан нүкте пайда болады. 1-суреттегі куб пен пирамида қырлары қиылысуынан нүктелер, яғни олардың төбелері пайда болады.

Көпжақ – жазық көпбұрыштармен шектелген дене. Жазық көпбұрыштар *көпжақтың жақтары,* көпбұрыштардың төбелері *көпжақтың төбелері*, ал қабырғалары *көпжақтың қырлары* деп аталады. Бір жаққа тиісті болмаған төбелерді біріктіретін кесінді *көпжақтың диагоналы* деп аталады (2-сурет).





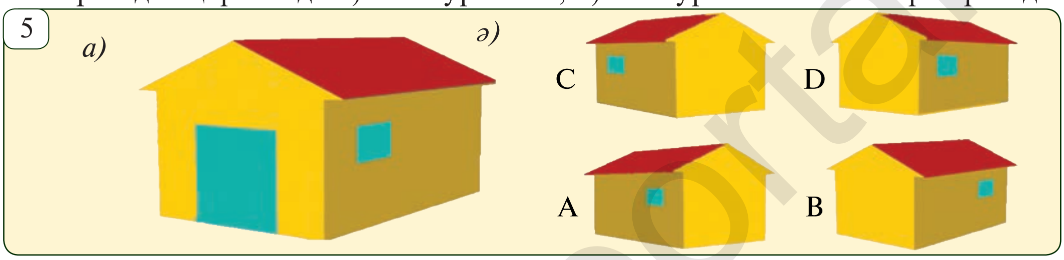


Призма деп екі жағы тең көпбұрыштан, қалған жақтары параллелограмдардан құралған көпжақты айтамыз (3-сурет). Тең жақтар призманың *табандары*, параллелограмдар оның *бүйір жақтары* деп аталады. Табанының қабырғалары санына қарай призмалар *үшбұрышты, төртбұрышты, тағы сол сияқты n-бұрышты призмалар* деп аталады.

Пирамитда деп бір жағы көпбұрыштан, ал қалған жақтары бір төбеге ие үшбұрыштардан құралған көпжақты айтамыз. Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар оның *бүйір жақтары* деп аталады. 4-суретте *TABCDE* бесбұрышты пирамида бейнеленген. *ABCDE* бесбұрышты пирамиданың табаны, *ATB, BTC, CTD, DTE* және *ETA* үшбұрыштар – оның бүйір жақтары, ал Т – оның төбесі.

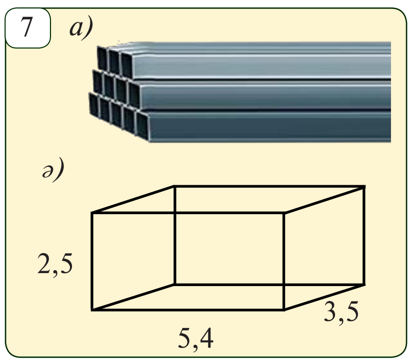
4.1 5.а-суретте гараж бейнеленген. Ал 5.ә-суретте оның түрлі көріністері берілген. Олардың тек біреуі осы гаражға тиісті. Осы көрініс қайсысы?

4.2. 6.а- және 6.ә-суретте ғимараттың бүйір қабырғасынан қарағанда көрінетін бейнелер бар. 6.б-суретте ғимарат төбесінен алынған көрінісі және оған қаратылған төрт нүктенің орны белгіленген. Ғимаратқа қай нүктеден қарағанда 1) 6.а-суреттегі; 2) 6.ә-суреттегі бейнелер көрінеді?

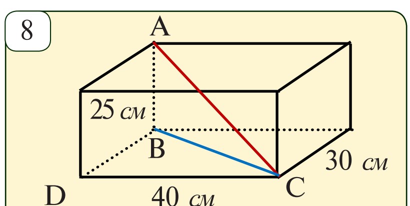


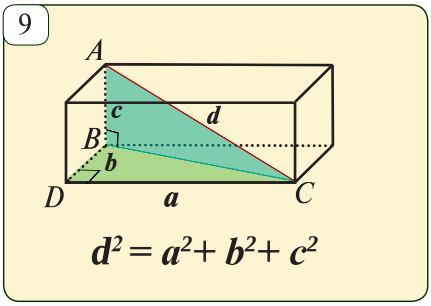
4.3. 6 метрлік 12 құбыр бар (7.а-сурет). Олардан ені 3,5 *м*, ұзындығы 5,4 *м* және биіктігі 2,5 *м* болған тік бұрышты параллелепипед пішінді гараж каркасын даярлау керек (7.ә-сурет). Құбырлар қажетті ұзындықтағы бөліктерге бөлініп, соң құрамаланады.

Ең үнемді жолмен бөлінгенде бұл каркас үшін неше құбыр жұмсалады? Осы бөлуде қанша құбыр шығынға кетеді?



4.4. Кейбір авиакомпаниялардың ұшақтарына кіргізілетін жолаушы чемоданының диагоналының ұзындығы 56 *см*-ден үлкен болмауы шарт. 8-суретте бейнеленген тік бұрышты параллелепипед пішініндегі, өлшемдері 40 *cm* x 30 *см* x 25 *см* болған чемоданды ұшаққа кіргізуге бола ма?



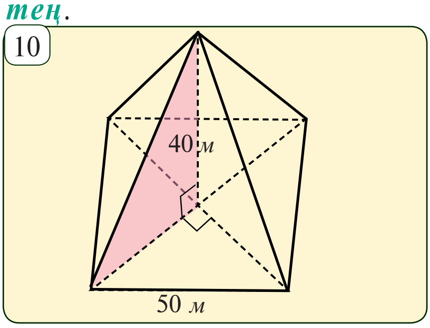


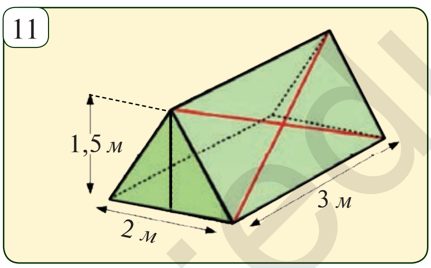
Шешуі: Алдымен чемодан табанындағы BC кесіндінің ұзындығын табамыз. Пифагор теоремасына орай: $BC^2 = 40^2 + 30^2$. ABC үшбұрыш тік бұрышты үшбұрыш. Тағы да Пифагор теоремасын пайдаланып, чемодан диагоналын табамыз: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125$. $AC = 55{,}9$ *см*.

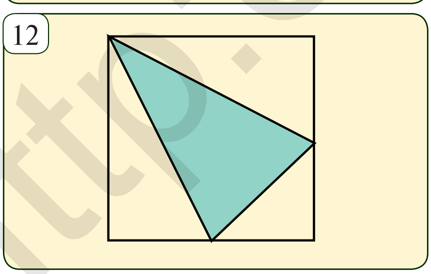
Жауабы: Болады, өйткені $AC < 56$ *см*.

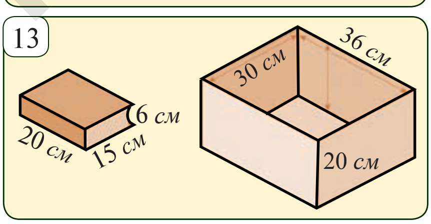
Жоғарыдағы есептің шешуінен ортақ жағдайда төмендегі ғажап қасиет келіп шығады. Оны Пифагор теоремасының кеңістіктегі аналогы (ұқсасы) деп те атайды. Бұл қасиетті өз бетіңше дәлелдеуге әрекет етіп көр (9-сурет).

Теорема. Тік бұрышты параллелопипед диагоналының квадраты оның үш өлшемі (ұзындығы, ені мен биіктігі) квадраттарының қосындысына тең.









4.5. 10-суретте бейнеленген тік пирамиданың биіктігі 40 *м*-ге тең, ал табаны қабырғасы 50 *м* болған квадраттан құралған. Пирамиданың бүйір қырын тап.

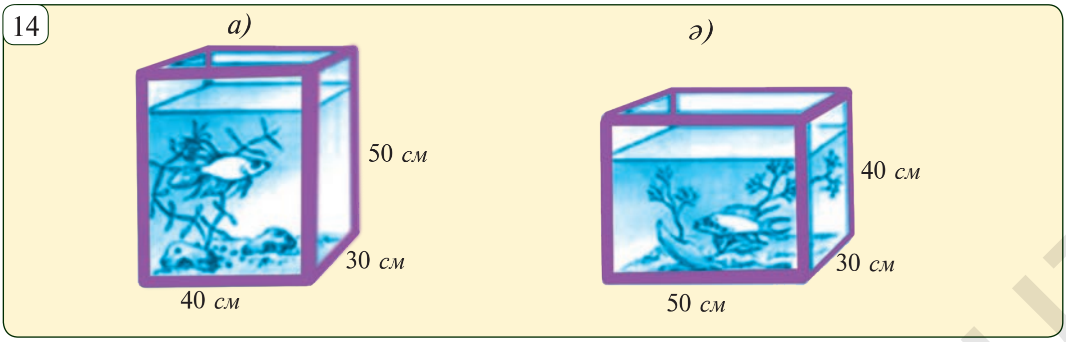
4.6. 11-суретте бейнеленген призма пішініндегі шатырды тігу үшін қанша материал қажет болады?

4.7. Қабырғасы 8 *см*-ге тең болған квадрат пішініндегі парақшаны 12-суретте көрсетілгеніндей етіп бүктеп пирамида пайда етілді.
Пирамиданың көлемін тап.

4.8. Тік бұрышты параллелепипед пішініндегі ыдысты ешқандай өлшеу аспаптарын пайдаланбай, ешқандай есептеулерді орындамай қалай жартысына дейін сумен толтыруға болады? Егер ыдыстың ұзындығы 4 *cm*, ені биіктігінен 0,5 *cm*-ге ұзын, ал биіктігі ұзындығының 37,7 %-ын құрайтын болса, ыдыстағы судың көлемін есепте.

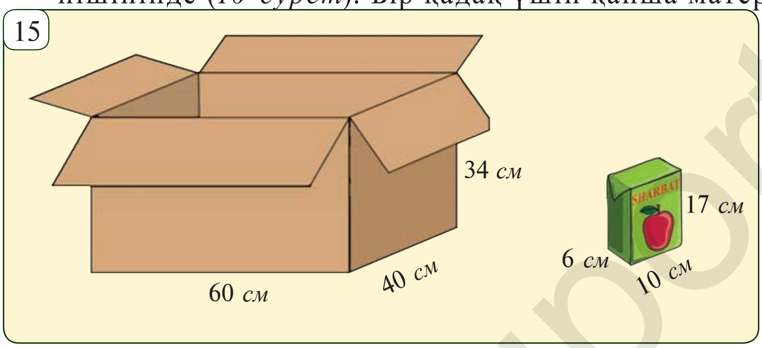
4.9. Бірдей өлшемдегі кітаптарды сандыққа салу керек (13-сурет). Осы сандыққа неше кітап салуға болады?

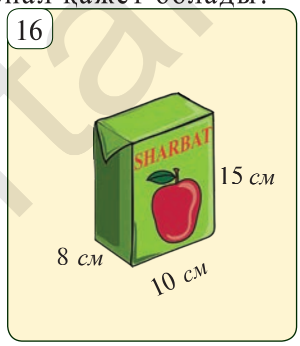
4.10. Екі аквариумға жоғарғы шетінен 10 *см* төмен етіп су құйылды (*14-сурет*). Қайсы аквариумда су көп?



4.11. Қорапқа неше пакет жеміс шырыны сияды (*15-сурет*)?

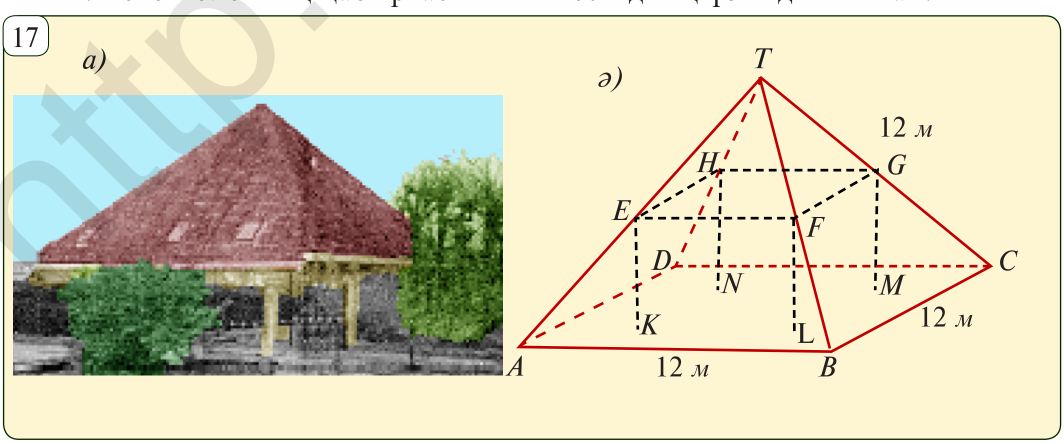
4.12. 1 литрлік жеміс шырыны пакеті тік төртбұрышты паралелепипед пішінінде (*16-сурет*). Бір қадақ үшін қанша материал қажет болады?



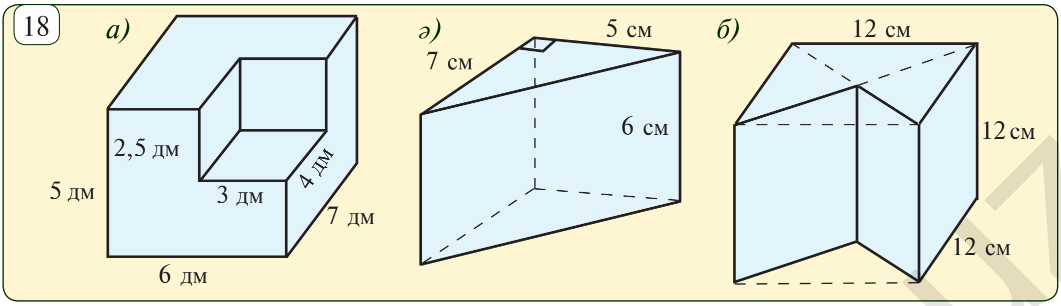


4.13. 17.а-суретте бейнеленген үйдің шатыры пирамида пішінінде. Төменде оқушылар осы үйдің сызбасын (математикалық моделін) сызған (17.ә-сурет) және кейбір кесінділердің ұзындығын көрсеткен. Сызбаға орай шатырдың табаны $ABCD$ квадрат пішінде. Шатырдың қырлары $EFGHKLMN$ тік бұрышты параллелепипед пішіндегі бетон блокқа тірелген: $E - AT$ қырдың, $F - BT$ қырдың, $G - CT$ қырдың және $H - DT$ қырдың ортасы. Пирамиданың барлық қырларының ұзындығы 12 *м*.

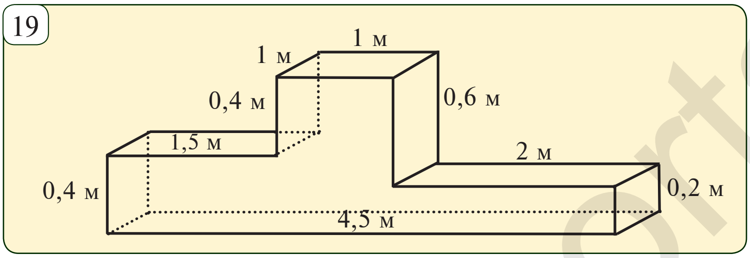
1. Табаны $ABCD$ квадраттың ауданын тап.
2. Бетон блоктың қабырғасы – EF кесіндінің ұзындығын тап.

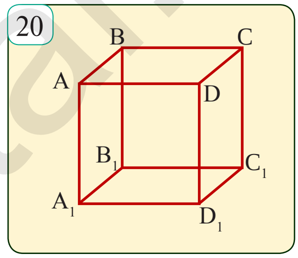


4.14*. 18-суретте бейнеленген ағаш бөліктерінің көлемін анықта.

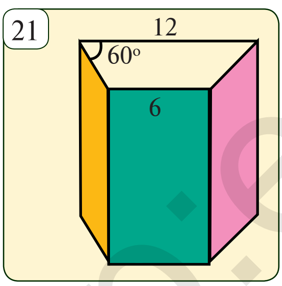


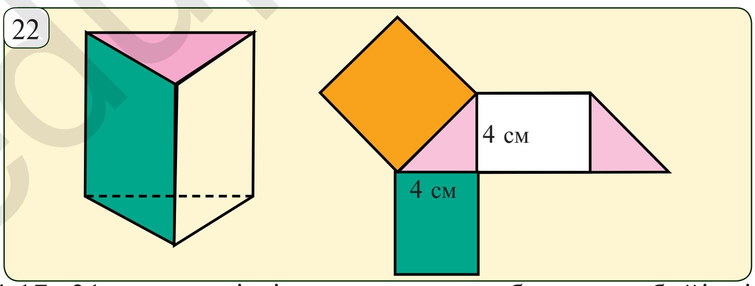
4.15. 19-суретте спорт аренасындағы жеңімпаздық тұғыры бейнеленген. Берілгендерді пайдаланып, оның көлемін тап (барлық екі жақты бұрыштар тік).





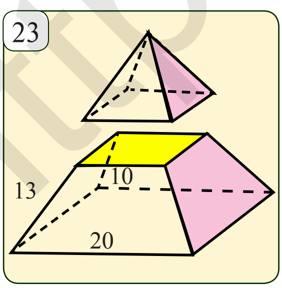
4.16. 20-суретте тік бұрышты параллелепипедтің AA_1D_1D жағының периметрі 20 *см*, $ABCD$ жағының периметрі 16 *см* болған квадраттан құралған. а) $ABCC_1D_1A_1$ сынық сызықтың ұзындығын; ә) DD_1C_1C жақтың периметрі мен ауданын; б) параллелепипедтің көлемін тап.





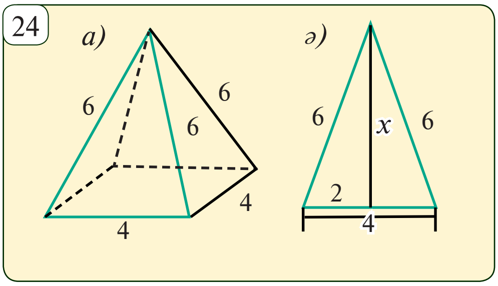
4.17. 21-суреттегі тік призманың табаны тең бүйірлі трапециядан құралған. Трапецияның табандары 12 *см* және 6 *см*, табанындағы сүйір бұрыштарының бірі 60°-қа тең. Егер призманың үлкен жағы квадрат болса, оның толық бетінің ауданын тап.

4.18. 22-суретте призма мен оның жайылған түрі бейнеленген. Егер призманың үлкен жағы квадрат болса, оның толық бетінің ауданын тап.

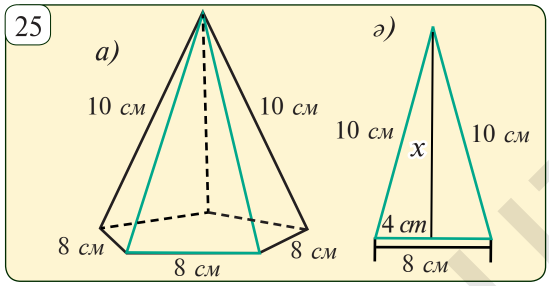


4.19. 23-суреттегі дұрыс төртбұрышты пирамида табанына параллель жазықтықпен қиылысқанда, қиылған пирамида пайда болды. Қиылған пирамида табандарының қабырғасы 20 *см* және 10 *см*, бүйір қыры 13 *см* болса, оның толық бетін тап.

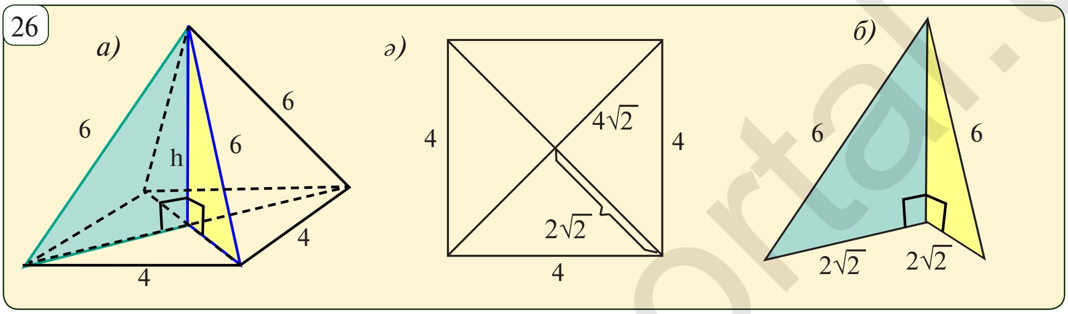
4.20. 24-26-суреттерде берілген мәліметтер мен көмекші сызбалар негізінде белгісіз шамаларды тап.



24

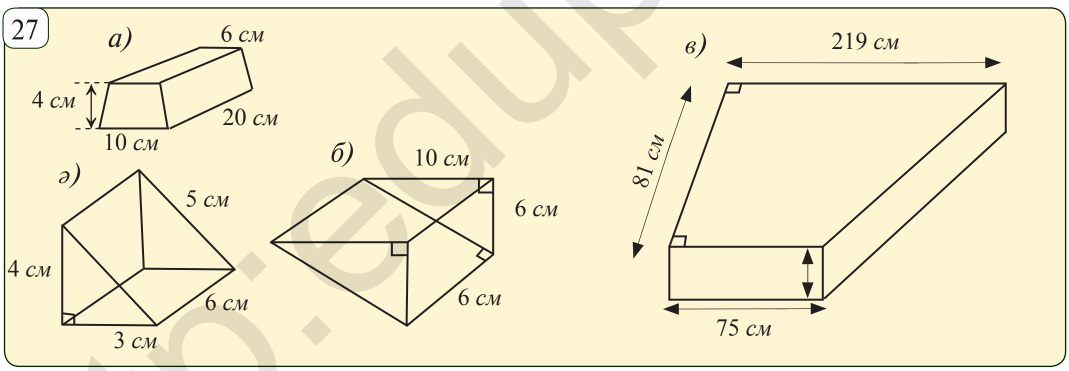


25



26

4.21. 27-суретте берілген мәліметтердің негізінде көпжақтардың толық беті мен көлемін тап.

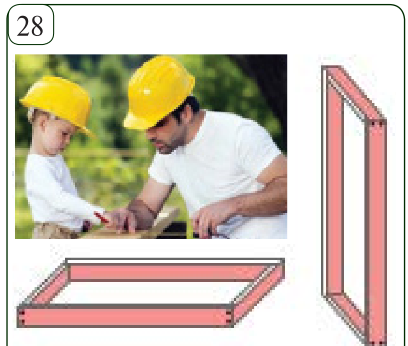


27

Геометрия және ағаш шеберлігі

Ұзындығы 2 *м* 20 *см*, ені 12 *см* және қалыңдығы 2 *см* болған рейкалардан әке мен бала ені 1 *м*, ұзындығы 1 *м* 80 *см* болған рама жасауы керек.

1. Осы раманы жасау жоспарын құр.
2. Жасалған раманың тік төртбұрыш пішінде екенін а) бұрышты сызғыш; ә) рулетка көмегімен қалай тексеруге болады.
3. 4 рама жасау үшін неше рейка қажет болады? (28-сурет).


28

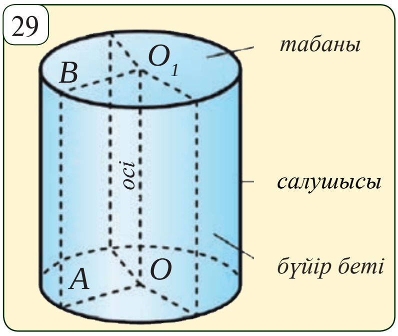
Кеңістіктегі фигуралардың тағы бір маңызды топтарының бірі – айналу денелері. Оларға цилиндр, конус және шар жатады.

Тік төртбұрышты бір қабырғасының айналасында айналдырудан пайда болған дене *цилиндр* деп аталады 29-суретте цилиндрдің элементтері: табандары, салушысы, осі және бүйір беті бейнеленген.

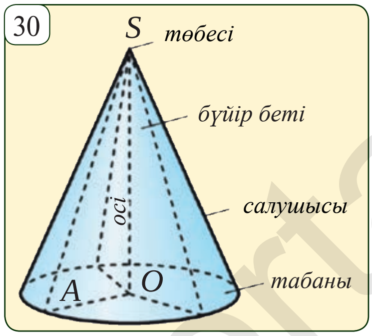
Тік бұрышты үшбұрышты бір катетінің айналасында айналдырудан пайда болған дене *конус* деп аталады 30-суретте конустың төбесі, бүйір беті, салушысы және табаны бейнеленген.

Дөңгелектің өз диаметрі айналасында айналдырудан пайда болған дене

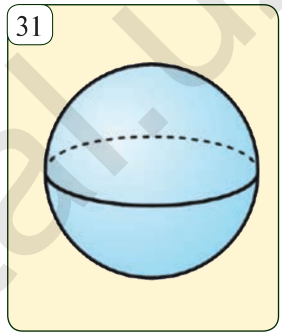
29



30

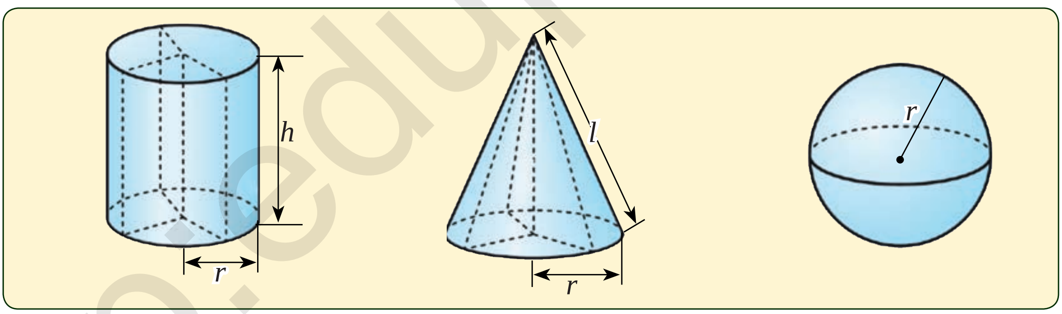


31



шар деп аталады (31-сурет). Осы айналдыруда шеңбер пайда еткен бет *сфера* деп аталады. Көрініп тұрғанындай, шардың беті сферадан құралған болады. Сфераның центрінен оның кез келген нүктесіне дейінгі қашықтық оның радиусын анықтайды.

Айлану денелерінің бүйір және толық беті ауданының формулалары:



Цилиндр

$S_{бүйір} = 2\pi rh$

$S_{толық} = 2S_{табан} + S_{бүйір} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Конус

$S_{бүйір} = \pi rl$

$S_{толық} = S_{табан} + S_{бүйір} = \pi r^2 + \pi rl$

Шар

$S = 4\pi r^2$

1-есеп

$h = 5$ *см*, $r = 6$ *см* болса,

$S_{бүйір} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \approx$

$\approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 6 = 565(см^2)$.

2-есеп

$r = 5$ *см*, $l = 12$ *см* болса,

$S_{толық} = \pi r^2 + \pi rl \approx$

$\approx 3,14 \cdot 5^2 + 3,14 \cdot 5 \cdot 12 =$

$= 267(см^2)$.

3-есеп

$r = 8$ *см* болса,

$S = 4 \cdot \pi r^2 \approx$

$\approx 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 =$

$= 803,84(см^2)$.

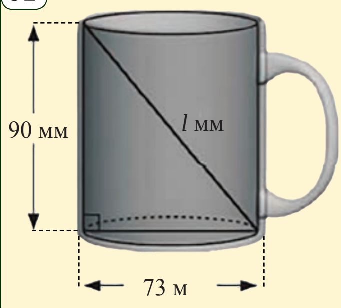
Төменде планиметрияның көмегімен шешілетін айналу денелерге қатысты есептерді қарастырамыз.

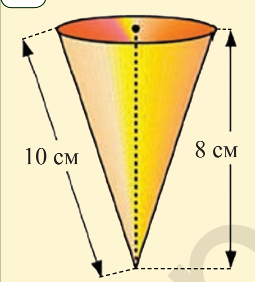
4.22. Шар центрінен оның бетінде жатқан 4 нүктеге дейінгі қашықтықтардың қосындысы 24 *см*-ге тең. Шар диаметрін тап.

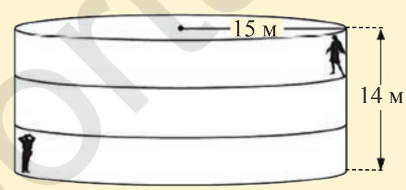
4.23. Асанның шыныаяғының (кофе ішетін ыдысының) биіктігі 90 *мм*, табанының диаметрі 73 *мм*-ге тең (32-сурет). Кофеге салынған шекер немесе сүтті араластырған кезде Асанның қолы күйіп қалмауы үшін қасықтың ұзындығы кемінде қанша боуы керек?

Шешуі: Қасықтың ұзындығын 32-суреттегідей l деп алсақ, онда Пифагор теоремасына орай: $l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$-ға ие боламыз. Бұдан $l = 115{,}9$ *мм*.

Жауабы: Қасықтың ұзындығы 116 *мм*-ден кем болмауы қажет.

32


33


34


4.24. 33-суретте берілгендерді пайдаланып, конус пішініндегі балмұздақ табанының радиусын тап. Оның сыйымдылығын тап.

4.25. 34-суретте бейнеленген Лондон қаласындағы Шекспирдің Глобус театры цилиндр пішінінде. Суретте берілгендерді пайдаланып, театрдың төменгі бұрышындағы актердің дауысы жоғарыда тұрған көрерменге жетіп баруы үшін қанша қашықтықты басып өтетінін анықта?

4.26. 35-суретте бейнеленген цилиндр пішініндегі ыдыстың биіктігі 12 *см*, ал кеңдігі 8 *см*. Жоғарыдағы табанының дәл ортасында тесік бар. Осы ыдыстан ішімдік ішуге арналған түтікшенің ұзындығы қанша болуы керек? Түтікшенің көрініп тұрған бөлігінің ұзындығы 2 *см*.

35


4.27. Биіктігі 30 *см* болған мыстан жасалған конус ерітіліп, одан цилиндр жасалды. Егер конус пен цилиндрдің табандары тең шеңберлерден құралған болса, пайда болған цилиндрдің биіктігін тап.

5 ЖОБА ЖҰМЫСЫН ОРЫНДАУ БОЙЫНША НҰСҚАУЛАР

Жоба жұмысы тақырыбы бойынша оқушылар жеке-жеке немесе 3-4 адамдық топ болып істеуіне болады. Жоба жұмысы оқу жылының соңында өткізілетін қорғаумен (шағын конференциямен) аяқталады. Жоба жұмысы бойынша жұмыс үдерісі төмендегі оқу қызметтерді қамтуы мүмкін: ізденіс қызметтерін жоспарлау, міндеттерді өзара бөліп алу, оқу мақсаттарын қою, керекті мәліметтерді іздеп табу, тақырыпқа қатысты проблемалы жағдай шешімдерін іздеу, олардың ең тиімдісін таңдау және оны негіздеу, қажет жағдайда сұраунама және тәжірибелер өткізу, жоба жұмысы нәтижелері бойынша есеп даярлау, өз қызметіңе талдау жасау және бағалау, жоба жұмысын қорғау үшін презентация даярлау және оны қорғау. Оқушылар жоба жұмысы бойынша ізденістерін жыл барысында әдетте сабақтан тыс өзіндік жаттығуларда жүргізеді.

Жоба жұмысы тақырыптары іс жүзіндік, теориялық және зерттеу бағытында болуы мүмкін. Іс жүзіндік жұмыста геометриядан меңгерілген білім мен дағдылар өмірлік жағдайлардағы проблемаларды (кейстерді) шешуде қолданылады. Ал теориялық жоба жұмыстарында геометрияның қандайда

36

бір тақырыбы тереңірек үйреніледі. Зерттеу істерінде қандайда бір стандартқа тура келмейтін геометриялық есепті немесе өмірлік проблеманы шешу бойынша шағын ғылыми ізденіс жүргізіледі.

Іс жүзіндік жоба жұмысының үлгісі

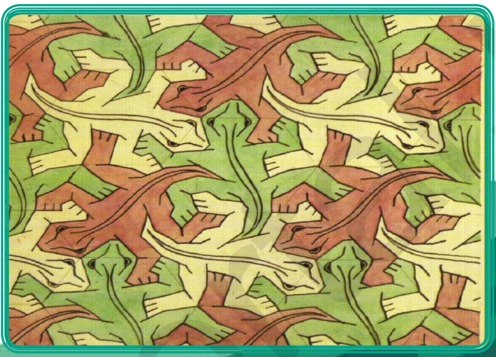
Жоба тапсырмасы. 36-суретте бейнеленген саяжайдағы үйдің қабырғаларын бояу керек. Үйді құру жоспары (тапсырмаға қосымша етілген) негізінде осы жұмысты орындау үшін ең тиімді (арзан) жобаны дайында.

Жоба жұмысын орындау үдерісінде оқушылар үй жоспарын жеке үйреніп шығады. Міндеттерді анықтап, жоспар құрады және істерді өзара бөліп алады. Алдымен боялатын ауданды анықтап алады. Бояу үшін қанша бояу қажеттігі анықталады. Бірнеше бояу түрлері бойынша есеп-қисап жасалады. Қайсы бояу қолданылса, мақсатқа сай болатыны анықталады және негізделеді. Таңдалған бояу бойынша барлық есеп-қисап істерін орындайды және жоба жұмысын, сондай-ақ ол бойынша презентацияны дайындайды.

Ескерту: Суретте үй жоспарының барлығы келтірілмеген.

I ТАРАУ

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР МЕН ҰҚСАСТЫҚ



Бұл тарауды үйрену нәтижесінде сен төмендегі білім және іс жүзіндік дағдыларға ие боласың:

Білімдер:

√ *ұқсас фигуралардың анықтамасын және белгіленуін білу;*

√ *үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін білу;*

√ *гомотетия ұғымын білу.*

Іс жүзіндік дағдылар:

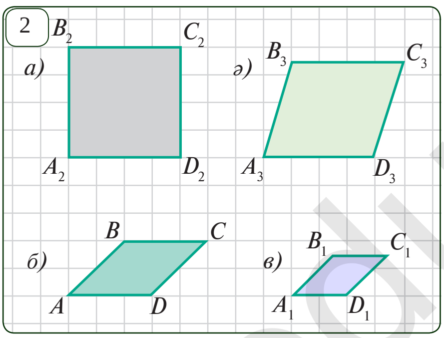
√ *екі ұқсас үшбұрыштан сәйкес элементтерді таба білу;*

√ *үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін дәлелдеуге және есептеуге байланысты есептерді шешуде қолдану;*

√ *гомотетияны пайдаланып ұқсас көпбұрыштарды сала білу.*

6 КӨПБҰРЫШТАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ

Күнделікті тұрмыста тең фигуралардан басқа пішіні (көрінісі) біркелкі, өлшемдері әр түрлі фигураларға жиі кез боламыз. Тарих және география ғылымдарында әр түрлі масштабтағы карталарды көп пайдаланғансың. Сынып тақтасына ілінген және оқулықта көрсетілген республикамыз карталары әр түрлі өлшемде, бірақ олар біркелкі пішінде (көріністе). Сондай-ақ, бір фотоплёнкадан түрліше өлшемдегі фотосуреттер шығарылады. Бұл суреттердің өлшемдері әр түрлі болса да бірдей көріністе, яғни олар бір-біріне ұқсайды *(1-сурет)*.



Жаттығу. 2-суретте төрт ромб көрсетілген. Олардан тек *б)* және *в)* ромбылар ғана біртүрлі көрініске ие. Бұл ромбылар несімен басқа ромбылардан ерекшеленіп тұр? Мұны бірге анықтайық.

1. Суреттен $AD=3$, $A_1D_1=2$ екендігі байқалып тұр. Ромбының қабырғалары тең болғандықтан,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

теңдігін құрамыз. Бұл жағдайда ромбылардың сәйкес қабырғалары пропорционал болады.

2. $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ ромбыларда $\angle A=\angle A_1=45^\circ$, $\angle B=\angle B_1=135^\circ$, $\angle C=\angle C_1=45^\circ$, $\angle D=\angle D_1=135^\circ$. Бұл жағдайда ромбылардың сәйкес бұрыштары өзара тең болады.

Сөйтіп, бұл ромбылардың бір-біріне ұқсастығының себебі — сәйкес қабырғаларының пропорционалдығы және сәйкес бұрыштардың теңдігі дейміз. Кез келген көпбұрыштардың ұқсастығы да осы негізде енгізіледі.

Екі көпбұрыш (бесбұрыш) $ABCDE$ және $A_1B_1C_1D_1E_1$ түрінде белгіленген болып, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$, $\angle E=\angle E_1$ яғни сәйкес бұрыштары өзара тең болсын. Онда AB және A_1B_1, BC және B_1C_1, CD және C_1D_1, DE және D_1E_1, EA және E_1A_1 қабырғалар көпбұрыштың *сәйкес қабырғалары* деп аталады.

Анықтама. Екі көпбұрыштың бұрыштары сәйкесінше өзара тең, барлық сәйкес қабырғалары өзара пропорционал болса, мұндай көпбұрыштар *ұқсас көпбұрыштар* деп аталады *(3-сурет)*.

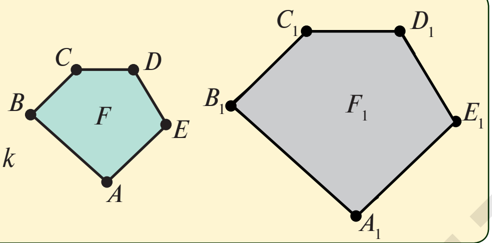
Көпбұрыштардың ұқсастығы $\backsim$ белгісімен көрсетіледі.

3

Сәйкес бұрыштар тең

$$F \backsim F_1 \begin{cases} \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1, \\ \angle D=\angle D_1,\ \angle E=\angle E_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{E_1A_1}{EA}=k \end{cases}$$

Сәйкес бұрыштар пропорционал

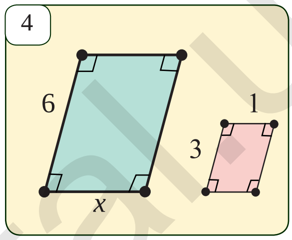


Ұқсас көпбұрыштардың сәйкес қабырғаларының қатынасына тең болған k саны осы көпбұрыштардың *ұқсастық коэффициенті* деп аталады.

1-есеп. 4-суреттегі көпбұрыштардың ұқсастығы белгілі болса, белгісіз ұзындықты тап.

Шешуі: Осы көпбұрыштар ұқсастығынан олардың сәйкес қабырғаларының пропорционал екені келіп шығады.

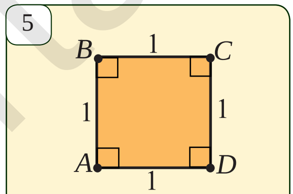
Демек, $\frac{x}{6}=\frac{1}{3}$. Бұдан $x = 6 : 3 = 2$ екенін табамыз. *Жауабы.* $x = 2$.

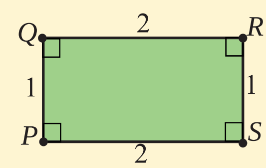


2-есеп. 5-суреттегі төртбұрыштар ұқсас па? Неге?

Шешуі: Жоқ. Олардың сәйкес бұрыштары тең (90°) болса да, сәйкес қабырғалары пропорционал емес:

$$\frac{AB}{PQ}=1 \neq \frac{BC}{QR}=\frac{1}{2}$$



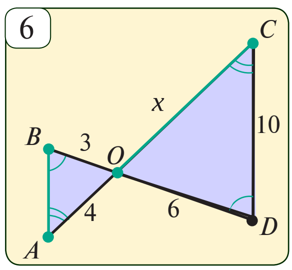


Есептер мен тапсырмалар

6.1. Ұқсастық коэффициенті деген не, ол қалай анықталады?

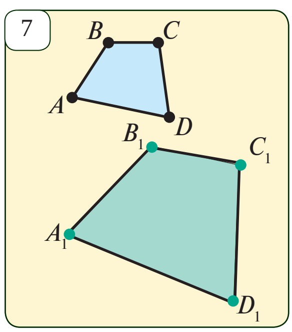
6.2. Егер ABC және DEF үшбұрыштарда $\angle A=105°$, $\angle B=35°$, $\angle E=105°$, $\angle F=40°$, $AC=4{,}4$ *см*, $AB=5{,}2$ *см*, $BC=7{,}6$ *см*, $DE=15{,}6$ *см*, $DF=22{,}8$ *см*, $EF=13{,}2$ *см* болса, олар ұқсас болады ма?

6.3. 2-суретте көрсетілген а) және ә) ромбылар неліктен ұқсас емес? ә) және б) ромбылар ше??



6.4. 6-суреттегі ABO және CDO үшбұрыштары ұқсас болса, AB, OC кесінділерінің ұзындығы мен ұқсастық коэффициентін тап.

6.5. 7-суретте $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. A_1B_1, D_1A_1 және C_1D_1 кесінділерін тап.



6.6*. ABC үшбұрышының AB және AC қабырғаларының орталары сәйкес түрде P және Q болсын. $\Delta ABC \backsim \Delta APQ$ екендігін дәлелде.

7 ҰҚСАС ҮШБҰРЫШТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Ең қарапайым көпбұрыш болған үшбұрыштардың ұқсастығын тексерейік.

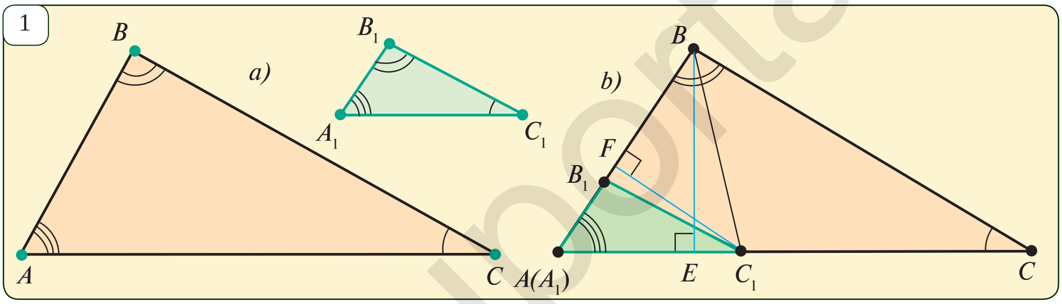
Теорема. **Екі ұқсас үшбұрыш периметрлерінің қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең.**

Осы теореманы өз бетіңше дәлелде.

Теорема. **Екі ұқсас үшбұрыш аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең.**

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ *(1.а-сурет)*, k — *ұқсастық кооэффициенті* ⇒ $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$

Дәлелдеу. Теорема шарты бойынша, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Көпбұрыштар ұқсастығы анықтамасына орай, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$



$\angle A = \angle A_1$ екендігін пайдаланып,оларды 1.ә-суреттегідей бетпе-бет қоямыз және тиісті өрнек және белгілеулерді іске асырамыз.

Мына үшбұрыштардың ауданын тауып, қатынастарын қараймыз:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \qquad (2).$$

(1) теңдікті мүшелеп (2) теңдікке бөлсек, тең бұрышқа ие болған үшбұрыштар аудандарының қатынасы үшін (3) теңдікті жасаймыз.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \qquad (3)$$

Мұнда шарт бойынша, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$ екендігін есепке алсақ,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

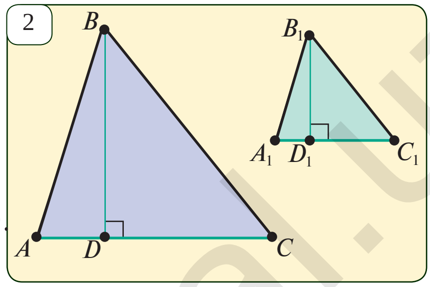
келіп шығады. *Теорема дәлелденді.*

1-есеп. Ұқсас үшбұрыштар сәйкес қабырғаларының қатынасы сол қабырғаларға жүргізілген биіктіктер қатынасына теңдігін дәлелде *(2-сурет)*.

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1,\ BD,\ B_1D_1$ — *биіктіктер* $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$

Шешуі. Берілген үшбұрыштардың ұқсастық коэффициенті k болсын. Онда, $AC : A_1C_1 = k;$ $\quad S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2 \quad (1)$ болады. Екінші жағынан,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BD}{\frac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BD}{B_1D_1}=k\cdot\frac{BD}{B_1D_1}\quad .\ (2)$$



(1) және (2) теңдіктен $k\cdot\dfrac{BD}{B_1D_1}=k^2$ яки $\dfrac{BD}{B_1D_1}=k$.

Сөйтіп, әрі $\dfrac{BD}{B_1D_1}$ әрі, $\dfrac{AC}{A_1C_1}$ қатынастары k-ға тең, яғни $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$.

Есептер мен тапсырмалар

7.1. Ұқсас үшбұрыштар аудандарының қатынасы туралы теореманы айтып бер және дәлелде.

7.2. Екі ұқсас ABC және A_1, B_1, C_1, үшбұрыштар берілген. Егер S_{ABC} = 25*см*^{2} және S_{ABC} = 81*см*^{2} болса, ұқсастық коэффициентін тап.

7.3. Екі ұқсас үшбұрыш аудандары 65 *м*^{2} және 260 *м*^{2}. Бірінші үшбұрыштың бір қабырғасы 6 *м* болса, екінші үшбұрыштың оған сәйкес қабырғасын тап.

7.4. Берілген үшбұрыштың қабырғалары 15 *см*, 25 *см* және 30 *см*. Егер периметрі 35 *см* болған үшбұрыш берілген үшбұрышқа ұқсас болса, оның қабырғаларын тап.

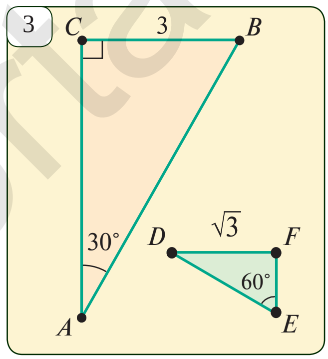
7.5. Қабырғалары 12 *см*, 20 *см* және 13 *см* болған үшбұрыш берілген. Егер кіші қабырғасы 9 *см* болған үшбұрыш берілген үшбұрышқа ұқсас болса, оның қабырғаларын тап.

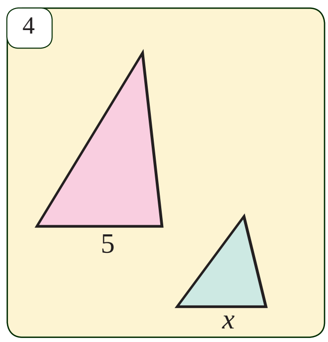
7.6. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ және бұл үшбұрыштардың сәйкес қабырғаларының қатынасы 7:5-ке тең. Егер ABC үшбұрышының ауданы $A_1B_1C_1$ үшбұрышының ауданынан 36 *м*^{2} -қа артық болса, бұл үшбұрыштың аудандарын тап.

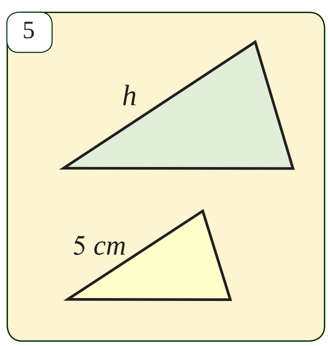
7.7. 3-суретте берілгендерді пайдаланып, үшбұрыштардың ұқсас яки ұқсас еместігін тап.

7.8. 4-суреттегі үшбұрыштар ұқсас, аудандары қатынасы 25:9 болса, белгісіз кесінді ұзындығын тап.

7.9. 5-суреттегі үшбұрыштар $S_1 : S_2$ = 49 : 25 және ұқсас болса, белгісіз қабырғаны тап.





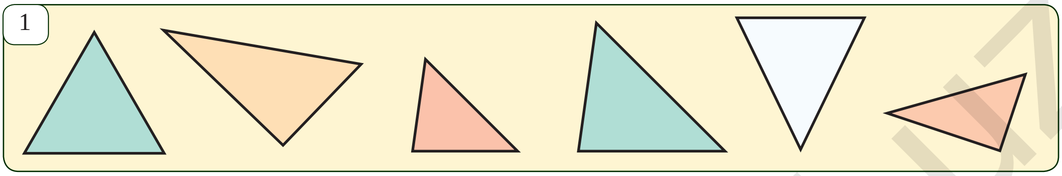


8 ҮШБҰРЫШТАР ҰҚСАСТЫҒЫНЫҢ БІРІНШІ БЕЛГІСІ

Белсенділікті арттырушы жаттығу

1-суретте көрсетілген үшбұрыштардың ішінен ұқсастарын анықта. Олардың ұқсастығын қалай анықтадың?

1

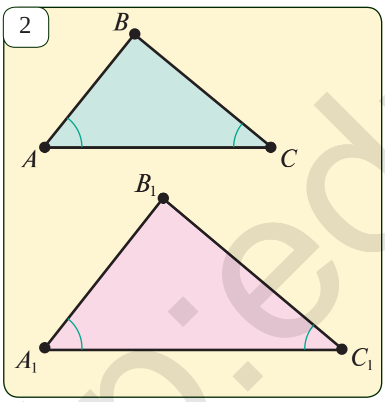


Анықтама бойынша, екі үшбұрыштың ұқсастығын анықтау үшін ол бұрыштардың теңдігін және сәйкес қабырғаларының пропорционал екендігін тексеруіміз керек болады. Үшбұрыштар үшін бұл тексеру оңайлау болады. Төменде келтірілетін теоремалар осы жөнінде, олар "үшбұрыштар ұқсастығының белгілері" деп аталады.

Теорема. (Үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі). **Егер бір үшбұрыштың екі бұрышы екінші үшбұрыштың екі бұрышына сәйкес түрде тең болса, мұндай үшбұрыштар ұқсас болады *(2-сурет)*.**

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \angle C=\angle C_1$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

2



Дәлелдеу. 1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштары қосындысы туралы теорема бойынша,

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C),\\ \angle B_1=180^\circ-(\angle A_1+\angle C_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle B=\angle B$$

Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының бұрыштары сәйкес түрде тең.

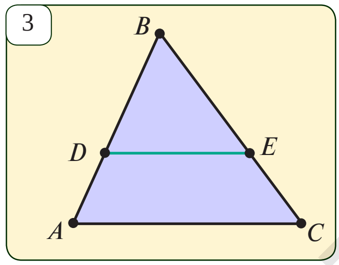
2. Шарт бойынша, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$. Тең бұрышқа ие болған үшбұрыштар аудандарының қатынасы туралы теоремаға орай

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \quad \text{және} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}.$$

Бұл теңдіктердің оң бөлігін теңестіріп, бірдей мүшесі қысқартылса, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ теңдік пайда болады. Сол сияқты, $\angle A=\angle A_1$ және $\angle B=\angle B_1$ теңдіктерді пайдаланып, $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$ теңдікті аламыз. Сөйтіп, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының бұрыштары тең және сәйкес қабырғалары пропорционал, яғни бұл үшбұрыштар ұқсас. *Теорема дәлелденді.*

Есеп. ABC үшбұрышының екі қабырғасын қиып өтетін және үшінші қабырғасына паралель болған DE түзу сызықты үшбұрыштан оған ұқсас үшбұрыш бөлінуін дәлелде *(3-сурет)*.

□ә□□□□□□□. *ABC* және *DBE* үшбұрыштарда $\angle B$— ортақ, $\angle CAB = \angle EDB$ (*AC* және *DE* параллель түзу сызықтарды *AB* қиюшымен қиғанда пайда болған сәйкес бұрыштар тең болғаны үшін) *(3-сурет)*. Демек, үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі бойынша, $ABC \backsim \Delta DBE$.

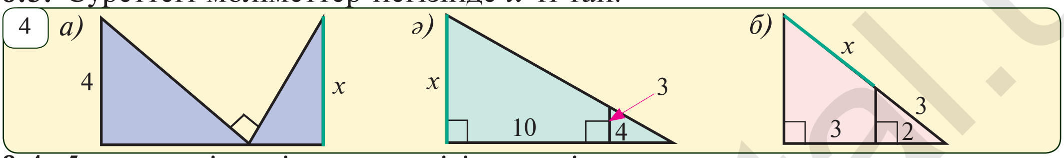


Есептер мен тапсырмалар

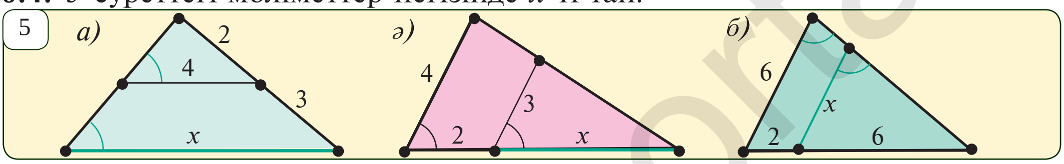
8.1. Үшбұрыштар ұқсастығының анықтамасын, ББ белгісін өзара салыстыр.

8.2. Үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісін дәлелде.

8.3. Суреттегі мәліметтер негізінде *x*-ті тап.



8.4. 5-суреттегі мәліметтер негізінде *x*-ті тап.

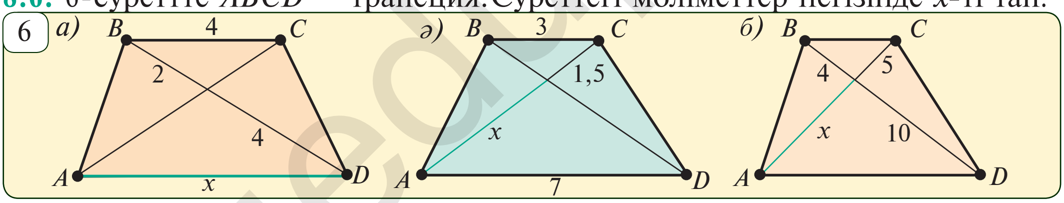


8.5. *ABCD* паралелограмының *CD* қабырғасында *E* нүктесі алынған. *AE* және *BC* сәулелері *F* нүктесінде қиылысады.

а) Егер $DE = 8$ *см*, $EC = 4$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AE = 10$ *см* болса, *EF* және *FC*-ны;

ә) Егер $AB = 8$ *см*, $AD = 5$ *см*, $CF = 2$ *см* болса, *DE* және *EC*-ны тап.

8.6. 6-суретте *ABCD* — трапеция. Суреттегі мәліметтер негізінде *x*-ті тап.

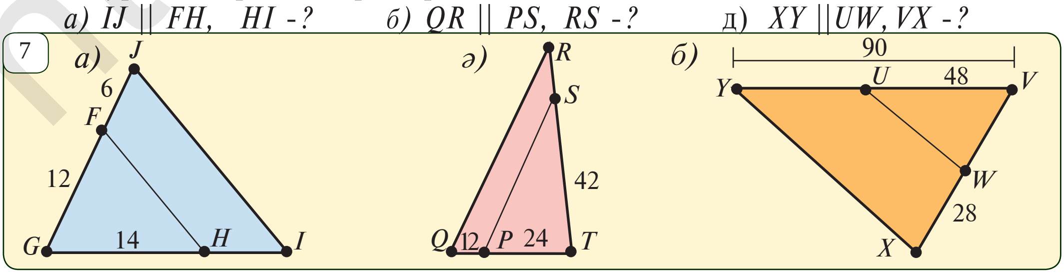


8.7*. Біреуден сүйір бұрыштары тең болған екі тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас екенін дәлелде.

8.8*. *ABC* үшбұрышының *AC* қабырғасында *D* нүктесі алынған. Егер $\angle ABC = \angle BDC$ болса, *ABC* және *BDC* үшбұрыштарының ұқсас екендігін дәлелде. Сондай-ақ, $3AB = 4BD$ және $BC = 9$ *см* болса, *AC* кесіндісін тап.

8.9. 7-суретте берілгендерге орай белгісіз кесіндіні тап.

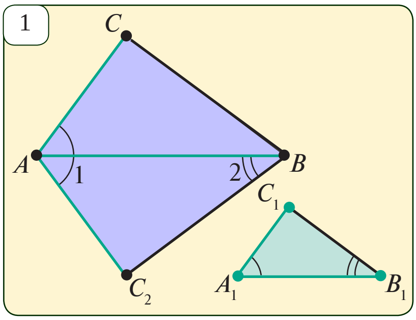
а) $IJ \parallel FH$, HI -? *б) $QR \parallel PS$, RS -?* д) *$XY \parallel UW$, VX -?*



9 ҮШБҰРЫШТАР ҰҚСАСТЫҒЫНЫҢ ЕКІНШІ БЕЛГІСІ

Теорема. (Үшбұрыштар ұқсастығының *ҚБҚ* белгісі). ***Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы екінші үшбұрыштың екі қабырғасына пропорционал және осы қабырғалар жасаған бұрыштар тең болса, мұндай үшбұрыштар ұқсас болады (1-сурет).***

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ ⇨ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



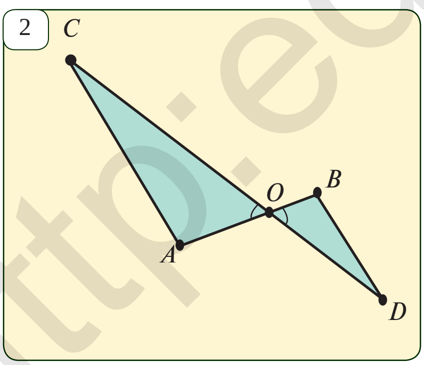
Дәлелдеуі. $\angle 1=\angle A_1,\ \angle 2=\angle B_1$ болатын етіп ABC_2 үшбұрышын жасаймыз *(1-сурет)*. Ол ББ белгісі бойынша $A_1B_1C_1$ үшбұрышына ұқсас болады.

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC_2:\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}$$

Шарт бойынша: $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$

Бұл екі теңдіктен, $AC_2 = AC$ екендігін анықтаймыз. Онда үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісі бойынша $\Delta ABC=\Delta ABC_2$. Атап айтқанда $\angle 2=\angle B$. Бірақ жасалуы бойынша $\angle 2=\angle B_1$ еді. Демек, $\angle B=\angle B_1$. Онда, $\angle A=\angle A_1$ және $\angle B=\angle B_1$ болғандықтан, үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі бойынша $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *Теорема дәлелденді.*

Есеп. AB және CD кесінділер O нүктесінде қиылысады, $AO = 12$ *см*, $BO= 4$ *см*, $CO = 30$ *см*, $DO = 10$ *см* болса, AOC және BOD үшбұрыштары аудандарының қатынасын тап.



Шешуі: Шарт бойынша,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{12}{4}=3\\[2mm] \dfrac{OC}{OD}=\dfrac{30}{10}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=3.$$

Демек, AOC үшбұрышының екі қабырғасы BOD үшбұрышының екі қабырғасына пропорционал және бұл қабырғалар арасындағы сәйкес бұрыштар вертикал бұрыштар болғандықтан: $\angle AOC=\angle BOD$. Сондықтан, үшбұрыштар ұқсастығының ҚБҚ белгісі бойынша, $\Delta AOC \backsim \Delta BOD$, ұқсастық коэффициенті $k=\dfrac{OA}{OB}=3$. Енді ұқсас үшбұрыштар аудандарының қатынасы туралы теореманы қолданамыз:
$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}}=k^2=9.$$

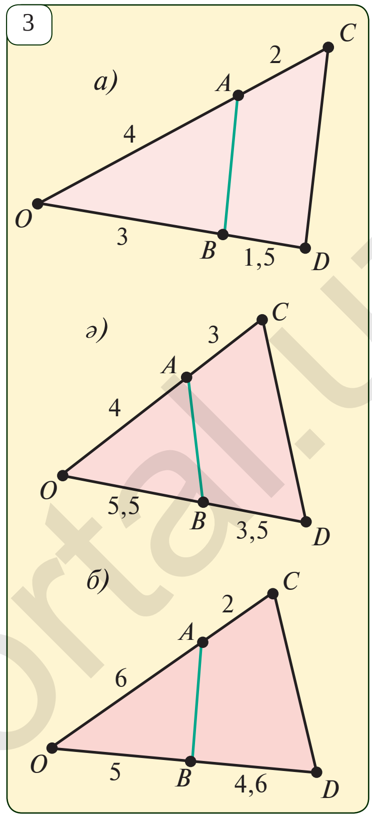
Жауабы: 9.

Есептер мен тапсырмалар

9.1. Үшбұрыштар ұқсастығының анықтамасын және *ҚБҚ* белгісін өзара салыстыр.

9.2. Төбесіндегі бұрыштары тең болған тең бүйірлі үшбұрыштардың ұқсастығын а) ББ; ә) *ҚБҚ* белгісін пайдаланып дәлелде.

9.3. 3-суретте кескінделген OAB және OCD үшбұрыштары ұқсас бола ма? Егер ұқсас болса, осы үшбұрыштар периметрінің қатынасын тап.



9.4. AC және BD сәулелері O нүктеде қиылысады. Егер $AO:CO=BO:DO=3$, $AB=7$ *см* болса, CD кесіндісін және AOB мен COD үшбұрыштары аудандарының қатынасын тап.

9.5. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $\angle A=\angle A_1$, $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1=4:3$.

а) Егер AB кесіндісі A_1B_1-ден 5 см артық болса, AB және A_1B_1 қабырғаларын тап.

ә) Егер A_1B_1 кесіндісі AB-дан 6 см кем болса, AB және A_1B_1 қабырғаларын тап.

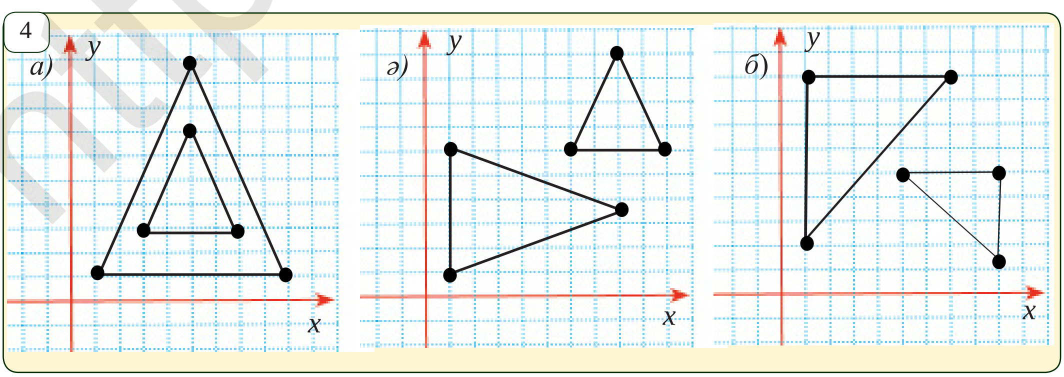
б) Егер берілген үшбұрыштардың аудандарының қосындысы 400 $см^2$ болса, әр үшбұрыштың ауданын тап.

9.6. Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың катеттері екінші тік бұрышты үшбұрыштың сәйкес катеттеріне пропорционал болса, онда бұл үшбұрыштар ұқсас болуын дәлелде.

9.7. Катеттері 3 *дм* және 4 *дм* болған тік бұрышты үшбұрыш пен бір катеті 8 *дм* және гипотенузасы 10 *дм* болған тік бұрышты үшбұрыштың ұқсас болуын дәлелде.

9.8*. AB кесінді мен l түзуі O нүктеде қиылысады. l түзуіне AA_1 және BB_1 перпендикулярлар түсірілген. $AA_1=2$ *см*, $OA_1=4$ *см* және $OB_1=3$ *см* болса, BB_1, OA және AB кесінділерді тап.

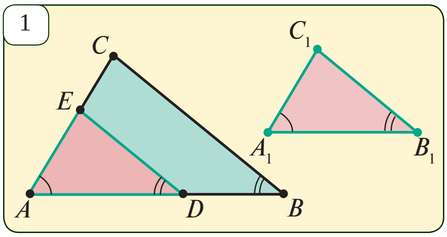
9.9*. 4-суреттегі мәліметтер бойынша үшбұрыштардың ұқсастығын негізде.



10 ҮШБҰРЫШТАР ҰҚСАСТЫҒЫНЫҢ ҮШІНШІ БЕЛГІСІ

Теорема. (Үшбұрыштар ұқсастығының ҚҚҚ белгісі). ***Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың үш қабырғасына сәйкес түрде пропорционал болса, мұндай үшбұрыштар ұқсас болады.***

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$ *(1-сурет)* $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Дәлелдеуі. ABC үшбұрышының AB қабырғасында $AD = A_1B_1$ болатын етіп D нүктесін белгілейміз. D нүктесінен BC қабырғасына параллель етіп жүргізілген түзу сызық AC қабырғасымен E нүктесінде қиылыссын. Онда үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі бойынша ΔADE және ΔABC ұқсас болады. Онда теорема шарты және анықтама бойынша:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ мен } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE},\ (1) \qquad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ мен } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.\ (2)$$

Онда $AD = A_1B_1$ екенін ескерсек, олардың біріншісінен $B_1C_1 = DE$, ал екіншісінен $A_1C_1 = AE$ екені туындайды. Сөйтіп, үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі бойынша, $\Delta ADE = \Delta A_1B_1C_1$. Онда $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Демек, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *Теорема дәлелденді.*

Есеп. Егер екі тең бүйірлі үшбұрыштың біреуінің табаны және бүйір қабырғасы екіншісінің табаны және бүйір қабырғасына пропорционал болса, бұл үшбұрыштардың ұқсас екендігін дәлелде.

$\Delta ABC,\ AB = BC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ A_1B_1 = B_1C_1,\ \Big|\ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Дәлелдеуі. $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$ теңдіктер мен $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ қатысты $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ теңдіктерін жасаймыз. Демек,үшбұрыштар ұқсастығының ҚҚҚ белгісі бойынша, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Есептер мен тапсырмалар

10.1. Үшбұрыштар ұқсастығының *ҚҚҚ* белгісін және дәлелдеуін баянда.

10.2. $AC=14$ *см*, $AB=11$ *см*, $BC=13$ *см*, $A_1C_1=28$ *см*, $A_1B_1=22$ *см*, $B_1C_1=26$ *см* екендігі белгілі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар ұқсас бола ма?

10.3. 2-суреттегі ұқсас үшбұрыштардың жұптарын көрсет.

10.4. $ABCD$ трапецияның AB және CD бүйір қабырғалары созылса, E нүктесінде қиылысады. Егер $AB=5$ *см*, $BC=10$ *см*, $CD=6$ *см*, $AD=15$ *см* болса, AED үшбұрышының ауданын тап.

10.5. Трапецияның табандары 6 *см* және 9 *см*, биіктігі 10 *см*.Трапеция диагональдары қиылысқан нүктеден табандарына дейінгі қашықтықтарды тап.

10.6. Кез келген екі тең қабырғалы үшбұрыштың ұқсас болуын дәлелде.

10.7. Табаны 12 *см*, биіктігі 8 *см* болған тең бүйірлі үшбұрыш ішіне квадрат сызылған, онда квадраттың екі төбесі үшбұрыш табанында, ал қалған екі төбесі бүйір қабырғаларында жатады. Квадраттың қабырғасын тап.

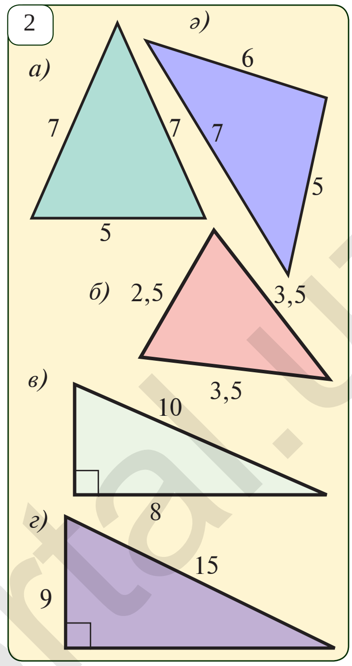
10.8*. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының AA_1 және BB_1 биіктіктері жүргізілген. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ екендігін дәлелде.

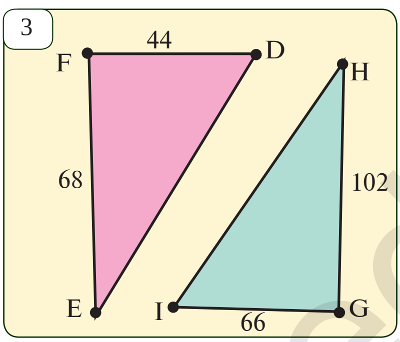
10.9. Екі ұқсас үшбұрыштың ауданы 6 және 24-ке тең. Олардың біреуінің периметрі екіншісінікінен 6-ға артық. Үлкен үшбұрыштың периметрін тап.

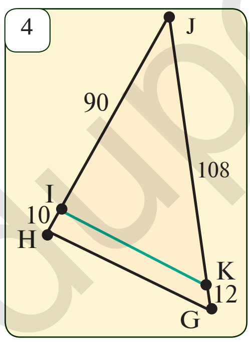
10.10. 3-суреттегі үшбұрыштар қайсы белгіге орай ұқсас?

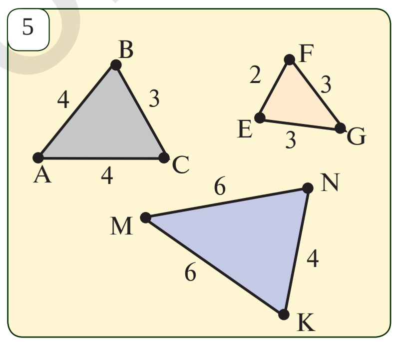
10.11. 4-суреттегі JKI және JGH үшбұрыштар қайсы белгіге орай ұқсас?

10.12. 5-суреттегі үшбұрыштардың қайсылары біріне-бірі ұқсас?

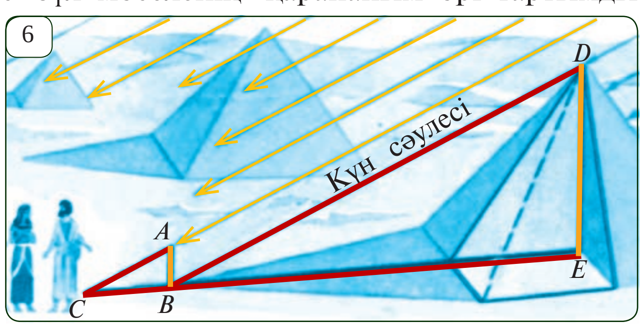








Тарихи үзінділер. Бұл оқиға біздің эрамыздан алдыңғы VI ғасырда болған. Бұл уақытта гректер геометриямен дерлік шұғылданбайтын еді. Грек философы Фалес мысыр ғылымымен танысу үшін сапарға аттанды. Мысырлықтар оған қиын есеп береді: үлкен пирамидалардан бірінің биіктігін қалай есептеу мүмкін? Фалес бұл мәселенің қарапайым әрі тартымды шешімін тапты. Ол таяқшаны жерге қадады және былай деді: "Қашан осы таяқша көлеңкесінің ұзындығы таяқшаның ұзындығымен тең болса, пирамида көлеңкесінің ұзындығы пирамида биіктігімен тең болады" (6-сурет). Фалестің пікірін негіздеуге әрекет жаса!



11 ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҚ БЕЛГІЛЕРІ

Тік бұрышты үшбұрыштардың бір бұрышы тік бұрыш болатындығы белгілі. Сондықтан мұндай үшбұрыштардың ұқсастық белгілері біршама қарапайым болады.

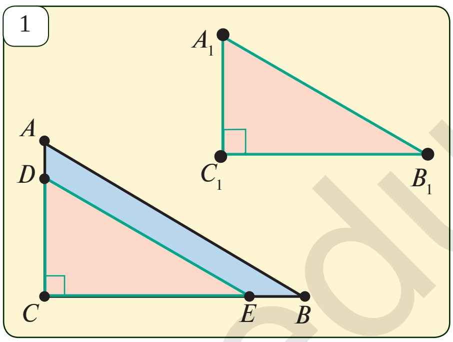
***1-теорема.** Тік бұрышты үшбұрыштардың бір сүйір бұрышы сәйкес түрде тең болса, олар ұқсас болады.*

***2-теорема.** Тік бұрышты үшбұрыштардың катеттері сәйкес түрде пропорционал болса, олар ұқсас болады.*

***3-теорема.** Тік бұрышты үшбұрыштардың біреуінің гипотенузасы мен катеті екіншісінің гипотенузасы мен катетіне сәйкес түрде пропорционал болса, олар ұқсас болады.*

Бұл белгілердің бастапқы екеуінің дұрыстығы өзінен-өзі анықталады. Ендеше үшінші белгіні дәлелдейік.

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \ \angle C = 90^\circ, \angle C_1 = 90^\circ, \quad \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



1

Дәлелдеу. ABC үшбұрышының BC қабырғасына $CE = C_1B_1$ болатын C_1B_1 кесіндісін қойып, $DE \parallel AB$-ны жүргіземіз *(1-сурет)*. Онда үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі бойынша ΔDEC және ΔABC ұқсас болады. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары пропорционалдығынан:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}.$$

Өрнек бойынша $CE = C_1B_1$. Демек,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{C_1B_1} \qquad (1)$$

теңдік орынды. Дегенмен, теорема шарты бойынша, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$ (2)

(1) және (2) теңдіктерден $DE = A_1B_1$ екендігін анықтайық.

$A_1B_1C_1$ және DEC үшбұрыштарын қарастырайық: 1. $CE = C_1B_1$ (өрнек бойынша); 2. $DE = A_1B_1$ (дәлелденген теңдік).

Тік бұрышты үшбұрыштардың бір катеті және гипотенузасы бойынша теңдік белгісіне қарай, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Ал, екінші жағынан $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. Олай болса, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ болады.

Теорема дәлелденді.

Есеп. Егер екі тең бүйірлі үшбұрыштан біреуінің бүйір қабырғасы және биіктігі екіншісінің бүйір қабырғасы және биіктігіне пропорционал болса, бұл үшбұрыштардың ұқсастығын дәлелде *(2-сурет)*.

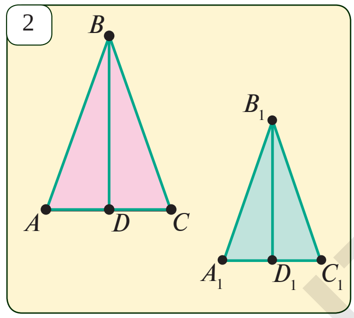
Дәлелдеу. Тік бұрышты ABD және $A_1B_1D_1$ үшбұрыштарын қарастырайық. Шарт бойынша, олардың бір катеті және гипотенузасы өзара пропорционал.

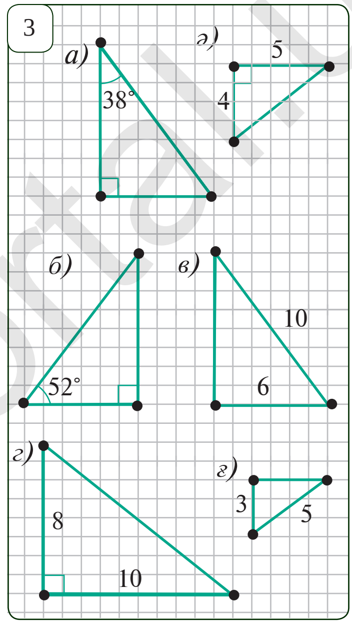
Демек, 3-теоремаға орай $\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D_1$. Онда $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Тең бүйірі үшбұрыштың табанына жүргізілген биіктіктің биссектриса да болуын ескерсек, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ болады. Нәтижеде, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында

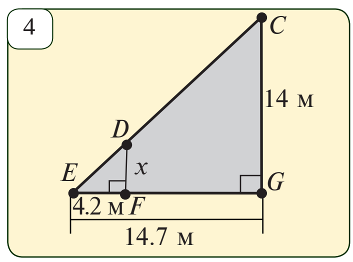
$\angle B = \angle B_1$ мен $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ теңдіктерге ие боламыз.

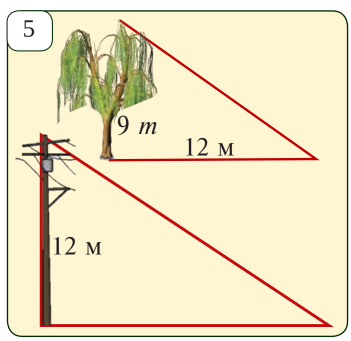
Демек, үшбұрыштар ұқсастығының *ҚБҚ* белгісі бойынша, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Қажетті растау дәлелденді.









Есептер мен тапсырмалар

11.1. 3-суреттен ұқсас үшбұрыштарды тап.

11.2. Катеттері 3 *м* және 4 *м* болған тік бұрышты үшбұрышқа ұқсас үшбұрыштардың бір катеті 27 *м* болса, екінші катеті неше *м* болады?

11.3. Аудандары 21 $м^2$ және 84 $м^2$ болған екі тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас. Егер бірінші үшбұрыштың бір катеті 6 *см* болса, екінші үшбұрыштың катеттерін тап.

11.4. Бір шеңберге екі ұқсас тік бұрышты үшбұрыш іштей сызылған. Бұл үшбұрыштардың теңдігін дәлелде.

11.5*. Катеттері 10 *см* және 12 *см* болған тік бұрышты үшбұрышқа бір бұрышы ортақ болған квадрат іштей сызылған. Егер квадраттың бір төбесі гипотенузада екендігі белгілі болса, квадраттың қабырғасын тап.

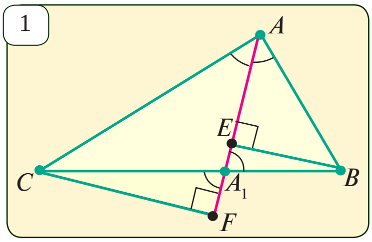
11.6*. ABC үшбұрыш берілген. Оған $ADEF$ ромбы іштей былай сызылған: D, E мен F нүктелері сәйкес түрде үшбұрыштың AB, BC және CA қабырғаларында жатады. Егер $AB = c$, $AC = b$ болса, ромбының қабырғасын тап.

11.7. 4-суретте берілген мәліметтерге орай белгісіз кесіндінің ұзындығын тап.

11.8. Тал ағашының биіктігі 9 *м*, ал электр желісі бағанының биіктігі 12 *м* (5-сурет). Егер талдың көлеңкесі 12 *м* болса, бағанның көлеңкесінің ұзындығын тап.

11.9. Анар ағашының биіктігі 3 *м* болып, оның көлеңкесі кешкісін 6 *м* болады. Биіктігі 4,2 *м* болған алма ағашының сол кездегі көлеңкесінің ұзындығын тап?

ҰҚСАСТЫҚ БЕЛГІЛЕРІНІҢ ДӘЛЕЛДЕУГЕ АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕРДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ



1-есеп. Үшбұрыштың биссектрисасы өзі тірелген қабырғаны екі қабырғаға пропорционал кесінділерге бөлуін дәлелде.

$\Delta ABC, AA_1$ — биссектриса (*1-сурет*) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{AC}{A_1C}$

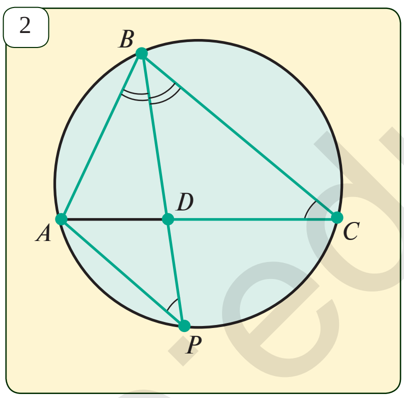
Шешуі. AA_1 түзу сызыққа BE және CF перпендикулярлар жүргіземіз. Онда, $\angle CAF = \angle BAE$ болғандықтан, тік бұрышты CAF және BAE үшбұрыштар ұқсас болады. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары пропорционалдығынан

$$\Delta CAF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE} \quad . \qquad (1)$$

Соған ұқсас

$$\Delta CA_1F \backsim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CF}{BE} \qquad (2)$$

(1) мен (2) теңдігін салыстырса, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$ яки $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$ болады. Бұл A_1B мен A_1C кесінділері AB мен AC кесінділерге пропорционал..



2-есеп. ABC үшбұрышының BD биссектрисасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңберді B және P нүктелерінде кесіп өтеді. $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$ екендігін дәлелде *(2- сурет)*.

Шешуі. ΔABP және $\angle BDC$-да:

1. $\angle DBC = \angle ABP \Leftarrow$ шарт бойынша;
2. $\angle DCB = \angle APB \Leftarrow$ өйткені олар бір доғаға тірелген.

Демек, үшбұрыштар ұқсастығыны ББ белгісі бойынша, $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$.

Есептер мен тапсырмалар

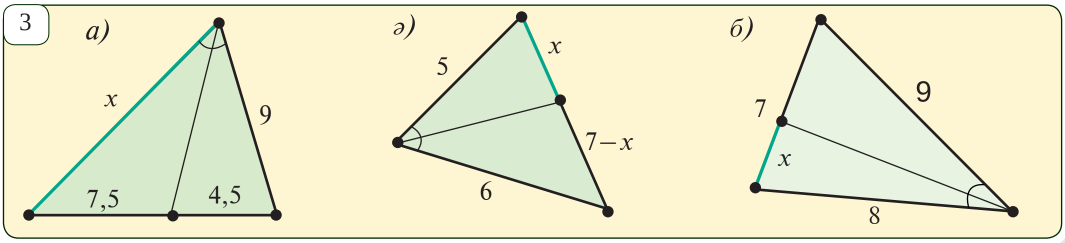
12.1. Үшбұрыш биссектрисасы өзі тірелген қабырғада бөлген кесінділері және үшбұрыштың қалған қабырғалары арасындағы пропорционалдықты өрнектеп көрсет.

12.2. Тік бұрышты ABC үшбұрышының C тік бұрышынан CD биіктігі жүргізілген. $\angle ACD = \angle CBD$ болуын дәлелде. Пайда болған фигурада неше өзара ұқсас үшбұрыштарды көрсете аласың?

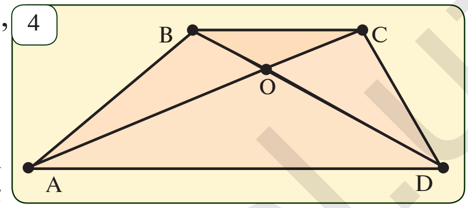
12.3. 3-суреттегі мәліметтер негізінде x-ті тап.

12.4. ABC үшбұрышының AD биссектрисасы жүргізілген. Егер CD=4,5 *м*; BD=13,5 *м* және ABC үшбұрышының периметрі 42 *м* болса, оның AB және AC қабырғаларын тап.

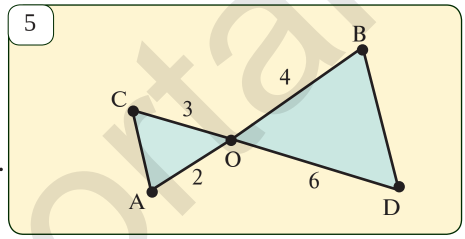
12.5. ABC үшбұрышының медианалары N нүктесінде қиылысады. Егер ABC



үшбұрышының ауданы 87 *дм*^{2} болса, *ANB* үшбұрышының ауданы неге тең?



12.6. *ABC* үшбұрышының медианалары қиылысқан *N* нүктесінен *AB* және *BC* қабырғаларына дейінгі ара қашықтықтар сәйкес түрде 3 *дм* және 4 *дм*. Егер *AB*=8 *дм* болса, *BC* қабырғасын есепте.

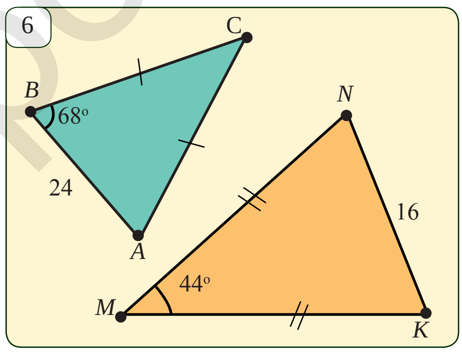


12.7*. Трапецияның табанына параллель түзу сызық бүйір қабырғаларының бірін *m:n* қатынаста бөлуі белгілі. Бұл түзу сызық оның екінші бүйір қабырғасын қандай қатынаста бөледі?

12.8. 4-суретте трапеция берілген. AOD және COB үшбұрыштардың ұқсастығын дәлелде.

12.9. 5-суретте AOC және DOB үшбұрыштардың ұқсастығын көрсет.

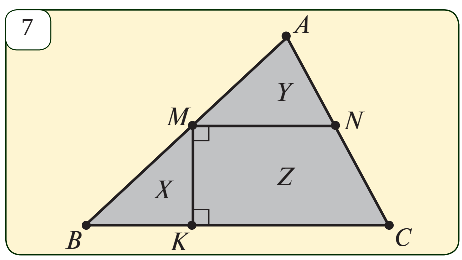
12.10. 6-суреттегі үшбұрыштар ұқсас па?



Қызық есептер

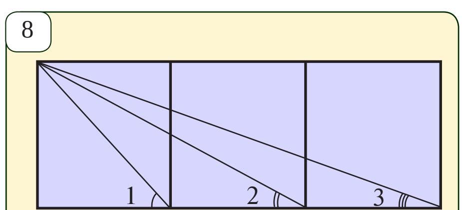
Геометрия және ағылшын тілі. Төменде ағылшын тілінде берілген геометриялық есепті шешіп көр! Мұнымен әрі ағылшын тілінен, әрі геометриядан қабілетінді сынап көресің.

1) Dissection Puzzle: Let *M* be the mid-point of the side *AB* of a given triangle *ABC*. The triangle has been dissected into parts *X*, *Y*, *Z* along the lines *MN* and *MK* passing through *M* such that *MN* is parallel while *MK* is perpendikular to the base *BC* (*picture 7*). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.



2) Look at the picture 8 and proof

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°.$$

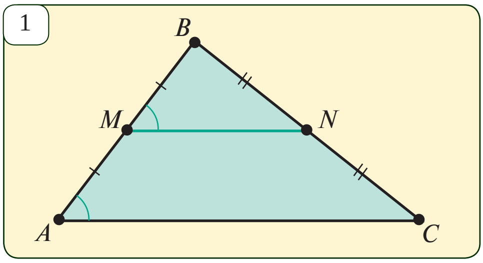


13 ІС ЖҮЗІНДІК ЖАТТЫҒУ МЕН ҚОЛДАНУ

1-есеп. Үшбұрыштардың ұқсастығын пайдаланып, үшбұрыштың орта сызығы үшбұрыштың бір қабырғасына параллель және сол қабырғаның жартысына тең екендігін дәлелде.

ΔABC, MN — *орта сызық* (*1-сурет*): $MA=MB$, $NC=NB$ $\Rightarrow$ $MN \parallel AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$

1



Шешуі. ΔABC және ΔMBN үшін:

$\angle B$ — ортақ, $\dfrac{BM}{AB}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{1}{2}$

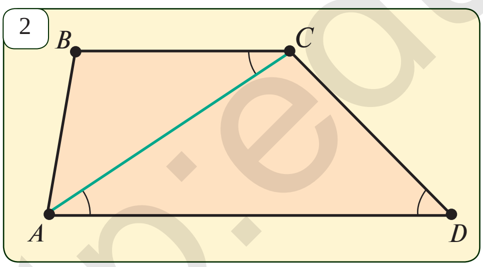
Сондықтан, үшбұрыштар ұқсастығының *ҚБҚ* белгісі бойынша, бұл екі үшбұрыш ұқсас. Енді бақылауды былайша жалғастырамыз:

$$\Delta MBN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN=\angle A, \\ \dfrac{MN}{AC}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN=\dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$$

2-есеп. Егер табандары BC және AD болған $ABCD$ трапециясының AC диагоналы оны екі ұқсас үшбұрышқа бөлсе, $AC^2=BC\cdot AD$ болуын дәлелде.

$ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ (*2-сурет*) $\Rightarrow$ $AC^2=BC\cdot AD$

2



Шешуі. **1-адым.** ABC және ACD үшбұрыштарының бұрыштарын салыстырамыз. $\angle ACB=\angle CAD$, өйткені бұл бұрыштар — іштей түрленуші бұрыштар. $\angle B \neq \angle D$, өйткені $ABCD$ — трапеция (әйтпесе, $\angle D+\angle A=\angle B+\angle A=180^\circ$, яғни $AB \parallel CD$ болып, $ABCD$ трапеция болмай қалатын еді). Ендеше, $\angle D=\angle BAC$ және $\angle ACD=\angle B$.

2-адым. ABC және ACD ұқсас үшбұрыштарының сәйкес қабырғаларының қатынасы: $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$, бұдан $AC^2=BC\cdot AD$.

? *Есептер мен тапсырмалар*

13.1. а) Бойы 170 *см* болған адам көлеңкесінің ұзындығы 1 *м* болса, биіктігі 5,4 *м* болған электр сым бағаны көлеңкесінің ұзындығын тап.

ә) Екі тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрыштары тең. Бірінші үшбұрыштың бүйір қабырғасы 17 *см*, табаны 10 *см*-ге, екінші үшбұрыштың табаны 8 *см*-ге тең. Екінші үшбұрыштың бүйір қабырғасын тап.

13.2. 3-суреттегі әрбір сызбадан ұқсас үшбұрыштарды көрсет.

13.3. ABC үшбұрышының AP медианасы BC қабырғасына параллель, төбелері AB және AC қабырғаларының бойында жатқан кез келген кесіндіні тең екіге бөлуін дәлелде.

13.4. Үшбұрыштың төбелері оның орта сызығын өз ішіне алған түзу сызықтан тең қашықтықта жатуын дәлелде.

13.5. Шеңберге іштей сызылған $ABCD$ төртбұрышының диагональдары O нүктесінде қиылысады. $\Delta AOB \backsim \Delta COD$ екенін дәлелде.

13.6. ABC үшбұрышының ішінде O нүктесі және OA, OB, OC сәулелерінде сәйкес түрде E, F, K нүктелері алынған *(4-сурет)*. Егер $AB \parallel EF$ және $BC \parallel FK$ болса, ABC және EFK үшбұрыштарының ұқсас екендігін дәлелде.

13.7*. Трапецияның диагональдары қиылысу нүктесінен өтетін түзу сызық трапеция табандарының бірін $m:n$ қатынаста бөледі. Осы түзу сызық екінші табанды қандай қатынаста бөледі?

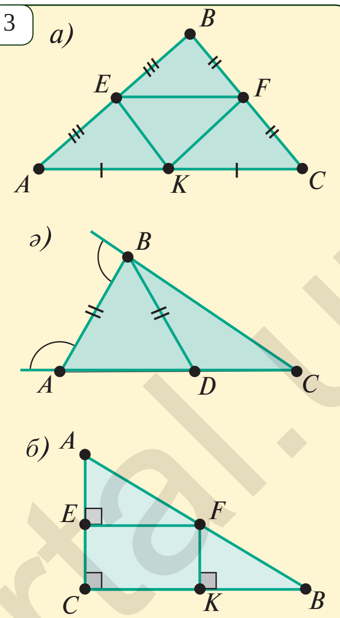
13.8. Егер ABC үшбұрышының ауданы S-ға тең болса, 5-суретте x-пен белгіленген саланың ауданын тап.

13.9. 6-суретте $EQ \parallel BC$. AQ-ді тап.

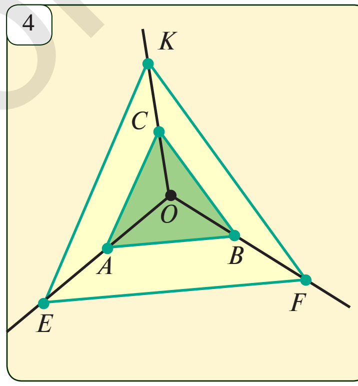
13.10. 7-суретте $AB \parallel EC$. QC-ді тап.

13.11. 8-суретте ABC үшбұрыш биіктіктері өткізілген. Неше ұқсас үшбұрыш пайда болды?

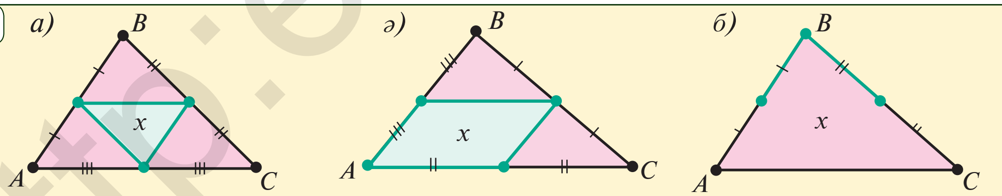
3



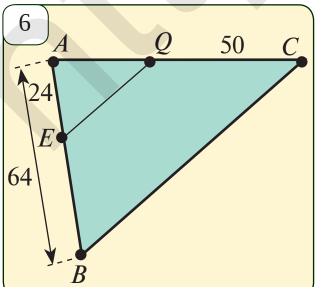
4



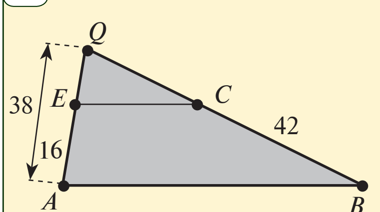
5



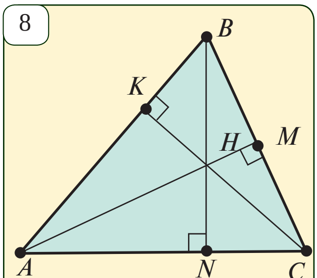
6



7



8



14 БІЛІМІҢДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. Төмендегі анықтамалардың қайсыбірі дұрыс?

А) Екі үшбұрыштың бұрыштары сәйкес түрде тең болса, олар ұқсас;
Ә) Екі үшбұрыштың қабырғалары сәйкес түрде тең болса, олар ұқсас;
Б) Екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары пропорционал және сәйкес бұрыштары тең болса, олар ұқсас;
В) Екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары және сәйкес бұрыштары тең болса, олар ұқсас.

2. Екі ұқсас үшбұрыш аудандарының қатынасы неге тең?

А) Ұқсастық коэффициентіне;
Ә) Олардың сәйкес қабырғаларының қатынасына;
Б) Олардың периметрлерінің қатынасына;
В) Ұқсастық коэффициентінің квадратына.

3. Төмендегі дәлелдеулердің қайсыбірі дұрыс?

А) Үшбұрыштардан бірінің екі бұрышы екіншісінің екі бұрышына тең болса, олар ұқсас болады;
Ә) Үшбұрыштардың бірінің екі қабырғасы екіншісінің екі қабырғасына тең болса, олар ұқсас болады;
Б) Екі үшбұрыштың бір бұрыштары тең және екі қабырғасы пропорционал болса, олар ұқсас болады;
В) Екі үшбұрыштың бір бұрыштары тең және бір қабырғасы пропорционал болса, олар ұқсас болады.

4. Дұрысын тап. Егер екі үшбұрыш ұқсас болса, олардың ...

А) Биіктіктері тең болады;
Ә) Қабырғалары пропорционал болады;
Б) Қабырғалары тең болады; В) Аудандары тең болады.

5. Ұқсас үшбұрыштар периметрлерінің қатынасы неге тең?

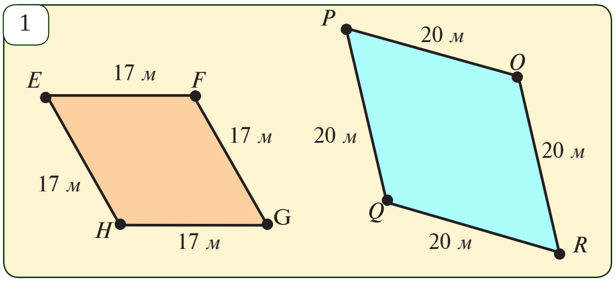
А) Сәйкес қабырғалар қатынасы квадратына;
Ә) Ұқсастық коэффициентіне;
Б) Ұқсастық коэффициенті квадратына; В) Аудандары қатынасына.

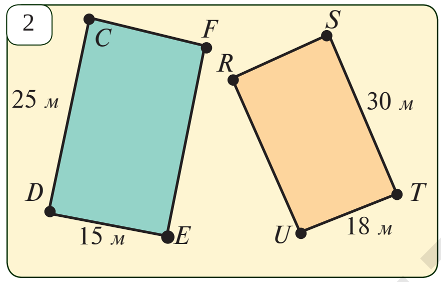
6. Қайсы жауапта 1-суреттегі ромбтар ұқсастығы дұрыс жазылған?

А) $EHGF \backsim PQRO$; Ә) $HGFE \backsim PQRO$;
Б) $GFEH \backsim QROP$; В) $EHGF \backsim QROP$.

7. 2-суреттегі көпбұрыштар ұқсас па? Неге?

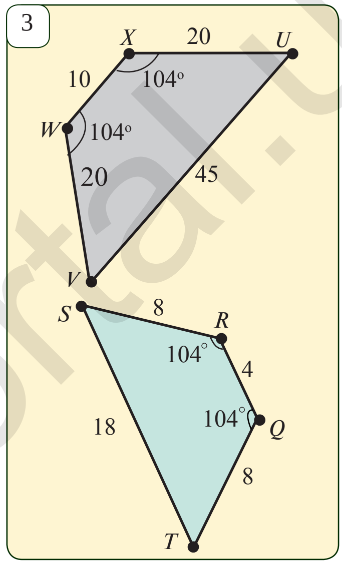
А) Иә, өйткені көпбұрыштардың сәйкес бұрыштары тең және сәйкес қабырғалары пропорционал;
Ә) Иә, өйткені көпбұрыштардың сәйкес бұрыштары пропорционал және сәйкес қабырғалары тең;
Б) Иә, өйткені көпбұрыштардың сәйкес бұрыштары тең;
В) Иә, өйткені көпбұрыштардың сәйкес қабырғалары пропорционал;





8. 3-суреттегі SRQT және VWXU трапециялар ұқсас па? Егер ұқсас болса, олардың ұқсастық коэффициенті нешеге тең?

А. Иә, $k = 0,4$; Ә. Иә, $k = 0,5$;
Б. Иә, $k = 0,8$; В. Жоқ.

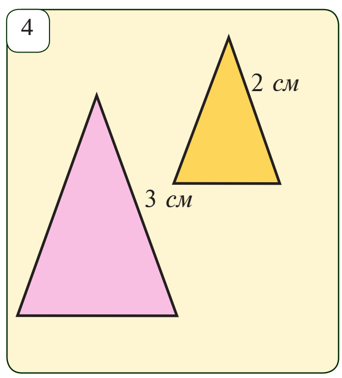


9. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары 4 *см* және 13 *см*. Егер бірінші үшбұрыштың ауданы 16 см^2-ге тең болса, екінші үшбұрыштың ауданын тап.

А. 169 см^2; Ә. 16 см^2;
Б. 52 см^2; В. 189 см^2;

10. Екі ұқсас үшбұрыш аудандарының қатынасы 144-ке тең. Олардың сәйкес қабырғаларының қатынасы нешеге тең?

А. 13-ке; Ә. 12-ге; Б. 14-ке; В. 16-ға;



11. 4-суреттегі үшбұрыштар ұқсас. Суреттегі шамаларға орай үлкен үшбұрыш ауданының кіші үшбұрыш ауданына қатынасын тап.

А. 9:4; Ә. 3:2;
Б. 4:9; В. 2:3;

12. Екі ұқсас үшбұрыш аудандарының қатынасы *a* -ға тең болса, бұл үшбұрыштардың ұқсастық коэффициенті нешеге тең болады?

А. $1:a^2$; Ә. a^2 ; Б. $\sqrt{a}$; В. $1:a$;

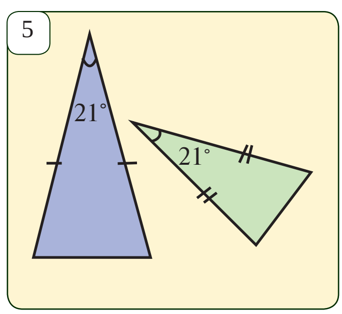
13. 5-суретте келтірілген тең бүйірлі үшбұрыштар ұқсас па? Неге?

А. Иә, өйткені олардың екіден қабырғалары пропорционал және арасындағы бұрышы тең;

Ә. Жоқ, өйткені олардың екі бұрышы өзара тең емес;

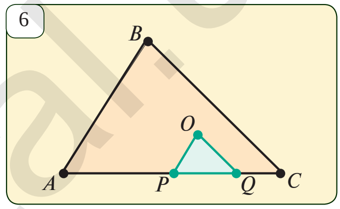
Б. Жоқ, өйткені олардың сәйкес бұрыштары тең емес;

В. Жоқ, өйткені олардың қабырғалары пропорционал емес;

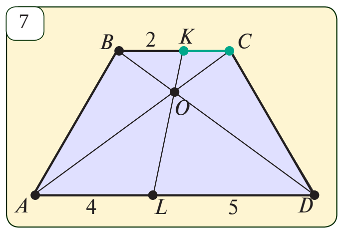


II. Есептер

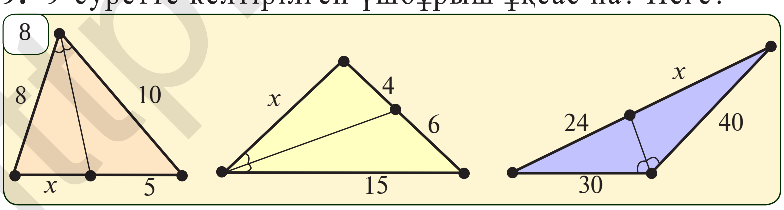
1. ABC үшбұрышының AB және AC қабырғаларының орталары сәйкес түрде E және F нүктелері болсын. AEF үшбұрышының ауданы 3 $см^2$ болса, ABC үшбұрышының ауданын тап.
2. ABC үшбұрышының AC қабырғасына параллель түзу сызық AB және BC қабырғаларын сәйкес түрде N және P нүктелерінде қиып өтеді. Егер $AN = 4, NB = 3, BP = 3{,}6$ болса, BC қабырғасын тап.
3. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының AB қабырғасында K нүктесі алынған. Егер $AK = 3, BK = 2$ және үшбұрыштың BD биіктігі 4-ке тең болса, K нүктеден AC кесіндісіне дейінгі қашықтықты тап.
4. $ABCD$ параллелограмның BC қабырғасы арасындағы К нүктеден жүргізілген DK сәулесі мен AB сәулесі F нүктесінде қиылысады. AD=4, DK=5, DC=5 болса, AFD үшбұрышы периметрін есепте.

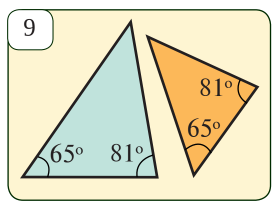


5. ABC үшбұрыштың ішкі саласында алынған O нүктесінен AB және BC қабырғаларына параллель түзу сызықтар жүргізілген. Олар AC қабырғасын сәйкес түрде P және Q нүктесінде қиып өтеді. $PQ = 2$, $AC = 7$ және ABC үшбұрышының ауданы 98-ге тең болса, POQ үшбұрышы ауданын анықта (*6*-сурет).

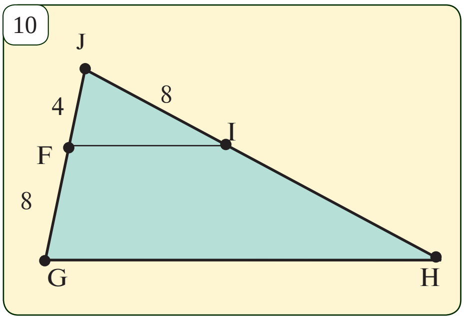


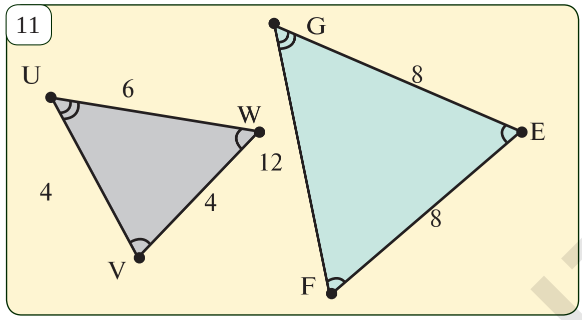
6. $ABCD$ трапецияның BC және AD табандарында сәйкес түрде K және L нүктелері алынған. KL кесіндісі трапецияның диагональдары қиылысқан нүктеден өтеді. Егер AL =4, LD =5 және BK =2 болса, KC кесіндісін тап (7-сурет).
7. Екі ұқсас үшбұрыштың біріншісінің ауданы 15 $мм^2$, ал екіншісінің ауданы 135 $мм^2$. Бірінші үшбұрыштың бір қабырғасы 6 *мм* болса, екінші үшбұрыштың оған сәйкес қабырғасын тап?
8. 8-суретте берілгендерге орай белгісіз кесіндіні тап.
9. 9-суретте келтірілген үшбұрыш ұқсас па? Неге?



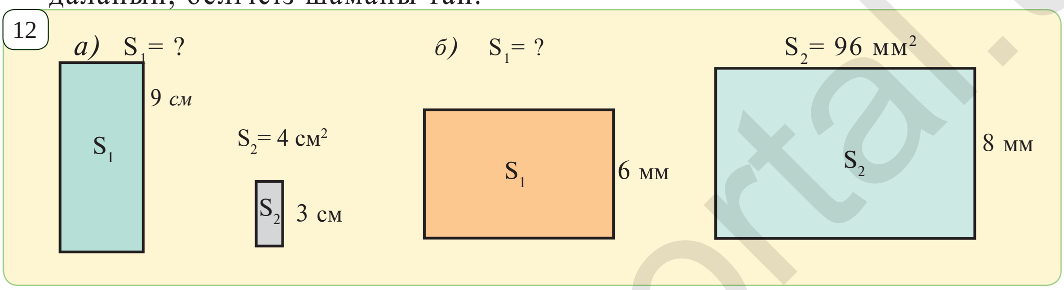


10. 10-суретте $JIF \backsim HJG$. IH кесіндінің ұзындығын тап
11. 11-суретте келтірілген үшбұрыштар ұқсас па? Егер ұқсас болса, олардың ұқсастық коэффициентін тап.
12. Екі ұқсас үшбұрыштардың біріншісінің ауданы 24 мм^2, ал екіншісінің ауданы 216 мм^2. Бірінші үшбұрыштың биіктіктерінің бірі 8 мм болса, екінші үшбұрыштың сәйкес биіктігін тап.

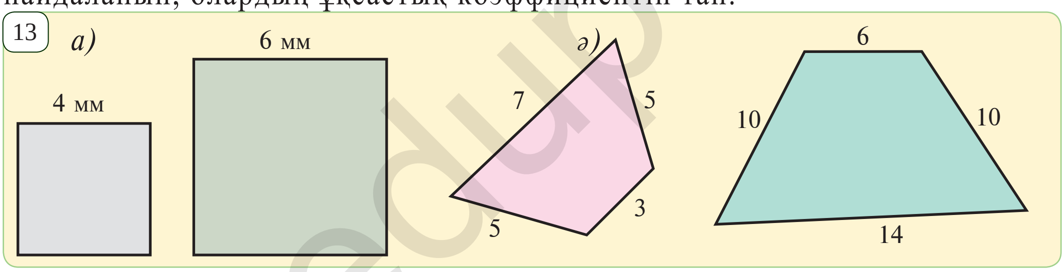




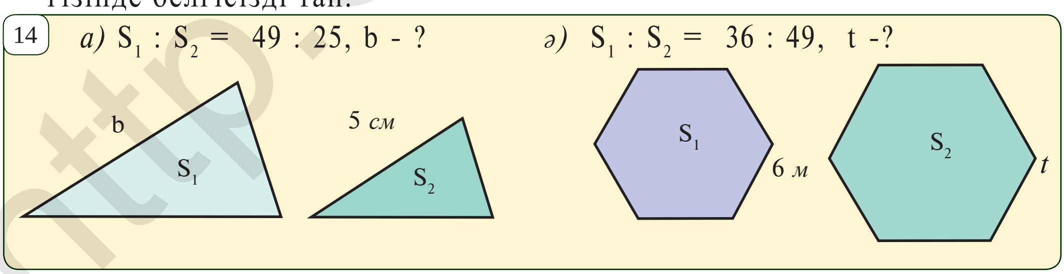
13. 12-суретте бейнеленген көпбұрыштар ұқсас. Берілген мәліметтерді пайдаланып, белгісіз шаманы тап.



14. 13-суретте бейнеленген көпбұрыштар ұқсас. Берілген мәліметтерді пайдаланып, олардың ұқсастық коэффициентін тап.



15. 14-суретте бейнеленген көпбұрыштар ұқсас. Берілген мәліметтер негізінде белгісізді тап.

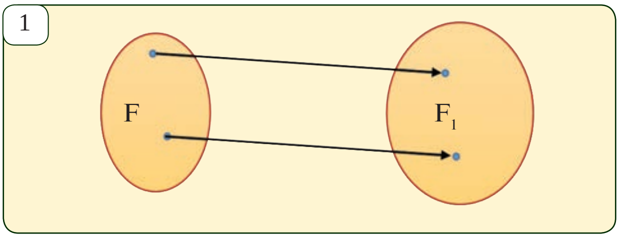


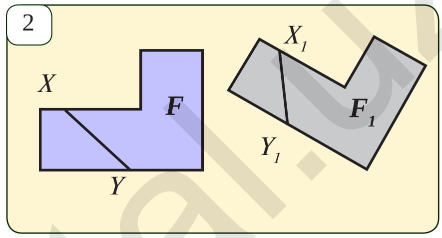
16. Шынар ағашының көлеңкесі 12 *м*. Ал оның жанындағы көпқабатты үйдің көлеңкесі 6 *м*. Егер шынар ағашы үйден 16 *м* биік болса, үйдің биіктігі қанша болады?

17. Ескерткіштің биіктігі 9 *м* болып, үйдің көлеңкесі 12 *м*. Ескерткіш жанындағы терек ағашының көлеңкесі 16 *м*. Теректің биіктігі қанша болады?

15 ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТҮРЛЕНДІРУ. ҚОЗҒАЛЫС ЖӘНЕ ПАРАЛЛЕЛЬ КӨШІРУ

Жазықтықта берілген F фигураның әрбір нүктесі қандайда бір тәсілмен көшірілсе, жаңа F_1 фигура пайда болады (1-сурет). Егер осы көшіруде (кескіндеуде) бірінші фигураның түрлі нүктелері екінші фигураның түрлі нүктелеріне көшірілсе (кескіндеу өзара бірдей мәнде болса), бұл көшіру *геометриялық пішін түрлендіру* деп аталады.





Егер пішін кескіндеуде жазықтықтың барлық нүктелері көшетін болса, онда жазықтықтың өзін-өзіне кескіндеуі туралы да айтуға болады. Төменде жазықтықтағы кейбір геометриялық түрлендірулерге тоқталамыз.

Нүктелер арасындағы қашықтықты сақтайтын пішін түрлендіру *қозғалыс* деп аталады.

Анықтамаға орай, пішін түрлендіруде F фигураның кез келген X және Y нүктелері F_1 фигураның қандайда бір X_1 және Y_1 нүктелеріне өткен болып, $XY = X_1Y_1$ теңдік орындалса (яғни арақашықтық сақталса), мұндай пішін түрлендіру қозғалыс болады (2-сурет).

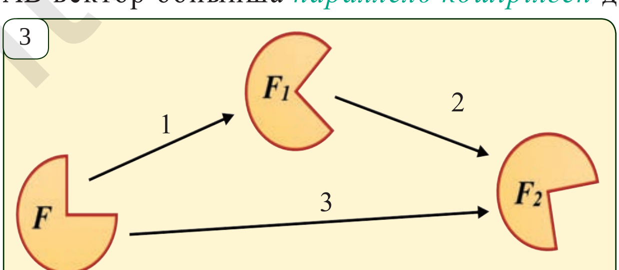
Қозғалыстың төмендегі қасиеттерін келтіруге болады.

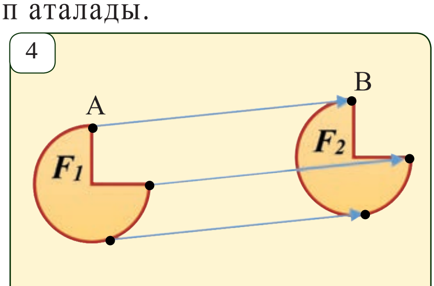
Қозғалыста түзу сызық – түзу сызыққа, сәуле – сәулеге, кесінді – оған тең кесіндіге, бұрыш – оған тең бұрышқа, үшбұрыш – оған тең үшбұрышқа көшеді (кескінделеді).

Айталық, F фигурасы бірінші қозғалыс нәтижесінде F_1 фигураға, ал F_1 фигурасы екінші қозғалыс жәрдемімен F_2 фигураға өткен болсын. Нәтижеде, F фигурасы осы екі қозғалыс жәрдемімен F_2 фигурасына көшеді және бұл көшу өз кезегінде тағы қозғалыс болады (3-сурет).

Жазықтықта қандайда бір қозғалыс көмегімен бірін екіншісіне көшіру мүмкін болған фигуралар тең деп аталады.

Жазықтықта қандайда бір $\overline{AB}$ вектор және кез келген X нүкте берілген болсын. Егер X_1 нүкте үшін $XX_1 = AB$ шарт орындалса, X нүктесі X_1 нүктеге AB вектор бойынша *параллель көшірілген* деп аталады.

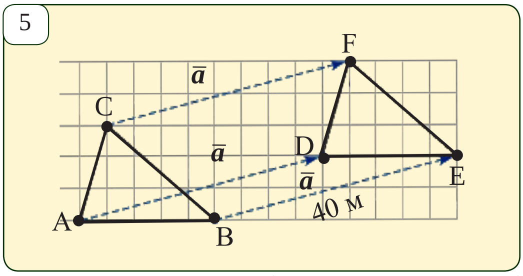




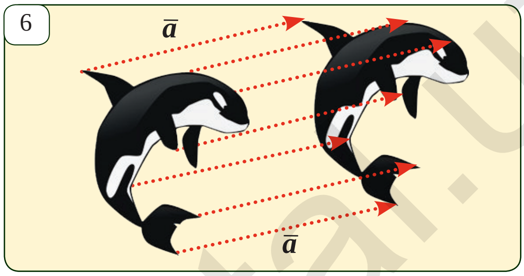
Егер жазықтықта берілген F фигураның әрбір нүктесі $\overline{AB}$ вектор бойынша көшірілсе (4-сурет), жаңа F_1 фигура пайда болады. Онда F_1 фигурасы F_2 фигураға параллель көшірілген делінеді. Параллель көшіруде F_2 фигураның әрбір нүктесі бірдей бағытта бірдей қашықтыққа көшірілген болады.

5-суретте бейнеленген үшбұрыштың әрбір нүктесі бастапқы жағдайына қатысты 40 м-ге параллель көшкен. 6-суреттегі дельфин де $\overline{a}$ вектор бойынша параллель көшірілген.

5



6



Параллель көшіру қозғалыс екені белгілі. Сондықтан параллель көшіруде түзу сызық – түзу сызыққа, сәуле – сәулеге, кесінді – оған тең кесіндіге көшеді, тағы сол сияқты.

Айталық, $\overline{AB} = (a; b)$ вектор бойынша параллель көшіруде F фигурасының нүктесі $X\,(x; y)$ F_1 фигурасының нүктесі $X_1\,(x_1; y_1)$-ге өтсін. Онда анықтамаға орай төмендегіге ие боламыз:

$x_1 - x = a\,,\quad y_1 - y = b$ немесе $x_1 = x + a\,,\quad y_1 = y + b.$

Бұл теңдіктер параллель көшіру формулалары деп аталады.

1-есеп. $\overline{p} = (3; 2)$ вектор бойынша параллель көшіруде $P\,(-2; 4)$ нүктесі қайсы нүктеге көшеді?

Шешуі. Жоғарыдағы параллель көшіру формулаларын пайдаланамыз:

$x_1 = -2 + 3 = 1,\qquad y_1 = 4 + 2 = 6\,.$ ***Жауабы:*** $P_1(1; 6)$.

Есептер мен тапсырмалар

15.1. $p = (-2; 1)$ вектор бойынша параллель көшіруде а) $(3; -2)$; ә) $(0; 2)$; б) $(2; -5)$ нүктесі қайсы нүктеге көшеді?

15.2. Параллель көшіруде $A(4; 2)$ нүктесі $B(3; 7)$ нүктеге көшеді. Параллель көшіру қайсы вектор бойынша орындалады?

15.3. Параллель көшіруде а) түзу сызық – түзу сызыққа; ә) сәуле – сәулеге; б) кесінді – оған тең кесіндіге көшетінін дәлелде.

15.4. Параллель көшіруде $(1; 2)$ нүктесі $(1; -1)$ нүктеге өтеді. Координата басы осы түрлендіруде қайсы нүктеге өтеді?

15.5. Параллель көшіруде $(3; 4)$ нүктесі $(2; -4)$ нүктеге өтеді. Осы түрлендіруде координата басы қайсы нүктеге өтеді?

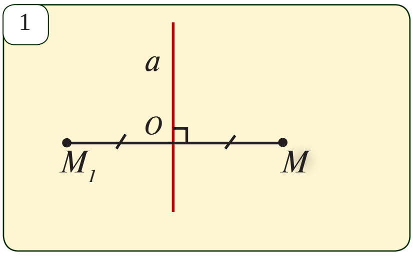
15.6. $A(2; 1)$ нүктесі $B(1; 0)$ нүктеге, ал $C(3; -2)$ нүктесі $D(2; -3)$ нүктеге өтетін параллель көшіру бар ма?

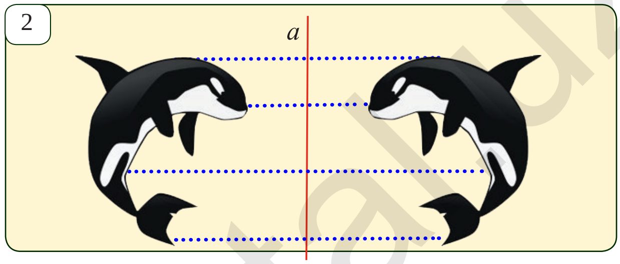
15.7. $A(-2; 3)$ нүктесі $B(1; 2)$ нүктеге, ал $C(4; -3)$ нүктесі $D(7; -2)$ нүктеге өтетін параллель көшіру бар ма?

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берілген. Параллель көшіруде A_1D кесінді B_1C кесіндіге өтеді. Осы көшіруде AA_1 кесінді қайсы кесіндіге өтеді?

16 ОСЬКЕ ҚАТЫСТЫ СИММЕТРИЯ

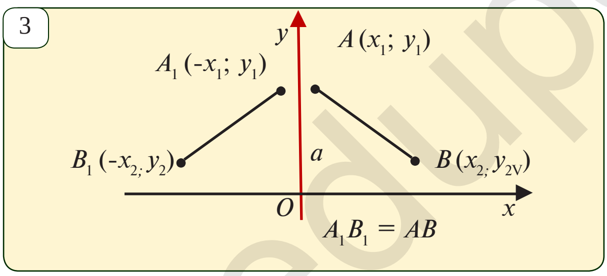
Жазықтықтағы қандайда бір *a* түзу сызық және онда жатпайтын кез келген *M* нүкте берілген болсын. *M* нүктеден *a* түзу сызыққа перпендикуляр түсіреміз және оның табанын О-мен белгілейміз (1-сурет). Перпендикулярда жатқан M_1 нүктесі үшін $MO = M_1O$ болса, *M* және M_1 нүктелерін *a* түзу сызығына немесе *оське қатысты симметриялық* нүктелер деп атайды.

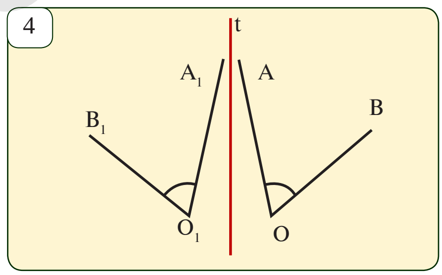




Жазықтықтың кез келген *M* нүктесіне *a* түзу сызыққа (оське) қатысты симметриялы болған M_1 нүктесін сәйкес қоямыз. Жазықтықты осылай өзіне-өзін кескіндеуді *оське қатысты симметрия* дейміз. Ал түзу сызықты *симметрия осі* деп атаймыз.

2-суретте бейнеленген дельфиндер өзара *a* оське қатысты симметриялы.





Оське қатысты симметрия қозғалыс болып табылады, яғни ол нүктелер арасындағы қашықтықты сақтайды.

Осы растауды дәлелдейік. 3-суретте кез келген $A\ (x_1;\ y_1)$ және $B\ (x_2;\ y_2)$ нүктелер болып, ал $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ және $B_1\ (-x_2;\ y_2)$ нүктелері олардың *a* түзу сызығына (Oy осіне) қатысты сәйкес түрдегі симметриялық кескінделуі болсын. $AB = A_1B_1$ екенін көрсетеміз.

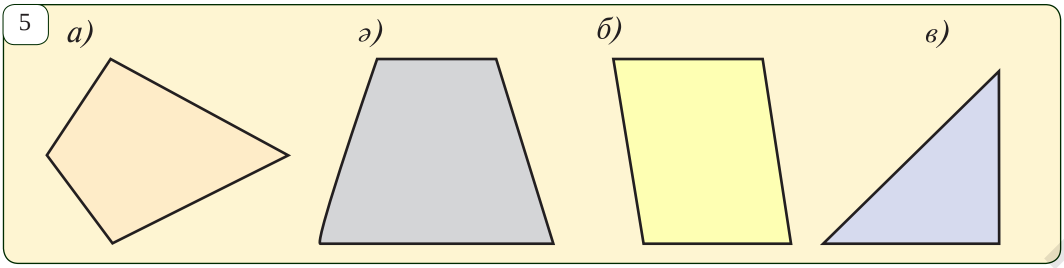
Шынында, екі нүкте арасындағы қашықтықты есептеу формуласына орай

$$AB = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

$$A_1B_1 = (-x_2-(-x_1))^2+(y_2-y_1)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

яғни бұл қашықтықтар өзара тең. Бұдан оське қатысты симметрия әрбір кесінді өзіне тең кесіндіге өтуі де келіп шығады.

Дәл осыған ұқсас, оське қатысты симметрияда бұрыш – өзіне тең бұрышқа өтуін де көрсетуге болады. Мұнда тек бұрыштың бағыты өзгереді (4-сурет).



Координаталар жазықтығындағы $A\ (x;\ y)$ нүкте Ox осіне қатысты симметрияда $A_1\ (x;\ -y)$ нүктеге, Oy осіне қатысты симметрияда $A_2\ (-x;\ y)$ нүктеге өтеді.

Есептер мен тапсырмалар

16.1. (1; 2), (0; 2), (2; 2) нүктелері координата осьтеріне қатысты симметрияларда қайсы нүктелерге өтеді? а) OX осіне қатысты; ә) OY осіне қатысты.

16.2. (2; 4) нүктесі координата осіне қатысты симметриялық кескіндеуде (2; -4) нүктеге өтеді. Кескіндеу қайсы координата осіне қатысты орындалады?

16.3. 5-суретте бейнеленген фигуралардың қайсылары симметрия осіне ие? Осы фигураларды дәптеріңе көшіріп, олардың симметрия осьтерін сал.

16.4. Тік төртбұрыш, квадрат, ромб, тең бүйірлі трапеция және тең бүйірлі үшбұрыштың неше симметрия осі бар?

16.5. Кез келген ABC үшбұрыш сал. Оның C төбесінен өтетін түзу сызыққа қатысты оған симметриялы болған үшбұрышты кескінде.

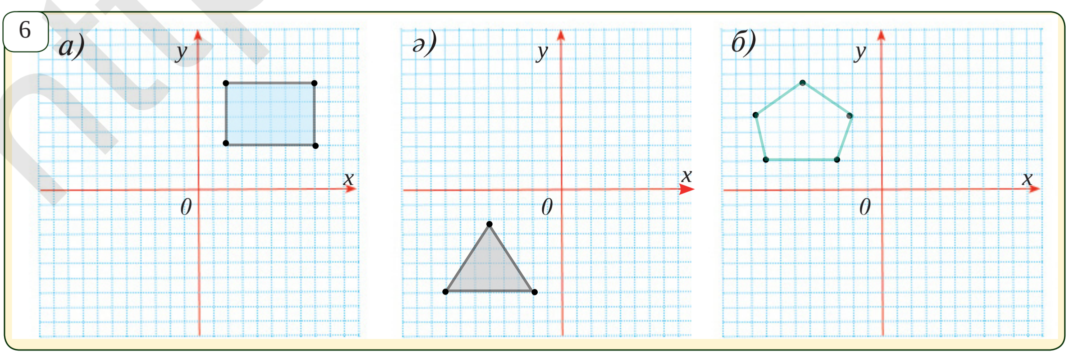
16.6. Координаталар жазықтығында төбелері A (3; 2), B (2; 7), C (6; 7) және D (7; 2) нүктелерде болған $ABCD$ параллелограмда Oy осіне қатысты симметриялы болған $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмды кескінде.

16.7. Координаталар жазықтығында $y = x + 4$ функция графигін сал. Осы графикке Ox осіне қатысты симметриялы болған түзу сызықты кескінде және ол қайсы функция графигі екенін анықта.

16.8. Солдан оңға да, оңнан солға да қарай оқыса болатын сөздер полиндром делінеді. Мына полиндром сөздердің қайсыларының симметрия осі бар?

КЕЗЕК ҚАБАҚ НАН SOS КЕБЕК АНА МУМ РАДАР

16.9. 6-суреттегі координаталар жазықтығында бейнеленген фигураларды дәптеріңе көшіріп ал. Координаталар жазықтығындағы осы фигураларға Ox және Oy осьтеріне қатысты симметриялы болған фигураларды сал.



17 ЦЕНРЛІК СИММЕТРИЯ ЖӘНЕ БҰРУ

Жазықтықтағы A және A_1 нүктелер O нүктеге қатысты симметриялы делінеді, егер $AO = OA_1$ яғни O нүктесі AA_1 кесіндінің центрі болса (1-сурет).

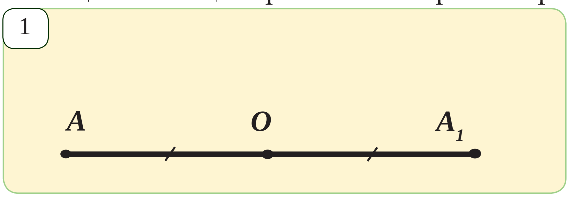
Егер жазықтықта F фигураның әрбір нүктесі O нүктеге қатысты симметриялы нүктеге көшсе (2-сурет), жаңа F_1 фигурасы пайда болады. Бұл түрлендіруде F және F_1 фигуралар *O нүктесіне қатысты симметриялы* делінеді. 3-суреттегі дельфиндер суреті O нүктеге қатысты симметриялы фигуралар болады.

Нүктеге қатысты симметрия – қозғалыс болып табылады.

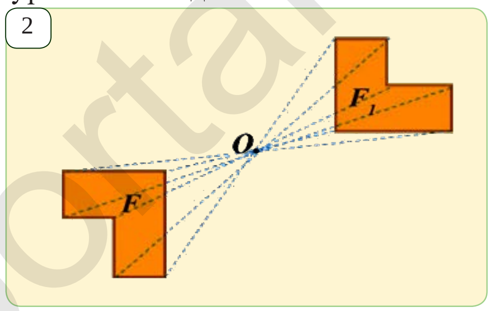
Егер F фигурасы O нүктеге қатысты симметриялы түрлендіруде өзіне көшірілсе, ол *центрлік симметриялы фигура* деп аталады.

Мысалы, параллелограмм (4-сурет) диагональдарының қиылысу нүктесі O-ға қатысты центрлік симметриялы фигура есептеледі.

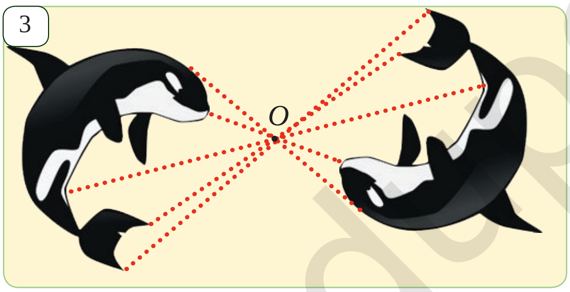
1



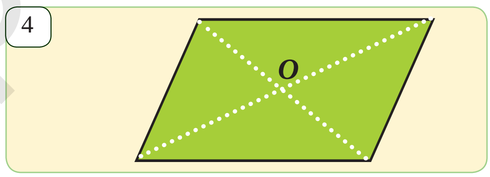
2



3



4

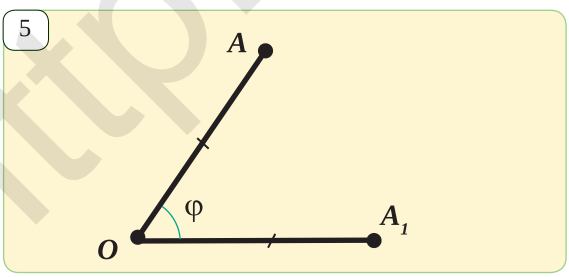


1-есеп. O (2; 4) нүктеге қатысты симметрияда A (1; 2) нүкте қайсы нүктеге өтеді?

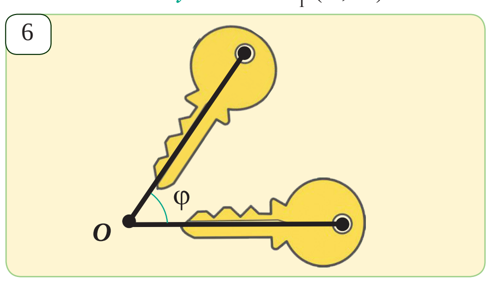
Шешуі. A_1 $(x; y)$ ізделінген нүкте болсын. Анықтамаға орай, O нүктесі AA_1 кесіндінің ортасы. Демек, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$.

Бұл теңдіктерден $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$. *Жауабы:* A_1 (3; 6).

5



6



Айталық, жазықтықта O нүкте және φ бұрыш берілген болып, пішін түрлендіруде жазықтықтың кез келген A нүктесі осындай A_1 нүктесіне көшеді, $OA = OA_1$ және $\angle AOA_1 = \varphi$ болсын. Мұндай пішін түрлендіру жазықтықты O нүктесінің айналасында φ бұрышқа *бұру* деп аталады (5-сурет).

Егер жазықтықтағы F фигураның әрбір нүктесін O нүктеге қатысты φ бұрышқа бұрсақ, жаңа F_1 фигура пайда болады. Мұнда F фигурасы O нүктеге қатысты φ бұрышқа бұруда F_1 фигураға өтті делінеді. 6-суретте кілт суреті мен оны қандайда бір бұрышқа бұруда пайда болған фигура келтірілген.

Нүктеге қатысты бұру да қозғалыс болады.

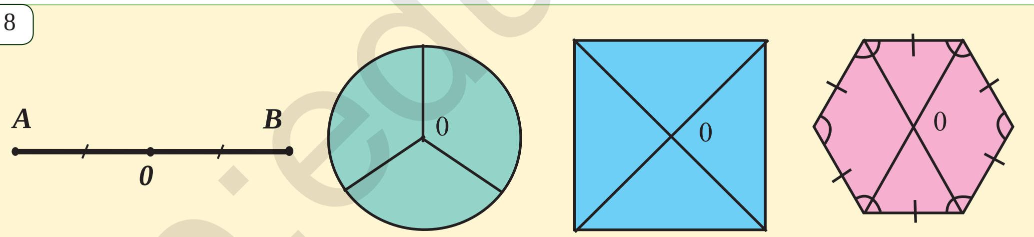
O нүктеге қатысты 180° бұрышқа бұру O нүктеге қатысты центрлік симметриядан құралған болады.

Координаталарымен берілген $A\ (x;\ y)$ нүкте координата басына қатысты симметрияда $A_1\ (-x;\ -y)$ нүктеге өтеді: $A\ (x;\ y) \longrightarrow A_1\ (-x;\ -y)$.

Табиғатта симметрияға әр сәтте кездесуге болады. Мысалы, тірі жандардың көпшілігі, атап айтсақ, адам мен жануарлардың кеудесі, өсімдіктердің жапырағы мен гүлі симметриялы түзілген (7-сурет). Сондай-ақ өлі табиғат элементтері, мысалы, қар түйіршігі, тұз кристалдары, заттардың молекулалық құрылымы да ғажап симметриялық фигуралардан құралған. Табиғаттағы осы сұлулық пен кемелдіктен үлгі алған құрылысшы, инженер, сәулеткер сияқты шығармагерлер жаратқан көптеген ғимараттар, құрылғылар мен механизмдер, техника және транспорт құралдары да симметриялы етіп жаратылған.

7

8



Есептер мен тапсырмалар

17.1. O (-2; 3) нүктеге қатысты центрлік симметрияда A (4; 2) нүкте қайсы нүктеге өтеді?

17.2. 8-суретте бейнеленген фигураларда O нүкте симметрия центрі екенін негізде.

17.3. (-2; 5), (2; 2), (-6; 12) нүктелер координата басына қатысты центрлік симметрияда қайсы нүктелерге өтеді?

17.4. Центрлік симметрияның қозғалыс екенін дәлелде.

17.5. Параллелограмның (4-сурет) диагональдарының қиылысу нүктесі O-ға қатысты центрлік симметриялы фигура екенін дәлелде.

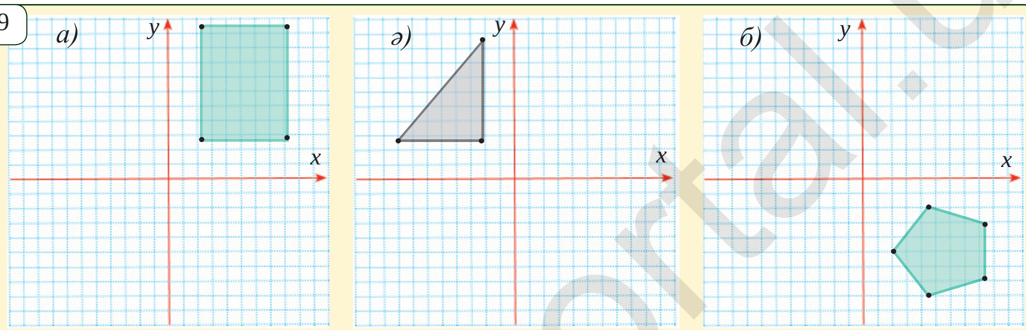
17.6. Тік төртбұрыш, квадрат, параллелограмм, бұрыш, түзу сызық және тең бүйірлі үшбұрыштардың қайсылары центрлік симметриялы фигурадан құралған болады? Олардың симметриялық центрі қайда орналасқан?

17.7. Кез келген AB кесінді және онда жатпайтын M нүкте сал. AB кесіндіге M нүктесіне қатысты симметриялы болған A_1B_1 кесіндіні кескінде.

17.8. Кез келген ABC үшбұрыш сал. а) C төбесіне қатысты; ә) медианаларының қиылысу нүктесіне қатысты симметриялы үшбұрышты кескінде.

17.9. Координата жазықтығында төбелері A (3; 2), B (2; 7), C (6; 7) және D (6; 2) нүктелерде болған $ABCD$ параллелограмға координата басы O(0, 0) нүктесіне қатысты симметриялы болған $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмды кескінде.

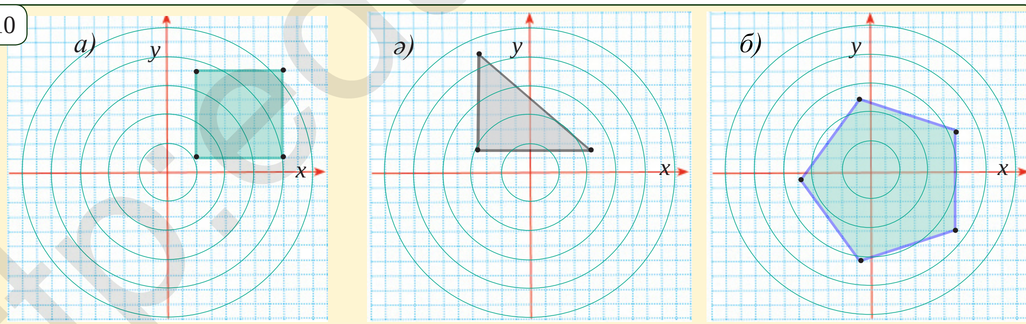
9



17.10. 9-суреттегі координаталар жазықтығында бейнеленген фигураларды дәптеріңе көшіріп ал. Осы координаталар жазықтығында бұл фигураларға координата басына қатысты симметриялы фигураларды сал.

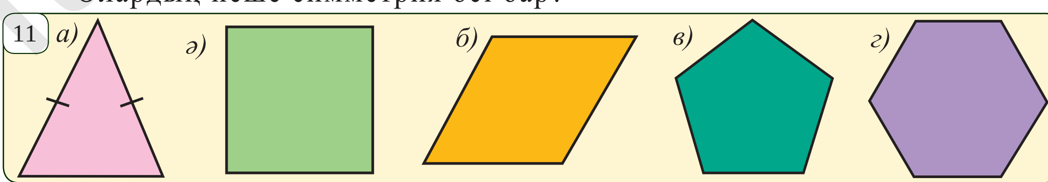
17.11. 10-суреттегі координаталар жазықтығында бейнеленген фигураларды дәптеріңе көшіріп ал. Осы координаталар жазықтығында квадратты 90°-қа, үшбұрышты 180°-қа және бесбұрышты 120°-қа бұр.

10



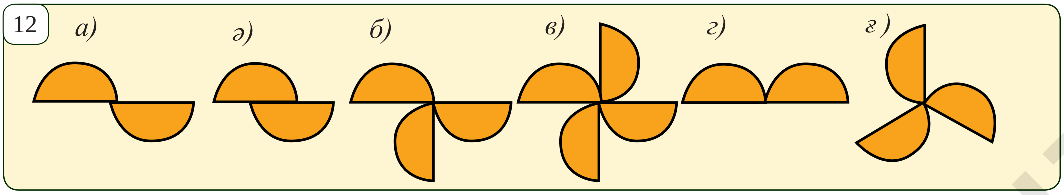
17.12. 11-суреттегі көпбұрыштар қандай симметрияға ие екенін анықта. Олардың неше симметрия осі бар?

11

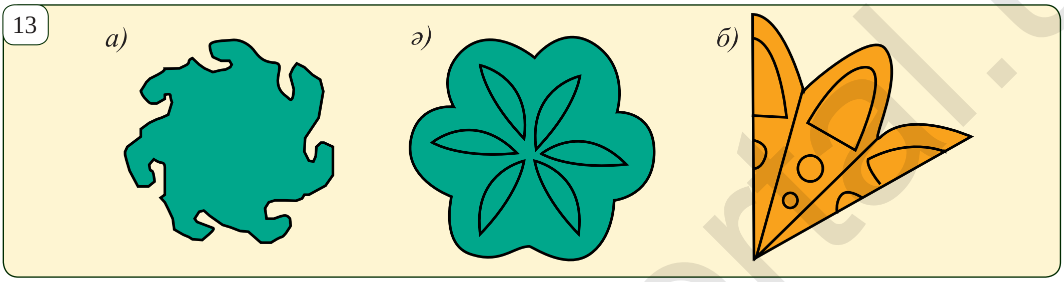


17.13. М, Н, С, Х, З, В, Т, Й, У, Ө, Д, Б, Һ, К, Ч, И, Е, А әріптері қандай симметрияға ие екенін анықта.

17.14. 12-суреттегі фигуралар бірнеше бірдей жарты шеңберден құралған. Бұл фигураларды өзін-өзіне өткізетін бұру бар немесе жоқ екенін анықта. Егер бар болса, ол қандай бұру болады?



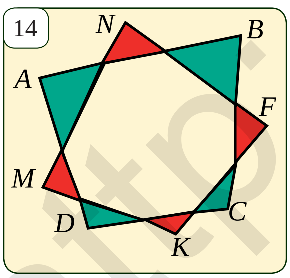
17.15. 13-суреттегі фигуралардың қайсылары симметриялы центрге ие? Қандай бұрышқа бұруда бұл фигуралар өзіне-өзі өтеді?

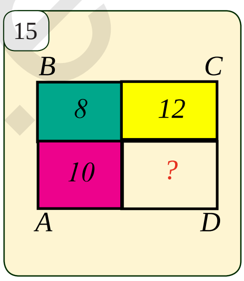


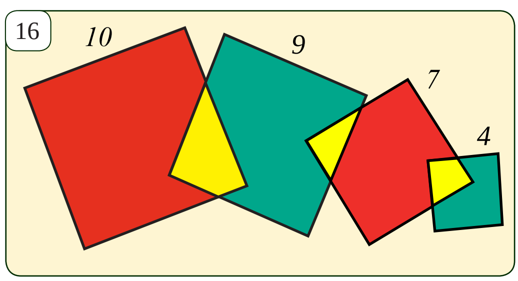
17.16. Екі *ABCD* және *MNPK* теңдей, яғни тең ауданға ие болған төртбұрыштар бір-бірінің үстіне 14-суретте көрсетілгендей етіп қойылған. Қызыл түстегі үшбұрыш аудандарының қосындысы жасыл түске боялған үшбұрыштар ауданы қосындысына тең екенін көрсет.

17.17. *ABCD* тік төртбұрыш қабырғаларына параллель түзу сызықтармен төрт тік төртбұрышқа бөлінген. 15-суретте берілгендерді пайдаланып, боялмаған тік төртбұрыш ауданын тап.

17.18. 16-суреттегі квадраттардың қабырғалары 10 *см*, 9 *см*, 7 *см* және 4 *см*. Қызыл түстегі квадраттардың ауданының қосындысы 112 *см*^{2}-ге тең. Көк түстегі квадраттардың ауданының қосындысын тап.



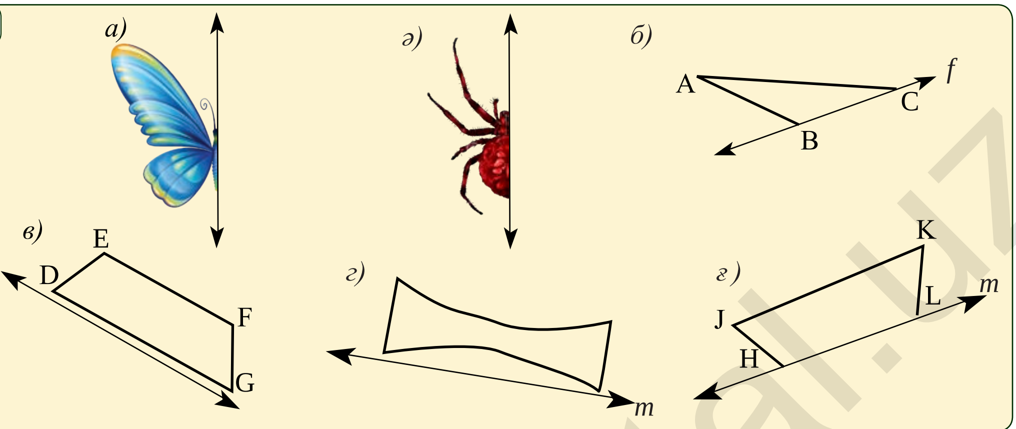




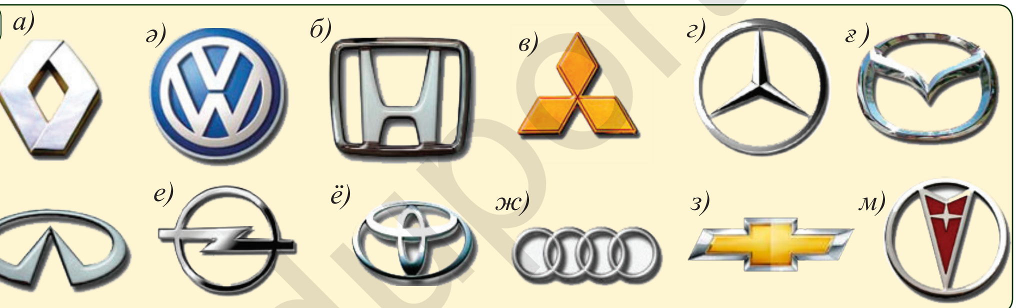
"Қар түйіршіктері" жоба жұмысы

Табиғатта барлық қар түйіршіктері симметриялық фигураға ие болады және біріне-бірі ұқсас болмайды. Әрбір қар түйіршігі центріне қатысты 60°-қа бұруда өзіне-өзі өтеді. 60°-қа бұруда өзіне-өзі өтетін фигураларды қағаздан қалай қиып алуға болады? Бірнеше түрлі фигурадағы қар түйіршіктерін қағаздан қиып ал.

17.19. 17-суретте бейнеленген фигураларды дәптеріңе көшіріп ал және берілген оське қатысты симметриялық кескіндемесін сал.

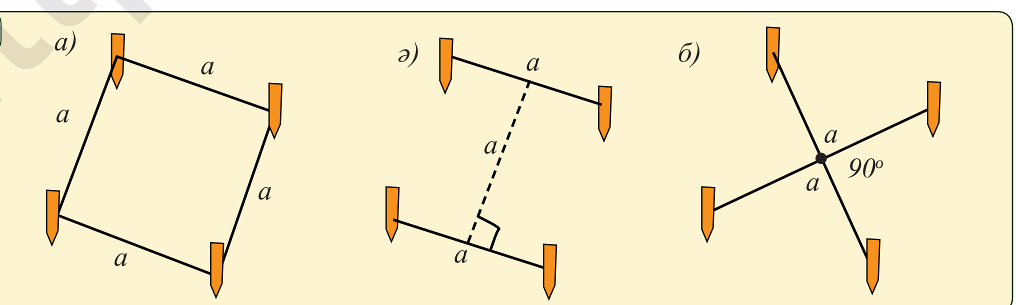
17


17.20. 18-суретте бейнеленген автомобиль компанияларының логотиптері қандай симметрияға ие екенін анықта.

18


"Гүлзардағы геометрия" жоба жұмысы.

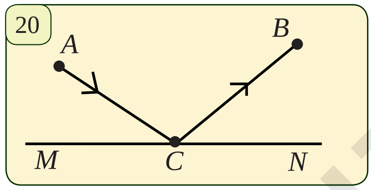
Үш дос – Әли, Уәлиі мен Сәлім квадрат пішінді гүлзар жаратпақшы. Әли квадрат пішінді гүлзарды 4 қазыққа 4 бірдей ұзындықтағы жіпті тартып бөлмекші (19.а-сурет). Уәли квадрат пішінді гүлзарды 2 бірдей ұзындықтағы жіпті қазықтарға тартып, оларды параллель түрде араларындағы қашықтықты жіп ұзындығына тең етіп орнатып бөлмекші (19.ә-сурет). Ал Сәлім 2 бірдей ұзындықтағы жіптердің ортасын түйіп, олардың орталары беттесе түсетін және біріне-бірі перпендикуляр етіп тартып қазықтарға байлап бөлмекші (19.б-сурет). Олардың қайбірі қойылған мәселені дұрыс шешкен? Неге?

19


"Геометрия және оптика" жоба жұмысы.

XVII ғасырда ұлы француз математик ғалымы Пьер Ферма мына заңдылықты ашты: жарық сәулесі бір нүктеден екінші бір нүктеге ең қысқа уақыт барысында жетіп барады.

1. Айнаның бір жағындағы *A* және *B* нүктелер берілген. Жарық сәулесі *A* нүктеден шығып, айнаға шағылып *B* нүктеден өтті. (20-сурет). Ферма принципін пайдаланып, *ACM* (түсу бұрышы) және *BCN* (шағылу бұрышы) арасындағы қатынасты тап

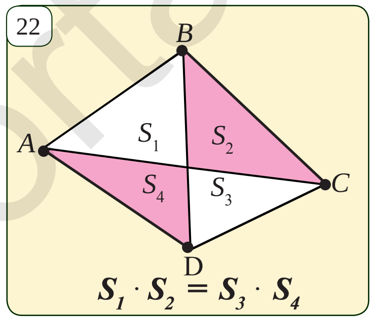


2. Өзеннің жағасындағы *A* нүктеде фермердің үйі және В нүктеде оның үйі орналасқан (21-сурет). Фермер әр күні өзенге барып, ыдыстарына су толтырып фермасына әкетеді. Ол бұл жұмысты ең қысқа жолмен орындауы үшін қандай жолмен жүргені дұрыс?

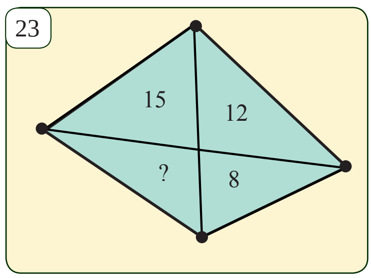
Қызықты геометрия

а) 22-суретте кез келген дөңес төртбұрыш бейнеленген. Төртбұрыштың диагональдары оны төрт үшбұрышқа бөледі. Осы үшбұрыштардың ауданы үшін $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ болатынын дәлелде.

Нұсқау: ұқсас фигуралардың қасиеттерін пайдалан.



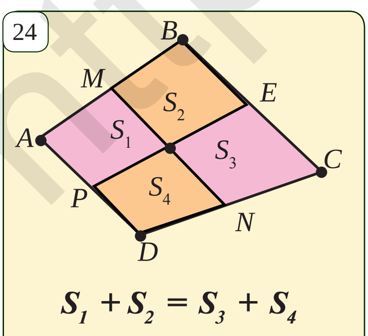
ә) 23-суретте берілгендерді пайланып, белгісіз ауданды тап.

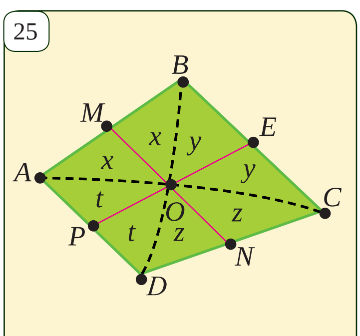


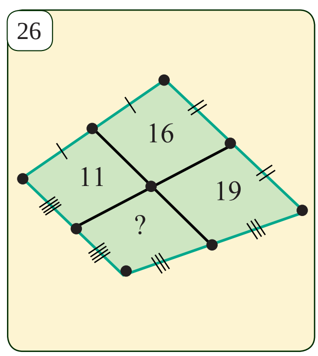
б) 24-суретте кез келген дөңес төртбұрыш бейнеленген. Төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының орталары түйістірілген. Нәтижеде төртбұрыш төрт төртбұрышқа айналған. Осы төртбұрыштардың ауданы үшін $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ болатынын дәлелде.

Нұсқау: дәлелдеу үшін 25-суреттегі жәрдемші фигураны пайдалан.

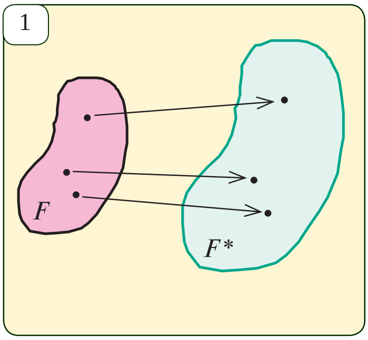
в) 26-суретте берілгендерді пайланып, белгісіз ауданды тап.







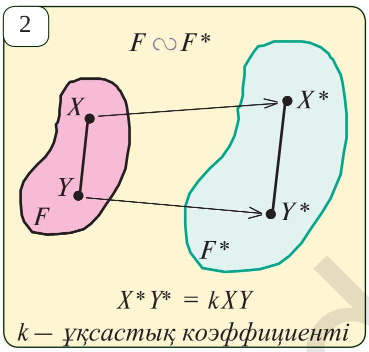
18 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ



Алдыңғы сабақтарда көпбұрыштардың ұқсастығы ұғымымен таныстық. Бұл ұғымды тек көпбұрыштар үшін емес, сондай-ақ кез келген геометриялық фигураларға да енгізуге болады.

F және *F** фигуралар берілген болып, *F* фигурасының әрбір нүктесіне *F** фигурасының кез келген бір нүктесі сәйкес қойылған болса және мұнда *F** фигурасының әрбір нүктесіне *F* фигурасының тек бір нүктесі сәйкес келсе, *(1-сурет)* *F фигурасы F** *фигурасына түрлендірілген* дейіледі.

Анықтама. Егер *F* фигурасын *F** фигурасына түрлендіргенде нүктелер арасындағы қашықтықтар бірдей өзгерсе, мұндай түрлендіру *ұқсас түрлендіру* деп аталады *(2-сурет)*.

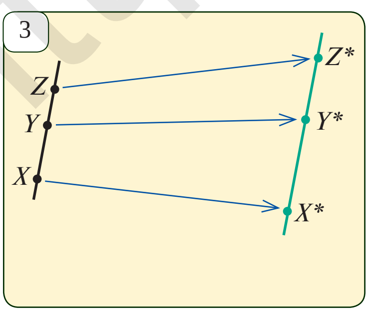


Бұл анықтаманы төмендегідей түсіндіруге болады: Айталық, бір түрлендіру нәтижесінде *F* фигурасының кез келген *X, Y* нүктелеріне *F** фигурасының *X*, Y** нүктелері сәйкес қойылған болсын. Егер $X^*Y^*=k\cdot XY$, $k>0$ болса, мұндай түрлендіруді **ұқсас түрлендіру** деп атайды. Мұнда *k* — барша *X* және *Y* нүктелері үшін бірдей сан, ол ұқсастық коэффициенті деп қолданылады.

Егер *F* және *F** фигуралар берілген болып, бұл фигураларды бірін екіншісіне көшіретін ұқсас түрлендіруі бар болса, *F* және *F** фигуралар өзара **ұқсас** дейіледі. Фигуралардың ұқсастығы $F \backsim F^*$ сияқты өрнектеледі. Егер ұқсастық коэффициенті *k*-ні де көрсету қажет болса, $F \overset{k}{\backsim} F^*$ түрінде белгіленеді.

Егер ұқсас түрлендіруде *X* нүктеге *X** нүктесі сәйкес көшірілген болса, *X нүктесі X* нүктесіне түрлендірілді* немесе *көшірілді* дейіледі.

Теорема. ***Ұқсас түрлендіру а) түзу сызықты түзу сызыққа; ә) сәулені сәулеге; б) бұрышты (оның үлкендігін сақтаған күйде) бұрышқа; в) кесіндіні (ұзындығы бұл кесіндіден k есе ұзын болған) кесіндіге көшіреді.***



Дәлелдеу. а) ұқсастық коэффициенті *k* болған түрлендіруде бір түзу сызықтың бойында жатқан әр түрлі *X, Y* және *Z* нүктелері сәйкес түрде *X** *Y** және *Z** нүктелерге түрленсін *(3-сурет)*.

X, Y, Z нүктелерінен бірі, айталық, *Y* қалған екеуінің арасында жатсын. Олай болса, $XZ=XY+$ $+YZ$. Ұқсас түрлендіру анықтамасы бойынша:

$$X^*Z^* = k \cdot XZ = k \cdot (XY + YZ) = k \cdot XY + k \cdot YZ = X^*Y^* + Y^*Z^*.$$

Бұл теңдіктен X^*, Y^* және Z^* нүктелерінің бір түзу сызық бойында жатуы келіп шығады.

Теореманың дәлелдеуін тек а) жағдай үшін келтірдік. Қалған жағдайларда оны дәлелдеуді саған жаттығу ретінде қалдырып отырмыз.

? *Есептер мен тапсырмалар*

18.1. Ұқсас түрлендіру деген не?

18.2. Қандай фигуралар ұқсас делінеді?

18.3. Ені 3 *см*, ұзындығы 4 *см* болған тік төртбұрышқа ұқсас ұқсастық коэффициенті 2-ге тең болған төртбұрыш жаса.

18.4. 4-суретте мектеп ауласының жоспары 1:1000 масштабта кескінделген. Өлшеу жұмыстарын орындап,а) ауланың; ә) мектеп ғимаратының; б) гүлзарлардың; в) спорт алаңының; г) бақтың анық өлшемдерін тап.

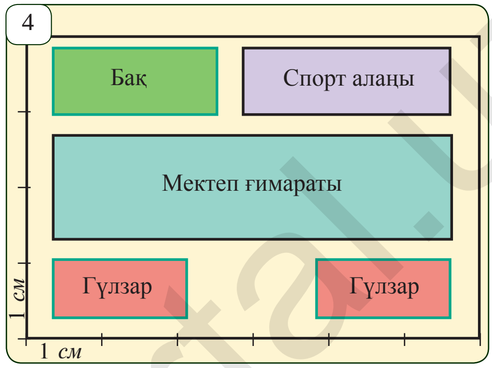
18.5. Карта 1:50 000 масштабта кескінделген болса *(5-сурет)*, Абат және Азат ауылдары орталықтары арасындағы арақашықтықты тап.

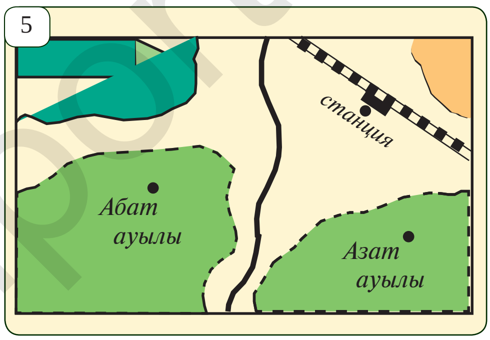
18.6. Ұқсас түрлендіруде сәулелер арасындағы бұрыштың сақталуын дәлелде.

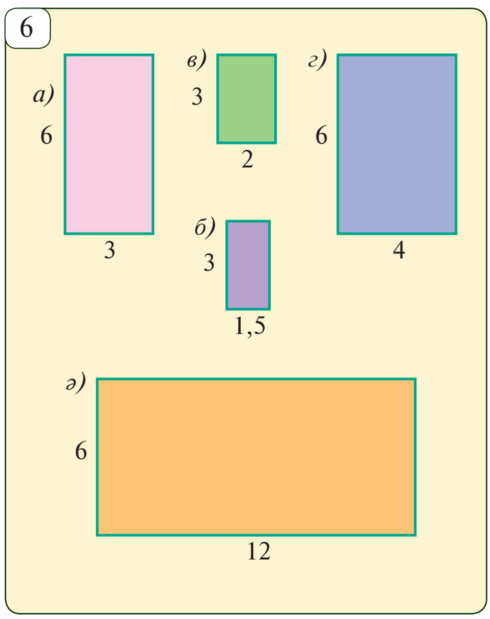
18.7*. Ұқсас түрлендіруде а) параллелограмм параллелограмға; б) квадрат квадратқа; д) тік төртбұрыш тік төртбұрышқа; е) трапеция трапецияға түрленуін дәлелде.

18.8*. ABC үшбұрышы ұқсас түрлендіруде $A^*B^*C^*$ үшбұрышына түрленеді. Ұқсастық коэффициенті 0,6-ға және ABC үшбұрышының периметрі 12 *см*-ге тең болса, $A^*B^*C^*$ үшбұрышының периметрін тап.

18.9. 6-суреттен ұқсас тік төртбұрыштар жұптарын тап және ұқсастық коэффициенттерін анықта.

4


5


6


19 ҰҚСАС КӨПБҰРЫШТАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

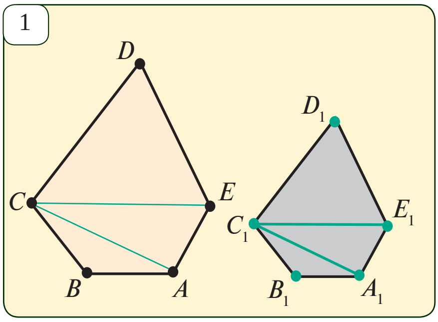
1-теорема. ***Ұқсас көпбұрыштар периметрлерінің қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең.***

Дәлелдеу. Шынында да, $A_1A_2...A_n$ және $B_1B_2...B_n$ көпбұрыштар ұқсас және ұқсастық коэффициенті k болса, $B_1B_2=k\cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k\cdot A_2A_3$, ... , $B_nB_1=k\cdot A_nA_1$ болады.

Бұдан $P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k\cdot A_1A_2+k\cdot A_2A_3+...+k\cdot A_nA_1=k\cdot(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=k\cdot P_1$ теңдігі жасалады. *Теорема дәлелденді.*

2-теорема. ***Ұқсас көпбұрыштарды бірдей сандағы ұқсас үшбұрыштарға бөлуге болады.***

1



Дәлелдеу. Айталық, $ABCDE$ және $A_1B_1C_1D_1E_1$ көпбұрыштары ұқсас болып, ұқсастық коэффициенті k болсын.

Өзара сәйкес C және C_1 төбелерінен CA, CE және C_1A_1, C_1E_1 диагональдарын жүргіземіз (1-сурет). Нәтижеде, көпбұрыштар бірдей сандағы үшбұрыштарға бөлінеді.Пайда болған үш жұп сәйкес үшбұрыштардың ұқсастығын көрсетеміз.

1.$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Себебі,бұл үшбұрыштарда, шарт бойынша, $\angle B=\angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\mathrm{k}$. Үшбұрыштар ұқсастығының ҚБҚ белгісі бойынша,

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. $\Delta CDE \backsim \Delta C_1D_1E_1$. Бұл ұқсастық 1-жағдайдағы сияқты дәлелденеді.

3. $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Шынында да, $\angle CAE$ және $\angle C_1A_1E_1$ бұрыштарын қарастырайық: $\angle CAE=\angle BAE-\angle CAB$, $\angle C_1A_1E_1=\angle B_1A_1E_1-\angle C_1A_1B_1$.

Мұнда, $\angle BAE=\angle B_1A_1E_1$ (берілген ұқсас бесбұрыштардың сәйкес бұрыштары). $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ (ұқсас ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының сәйкес бұрыштары).

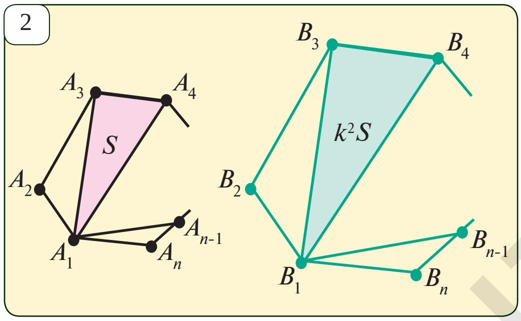
Демек, $\angle CAE=\angle C_1A_1E_1$.

AC және AE, A_1C_1 және A_1E_1 қабырғаларын қарастыралық: $AC=kA_1C_1$, себебі олар өзара ұқсас ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының сәйкес қабырғалары, $AE=kA_1E_1$, себебі олар да берілген ұқсас бесбұрыштардың сәйкес қабырғалары. Демек, үшбұрыштар ұқсастығының ҚБҚ белгісі бойынша, $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Кез келген ұқсас көпбұрыштар үшін де сол сияқты бақылаулар жарамды болуы анық.

Теорема дәлелденді.

3-теорема. ***Ұқсас көпбұрыштар аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең.***

Дәлелдеу. Айталық, $A_1A_2...A_n$ және $B_1B_2...B_n$ көпбұрыштары ұқсас және k — ұқсастық коэффициенті болсын. Онда, $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ... , $A_1A_{n-1}A_n$ үшбұрыштар сәйкес түрде $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ үшбұрыштарға ұқсас болып, ұқсас үшбұрыштар аудандарының қатынасы k^2-қа тең болады (*2-сурет*):



$$S_{A_1A_2A_3} = k^2 S_{B_1B_2B_3},\ S_{A_1A_3A_4} = k^2 S_{B_1B_3B_4},\ \dots,\ S_{A_1A_{n-1}A_n} = k^2 S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Бұл теңдіктердің сәйкес бөліктерін қоссақ,

$S_{A_1A_2...A_n} = k^2\, S_{B_1B_2...B_n}$ болады. *Теорема дәлелденді.*

Есеп. Периметрлері 18 *см* және 24 *см* болған екі ұқсас көпбұрыш аудандарының қатынасын тап.

Шешуі. 1) Ұқсас көпбұрыш периметрлері қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең екенін пайдаланып, k = 24:18 = 4:3 екенін табалық.

2) Ұқсас көпбұрыштар аудандары қатынасы ұқсастық коэффициенті квадратына тең болып, ізделген қатынас $k^2 = \frac{16}{9}$ -қа тең. *Жауабы:* $\frac{16}{9}$.

Есептер мен тапсырмалар

19.1. Ұқсас көпбұрыштар периметрлерінің қатынасы неге тең?

19.2. Ұқсас көпбұрыштар аудандарының қатынасы туралы теореманы айт.

19.3. Үшбұрыш пен төртбұрыш ұқсас болуы мүмкін бе?

19.4. Аудандары 6 $м^2$ және 24 $м^2$ болған екі төртбұрыш ұқсас. Ұқсастық коэффициентін тап.

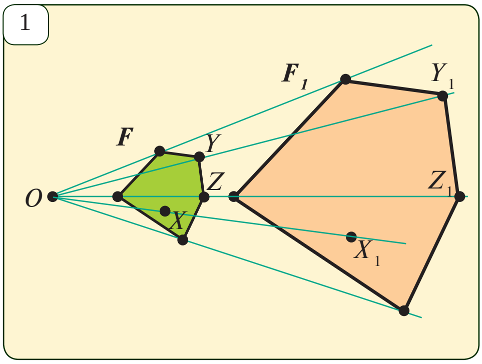
19.5. Екі көпбұрыштың периметрі 18 *см* және 36 *см*-ге, ал аудандарының қосындысы 30 $см^2$-ге тең. Көпбұрыштардың аудандарын тап.

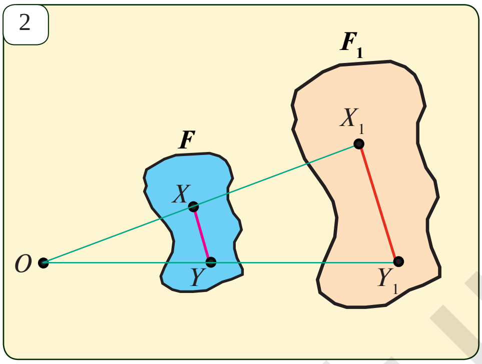
19.6. Периметрі 84 *см* болған үшбұрыштың бір қабырғасына параллель етіп жүргізілген түзу сызық, одан периметрі 42 *см*-ге және ауданы 26 $см^2$-ге тең үшбұрышқа бөлді. Берілген үшбұрыштың ауданын тап.

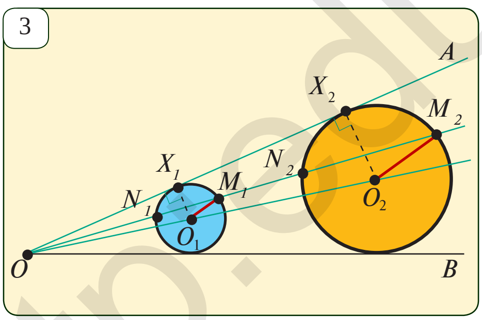
19.7. *O* нүктесіне қатысты симметриялық фигуралар ұқсас бола ма? Оське қатысты симметриялық фигуралар ше? Олардың ұқсастық коэффициенті неге тең?

19.8. Төртбұрыш пішініндегі мақта алаңы картада ауданы 12 $см^2$ болған төртбұрышпен кескінделеді. Егер карта масштабы 1:1000 болса, алаңның анық ауданын есепте.

19.9*. Аудандары 8 $см^2$ және 32 $см^2$ болған екі ұқсас үшбұрыш периметрлерінің қосындысы 48 *см*-ге тең. Үшбұрыштардың периметрлерін тап.







Ең қарапайым ұқсас түрлендірудің бірі – гомотетия. Айталық, F — фигура, O — нүкте және k — оң сан берілген болсын. F фигурасының кез келген X нүктесі арқылы OX сәулесін түсіреміз және бұл сәуледе ұзындығы $k{\cdot}OX$ болған OX^* кесіндіні қоямыз *(1-сурет)*. Осы тәсілмен F фигурасының әрбір X нүктесіне X^* нүктесін сәйкес қоятын түрлендіру *гомотетия* деп аталады. Мұнда, O нүктесі гомотетия центрі, k саны гомотетия коэффициенті, ал F және гомотетия нәтижесінде F фигурасы түрленетін F^*фигуралар □□□□□□□□□□□□қ □□□□□□□□□□ деп аталады.

Теорема. Гомотетия ұқсас түрлендіру болады.

Дәлелдеу. Кез келген O центрлі, k коэффициентті гомотетияда F фигурасының X және Y нүктелері X^* және Y^* нүктелерге көшсін *(2-сурет)*. Онда, гомотетия анықтамасы бойынша, XOY және X^*OY^* үшбұрыштарында $\angle O$ — ортақ және $\frac{OX_1}{OX}=\frac{OY_1}{OY}=k$ болады.

Демек, XOY және X^*OY^* үшбұрыштар екі қабырғалы және олардың арасындағы бұрышы бойынша ұқсас

Сондықтан $\frac{X_1Y_1}{XY}=\frac{OX_1}{OX}$, сонымен, $X_1Y_1=k\cdot XY$ *Теорема дәлелденді.*

Есеп. AOB бұрышының қабырғаларына жанасатын кез келген екі шеңбер гомотетиялық болуын және O нүктесінің гомотетия үшін центр екендігін дәлелде.

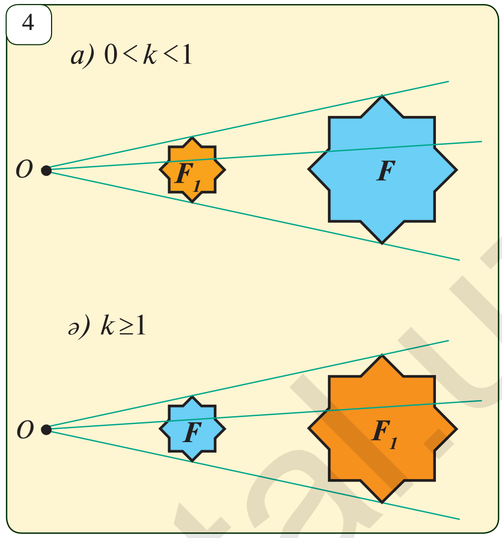
Дәлелдеу. Центрлері O_1 және O_2 болған шеңберлер AOB бұрышының қабырғаларына жанасатын болсын *(3-сурет)*. Бұл шеңберлердің гомотетиялық екендігін дәлелдейік. Шеңберлер OA сәулесіне сәйкес түрде X және X^* нүктелерінде жанасқан болсын *(3-сурет)*. Онда, $\Delta OX_1O_1 \sim \Delta OX_2O_2$, себебі

$\angle X_1OO_1=\angle X_2OO_2$ және $\angle OX_1O_1=\angle OX_2O_2=90^\circ$. Бұдан, $\frac{O_2X_2}{O_1X_1}=\frac{OO_2}{OO_1}$.

Оң жақтағы қатынасты k-мен белгілеп, коэффициенті $k=\frac{O_2X_2}{O_1X_1}$, центрі O болған гомотетияны қарастыралық. Айталық, бұл гомотетияда O_1 центрлі шеңбердің кез келген M нүктесі M^* нүктесіне түрленген болсын. Ендеше,

$O_2M_2=kO_1M_1$ яки $O_2M_2=\frac{O_2X_2}{O_1X_1}\cdot O_1M_1$.

Бұдан, $O_1X=O_1M$ болғаны үшін $O_2M^*=O_2X^*$ теңдікті жасаймыз. Бұл M^* нүктесінің центрі O_2 нүктесінде, радиусы O_2X^*-ке тең болған шеңбер екендігін білдіреді. Демек, қарастырылып отырған шеңберлер өзара гомотетиялық екен.



Белсенділікті арттырушы жаттығу

4-суретте гомотетиялық коэффициенті а) $0<k<1$; ә) $k\geq 1$ болған гомотетиялық фигуралар кескінделген. Гомотетия коэффициентінің шамасына қарай гомотетиялық фигуралардың “қысылуы” яки “созылуы” туралы қандай қорытынды жасау мүмкін?

Есептер мен тапсырмалар

20.1. Гомотетия деген не? Гомотетияның центрі, коэффициенті ше?

20.2. Гомотетиялық ұқсас түрлендіру екендігін түсіндір.

20.3. Үшбұрыш сыз. Үшбұрыштың а) ішкі саласында; ә) сыртқы саласында O нүктесін белгілеп, коэффициенті 2-ге тең болған O центрлі гомотетияны қарастырып, берілген үшбұрышқа гомотетиялық үшбұрыш сал.

20.4. Периметрлері 18 *см* және 27 *см* болған екі ромб өзара гомотетиялық. Бұл ромбылардың қабырғалары мен аудандары қатынастарын тап.

20.5. Гомотетияда X нүктесі X^* нүктеге, Y нүктесі Y^* нүктеге көшті. X, X^*, Y, Y^* нүктелер бір түзу сызықта жатпаса, сол гомотетия центрін тап.

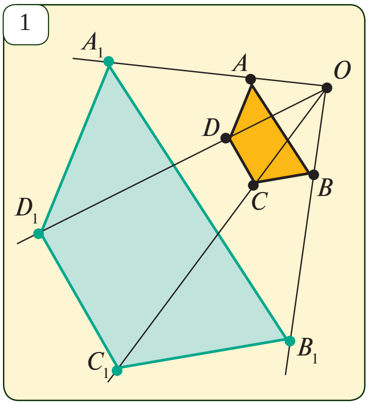
20.6. Коэффициенті 2-ге тең болған гомотетияда X нүктесі X^* нүктеге көшуі белгілі. Сол гомотетия центрін сал.

20.7. Шеңберге гомотетиялық фигура шеңбер болуын дәлелде.

20.8. Шеңбер сыз. Центрі шеңбер центрінде және коэффициенті а) $\frac{1}{2}$; ә) 2; б) 3; в) $\frac{1}{3}$-ге тең болған гомотетияда сызылған шеңберге гомотетиялық болған фигураларды өрнекте.

20.9. Бұрыш пен оның ішкі саласында A нүкте берілген. Бұрыш қабырғаларына түйісіп, A нүктеден өтетін шеңбер сал.

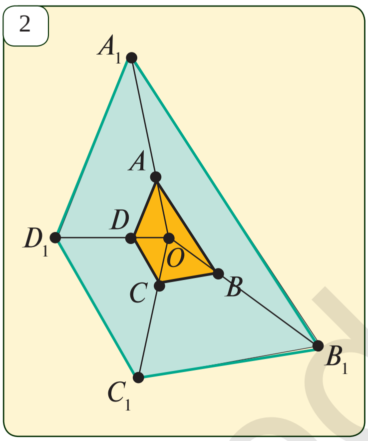
ҰҚСАС КӨПБҰРЫШТАРДЫ САЛУ


1

Осыған дейінгі теоремаларды дәлелдеуде және есептерді шешуде әр түрлі ұқсас үшбұрыштарды сыздық. Ұқсас көпбұрыштар қалай жасалады? Төменде сонымен таныс болайық.

Есеп. Берілген $ABCD$ төртбұрышына ұқсас, ұқсастық коэффициенті 3-ке тең болған $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрыш сыз *(1-сурет)*.

Сызу. Жазықтықта кез келген O нүктесін аламыз. Одан және төртбұрыштың төбелерінен өтетін OA, OB, OC және OD сәулелерін түсіреміз. Бұл сәулелерде O нүктесінен $OA_1=3OA, OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ және $OD_1=3OD$ кесінділерін көшіреміз. Пайда болған $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрыш ізделген төртбұрыш болып табылады.


2

Негіздеу. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ екенін дәлелдейміз.

1. *Сәйкес қабырғалардың пропорционалдығы.*

а) $\Delta AOD \sim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \frac{A_1D_1}{AD}=\frac{O_1D_1}{OD}=\frac{OA_1}{OA}=3$; (1)

ә) $\Delta DOC \sim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \frac{OD_1}{OD}=\frac{D_1C_1}{DC}=\frac{OC_1}{OC}=3$. (2)

(1) мен (2) теңдіктен $\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{D_1C_1}{DC}$ келіп шығады.

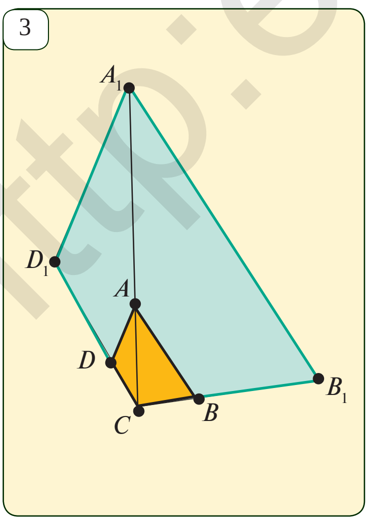
Төртбұрыштардың басқа сәйкес қабырғаларының пропорционалдығын осылайша дәлелдеуге болады.

2. *Сәйкес бұрыштардың теңдігі.*

Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес бұрыштары тең болғандықтан, $\angle A_1D_1O=\angle ADO$, $\angle C_1D_1O=\angle CDO$. Онда,

$$\angle A_1D_1C_1=\angle A_1D_1O+\angle C_1D_1O=$$
$$=\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC,$$

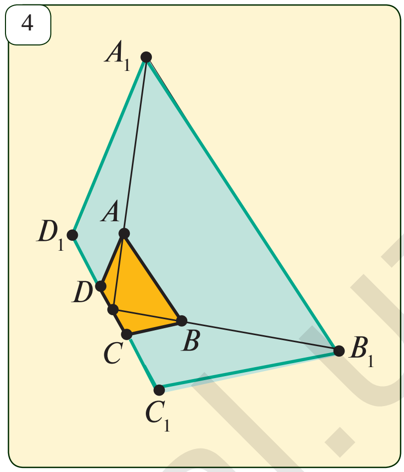
яғни төртбұрыштардың сәйкес $A_1D_1C_1$ және ADC бұрыштары тең.


3

Осыған ұқсас төртбұрыштардың басқа сәйкес бұрыштарының теңдігі дәлелденеді.

Демек, $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрыштар ұқсас екен. Қабырғалары кез келген сандағы көпбұрышқа ұқсас көпбұрыш та осы сияқты сызылады.

Гомотетия центрін бұл есепте төртбұрыштың сыртқы саласынан алдық. Жалпы алғанда, гомотетия центрін төртбұрыштың ішкі саласында *(2-сурет)*, бір төбесінде *(3-сурет)* немесе бір қабырғасында *(4-сурет)* жататын етіп алуымыз да мүмкін еді. Гомотетия центрін қалай алсақ та, берілген $ABCD$ төртбұрышына ұқсас және ұқсастық коэффициенті 3-ке тең болған төртбұрыштар өзара тең болады.



Есептер мен тапсырмалар

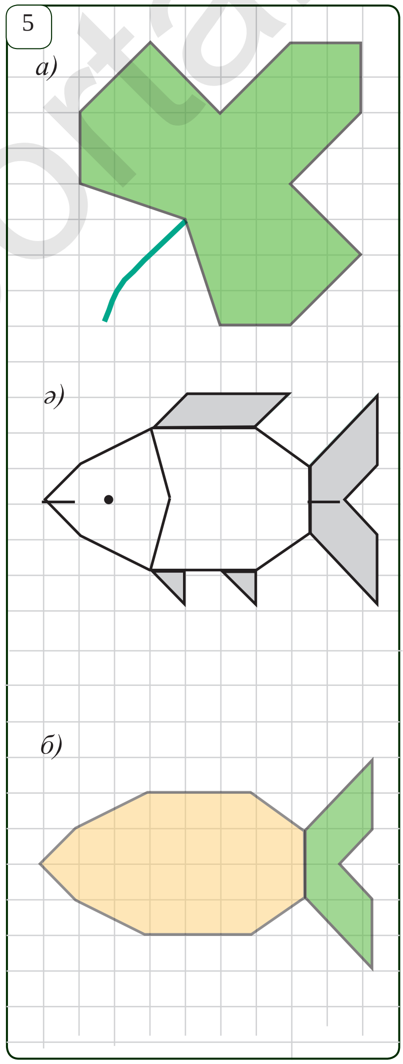
21.1. Берілген көпбұрышқа ұқсас көпбұрышты сызу кезектілігін айтып бер.

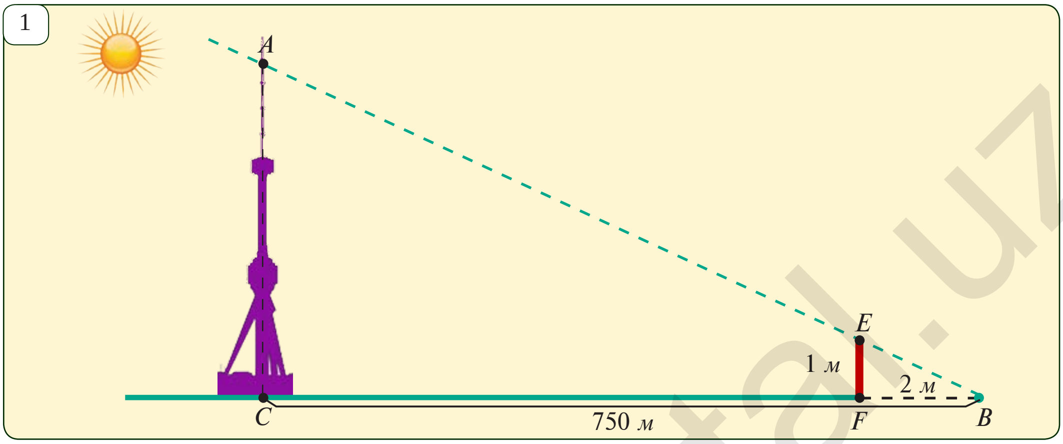
21.2. Дәптеріңе кез келген $ABCDE$ бесбұрышын сыз. Гомотетия көмегімен бұл бесбұрышқа ұқсас, ұқсастық коэффициенті 0,5-ке тең болған бесбұрыш сыз. Гомотетия центрі а) C нүктеде; ә) бесбұрыш ішінде; б) AB қабырғасында болған жағдайларды жеке көріп шық.

21.3. Торкөздерді есепке алған күйде 3-суретте берілген фигураларды дәптеріңе сыз: а) жапыраққа ұқсастық коэффициенті 3-ке тең жапырақты; ә) балыққа ұқсастық коэффициенті 0,8-ге тең балықты б) сәбізге ұқсастық коэффициенті 1,8-ке тең сәбізді гомотетия көмегімен сыз.

21.4. F_1 көпбұрышы F_2 көпбұрышына ұқсас, k — ұқсастық коэффициенті. P_1, P_2, S_1, S_2 әріптермен сәйкес түрде бұл көпбұрыштардың периметрлері және аудандары белгіленген. Төмендегі кестені дәптеріңе көшіріп ал және оны толтыр.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
а)	84		100	25	
ә)	14	28		48	
б)		150	200	100	
в)		30	24		3

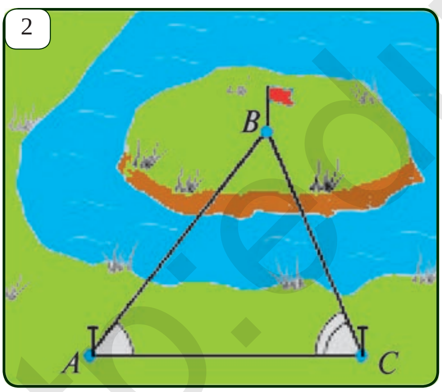


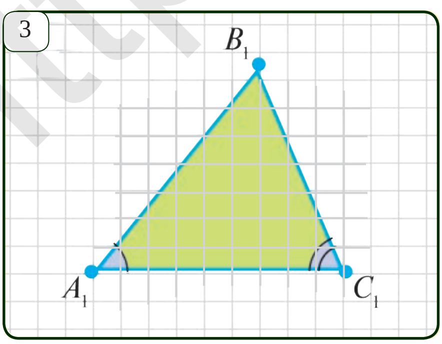


1. *Биіктікті анықтау.*

Жерде тұрып, Ташкент телемұнарасының биіктігін табайық. Мұнараның төбесі — A нүктесінің көлеңкесі B нүктесі болсын. EF таяқты вертикаль түрде қаққанда *(1-сурет)* таяқтың E төбесінің көлеңкесі де B нүктеде болсын. Мұнараның табанын C-пен белгілейік. Пайда болған тік бұрышты ABC және EBF үшбұрыштары ұқсас болады. Сондықтан,

$$\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{BF} \quad \text{немесе} \quad AC=\frac{AC\cdot EF}{BF}$$





BC, BF ара қашықтықтарын және EF таяғының ұзындығын өлшеп, пайда болған формуладан телемұнараның биіктігі — AC кесіндісінің ұзындығын табамыз. Мәселен, егер $EF=1$ *м*, $BC=750$ *м*, $FB=2$ *м* екені белгілі болса, онда $AC=375$ *м* болады.

2. *Баруға болмайтын жердегі ара қашықтықты өлшеу.*

Айталық, A нүктесінен баруға болмайтын B нүктесіне дейінгі арақашықтықты анықтау керек болды делік *(2-сурет)*. A нүктесінен баруға болатын осындай C нүктесін белгілегенде, оған қарағанда A және B нүктелері көрініп тұрсын және AC арақашықтықты өлшеуге болсын.

Құралдар арқылы BAC және ACB бұрыштарын өлшейміз. Айталық, $\angle BAC=\alpha$ және $\angle ACB=\beta$ болсын. Қағазға $\angle A_1=\alpha$, $\angle C_1=\beta$ болған $A_1B_1C_1$ үшбұрышын сызамыз.

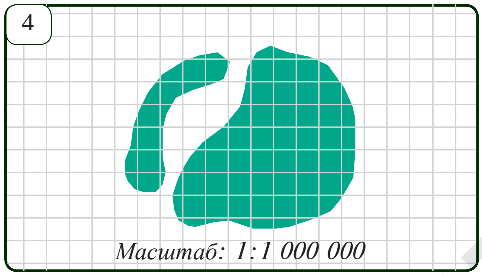
Онда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар екі бұрышы бойынша ұқсас болады *(2- және 3-суреттер)*. Бұдан,

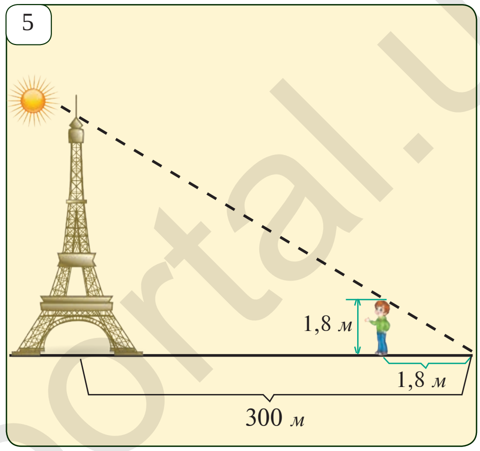
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{яки } AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

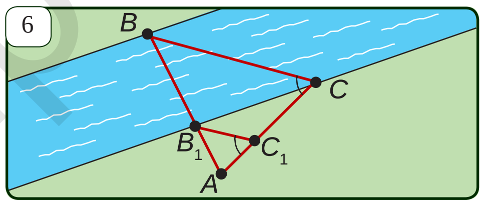
AC арақашықтығы және A_1B_1, A_1C_1 кесінділерін өлшеп, нәтижеде пайда болған формулалар арқылы AB кесіндісі есептеледі. Есептеуді жеңілдету үшін $AC:A_1C_1$ қатынасты 100:1, 1000:1 сияқты қатынаста алуға болады. Мәселен, $AC=130$ *м*, $\angle A=73^\circ$, $\angle C=58^\circ$ болса, қағазда $A_1B_1C_1$ үшбұрышты $\angle A_1=73^\circ$, $\angle C_1=58^\circ$, $A_1C_1=130$ *мм* етіп сызамыз. A_1B_1 кесіндіні өлшеп, оның 153 *мм* екендігін табамыз. Мұнда, ізделген ара қашықтық 153 *м* болады.

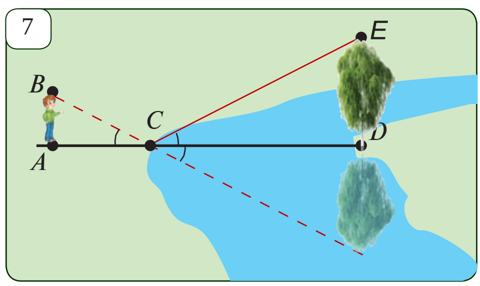
3. □ө□ □□□□□□□ іс жүзіндік жұмыс.

4-суретте Су қоймасының ғарыштық корабльден алынған суреті бейнеленген. Оның негізінде тиісті өлшеу мен есептеу жұмыстарын орындап, су қоймасының ауданын тап.









Есептер мен тапсырмалар

22.1. Егер бойы 1,7 *м* болған адам көлеңкесінің ұзындығы 2,5 *м* болса, көлеңкесінің ұзындығы 10,2 *м* болған ағаштың биіктігі қанша болады?

22.2. 5-суретте көрсетілген мұнаралардың биіктігін анықта.

22.3. 6-суреттегі екі ұқсас AB_1C_1 және ABC үшбұрыштары арқылы өзеннің кендігін (енін) анықтау қажет. $AC=100$ *м*, $AC_1=32$ *м* және $AB_1=34$ *м* болса, өзеннің енін (BB_1) тап.

22.4. Анхор жағасындағы DE ағашының судағы көлеңкесі А нүктедегі адамға көрінеді. Егер $AB=165$ *см*, $AC=120$ *см*, $CD=4{,}8$ *м* болса, ағаштың биіктігін тап *(7-сурет)*.

22.5. Ауладан кез келген ағашты таңдап ал және оның биіктігін анықта. Бұл жұмысты қалай орындағаның туралы есеп бер.

1-есеп. *ABCD* трапециясының *AB* және *CD* бүйір қабырғаларында *M* және *N* нүктелері алынған. Мұнда *MN* кесіндісі трапеция табандарына параллель және трапеция диагональдары қиылысқан *O* нүктеден өтеді. Егер $BC=a,\ AD=b$, болса а) *MO;* ә) *ON;* б) *MN* кесінділерді тап *(2-сурет)*.

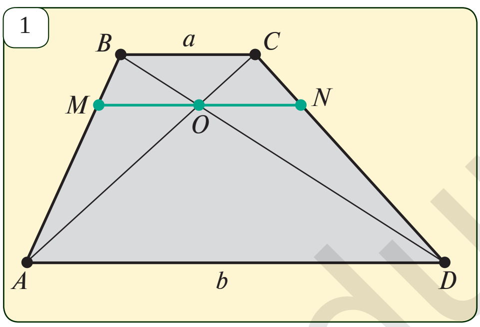
Шешуі. 1) *AOD* және *BOC* үшбұрыштары *BB* белгісі бойынша ұқсас, өйткені $\angle BOC=\angle AOD, \angle OBC=\angle ADO.$ Будан,

$$\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD} \text{ немесе } \frac{OC}{OA}=\frac{a}{b} \qquad (1)$$

2) *ABC* және *AOM* үшбұрыштары да *BB* белгісі бойынша ұқсас, өйткені $\angle AMO=\angle ABC,\ \angle ACB=\angle AOM$. Будан,

$$\frac{AC}{OA}=\frac{BC}{MO} \text{ яки } \frac{OA+OC}{OA}=\frac{a}{MO} \Rightarrow 1+\frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO},\ \frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO}-1. \qquad (2)$$

3) (1) және (2) теңдіктердің оң бөліктерін теңестіріп, $\frac{a}{MO}-1=\frac{a}{b}$

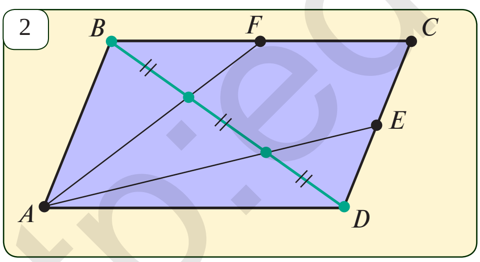


теңдікті және одан $MO=\frac{ab}{a+b}$ (3)

екендігін табалық. Жоғарыдағы жолмен

$$ON=\frac{ab}{a+b} \qquad (4)$$

теңдікті, ал кейін (3) және (4) теңдіктердің сәйкес бөліктерін қосып



теңдігін жасаймыз. $MN=\frac{2ab}{a+b}$

Жауабы: а) $\frac{ab}{a+b}$; b) $\frac{ab}{a+b}$; d) $\frac{2ab}{a+b}$.

Ескерту. Бұл есептің шешімінен $MO=ON$ екендігі шығады.

Есептер мен тапсырмалар

23.1. *ABC* үшбұрышының *AB* және *BC* бүйір қабырғаларында *D* және *E* нүктелері алынған. Егер $AC \parallel DE,\ AC=6,\ DB=3$ және $DE=2$ болса, *AB* қабырғасын тап.

23.2. Екі ұқсас көпбұрыштың ауданы 8 $дм^2$ және 72 $дм^2$-қа тең, олардың біреуінің периметрі екіншісінікінен 26 *дм* кем. Үлкен көпбұрыштың периметрін тап.

23.3. Периметрі 1 *м* болған $A_1B_1C_1$ үшбұрышы $A_2B_2C_2$ үшбұрышы қабырғаларының орталарын, $A_2B_2C_2$ үшбұрышы $A_3B_3C_3$ үшбұрыш қабырғаларының орталарын, ал $A_3B_3C_3$ үшбұрышы $A_4B_4C_4$ үшбұрышы қабырғаларының орталарын ұштастырудан жасалған болса, $A_4B_4C_4$ үшбұрышының периметрі қанша болады?


3

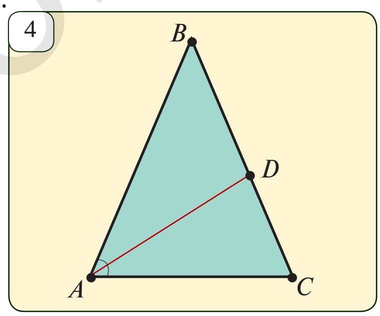
23.4. Екі ұқсас үшбұрыш периметрлері 18 *дм* және 36 *дм*-ге, аудандары қосындысы 30 *дм*²-қа тең. Үлкен үшбұрыш ауданын тап.

23.5. Ромб қабырғаларының орталары тік төртбұрыштың төбелері болуын дәлелде.

23.6. ABC үшбұрышын сыз. Бұл үшбұрышқа ұқсас және ауданы ABC үшбұрышының ауданынан 9 есе кіші болған $A_1B_1C_1$ үшбұрышын сыз.

23.7*. E және F нүктелер сәйкес түрде $ABCD$ параллелограмның CD және BC қабырғаларының орталары. AF және AE түзу сызықтар BD диагоналын тең үш бөлікке бөлуін дәлелде (*2-сурет*).

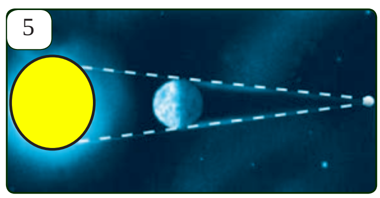
23.8. 3-суретте Ташкент қаласындағы "Халықтар достығы" сарайының алдына орнатылған ең үлкен Өзбекстан жалауы бейнеленген. Жалаудың өлшемдері 20 *м* х 30 *м* екені белгілі болса, сызбадан тиісті кесінділер ұзындығын өлшеп, жалау бағанының нақты биіктігін тап.



4

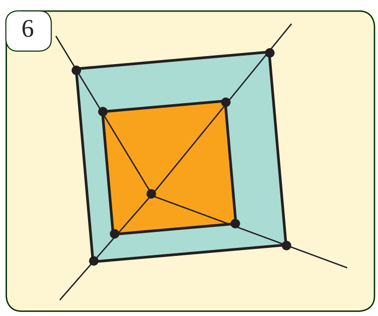
23.9. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыш биссектрисасы бұл үшбұрыштан өзіне ұқсас үшбұрыш бөледі. Үшбұрыш бұрыштарын анықта (*4-сурет*, $AB = BC$, $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$).

23.10. Шеңбер сыз және онда O нүктесін белгіле. Центрі O нүктеде және коэффициенті 2-ге тең болған гомотетияда берілген шеңберге гомотетиялық шеңбер сыз.


5

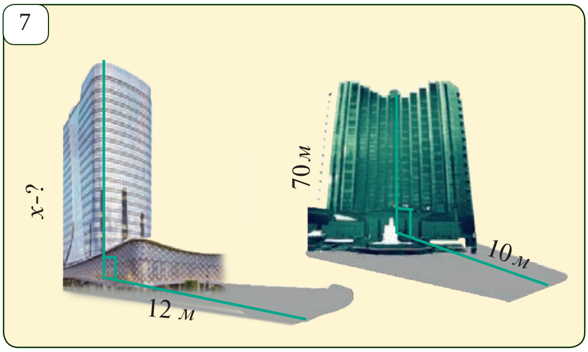
23.11. Екі ұқсас көпбұрыш периметрлерінің қатынасы 2:3. Үлкен көпбұрыштың ауданы 27 болса, кіші көпбұрыштың ауданын тап.

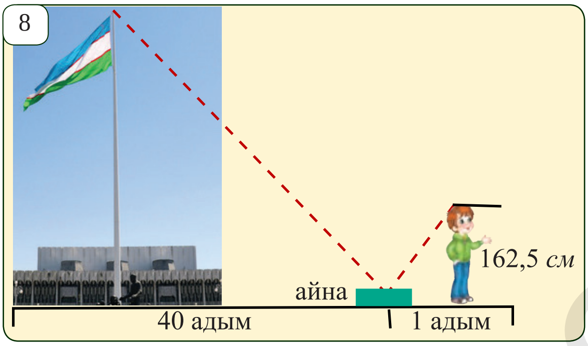
23.12. 5-суретте Күннің толық тұтылған жағдайы көрсетілген. Егер Күннің радиусы 686784 *км*, Айдың радиусы 1760 *км*, Жерден Айға дейінгі қашықтық 384400 *км* болса, Жерден Күнге дейінгі қашықтықты тап.

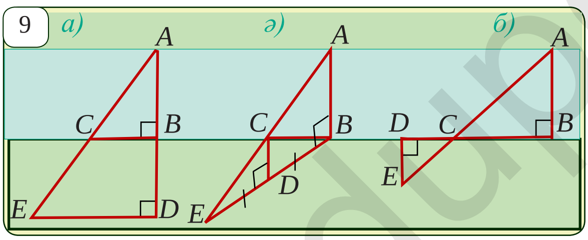

6

23.13. а) Бір шеңберге екі ұқсас көпбұрыш іштей сызылған. Бұл көпбұрыштар тең бе?
ә) Бір шеңберге екі ұқсас көпбұрыш сырттай сызылған. Бұл көпбұрыштар тең бола ма?

23.14*. Бір квадраттың қабырғалары екінші квадраттың қабырғаларына параллель. Егер квадраттар бір-біріне тең болмаса, олар гомотетиялық болуын дәлелде (*6-сурет*).







23.15. ABC үшбұрышының AB және BC қабырғалары төрт тең кесіндіге бөлініп, бөліну нүктелері AC қабырғасына параллель кесінділермен ұштастырылды. AC=24 *см* болса, пайда болған кесінділер ұзындығын тап.

23.16. Егер суреттер осы кезенде алынса, берілген мәліметтер негізінде екінші ғимараттың биіктігін тап (*7-сурет*).

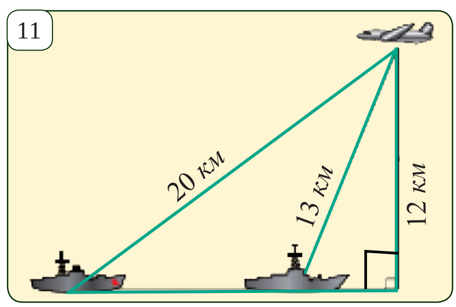
23.17. 8-суретте берілгендерді пайдаланып, қандайда бір нысанның биіктігін табу жолын түсіндір. "Халықтар достығы" сарайы алдына көтерілген Отанымыз жалауы бағанының биіктігін тап.

23.18. 9-суретте берілгендерді пайдаланып өзеннің кеңдігін анықтаудың 3 түрлі жолын түсіндіріп бер. Оларда геометрияның қайсы теоремалары пайдаланылатынын анықта. Үйренген тәсілдеріңді басқа жағдайда да қолдан.

Геометрия және әскери жұмыс

1. Әскерилер сызғыш пен созылған қол көмегімен нысананың қашықтығын анықтайды. Егер 10-суреттегі сызғыштың танкті қаптайтын ұзындығы 5 *см*, желкеден сызғышқа дейінгі қашықтық 50 *см* және танктің ұзындығы 6,86 *м* болса, танкке дейінгі қашықтықты тап.

2. 12 *км* биіктікте ұшып бара жатқан ұшақтың ұшқышы одан 13 *км* алыста жүзіп бара жатқан кемені және одан 20 *км* алыста бірінші кемені қуып бара жатқан басқа кемені көрді (11-сурет). Осы кемелердің арасындағы қашықтықты анықта.



24 БІЛІМІҢДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. Екі ұқсас үшбұрыш үшін дұрыс емес дәлелді тап:

А. Аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең;
Ә. Сәйкес медианаларының қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең;
Б. Сәйкес биссектрисалары қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең;
В.Сәйкес биіктіктерінің қатынасы ұқсастық коэффициентіне тең.

2. Екі гомотетиялық көпбұрыш үшін дұрыс дәлелді тап:

А.Олар тең; Ә.Олар ұқсас;
Б.Олар теңдес; В.Дұрыс жауап жоқ.

3. Үшбұрыш медианалары үшін дұрыс емес дәлелдерді көрсет:

А. Бір нүктеде қиылысады; Ә. Қиылысу нүктесінде 2:1 қатынаста бөлінеді;
Б. Бір-біріне тең; В. Әрбірі үшбұрышты тең екігe бөледі.

4. Үшбұрыш биссектрисалары үшін дұрыс емес дәлелді көрсет:

А. Бір нүктеде қиылысады;
Ә. Қиылысу нүктесінде 2:1 қатынаста бөлінеді;
Б. Өзі түскен қабырғаны екі қабырғаға пропорционал кесіндіге бөледі;
В. Өзі шыққан төбедегі бұрышты тең екігe бөледі.

5. Екі ұқсас □ө□бұрыш үшін дұрыс емес дәлелді тап:

А. Қабырғаларының саны тең; Ә. Бұрыштарының саны тең;
Б. Сәйкес қабырғалары пропорционал; В. Аудандары қатынасы ұқсастық коэффициенті тең.

II. Есептер

24.1. Табандары 6 м және 12 м болған трапеция диагональдары қиылысқан нүктеден табандарға параллель түзу сызық жүргізілген. Түзу сызықтың трапеция ішіндегі бөлігінің ұзындығын тап.

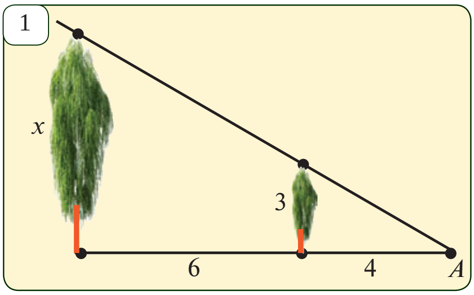
24.2. ABC үшбұрышта $BC=BA=10$, $AC=8$. Егер AA_1 және CC_1 үшбұрыш биссектрисалары болса, A_1C_1 кесіндісін тап.

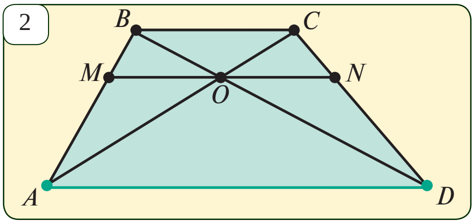
24.3. A нүктеден баруға болмайтын B нүктесіне дейінгі қашықтықты анықтау үшін жазықтықтан C нүктесі алынды. AC қашықтығы, BAC және ACB бұрыштары өлшенді және ABC үшбұрышқа ұқсас $A_1B_1C_1$ үшбұрышы сызылды. Онда $AC=42$ м, $A_1C_1=6{,}3$ см, $A_1B_1=7{,}2$ см. AB қашықтығын тап.

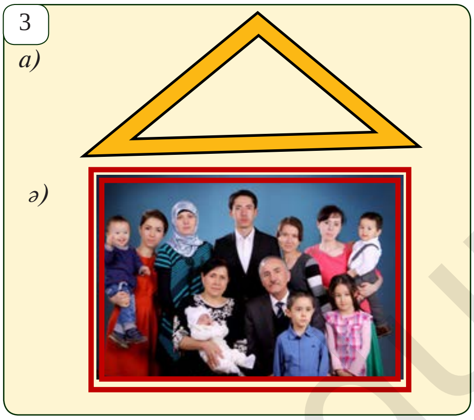
24.4. Коэффициенті $k=3$ болған гомотетияда F көпбұрышы F_1 көпбұрышына түрленеді. Егер F_1 көпбұрышының периметрі 12 *см* және ауданы 4,5 *см*^{2} болса, F көпбұрышының периметрін және ауданын тап.

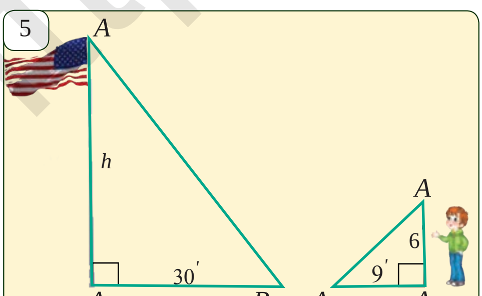
24.5. Ұзындығы 180 *см* болған адам көлеңкесінің ұзындығы 2,4 *м* болған кезде биіктігі 4 *м* сым баған көлеңкесінің ұзындығы неше метр болады?

24.6. Картада Ташкент және Үргеніш қалаларының арасындағы қашықтық 8,67 *см*. Егер карта масштабы 1: 100 000 болса, Ташкент және Үргеніш қалаларының арасындағы қашықтықты тап.









III. Өзіңді сынап көр (бақылау жұмысының үлгісі)

24.7. 1-суретте берілген мәліметтер негізінде ағаш биіктігін тап.

24.8. *ABC* үшбұрышының қабырғалары *AB*=5 см, *AC*=6 *см*, *BC*=7 *см*. Бұл үшбұрыштың *AC* қабырғасына параллель түзу сызық *AB* қабырғасын *P* нүктеде, *BC* қабырғасын *K* нүктеде қиып өтеді. *PK*=2 *см* болса, *PBK* үшбұрышының периметрін тап.

24.9. 2-суретте *AD*||*BC*||*MN* BC=6 *см*, AD=10 *см* болса, *MN* кесіндісін тап.

24.10. *(Қосымша)*. Ромб қабырғаларының орталары тік төртбұрыштың төбелері болатынын дәлелде.

Қызық есептер

1. 4 есе үлкейтіп көрсетілген айналы лупамен қарағанда 2°-ты бұрыштың үлкендігі қаншаға өзгереді?

2. а) сызғыш суретінде бейнеленген іштей және сырттай сызылған үшбұрыштар ұқсас па *(3а-сурет)*?
ә) 3ә-суреттегі ромбының іштей және сырттай қырларын көрсетуші төртбұрыштар ұқсас па?

3. Төмендегі шет тілінде берілген есепті шеш. Мұнымен әрі орыс және ағылшын тілдерінен, әрі геометриядан өз қабілетіңді сынап көресің.

а) На 4-рисунке ижображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:

а) *A* и *B*; ә) *A* и *D*; б) *C* и *F*; в) *B* и *E*.

ә) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

б) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If XY =160 ft, YW=40 ft, TY= 120 ft, and WZ= 50 ft, find XT.

Геометриялық модельдеу

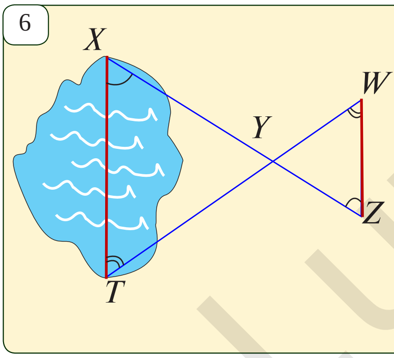
1. Кез келген төртбұрышты салып, оны қайшымен қиып ал.

2. Оның қарама-қарсы қабырғаларының ортасын белгілеп, кесінділермен түйістір (7.а- сурет), сондай-ақ осы кесінділер бойынша төртбұрышты қиып ал (7.ә-сурет).

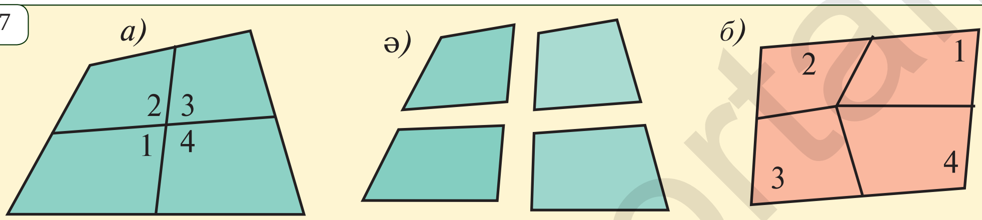
3. Пайда болған бөлшектерден 7.б-суретте көрсетілгендей параллелограмм құрастыр.

4. Осы жұмысты орындауда шынында да параллелограмм пайда болуын негіздеп бер.

6



7



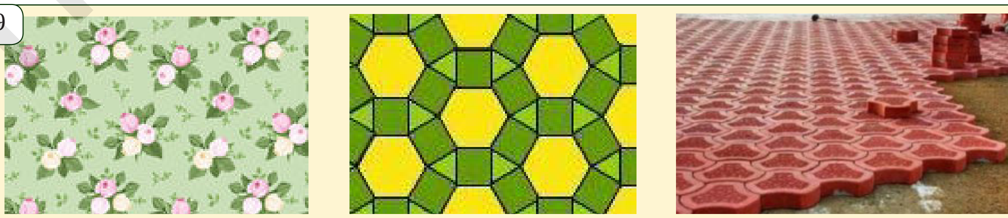
Нақыштар, торкөздер, (бордюрлер) және паркеттер

Үй қабырғаларындағы гүлқағаздарға көңіл бөлсең, оларда бірдей фигура қайталанып, бүкіл қабырғаны жауып тұрғанын көресің. Бір фигура қайталанып, бүкіл жазықтықты толтырса, мұндай жиынтық фигураларды нақыш деп атайды. Атақты голланд суретшісі Морис Эшердің қаламынан туған мына ғажап суреттер нақыштарға мысал болады (8-сурет). Бұл нақыштарда қайсы фигура қалай қайталанып жатқанын анықта.

8

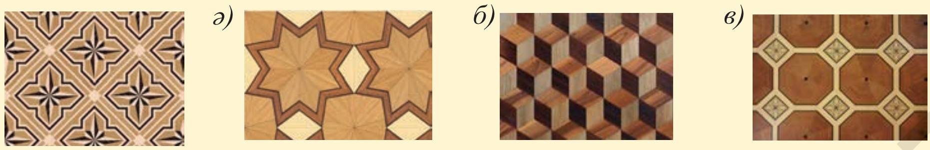
Егер бір фигура қайталанып, екі параллель түзу сызық арасындағы лентаны толтырса, мұндай жиынтық лента фигураларды торкөз немесе бордюр дейміз. Гүлқағаз орамы, сурет салынған маталар, парктердегі торкөздер шектелген ұзындықтағы бордюрлерге мысал болады (9-сурет).

9

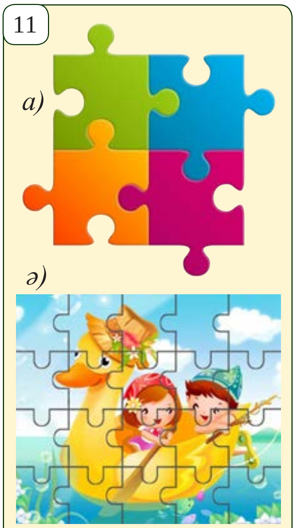


Дұрыс көпбұрыштармен қапталған нақыштар паркет деп аталады. Паркеттермен үйіміздің едені қапталады. Ең қарапайым паркеттер 10-суретте келтірілген. Көрініп тұрғанындай олар параллель көшіруде өзіне-өзі өтеді.

10 а) ә) б) в)



11 а) ә)

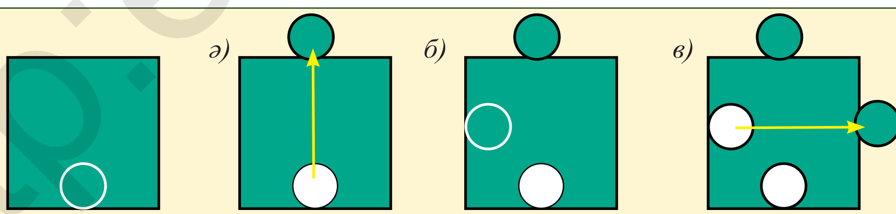


Геометриялық модельдеу.
Пазл фигуралары қалай құралған?

Пазл ойыншықтарын жақсы білесің? (11-сурет) Оларды қалай жасауға болатынын қарастырайық.

1. Өлшемдері 5 *см* х 5 *см* болған квадрат сал.
2. Оның төменгі табанының ортасынан шеңбер сияқты бөлігін қиып ал (12.а-сурет).
3. Қиып алынған бөлікті квадраттың жоғары табанының ортасына біріктір (12.ә-сурет).
4. Енді квадраттың бүйір қабырғасының ортасынан тағы да осындай үлкендіктегі шеңбер сияқты бөлігін қиып ал (12.б-сурет).
3. Қиып алынған бөлікті квадраттың екінші бүйір қабырғасының ортасына біріктір (12.в-сурет).
4. Нәтижеде пазл ойыншығының бір данасы дайын болады.
5. Осы пазл даналарымен бүкіл жазықтықты қаптауға болатынын негізде.
6. Квадрат қабырғаларынан шеңбер сияқты болмаған өзгеше пішінді бөліктерді қиып алып, біріктіру арқылы басқа көріністегі пазл даналарын да жасауға болады.
7. Қандайда бір жаңа пазл данасының сызбасын жарат. Бірнеше түстегі пазл даналарын қиып алып, олардан түрлі нақыштар құрастыр.

12 а) ә) б) в)



Геометриялық зерттеу.

73-беттегі "Геометриялық модельдеу" тақырыбында келтірілген мәліметтер негізінде кез келген дөңес төртбұрышпен бүкіл жазықтықты қаптауға болатынын дәлелде.

II ТАРАУ

ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ ЖӘНЕ БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Бұл тарауды үйрену барысында сен төмендегі білім, дағды және тәжірибеге ие боласың:

Білімдер:

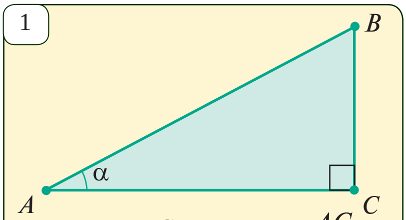
√ *кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі анықтамаларын білу;*
√ *бұрыштың радиандық өлшемін білу;*
√ *негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктерді білу;*
√ *үшбұрыштың ауданын бұрыш синусы арқылы есептеу формуласын білу;*
√ *синустар және косинустар теоремасын білу.*

Іс жүзіндік дағдылар:

√ *кейбір бұрыштардың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін есептей алу;*
√ *негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктерді есептер шешуде қолдану;*
√ *үшбұрыш ауданын оның екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша есептей алу;*
√ *синустар, косинустар теоремасын пайдаланып есептеуге және дәлелдеуге байланысты есептерді шешу.*

25 0°-ТАН 180°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТЫҢ СИНУСЫ, КОСИНУСЫ, ТАНГЕНСІ ЖӘНЕ КОТАНГЕНСІ

1



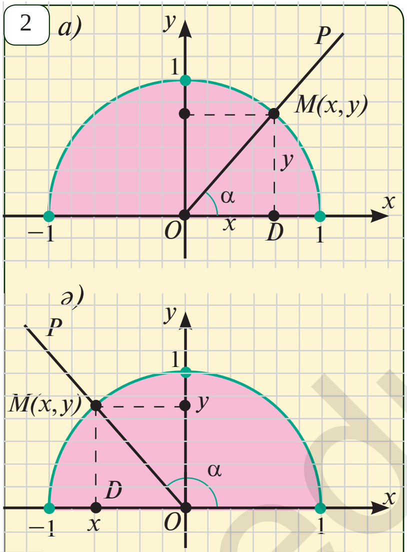
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}; \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}; \quad \text{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC};$$

Тік бұрышты ABC үшбұрышта $\angle C = 90^\circ$ болсын. Онда A сүйір бұрышының синусы, косинусы, тангенсі мен котангенсі 1- суреттегідей анықталатыны белгілі. Енді 0°-тен 180°-қа дейінгі бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі мен котангенсін анықтаймыз

Радиусы бірлік кесіндіге тең, центрі координаталар басындағы жарты шеңберді қарастырамыз (*2-сурет*). Шеңберді *M(x,y)* нүктеде қиятын *OP* сәулесін түсіреміз. Бұл сәуленің *Ox* сәулесімен жасалған бұрышын α-мен белгілейміз. *OP* сәуленің *Ox* сәулесімен беттесетін бұрышын 0°-ты бұрыш ретінде қабылдаймыз.

2



α сүйір бұрыш болғанда *(2.а-сурет)*, бұл бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі тік бұрышты *ODM* үшбұрыштан

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}; \ \cos\alpha = \frac{OD}{MO}; \ \text{tg}\alpha = \frac{DM}{OD}; \ \text{ctg}\alpha = \frac{OD}{DM}.$$

теңдіктермен анықталатыны белгілі. Егер $MO = 1$, $DM = y$, $OD = x$ екендігін ескерсек,

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \text{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

теңдіктерге ие боламыз.

Жалпы алғанда, 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін де (1) формула арқылы анықтаймыз (2.ә-сурет):

OMD үшбұрышында $OD^2 + DM^2 = MO^2$ яки $x^2 + y^2 = 1$. $\sin\alpha = y$ пен $\cos\alpha = x$ екендігін ескерсек, кез келген α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) бұрыш үшін

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (2)$$

негізгі тригонометриялық теңбе-теңдік шығады.

Анықтамаға орай, $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ болғандықтан,

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \ne 90^\circ) \qquad \text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 180^\circ), \qquad \text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1 \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 90^\circ, \ \alpha \ne 180^\circ)$$

теңбе-теңдіктер орынды.

(2) теңдіктің әр екі бөлігін алдымен $\cos^2\alpha$-ға, соң $\sin^2\alpha$-ға бөліп,

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\alpha \ne 90^\circ), \qquad 1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 180^\circ) \qquad (3)$$

теңбе-теңдіктерді пайда етеміз.

Жоғарыдағы (1) теңдіктер негізінде әрбір α $(0°\leq\alpha\leq180°)$ бұрышқа осы бұрыш синусының (косинусы, тангенсі және котангенсі) бір мәні сәйкес қойылды. Бұл сәйкестіктер бұрыштың "синус", "косинус", "тангенс" және "котангенс" деп аталатын функцияларын анықтайды. Олар тригонометриялық функциялар деп аталады.

"Тригонометрия" сөзі — грекше "үшбұрыштарды шешу" деген мағнынаны аңғартады.

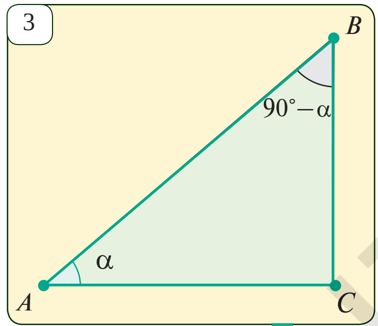
Кез келген сүйір бұрыш а бұрыш үшін:

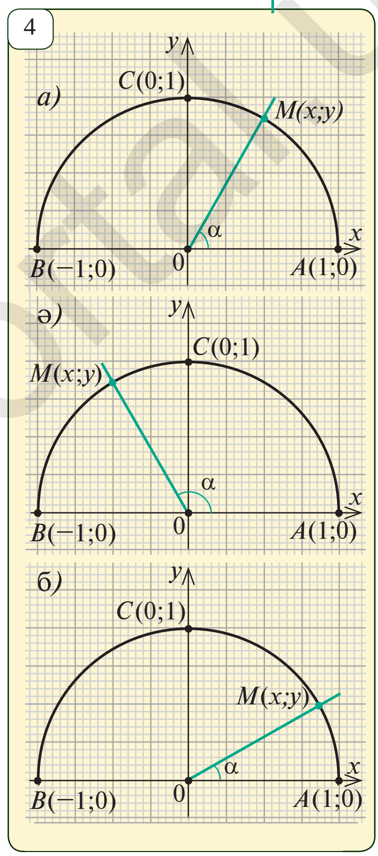
$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$. (2)

Кез келген α $(0\leq\alpha\leq180°)$ бұрыш үшін:

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ 3)

(2) және (3) формулалары *келтіру формулалары* деп аталады. Олар алгебра курсында дәлелденеді.





Есептер мен тапсырмалар

25.1. Егер $90°<\alpha<180°$ болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ және $\mathrm{ctg}\alpha$ шамаларының белгісін анықта.

25.2. 4-суреттегі α бұрышты өлшеп, оның синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін тиісті өлшемдермен анықта.

25.3. $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$ $(\alpha\neq0°)$ және $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$ $(\alpha\neq0°)$ теңдіктерді дәлелде.

25.4. $\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$ $(\alpha\neq90°)$ мен $\mathrm{ctg}(180°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$ ($\alpha\neq0°$ мен $\alpha\neq180°$) теңдіктерді дәлелде.

25.5. Ықшамда:

а) $\cos^2(180°-\alpha)+\cos^2(90°-\alpha)$;

ә) $\sin^2(180°-\alpha)+\sin^2(90°-\alpha)$;

б) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(90°-\alpha)$; в) $\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}(90°-\alpha)$.

25.6. ABC үшбұрышта $\angle A=150°$ және $AC=7$ *см* болса, үшбұрыштың C төбесінен түсірілген биіктігін тап.

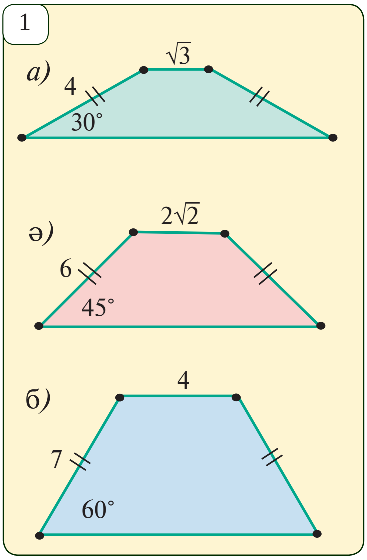
25.7. Егер а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; б) $\sin\alpha=1$ болса, $\cos\alpha$-ны тап.

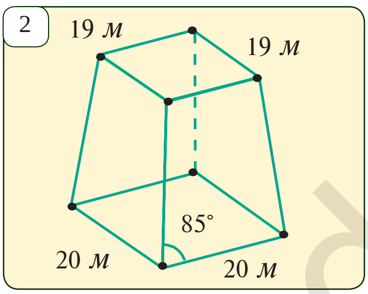
25.8*. Егер а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; ә) $\mathrm{tg}\alpha=-1$; б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ болса, α-ны тап.

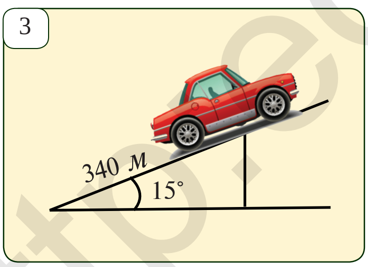
25.9. Кестені толтыр.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\mathrm{tg}\alpha$									
$\mathrm{ctg}\alpha$									

26 ЕСЕПТЕР ШЕШУ







26.1. Биіктігі 3 *см* және сүйір бұрышы 30° болған ромбтың периметрі мен ауданын есепте.

26.2. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 12 *см*. Оның ауданын есепте.

26.3. Биіктігі $4\sqrt{3}$ *см* болған тең қабырғалы үшбұрыштың периметрін тап.

26.4. 1-суретте берілгендер бойынша тең бүйірлі трапециялардың ауданын тап.

26.5. Тік бұрышты трапецияның сүйір бұрышы 30°-қа, биіктігі 4 *см*-ге, кіші табаны 6 *см*-ге тең. Трапеция периметрі мен ауданын тап.

26.6. Шеңбердің хордасы 120 градусты доғаны керіп тұрады. Егер шеңбер радиусы 10 *см* болса, хорданың ұзындығын тап.

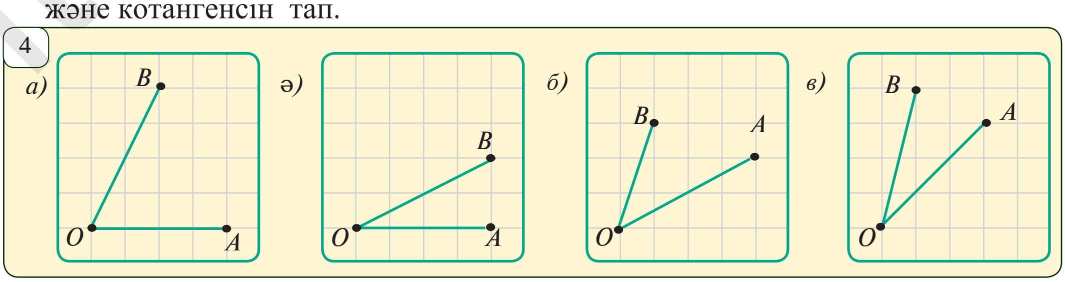
26.7*. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышы а) 120°; ә) 90°; б) 60°. Үшбұрыштың биіктігінің табанына қатынасын есепте.

26.8*. 2-суретте көрсетілген мақта қырманының бүйір қабырғалары тең бүйірлі трапеция, ал үсті квадрат формасында. Суретте берілгендерді пайдаланып, қырманды толық жабу үшін қанша мата керектігін анықта.

26.9. Жеңіл машина асудың жоғарыға көтерілетін аралығында 340 *м* жол жүрді. Егер жолдың көкжиекке қарағанда көтерілу бұрышы 15° болса, жеңіл машина неше метр биіктікке көтерілген (3-сурет)?

26.10. Асхат үйден шығысқа қарай 800 м, сосын солтүстікке қарай 600 м жол жүрді. Ол үйден неше метр алыстаған? Енді ол үйге түзу сызық бойлап жетіп алу үшін батысқа қарағанда қандай бұрышпен жүруі керек?

26.11. 4-Суретте бейнеленген бұрыштардың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін тап.



26.12. Пойыз әр 30 *м* жол жүргенде 1 *м* қияға көтеріледі. Темір жолдың горизонтқа салыстырғанда көтерілу бұрышын тап.

26.13. Егер биіктігі 30 *м* ғимарат көлеңкесінің ұзындығы 45 *м* болса, күн нұрының осы ғимарат тұрған алаңға түсу бұрышын тап.

26.14. Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы 60°-қа, ал үлкен катеті 6-ға тең. Оның кіші катеті мен гипотенузасын тап.

26.15. O центрлік шеңбердің A нүктесіне жүргізілген жанамада B нүкте алынған. Егер $AB=9$ *см*, $\angle ABO=30^\circ$ болса, шеңбердің радиусын және BC кесіндісінің ұзындығын тап.

26.16. m түзу сызығы және оны кесіп өтпейтін AB кесіндісі берілген. Мұнда $AB=10$, AB және m түзу сызықтар арасындағы бұрыш 60°. AB кесіндісінің төбелерінен m түзу сызыққа AC және BD перпендикулярлары жүргізілген. CD кесіндісін тап.

26.17. Ромбының сүйір бұрышы 60°-қа, ал биіктігі 6-ға тең. Ромбының үлкен диагоналының ұзындығын және ауданын тап.

26.18. Радиусы 5 *см* болған шеңберге тең бүйірлі трапеция сырттай сызылған. Егер трапецияның сүйір бұрышы 30° болса, оның бүйір қабырғалары мен ауданын тап.

26.19. Егер $ABCD$ тікбұрышта $AB = 4$, $\angle CAD = 30^\circ$ болса, оған сырттай сызылған шеңбер радиусын және тік төртбұрыш ауданын есепте.

26.20. Тікбұрыштың қабырғалары 3 және $\sqrt{3}$ *см*. Бір қабырғасының диагоналы мен қабырғалары жасайтын бұраштарын табыңдар.

26.21. Егер а) $\sin A=\frac{4}{7}$; ә) $\cos A=\frac{4}{7}$; в) $\cos A=-\frac{4}{7}$ болса, A бұрышын жасаңдар.

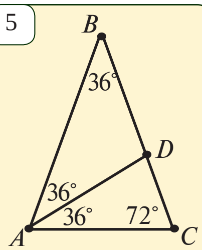
26.22. Тік бұрышты үшбұрыштың біреуінің бұрышы 30°, гипотенузаға түсірілген биіктігі 6 *см*. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

26.23. Ромбының ауданын табыңдар, сүйір бұрышы 30°, ал биіктігі 4 см-ге тең.

Тарихи үзінділер. "Алтын" үшбұрыш

Гректер бұрыштары 36°, 72° және 72° болған тең бүйірлі үшбұрышты — *"алтын үшбұрыш"* деп атаған. Себебі ол ғажайып қасиетке ие екен: *табанындағы бұрыш биссектрисасы AD оны екі тең бүйірлі үшбұрышқа бөледі* (5-*сурет*).

5



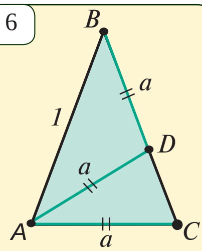
AD биссектриса болғандықтан, BAD және DAC бұрыштары да 36°-тан. Демек, ABD үшбұрышы тең бүйірлі. ADC үшбұрышта ADC бұрыш $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ болып, ACD бұрышқа тең. Демек, ADC үшбұрышы да тең бүйірлі.

Нәтиже. ABC үшбұрышы ACD үшбұрышына ұқсас және

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}. \qquad (1)$$

Егер ABC үшбұрышының бүйір қабырғаларын $AB=BC=1$ деп алсақ, оның табаны төмендегідей табылады (6-*сурет*): $AC=a$ болсын.

6



Онда, 1. $AD=a$ болады, өйткені ΔACD тең бүйірлі.

2. $BD = a$ болады, өйткені ΔABD тең бүйірлі.

3. $CD = BC - BD = 1 - a$.

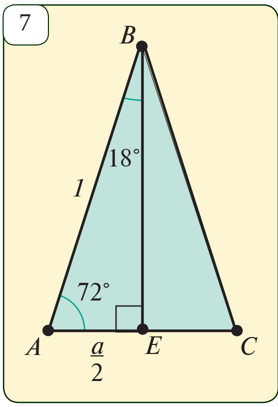
(1) теңдік бойынша: $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1-a}{a}$

Бұдан $a^2 + a - 1 = 0$. Бұл квадрат теңдікті шешіп, $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ екендігін табамыз.

Есеп. $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$ шамаларын есепте.

Шешуі: Бүйір қабырғасы $AB = BC = 1$, ал табаны $AC = a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$-ге тең болған ABC "алтын үшбұрышын" қарастыралық (*7-сурет*). Оның BE биіктігін жүргіземіз.

Тік бұрышты ABE үшбұрышынан: $\sin 18^\circ = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



Бұдан пайдаланып, табылуы талап етілген басқа шамаларын есептейміз:

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Жауабы: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Тарихи үзінділер

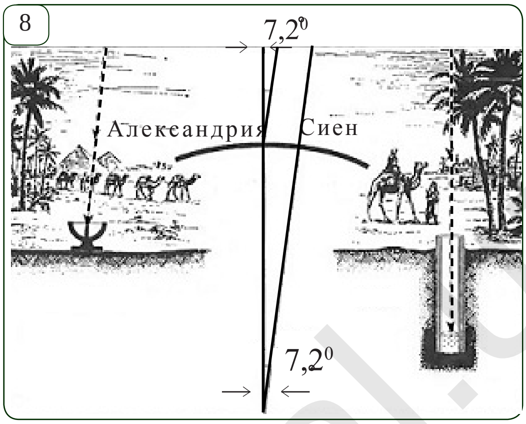
Ұлықбек (1394-1449) — ұлы өзбек ғалымы және мемлекет қайраткері. Шын аты Мұхаммед Тарағай. Ол сайыпқыран Әмір Темірдің немересі. Ұлықбектің әкесі Шахрухта мемлекет қайраткері болған. Ұлықбек шамамен 1425-1428 жылдары Самарқант маңындағы Оби Рахмат төбелігінде өзінің әйгілі обсерваториясын құрады. Обсерваторияның ғимараты үш қабатты болған, оның негізгі құралы — квадранттың биіктігі 50 метр еді. Ұлықбектің ең атақты шығармасы "Зижи курагони" атты астрономиялық кесте болып табылады. Ол 1018 жұлдызды қамтыған.

Сонымен қатар Ұлықбектің тригонометриялық кестелері де назар аударуға лайықты. Ұлықбектің тригонометриялық кестелері 10 ондық таңба дәлдікте деп саналған. Есептеу құралдары дерлік болмаған бір кезеңде осы істерді орындау үшін терең тұжырымдауға негізделген теориялық әлеует пен анық формулалар, сондай-ақ бірталай есепшілер талап етілген болса керек. Зижде Ұлықбек 1 градустың синусын есептеуге ерекше еңбек жазғанын айтып өткен.

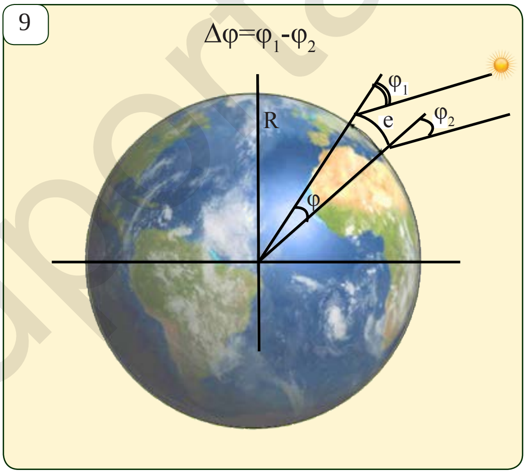
Ежелгі грек ғалымы Эратосфен (біздің заманымыздан бұрынғы 276-194 жылдар) Жердің шеңберін бірінші болып өлшеген. Ол Сиен (қазіргі Асуан) қаласында біздің заманымыздан бұрынғы 240 жылы 19 маусым күні, түс кезінде Күн ең жоғары нүктеде (зенитте) болатынын және терең құдықтың түбіне де жарық түсетінін байқаған. Бірақ, сонымен қатар, ол жылдың осы күні мен кезінде Александрияда Күн ең жоғары нүктеден (зениттен) шеңбер доғасының 1/50 бөлігіне дейін ауатынын да анықтаған.

Бұдан Эратосфен қандай қорытынды шығарған? Оның пікірін жалғастыр және 8-суретте берілгендердің негізінде Жер радиусының ұзындығын тап.

8



9



Қажетті болатын кейбір мәліметтер мен есеп-қисаптар:

Сиен жән Александрия қалалары арасындағы қашықтық 787,5 *км*.

Шеңбер доғасының 1/50 бөлігі - $\alpha = 7{,}2^o$.

C - Жер шеңберінің ұзындығы.

$$\frac{\alpha^o}{360^o} = \frac{787{,}5}{C}$$

Бұдан $C = 360 \cdot 787{,}5 : 7{,}2 = 39\ 375$ *км*.

Бүгінгі таңдағы есеп-қисаптарға орай, Жердің экватор бойлап шеңберінің ұзындығы 40 075,017 *км*, ал нөлдік меридиан бойынша шеңберінің ұзындығы 40 007,86 *км*-ді құрайды. Көрініп тұрғанындай, ежелгі ғалым шамалы аздап қана адасқан.

Тапсырма. 9-суретті пайдаланып, Жер шеңберінің ұзындығын табудың кез келген уақытта қолдануға болатын іс жүзіндік әдісін ойлап тап және оны негіздеп бер.

27 ҮШБҰРЫШ АУДАНЫН БҰРЫШ СИНУСЫ АРҚЫЛЫ ЕСЕПТЕУ

1-теорема. ***Үшбұрыш ауданы оның екі қабырғасы мен осы екі қабырға арасындағы бұрыштың синусы көбейтіндісінің жартысына тең.***

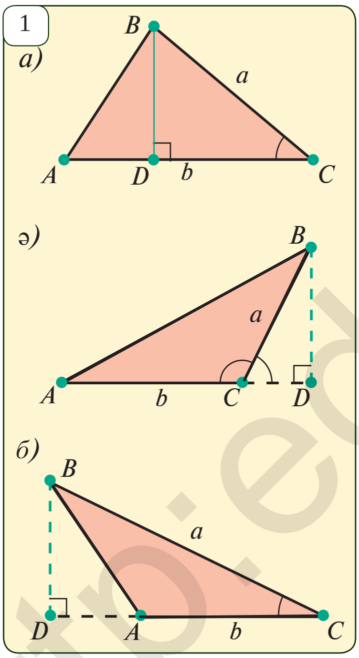
$\Delta ABC,\ BC=a,\ AC=b,\ \angle C$ (1-сурет) ⇒ $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

Дәлелдеу. ABC үшбұрышының BD биіктігін жүргіземіз. Ондай жағдайда 1-суретте кескінделген үш жағдай болуы мүмкін.

1-жағдайды қарастырайық (1.а-сурет). BCD үшбұрышта $\sin C=\frac{BD}{BC}$. Будан $BD = BC\cdot\sin C = a\cdot\sin C$. Сөйтіп,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin C=\frac{1}{2}\,ab\sin C.$$

Екінші және үшінші жағдайлардың дәлелін өзің орында. *Теорема дәлелденді.*



1-теорема бойынша, үшбұрыш ауданы үшін

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \text{ мен } S_{ABC}=\frac{1}{2}\,ac\sin B$$

формулалар да орынды болады.

1-есеп. ABC үшбұрышының ауданы 24 $см^2$. Егер $AC=8$ *см* және $\angle C=30^\circ$ болса, AB қабырғасын тап.

Шешуі. Үшбұрыштың ауданын бұрыш синусы арқылы табу формуласы бойынша,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$$

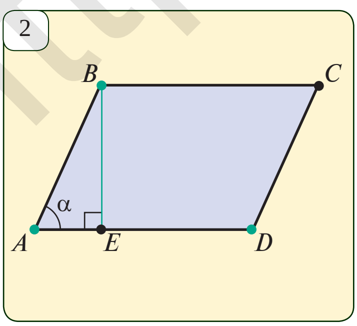
Будан,

$$AB=\frac{2S_{ABC}}{AC\cdot\sin A}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot\sin 30^\circ}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot 0{,}5}=12\ (см).$$

Жауабы: 12 *см.*

2-есеп. Параллелограмның ауданы оның екі сыбайлас қабырғасы және сол қабырғалар арасындағы бұрышы синусының көбейтіндісіне тең екендігін дәлелде.

ABCD параллелограмм, $AB=a,\ AD=b,\ \angle A=\alpha$ *(2-сурет)* ⇒ $S_{ABCD}=ab\sin\alpha$

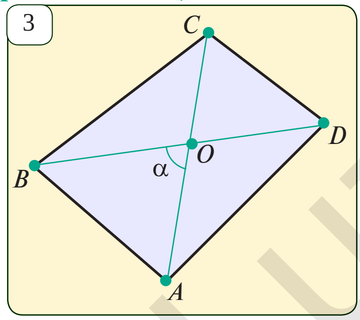


Шешуі. BE биіктігін жүргіземіз. ABE үшбұрышта $\sin A=\frac{BE}{AB}$ яки $BE=AB\sin A=a\sin\alpha$.

Онда, $S_{ABCD}=AD\cdot BE=ab\sin\alpha$.

2-теорема. Төртбұрыштың ауданы оның диагональдары мен диагональдар арасындағы бұрыш синусы көбейтіндісінің жартысына тең.

Дәлелдеу. Диагональдар қиылысуынан пайда болған бұрыштарды қарастырамыз (*3-сурет*):



шарт бойынша $\angle AOB = \alpha$

$\angle AOB$-ға вертикаль болғандықтан $\angle COD = \alpha$,

$\angle AOB$-ға сыбайлас болғандықтан $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$,

$\angle BOC$-ға вертикаль болғандықтан $\angle DOA = 180^\circ - \alpha$

Үшбұрыш ауданын бұрыш синусы арқылы есептеу формуласы бойынша:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha;$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha; \qquad S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin\alpha.$$

Ауданның қасиеті бойынша:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha + \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA)\sin\alpha = \frac{1}{2}\{(OB \cdot (AO + OC) +$$

$$+ OD \cdot (CO + OA)\}\sin\alpha = \frac{1}{2}(OB \cdot AC + OD \cdot AC)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha.$$

Теорема дәлелденді

Есептер мен тапсырмалар

27.1. 1-теореманы 1.*ә*- және 1.*б*-суретте кескіндеген күйде дәлелде.

27.2. Егер а) $AB = 6$ *см*, $AC = 4$ *см*, $\angle A = 30^\circ$; ә) $AC = 14$ *см*, $BC = 7\sqrt{3}$ *см*, $\angle C = 60^\circ$; б) $BC = 3$ *см*, $AB = 4\sqrt{2}$ *см*, $\angle B = 45^\circ$ болса, ABC үшбұрышының ауданын тап.

27.3. Диагоналы 12 *см* және диагональдары арасындағы бұрышы 30° болған тік төртбұрыш ауданын тап.

27.4. Қабырғасы $7\sqrt{2}$ *см* және доғал бұрышы 135° болған ромб ауданын тап.

27.5. Ромбының үлкен диагоналы 18 *см*, доғал бұрышы 120°. Оның ауданын тап.

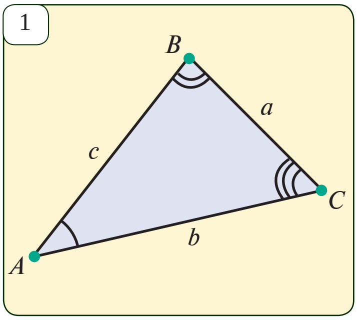
27.6. Ауданы $6\sqrt{2}$ *см*^{2}-ге тең болған ABC үшбұрышында $AB = 9$ *cm*, $\angle A = 45^\circ$. Үшбұрыштың AC қабырғасын, сол қабырғаға жүргізілген биіктікті тап.

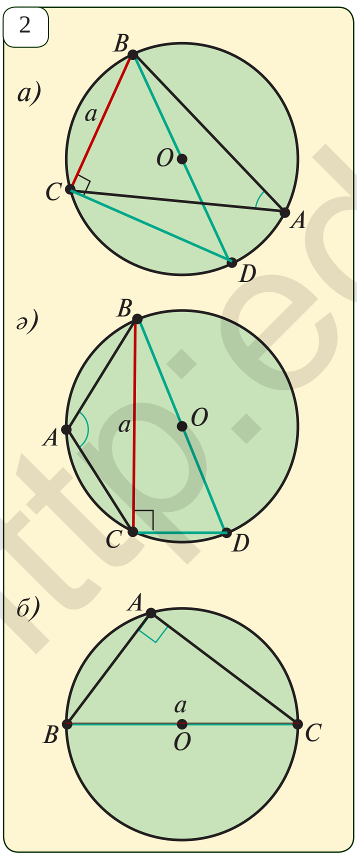
27.7*. ABC үшбұрышта $\angle A = \alpha$, оның B және C төбелерінен жүргізілген биіктіктері сәйкес түрде h_b және h_c болса, үшбұрыш ауданын тап.

27.8*. ABC үшбұрышта $AB = 8$ *см*, $AC = 12$ *см* және $\angle A = 60^\circ$ болса, оның AD биссектрисасын тап (□ұ□қ□□: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$).

Теорема.(Синустар теоремасы). ***Үшбұрыштың қабырғалары қарама-қарсысындағы бұрыштардың синустарына пропорционал.***

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ (*1-сурет*) $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$





Дәлелдеу. Үшбұрыш ауданын бұрыш синусы арқылы табу формуласы бойынша,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B.\quad (❖)$$

Бұл теңдіктердің бірінші жұбы бойынша,

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\,bc\sin A,\ \text{демек}\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

Сондай-ақ, (❖) теңдіктердің бірінші және үшіншіден $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ теңдіктерді шығарамыз.

Сонымен, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

Теорема дәлелденді.

1-есеп. ABC үшбұрышта $AB=14$ *дм*, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=65^\circ$ (*1-сурет*). BC қабырғасын тап.

Шешуі: Синустар теоремасы бойынша,

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\qquad \text{Одан,}$$

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{14\cdot\sin 30^\circ}{\sin 65^\circ}\approx\frac{14\cdot 0{,}5}{0{,}9}\approx 7{,}78\ (\textit{дм}).$$

Ескерту. Тригонометриялық функциялардың шамалары арнаулы калькулятор немесе кестелер көмегімен табылады. Мұнда $\sin 65^\circ\approx 0{,}9$ екендігін оқулықтың 153-бетіндегі кестеден анықтадық.

Жауабы: 7,78 дм.

2-есеп. Үшбұрыш қабырғасының сол қабырға карама-қарсысындағы бұрыш синусына қатынасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер диаметріне тең екендігін дәлелде, яғни (*2-сурет*):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Дәлелдеу. Синустар теоремасы бойынша, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ теңдікті дәлелдеу жеткілікті екендігі белгілі. Үш жағдай болуы мүмкін:

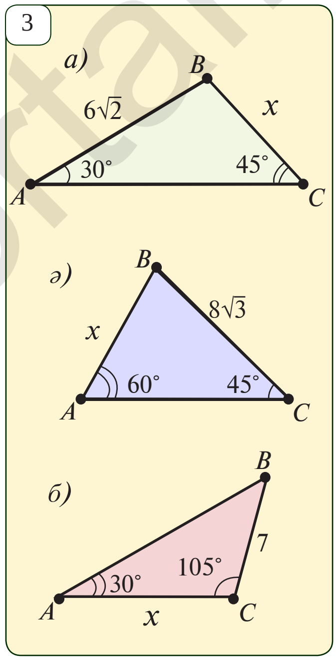
1-жағдай: $\angle A$ — сүйір бұрыш *(2.а-сурет)*; 2-жағдай: $\angle A$ — доғал бұрыш *(2.ә-сурет)*; 3-жағдай: $\angle A$ — тік бұрыш *(2.б-сурет)*.

1-жағдайды қарастырайық: C және D нүктелерін ұштастырамыз. BCD — тік бұрышты үшбұрыш, өйткені $\angle BCD$ бұрышы BD диаметріне тірелген.

ΔBCD-да: $BC = BD \cdot \sin D = 2R\sin D$. Бірақ, $\angle D = \angle A$, өйткені олар бір BC доғасына тірелген іштей сызылған бұрыштар. Онда

$$BC = 2R\sin A \quad \text{немесе} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Қалған жағдайларды өзің дәлелде (*□ұсқаб:* 2-жағдайда $\angle D = 180° - \angle A$ екендігін, 3-жағдайда $a = 2R$ екендігін пайдалан).



Есептер мен тапсырмалар

28.1. Үшбұрыш кез келген қабырғаның сол қабырға қарама-қарсысындағы бұрыш синусына қатынасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер диаметріне тең екендігін 2-есепте келтірілген 2- және 3-жағдайлар үшін дәлелде.

28.2. 3-суретте берілгендер бойынша ізделінген кесінділерді тап.

28.3. Егер ABC үшбұрышта:

а) $\sin A = 0{,}4$; $BC = 6$ *см* және $AB = 5$ *см* болса, $\sin C$-ні;

ә) $\sin B = \frac{1}{2}$; $AC = 8$ *дм* және $BC = 7$ *дм* болса, $\sin A$-ны;

б) $\sin C = \frac{1}{2}$; $AB = 6$ *м* және $AC = 8$ *м* болса, $\sin B$-ны тап.

28.4. Үшбұрыштың бір бұрышы 30°-қа тең. Оның қарама-қарсысындағы қабырға 4,8 *дм*. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын есепте.

28.5. Үшбұрыштың бір қабырғасы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусына тең. Үшбұрыштың сол қабырғасының қарама-қарсысындағы бұрышын тап. Мұнда екі жағдайды қарауға тура келетініне назар аудар.

28.6. ABC үшбұрышы үшін $AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B$ теңдік орынды болуын дәлелде. $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ теңдік дұрыс болуы мүмкін бе?

28.7. Егер ABC үшбұрышта $BC = 20$ *м*, $AC = 13$ *м* және $\angle A = 67°$ болса, үшбұрыштың AB қабырғасын, B және C бұрыштарын тап.

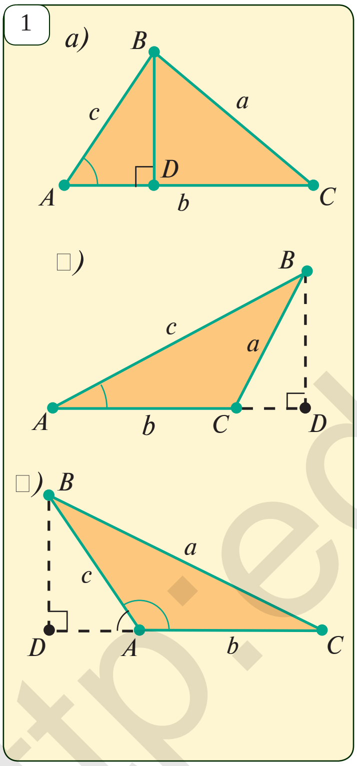
28.8*. Егер ABC үшбұрышта $BC = 18$ *дм*, $\angle A = 42°$, $\angle B = 62°$ болса, үшбұрыштың C бұрышын, AB және AC қабырғаларын тап.

29 КОСИНУСТАР ТЕОРЕМАСЫ

Тік бұрышты үшбұрышта тік бұрыш қарама-қарсысындағы қабырға (гипотенуза) квадраты қалған қабырғалар (катеттер) квадраттарының қосындысына тең. Ендеше, дұрыс емес бұрыш үшін ше? Төмендегі теорема сол жөнінде.

***Теорема.* (Косинустар теоремасы). Үшбұрыштың кез келген қабырғасының квадраты қалған екі қабырғасының квадраттары қосындысы осы екі қабырға мен олардың арасындағы бұрыш косинусының көбейтіндісінің екі еселенген айырмасына тең.**

ΔABC, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (*1-сурет*) $\Rightarrow$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



Дәлелдеу. ABC үшбұрышының BD биіктігін жүргіземіз. D нүкте AC қабырғасында (*1 .а-сурет*) немесе оның жалғасында (*1.ә- және 1.б-суреттер*) болуы мүмкін. Бірінші жағдайды қарастырамыз. Тік бұрышты BCD үшбұрышында Пифагор теоремасы бойынша,

$$BC^2=BD^2+DC^2.$$

$DC=AC-AD$ болғандықтан:

$$BC^2=BD^2+(AC-AD)^2=BD^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AD+AD^2.$$

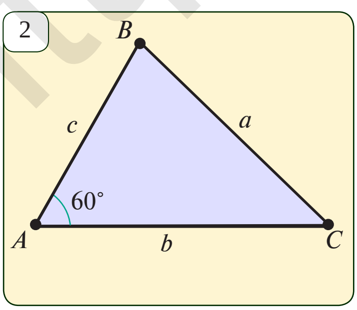
Тік бұрышты ABD үшбұрышында $BD^2+AD^2=AB^2$ және $AD=AB\cos A$ екендігін ескеріп, соңғы теңдіктен

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A,$$

демек $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ теңдікке ие боламыз.

[illegible]

1.ә-суретте кескінделген түрінде $DC=AD-AC$, 1.б-суретте кескінделген түрінде $DC=AD+AC$ және $\cos(180°-A)=-\cos A$ теңдіктерді пайдаланып, Косинустар теоремасын өз бетіңше дәлелде.



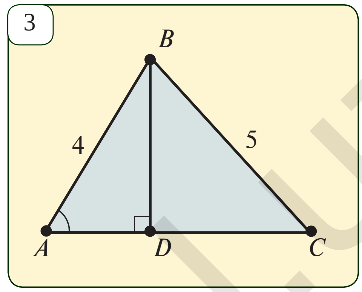
Ескерту. Косинустар теоремасы Пифагор теоремасының жалпыланғаны болып табылады. $\angle A=90°$ болғанда ($\cos 90°=0$ болғандықтан) косинустар теоремасынан Пифагор теоремасы келіп шығады.

1-есеп. ABC үшбұрышта $AB=6$ *см*, $AC=7$ *см*, $\angle A=60°$ (*2-сурет*). BC қабырғасын тап.

Шешуі. Косинустар теоремасы бойынша, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ немесе $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A$ болғандықтан

$$BC^2=7^2+6^2-2\cdot7\cdot6\cdot\cos60^\circ=49+36-84\cdot\frac{1}{2}=43,$$

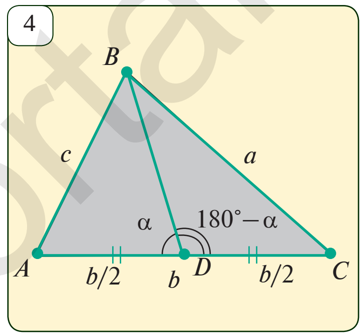
яғни $BC=\sqrt{43}$ *см*. *Жауабы:* $\sqrt{43}$ *см*.



Косинустар теоремасын пайдаланып, қабырғалары белгілі болған үшбұрыштың бұрыштарын табуға болады:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

2-есеп. ABC үшбұрыш қабырғалары $a=5$ *м*, $b=6$ *м* және $c=4$ *м*. Кіші қабырғаның үлкен қабырғадағы проекциясын тап (*3-сурет*).



Шешуі. (1) формуласымен $\cos A$-ны табалық:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{9}{16}.$$

Тік бұрышты ABD үшбұрышта $AD=AB\cdot\cos A$ болғандықтан $AD=4\cdot\frac{9}{16}=2{,}25$ (*м*).

Жауабы: 2,25 *м*.

Есептер мен тапсырмалар

29.1. Косинустар теоремасын 1.*ә*- және 1.*б*-суреттегі жағдайларда дәлелде.

29.2. ABC үшбұрышта

а) $AC=3$ *см*, $BC=4$ *см* және $\angle C=60^\circ$ болса, AB-ны;

ә) $AB=4$ *м*, $BC=4\sqrt{2}$ *м* және $\angle B=45^\circ$ болса, AC-ны;

б) $AB=7$ *дм*, $AC=6\sqrt{3}$ *дм* және $\angle A=150^\circ$ болса, BC-ны тап.

29.3. Қабырғалары 5 *см*, 6 *см*, 7 *см* болған үшбұрыш бұрыштарының косинустарын тап.

29.4. ABC үшбұрышта $AB=10$ *см*, $BC=12$ *м* және $\sin B=0{,}6$ болса, AC қабырғасын тап.

29.5. Параллелограмның диагональдары 10 *см* және 12 *см*, олардың арасындағы бұрышы 60°-қа тең. Параллелограмның қабырғаларын тап.

29.6. Қабырғалары 5 *см* және 7 *см* болған параллелограмның бір бұрышы 120°-қа тең. Оның диагональдарын тап.

29.7*. Қабырғалары a, b, c болған ABC үшбұрыштың BD медианасы $BD=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ формуламен есептелуін дәлелде (*4-сурет*).

29.8*. Қабырғалары 6 *м*, 7 *м* және 8 *м* болған үшбұрыш медианаларын тап.

29.9. Қабырғалары 5 *см*, 6 *см*, 7 *см* болған үшбұрыш биссектрисаларын тап.

29.10. Қабырғалары 5 *см*, 6 *см*, 7 *см* болған үшбұрыш биіктіктерін тап.

30 СИНУСТАР ЖӘНЕ КОСИНУСТАР ТЕОРЕМАЛАРЫНЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНЫЛУЫ

Алдыңғы сабақтарда дәлелденген синустар және косинустар теоремаларын үшбұрыштарға тиісті әр түрлі есептерді шешуде тиімді пайдалануға болады. Бұл сабақта осы теоремалардың кейбіреулеріне тоқталайық.

1. Косинустар теоремасы үшбұрыштың бұрыштарын таппай, оның бұрыштар бойынша түрін (сүйір, доғал немесе тік бұрышты екендігін) анықтауға мүмкіндік береді. Шынында да,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

формулада

1) егер $b^2+c^2>a^2$ болса, $\cos A>0$. Демек, A — сүйір бұрыш;

2) егер $b^2+c^2=a^2$ болса, $\cos A=0$. Демек, A — тік бұрыш;

3) егер $b^2+c^2<a^2$ болса, $\cos A<0$. Демек, A — доғал бұрыш.

$b^2+c^2=a^2$ теңдік немесе $b^2+c^2<a^2$ теңсіздік a — үшбұрыштың ең үлкен қабырғасы болғанда ғана орындалады. Демек, үшбұрыштың тік немесе доғал бұрышы оның ең үлкен қабырғасының қарсысында жатады.

Үшбұрыштың ең үлкен қабырғасы қарсысындағы бұрыштың үлкендігіне қарай, бұл үшбұрыштың қандай (сүйір, доғал, тік бұрышты) үшбұрыш екендігі жөнінде тұжырымға келуге болады.

1-есеп. Қабырғалары 5 *м*, 6 *м* және 7 *м* болған үшбұрыш бұрыштарын таппай оның түрін анықта.

Шешуі. Ең үлкен бұрыштың қарсысында ең үлкен қабырға жатады. Сондықтан, егер $a=7, b=6, c=5$ болса, $\angle A$ ең үлкен бұрыш болады.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36+25-49}{2\cdot 6\cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Демек, A — сүйір бұрыш, ал берілген үшбұрыш сүйір бұрышты.

2. Үшбұрыштың ауданын оның екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы арқылы есептеу формуласы

$$S = \frac{1}{2} bc\sin A$$

және $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ формулалардан үшбұрыш ауданын есептеу үшін

$$S = \frac{abc}{4R}$$

формуланы және үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын есептеу үшін

$$R = \frac{abc}{4S}$$

формуланы жасаймыз.

2-есеп. Қабырғалары $a=5$, $b=6$, $c=10$ болған үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын тап.

Шешуі. Герон формуласы арқылы үшбұрыш ауданын табалық:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+10}{2}=11,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}=\sqrt{11\cdot6\cdot4}=\sqrt{264}\approx16{,}3.$$

Онда, $R=\dfrac{abc}{4S}\approx\dfrac{5\cdot7\cdot10}{4\cdot16{,}3}\approx5{,}4.$ □□□□□□□: $\approx5{,}4.$

Есептер мен тапсырмалар

30.1. Егер $AB=7$ *см*, $BC=8$ *см*, $CA=9$ *см* болса, ABC үшбұрышының ең үлкен және ең кіші бұрышын тап.

30.2. Егер ABC үшбұрышында $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$ болса, үшбұрыштың ең үлкен және ең кіші қабырғаларын анықта.

30.3. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген:
а) $a=5$, $b=4$, $c=4$; ә) $a=17$, $b=8$, $c=15$; б) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Үшбұрыш сүйір бұрышты, тік бұрышты немесе доғал бұрышты екендігін анықта.

30.4. Қабырғалары а) 13, 14, 15; ә) 15, 13, 4; б) 35, 29, 8; в) 4, 5, 7 болған үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын тап.

30.5. ABC үшбұрыштың AB қабырғасында D нүкте белгіленген. CD кесіндісі AC және BC кесінділерінің кем дегенде біреуінен кіші екендігін дәлелде.

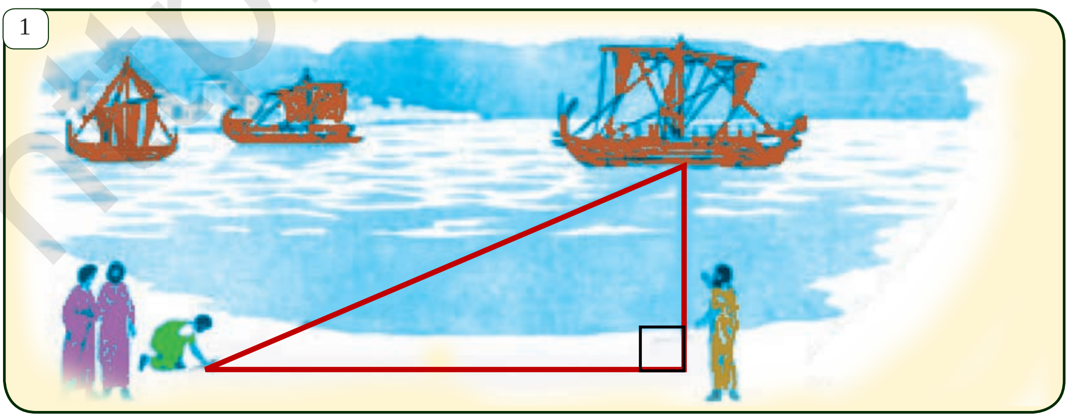
30.6. Үшбұрыштың үлкен бұрышы қарсысында үлкен қабырғасы жатуын дәлелде.

30.7. Үшбұрыштың үлкен қабырғасы қарсысында үлкен бұрышы жатуын дәлелде.

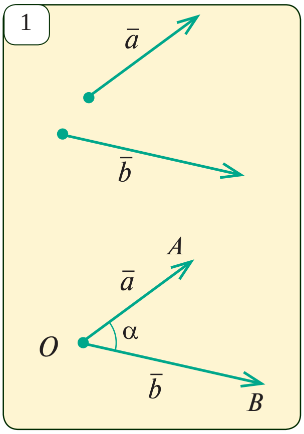
30.8*. ABC үшбұрыштың CD медианасы жүргізілген. Егер $AC>BC$ болса, ACD бұрышы BCD бұрышынан кіші болуын дәлелде.

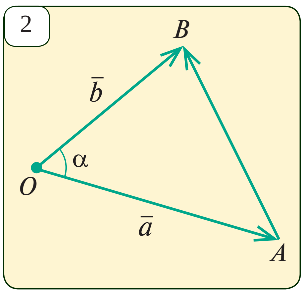
30.9*. 1-суретте берілгендерге негізделіп, ежелгі гректер жағалаудан кемеге дейінгі қашықтықты қалай өлшегенін анықтаңдар.

1



31 ЕКІ ВЕКТОР АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ СКАЛЯР КӨБЕЙТІНДІСІ





Нөл вектордан өзгеше $\bar{a}$ және $\bar{b}$ *векторлар арасындағы бұрыш* деп O нүктеден шығатын $\overline{OA}=\bar{a}$ және $\overline{OB}=\bar{b}$ векторлардың бағыттаушы кесінділері арасындағы AOB бұрышын айтады (*1-сурет*).

Бірдей бағыттағы векторлар арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп есептеледі. Егер екі вектор арасындағы бұрыш $\angle 90^\circ$ болса, олар *перпендикуляр* деп аталады.

$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың *скаляр көбейтіндісі* деп, осы векторлар ұзындықтарының олар арасындағы бұрыш косинусы көбейтіндісіне айтылады.

Егер векторлардың бірі нөлдік вектор болса, олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Скаляр көбейтінді $\bar{a}\cdot\bar{b}$ немесе $(\bar{a},\bar{b})$ түрінде белгіленеді. Анықтамаға орай

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Анықтама бойынша, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, олар *перпендикуляр* болады және керісінше.

Физикада денені $\bar{F}$ күш әсері астында $\bar{s}$ қашықтыққа жылжытқанда атқарылған A жұмыс $\bar{F}$ және $\bar{s}$ векторлардың скаляр көбейтіндісіне тең:

$$A=(\bar{F},\bar{s})=|\bar{F}|\cdot|\bar{s}|\cos\varphi.$$

Қасиет. $\bar{a}\,(a_1;\,a_2)$ және $\bar{b}(b_1;\,b_2)$ векторлар үшін $(\bar{a};\bar{b})=a_1b_1+a_2b_2$.

Дәлелдеу. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларды координата басы O нүктеге қоямыз (2-сурет). Онда $\overline{OA}=(a_1;\,a_2)$ және $\overline{OB}=(b_1;\,b_2)$ болады. Егер берілген векторлар коллинеар болмаса, ABO үшбұрыштан құралған болады және ол үшін косинустар теоремасы орынды болады: $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\varphi$.

Онда $OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\dfrac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$ болады.

Бірақ, $OA^2=a_1^2+a_2^2$, $OB^2=b_1^2+b_2^2$ және $AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$.

Демек, $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi=OA.OB.\cos\varphi=\dfrac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)=$

$$=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\right)=a_1b_1+a_2b_2.$$

Берілген векторлар коллинеар болған ($\varphi=0^\circ$, $\varphi=180^\circ$) жағдайда да осы теңдік орынды болуын өзің анықта. $\square$

Векторлар скаляр көбейтіндісінің қасиеттері

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ орын алмастыру қасиеті.

2. $(\bar{a}+\bar{b})\ \ \bar{c}\ =\ \bar{a}\ \ \bar{c}\ +\ \bar{b}\ \ \bar{c}$ бөлу қасиеті.

3. $\lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\cdot\bar{b})$ топтау қасиеті.

4. Егер a және b векторлар бірдей бағыттағы коллинеар векторлар болса, $\bar{a}\ \bar{b}\ =|\bar{a}|\ \ |\bar{b}|$ болады, өйткені $\cos 0^\circ\ =\ 1$.

5. Егер қарама-қарсы бағытталған болса, $\bar{a}\ \bar{b}\ =\ -\ |\bar{a}||\bar{b}|$, өйткені $\cos180^\circ\ =\ -1$.

6. $\bar{a}\ \ \ \bar{a}\ =|\bar{a}||\bar{a}|\ \cos0^\circ\ =|\bar{a}|^2\Rightarrow\bar{a}^{\,2}=|\bar{a}|^2$.

7. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлар өзара перпендикуляр болса, $\bar{a}\ \bar{b}\ \ =0$ болады.

Нәтижелер:

а) $\bar{a}\ =(a_1;a_2)$ вектордың ұзындығы: $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}$; (1)

ә) $\bar{a}=(a_1;a_2)$ және $\bar{b}=(b_1;b_2)$ векторлар арасындағы бұрыш косинусы:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\quad\text{немесе}\quad\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

Есеп. a(Г;2) және $\bar{b}(4;-2)$ векторлар арасындағы бұрышты тап.

Шешуі. Берілген векторлар арасындағы бұрышты α деп белгілеп, формулаға орай $\cos\alpha=\dfrac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{4-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}=0$. Демек, $\alpha=90^\circ$. *Жауабы:* 90°.

Есептер мен тапсырмалар

31.1. Егер $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлар үшін *а)* $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=5$, $\alpha=30^\circ$; *ә)* $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=7$, $\alpha=45^\circ$; *б)* $|\bar{a}|=2.4$, $|\bar{b}|=10$, $\alpha=60^\circ$; *в)* $|\bar{a}|=0{,}8$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$, $\alpha=40^\circ$ болса, бұл векторлардың скаляр көбейтіндісін тап (α — $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлар арасындағы бұрыш).

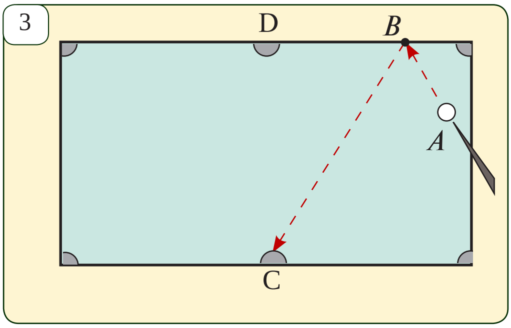
31.2. *а)* $\bar{a}(\frac{1}{2};-1)$ мен $\bar{b}(2;3)$; ә) $\bar{a}(-5;6)$ мен $\bar{b}(6;5)$; б) $\bar{a}(1{,}5;2)$ мен $\bar{b}(4;-2)$ векторлар скаляр көбейтіндісін есептеп, арасындағы бұрышты тап.

31.3. $ABCD$ ромбы диагональдары O нүктеде қиылысады, мұнда $\overline{BD}=\overline{AB}=4$ *см*.
а) $\overline{AB}$ мен $\overline{AD}$; ә) $\overline{AB}$ мен $\overline{AC}$; б) $\overline{AD}$ мен $\overline{DC}$; в) $\overline{OC}$ мен $\overline{OD}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі мен арасындағы бұрышты тап.

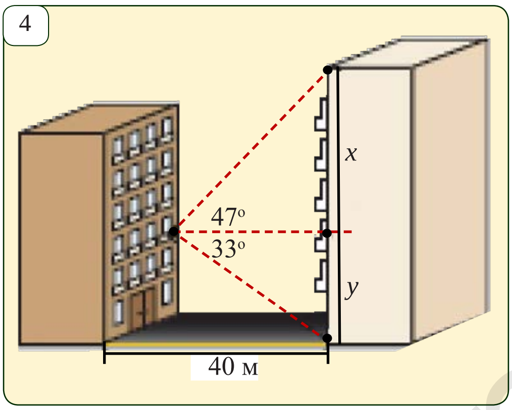
31.4. Нөлдік вектордан өзгеше $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлар берілген болсын. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ болғанда бұл векторлардың перпендикуляр болуын және керісінше $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлар перпеникуляр болса, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ болуын дәлелде.

31.5*. x-тің қандай шамасында а) $\bar{a}(4;5)$ және $\bar{b}(x;6)$; ә) $\bar{a}(x;1)$ және $\bar{b}(3;2)$; б) $\bar{a}(0;-3)$ және $\bar{b}(5;x)$ векторлар өзара перпендикуляр болады?

31.6. $\bar{a}(3;3)$, $\bar{b}(2;-2)$, $\bar{c}(-1;-4)$ және $\bar{d}(-4;1)$ векторлар арасынан өзара перпендикуляр жұптарын тап·

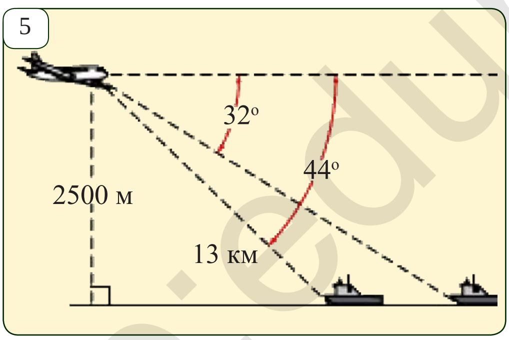


31.7*. Бильярд ойынында A нүктедегі шар соққаннан кейін бильярд столының қабырғасына B нүктеде жанасады және бағытын өзгертіп C нүктедегі торға түсті (*3-сурет*). Егер $AB = 40$ *см*, $BC = 150$ *см* және $\angle ABD = 120°$ болса, $AB \cdot BC$ скаляр көбейтіндісін тап.



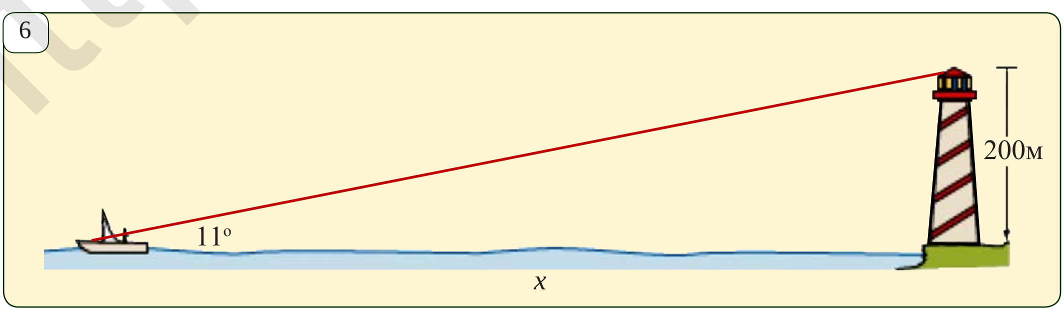
31.8. $F(-3,\ 4)$ күш әсерімен нүкте $A(5,-1)$жағдайдан $B(2,\ 1)$ жағдайға өтті. Осы үдерісте қандай жұмыс орындалды?

31.9. Лала көп қабатты үйдің 3-қабатында жасайды. Оның терезесінен 40 *м* қашықтықта тұрған басқа бір үй көрініп тұр (4-сурет). Егер қарама-қарсы үйдің шатыры 47° бұрыш астында, ал төменгі табаны 33° бұрыш астында көрінсе, қарсы үйдің биіктігін тап.



31.10. 2500 *м* биіктікте ұшып бара жатқан ұшақтан бірінші кеме көкжиекке қатысты 44° бұрыш астында, ал екінші кеме 32° бұрыш астында көрінеді (5-сурет). Кемелер арасындағы қашықтықты тап.

31.11. Балықшылар қайығынан биіктігі 200 *м* болған маяк 11° бұрыш астында көрінеді (6-сурет). Қайықтан жағаға дейінгі қашықтықты тап.



Геометрия мен географиядан жоба жұмысы

Жер шарының бетіндегі жерлер географиялық координаталар арқылы анықталатыны география пәнінен белгілі. 7-суретте осы координаталар келтірілген. Онда

1-нөлінші (Гринвич) меридианы;

2-нөлінші меридианнан оңға (шығысқа) орналасқан меридиандар;

3-экватордан төменге (оңтүстікке) орналасқан меридиандар;

4-экватор.

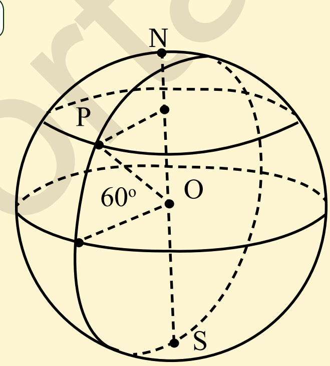
Нөлінші (Гринвич) меридианының (1) экватормен (4) қиылысу нүктесі географиялық координаталардың санақ басы саналады.

Экватордан солтүстікке меридиан бойымен ширек шеңбер доғасы 90° солтүстік кеңдікті, экватордан оңтүстікке қарай 90° оңтүстік кеңдікті қамтиды.

Нөлінші меридианнан шығысқа қарай экатор бойымен жарты шеңбер доғасы 180° шығыс ұзындықты, нөлінші меридианнан батысқа қарай да 180° батыс ұзындықты қамтиды.

7

8



1. Ташкент қаласының географиялық координаталарын тап.

2. Отанымыз астанасымен тағы қайсы үлкен қалалар шамамен бірдей меридианда орналасқан.

3. Ташкент қаласынан Токио, Пекин, Сеул, Вашингтон және Нью-Йорк қалаларына дейінгі (меридиан бойымен) қашықтықты анықта (жеткіліксіз мәліметтерді өзің іздеп тап).

4. Қала 60° солтүстік кеңдікте орналасқан. Егер Жердің радиусы 6400 *км* болса, осы қала орналасқан параллельдің радиусын тап.

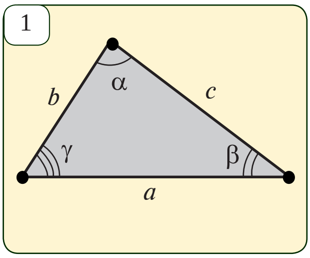
Қызықты геометрия

Аңшы аңға шықты. Алдымен ол оңтүстікке 1 *км* жүрді. Соң шығысқа қарай 1 *км*, ал кейін солтүстікке қарай 1 *км* жол жүрді және бастапқы жағдайына келіп қалды. Караса аю тұр. Оған оқ атты.

1. Бұл аюдың рені қандай?

2. Жер шарының тағы қайсы жерлерінде жол жүріп, жоғарыда бейнеленгендей 3 жаққа жүріп, тағы бастапқы нүктеге келіп қалуға болады? Ол жерлерде аю бола ма?

32 ҮШБҰРЫШТАРДЫ ШЕШУ



Үшбұрыштың қабырғаларын *a, b, c*-мен, бұл қабырғалардың қарама-қарсысындағы бұрыштарды сәйкес түрде α, β, γ -мен белгілейміз *(1-сурет)*. Үшбұрыштың қабырғалары және бұрыштарын бір атаумен — оның ***элементтері*** деп атайды.

Үшбұрышты анықтаушы берілген элементтер бойынша, оның қалған элементтерін табу *үшбұрышты шешу* деп қолданылады.

***1-есеп**. (Үшбұрышты берілген бір қабырғасы және оған жапсарлас бұрыштары бойынша шешу).* Егер үшбұрышта $a=6$, $\beta=60°$ және $\gamma=45°$ болса, оның үшінші бұрышы мен қалған екі қабырғасын тап.

Шешуі. 1.Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180° болғандықтан

$$\alpha=180°-\beta-\gamma=180°-60°-45°=75°.$$

Синустар теоремасы арқылы қалған екі қабырғаны табалық:

2. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ теңдіктен $b=a\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 60°}{\sin 75°}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}8660}{0{,}9659}\approx 5{,}3794\approx 5{,}4.$

(sin60° және sin75° шамалары микрокалькуляторда немесе оқулықтың 153-бетіндегі кестеден тауып қойылды).

3. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ теңдіктен $c=a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 45°}{\sin 75°}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}7071}{0{,}9659}\approx 4{,}3924\approx 4{,}4.$

Жауабы: $\alpha=75°$; $\beta\approx 5{,}4$; $c\approx 4{,}4$.

***2-есеп**. (Үшбұрышты берілген екі қабырғасы мен оның арасындағы бұрышы бойынша шешу).* Егер үшбұрышта $a=6$, $b=4$ және $\gamma=120°$ болса, оның үшінші қабырғасы мен қалған бұрыштарын тап.

Шешуі. 1. Косинустар теоремасы арқылы үшбұрыштың үшінші c қабырғасын табалық.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{36+16-2\cdot6\cdot4\cdot(-0{,}5)}=\sqrt{76}\approx 8{,}7.$$

2. Енді үшбұрыштың үш қабырғасын білген жағдайда, косинустар теоремасы арқылы үшбұрыштың қалған бұрыштарын табалық:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+76-6^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{76}}\approx 0{,}8046.$$

$\cos\alpha\approx 0{,}8046$ теңдік негізінде α бұрыштың шамасын 153-беттегі кестеден анықталық (α — сүйір бұрыш): $\alpha\approx 36°$.

3. $\beta=180°-\alpha-\gamma\approx 180°-(36°+120°)=24°$.

Жауабы: $c\approx 8{,}7$; $\alpha\approx 36°$, $\beta\approx 24°$.

***3-есеп**. (Үшбұрышты берілген үш қабырғасы бойынша шешу).* Егер үшбұрышта $a=10$, $b=6$ және $c=13$ болса, оның бұрыштарын тап.

Шешуі: **1.** Үшбұрыштың доғал бұрышты болуы немесе болмауын үлкен қабырға қарсысындағы бұрыш косинусының белгісіне қарап анықтаймыз:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{100+36-169}{2\cdot 10\cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0{,}275 < 0.$$

Демек, C — доғал бұрыш екен. Мұны 153-беттегі кестеден C бұрыштың үлкендігін анықтауда есепке аламыз. Кестеден косинусы 0,275-ке тең бұрыш $\angle C_1 = 74^\circ$ екендігін табалық. Онда $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$ формула бойынша,

$$\angle C = 180^\circ - \angle C_1 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ.$$

2. Синустар теоремасы бойынша,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Бұдан, $\sin A = \frac{a\cdot\sin C}{c} = \frac{10\cdot\sin 106^\circ}{13} = \frac{10\cdot\sin 74^\circ}{13} \approx \frac{10\cdot 0{,}9615}{13} \approx 0{,}7396.$

A — сүйір бұрыш болғандықтан 153-беттегі кестеден $\angle A \approx 47^\circ$ екендігін анықтаймыз.

3. $\angle B \approx 180^\circ - (106^\circ + 47^\circ) = 26^\circ$. *Жауабы:* $\angle A \approx 47^\circ$, $\angle B \approx 26^\circ$, $\angle C \approx 106^\circ$.

Есептер мен тапсырмалар

32.1. Үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған жапсарлас екі бұрышы берілген:

а) $a=5$ *см*, $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$; ә) $c=20$ *см*, $\alpha=75^\circ$, $\beta=60^\circ$;
б) $a=35$ *см*, $\beta=40^\circ$, $\gamma=120^\circ$; в) $b=12$ *см*, $\alpha=36^\circ$, $\beta=25^\circ$.

Үшбұрыштың үшінші бұрышы мен қалған екі қабырғасын тап.

32.2. Үшбұрыштың екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы берілген:

а) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60^\circ$; ә) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130^\circ$;
б) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85^\circ$; в) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145^\circ$.

Үшбұрыштың қалған бұрыштары мен үшінші қабырғасын тап.

32.3. Үшбұрыштың үш қабырғасы берілген:

а) $a=2$, $b=3$, $c=4$; ә) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
б) $a=4$, $b=5$, $c=7$; в) $a=15$, $b=24$, $c=18$.

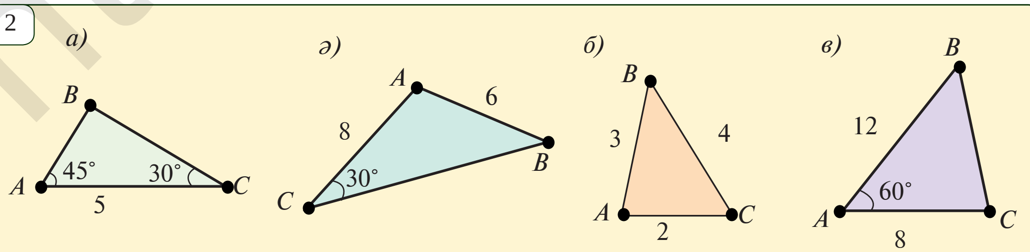
Үшбұрыштың бұрыштарын тап.

32.4. Үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың біреуінің қарсысындағы бұрышы берілген. Үшбұрыштың қалған қабырғасы мен бұрыштарын тап:

а) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; ә) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138^\circ$;
б) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60^\circ$; в) $b=6$, $c=8$, $\alpha=30^\circ$.

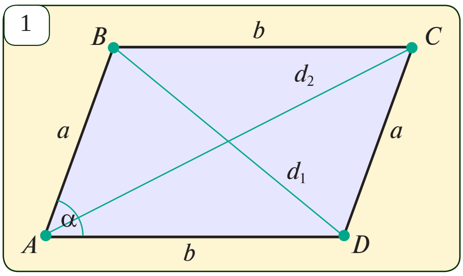
32.5. 2-суретте берілген мәліметтер негізінде үшбұрышты шеш.

2



1-есеп. Параллелограмм диагональдары квадраттарының қосындысы қабырғалары квадраттарының қосындысына тең екендігін дәлелде.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$, $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ *(1-сурет)*. ⇒ $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$



Шешуі. $ABCD$ параллелограмның A бұрышы α-ға тең болсын. Онда $\angle B=180^\circ-\alpha$. ABD мен ABC үшбұрыштарға косинустар теоремасын колданалық *(1-сурет)*:

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

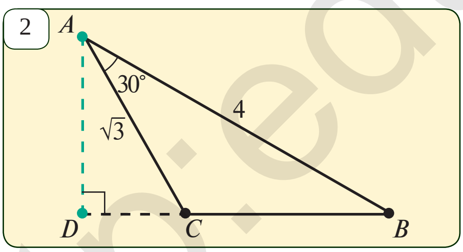
$$d_2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha).$$

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ теңдікті ескерсек,

$$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктердің сәйкес бөліктерін қосып, $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$ теңдікті жасаймыз.

2-есеп. ABC үшбұрышта $\angle A=30^\circ$, $AB=4$, $AC=\sqrt{3}$ болса, үшбұрыштың A төбесінен жүргізілген AD биіктігін тап *(2-сурет)*.



Шешуі. 1) Косинустар теоремасы арқылы үшбұрыштың BC қабырғасын табамыз:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=$$
$$=4^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ=7, \qquad BC=\sqrt{7}.$$

2) Енді үшбұрыштың ауданын табамыз:

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot4\cdot\sin30^\circ=\sqrt{3}.$$

3) Табылғандардан пайдаланып, үшбұрыштың AD биіктігін табамыз:

$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD$ формуладан $AD=\frac{2S}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

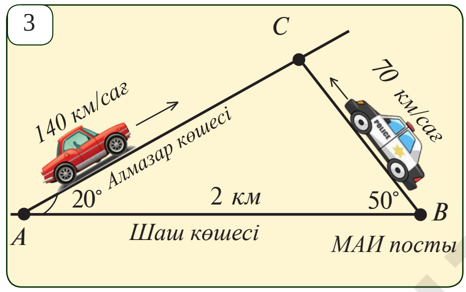
Жауабы: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

3-есеп. Жүргізуші жол ережелерін бұзып, сағат 12.00-де көшенің A нүктесінен Алмазар көшесіне қарай бұрылып, 140 *км/сағ* жылдамдықта жүрісін жалғастырды *(3-сурет)*. Сағат 12.00-де МАИ қызметкері B нүктеден тастақ жолда 70 *км/сағ* жылдамдықта жол ережелерін бұзушы жүргізушінің жолын кесу үшін жолға аттанды. МАИ қызметкері қиылыста, C нүктеде ереже бұзушы жүргізушіні тоқтата ала ма?

Шешуі: ABC үшбұрышта

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

1. Алмазар көшесіндегі жолдың AC бөлігінің ұзындығын табамыз: синустар теоремасы бойынша,



$\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$. Теңдіктен $AC = \dfrac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \dfrac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} = \dfrac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ)} = \dfrac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \approx$

$\approx \dfrac{2 \cdot 0{,}766}{0{,}940} = \dfrac{1{,}532}{0{,}94} \approx 1{,}630$ (*км*). Бұл жолды ережебұзушы $\dfrac{1{,}630 \text{ км}}{140 \text{ км/сағ}} \approx$

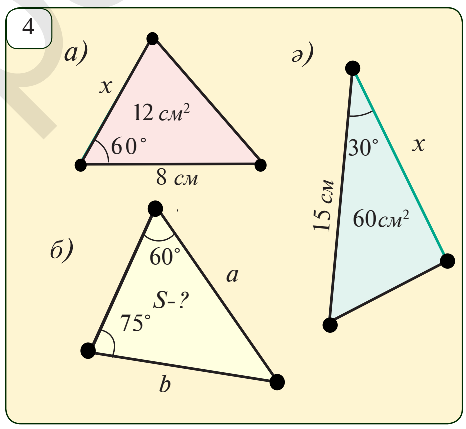
$\approx 0{,}0116$ *сағ* $= 0{,}012 \cdot 3600$ *секунд* ≈ 42 секундта басып өтеді.

2. Тастақ жолдың BC бөлігі ұзындығын табамыз: синустар теоремасына орай, $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Теңдіктен $BC = \dfrac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \dfrac{2 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \dfrac{2 \cdot 0{,}342}{0{,}766} \approx 0{,}893$ (*км*).

Бұл жолды МАИ қызметкері $\dfrac{0{,}893 \text{ км}}{70 \text{ км/сағ}} \approx 0{,}0128$ *сағ* $= 0{,}0128 \cdot 3600$ *секунд* $\approx$

≈ 46 *секунд*та басып өтеді. Демек, C қиылысына МАИ қызметкері жүргізушіден кештеу келеді екен. *Жауабы:* Жоқ.

Есептер мен тапсырмалар



33.1. 4-суреттегі мәліметтер бойынша x-тің шамасын тап.

33.2. ABC үшбұрыштың CD биіктігі 4 *м*. Егер $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ болса, үшбұрыш қабырғаларын тап.

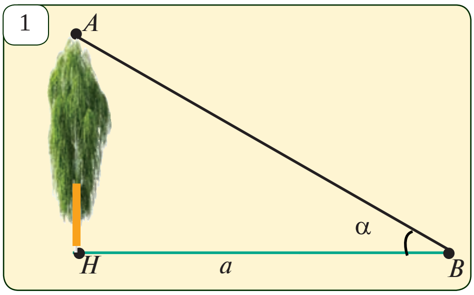
33.3. Бір нүктеге үлкендігі бірдей болған екі күш қойылған. Егер бұл күштердің бағыттары арасындағы бұрыш 60°, бұл күштердің тең әсер етушісі 150 *кг* болса, бұл күштердің үлкендігін тап.

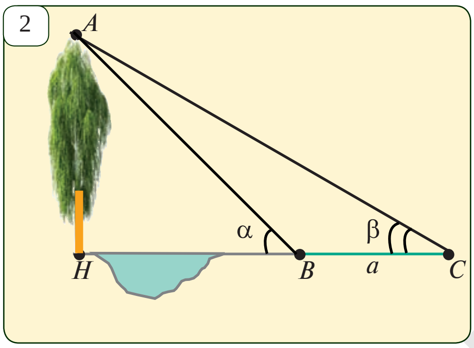
33.4. Үшбұрыштың екі қабырғасы 7 *дм* және 11 *дм*, ал үшінші қабырғаға жүргізілген медианасы 6 *дм*. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын тап.

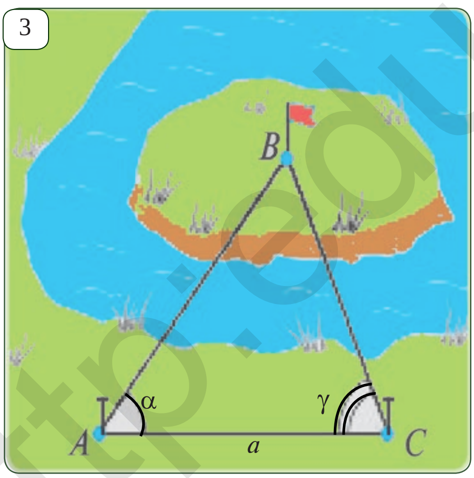
33.5. Қабырғалары 6 *см* және 8 *см* болған параллелограмның бір диагоналы 12 *см* болса, оның екінші диагоналын тап.

33.6. Үшбұрыштың 18 *см*-ге тең қабырғасы қарама-қарсысындағы бұрышы 60°-қа тең. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.

33.7. Тең бүйірлі трапецияның кіші табаны бүйір қабырғасына тең, үлкен табаны 20 *см*. Егер трапецияның бір бұрышы 120° болса, оның периметрін тап.







1. ***Биіктікті өлшеу.*** Айталық, ағаштың AH биіктігін өлшеу қажет болсын *(1-сурет)*.

а) Мұның үшін B нүктесін белгілейміз және BH қашықтығы a-ны және HBA бұрышы α-ны өлшейміз. Онда, тік бұрышты ABH үшбұрышта

$$AH = BH\,\mathrm{tg}\alpha = a\,\mathrm{tg}\alpha.$$

ә) егер биіктіктің табаны H нүктесі баруға болмайтын нүкте болса *(2-сурет)*, жоғарыдағы тәсілмен AH биіктігін анықтай алмаймыз. Онда төмендегідей тәсілді қолданамыз:

1) H нүктемен бір түзу сызықта жатқан B және C нүктелерін белгілейміз;

2) BC арақашықтығын өлшеп a-ны табамыз;

3) ABH және ACH бұрыштарын өлшеп $\angle ABH=\alpha$ мен $\angle ACH=\beta$-ларды табамыз;

4) ABC үшбұрышқа синустар теоремасын қолдансақ ($\angle BAC=\alpha-\beta$),

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)},\ \text{яғни}\quad AB=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

5) тік бұрышты ABH үшбұрышта AH биіктікті табамыз:

$$AH = AB\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

2. ***Баруға болмайтын нүктеге дейін болған арақашықтықты есептеу.*** Айталық, A нүктеден баруға болмайтын B нүктесіне дейінгі болған арақашықтықты есептеу керек *(3-сурет)*. Бұл есепті үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін пайдаланып шешкенімізді есіңе түсіреміз. Енді бұл есепті синустар теоремасын пайдаланып шешеміз.

1) A және B нүктелерінен көрініп тұрған тегіс жерде C нүктені белгілейміз.

2) AC қашықтығын өлшейміз: $AC= a$.

3) Құралдармен ACB мен BAC бұрыштарын өлшейміз: $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$.

4) ABC үшбұрышта $\angle B=180^\circ-\alpha-\gamma$ болғандықтан,

$$\sin B = \sin(180^\circ-\alpha-\gamma)=\sin(\alpha+\gamma).$$

Синустар теоремасы бойынша, $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$ яки $AB=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Есептер мен тапсырмалар

34.1. 1-суретте $a=12$ *м*, $\alpha=42°$ болса, ағаш биіктігін есепте.

34.2. 2-суретте $a=8$ *м*, $\alpha=43°$, $\beta=32°$ болса, ағаш биіктігін есепте.

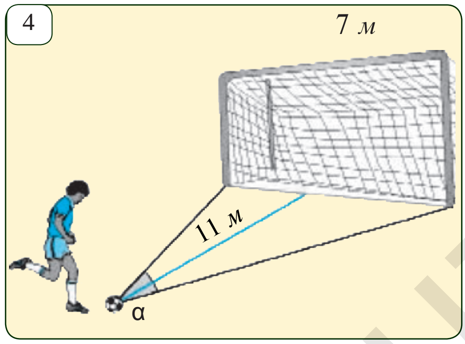
34.3. 3-суретте $a=60$ *м*, $\alpha=62°$, $\gamma=44°$ болса, AB қашықтығын тап.

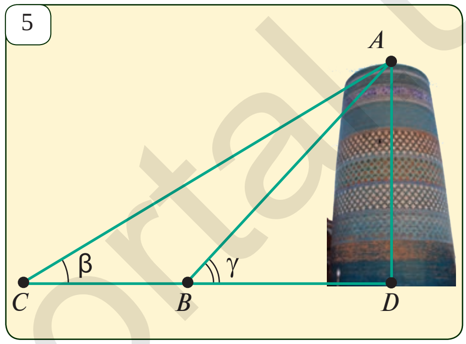
34.4. Футбол ойынында 11 метрлік айып добын қақпаға бағыттау бұрышы α-ны тап *(4-сурет)*. Қақпаның ені 7 *м*.

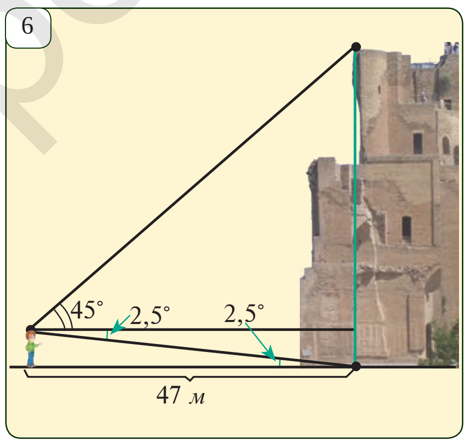
34.5. 5-суретте Хиуа қаласындағы Калтамұнара бейнеленген. Егер $\beta=45°$, $\gamma=24°$, $BC=50$ *м* болса, Калтамұнара биіктігін тап.

34.6. Саяхатшы Шахрисабз қаласындағы Ақсарайды одан 47 *м* арақашықтықта тамашалайды *(6-сурет)*. Егер оған Ақсарай табаны көкжиекке қарағанда 2,5°-ке тең бұрыш астында, ал төбе бөлігі 45°-ке тең бұрыш астында көрінетін болса, Ақсарайдың биіктігін тап.

34.7. Үш жол ABC үшбұрышты құрайды. Бұл үшбұрышта $\angle A=20°$, $\angle B=150°$. A нүктеден жолға аттанған жүргізуші C нүктесіне жылдам жетіп бару керек. AC және CB жолдары тастақ, AB асфальт жол, асфальт жолда тастақ жолға қарағанда 2 есе жылдамырақ қозғалуы мүмкін. Жүргізушіге қайсы жолмен жүруге кеңес бересің?







Қызық есеп

Пифагор теоремасының тағы бір “дәлелі”

Тік бұрышты ABC үшбұрышта $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$. Бұл екі теңдікті квадратқа арттырып, мүшелеп қоссақ және $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ екендігін есепке алсақ,

$$a^2+b^2=c^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha=c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=c^2.$$

Демек, $a^2+b^2=c^2$. Бұл “дәлелдеу” логикалық тұрғыдан дұрыс емес екендігін дәлелде.

35 БІЛІМІҢДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. **Қабырғалары a, b, c, сәйкес бұрыштары α, β, γ, ауданы S болған үшбұрыш үшін қайсы формула дұрыс емес?**

А. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; Ә. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;

Б. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; В. $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

2. **Дұрыс емес формуланы тап:**

А. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; Ә. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;

Б. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; В. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

3. **Үшбұрыштың үш қабырғасы белгілі болса, қайсы теореманы пайдаланып, оның бұрыштарын табу мүмкін?**

А. Синустар теоремасы; Ә. Косинустар теоремасы;

Б. Фалес теоремасы; В. Герон формуласы.

4. **Үшбұрыштың бір бұрышы 137°-қа, екінші бұрышы 15°-қа тең. Егер осы үшбұрыштың үлкен қабырғасы 22-ге тең болса, оның кіші қабырғасын тап.**

А. 8,3; Ә. 9,3; Б. 3,8; В. 6,5.

5. **Үшбұрыштың 14 және 19-ға тең қабырғалары арасындағы бұрышы 26°. Осы үшбұрыштың үшінші қабырғасын тап.**

А. 1,2; Ә. 5,4; Б. 6,9; В. 19,7.

6. **Егер екі вектордың ұзындығы $|\bar{a}|=2$ және $|\bar{b}|=5$ олардың арасындағы бұрыш 45° болса, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың скаляр көбейтіндісін тап.**

А. 52; Ә. 32 Б. 102; В. 2.

7. **$\bar{a}(4; -1)$ және $\bar{b}(2; 3)$ векторлардың скаляр көбейтіндісін тап.**

А. 5; Ә. 3; Б. 4; В. 9.

8. **$\bar{a}(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ және $\bar{b}(\sqrt{3}; 1)$ векторлар арасындағы бұрышты тап.**

А. 30°; Ә. 60°; Б. 90°; В. 45°.

9. **Үшбұрыш бұрыштарының қатынасы 3:2:1 секілді болса, оның қабырғаларының қатынасын тап.**

А. 3:2:1; Ә. 1:2:3; Б. $2:\sqrt{3}:1$; Е. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

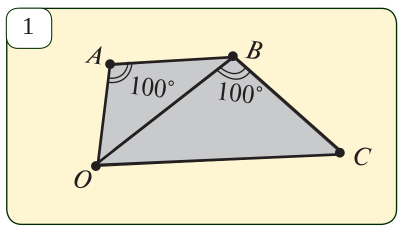
10. **Қабырғасы 3 *см* тік үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын тап.**

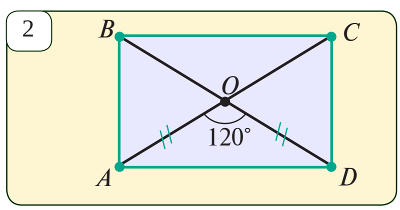
А. $\sqrt{3}$; Ә. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Б. $2\sqrt{3}$; В. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

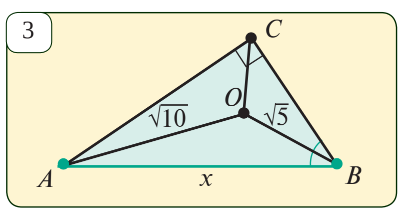
II. Есептер

1. ABC үшбұрышта $AB = 6$ *см*, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. BC қабырғаны және ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.
2. Қабырғалары 5 *см*, 6 *см*, және 10 *см* болған үшбұрыш бұрыштарының косинустарын тап.

3. ABC үшбұрышта $\angle B=60^\circ$, $AB=6$ *см*, $BC=4$ *см*. AC қабырғасын және ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.
4. Қабырғалары 51 *см*, 52 *см* және 53 *см* болған үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.
5. Үшбұрыштың екі қабырғасы 14 *см* және 22 *см*, ал үшінші қабырғаға жүргізілген медианасы 12 *см*. Үшбұрыштың үшінші қабырғасын тап.
6. Параллелограмның диагональдары 4 *см*, $4\sqrt{2}$ *см* және арасындағы бұрышы 45°. Параллелограмның а) ауданын; ә) периметрін; б) биіктіктерін тап.
7. Қабырғалары 3 және 5 болған параллелограмның бір диагоналы 4-ке тең. Оның екінші диагоналын тап.
8. Қабырғалары а) 2*см* және 2,5*см*; ә) 24,7 және 25; б) 9,5 және 6 болған үшбұрыш түрін анықта.
9. Параллелограмның қабырғалары $7\sqrt{3}$ және 6 *см*. Егер оның доғал бұрышы 120° болса, оның ауданын тап.
10. ABC үшбұрышының AB, BC қабырғаларында N, K нүктелері алынған. Онда $BH=2AN$, $3BK=2KC$. Егер $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$ болса, NK кесіндісін тап.
11. ABC үшбұрышында $\angle A=30^\circ$, $BC=7$ *см*. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын тап.
12. ABC үшбұрышының BE биссектрисасы жүргізілген. E нүктесінен BC қабырғаға EF перпендикуляр жүргізілген. $EF=3$, $\angle A=30^\circ$ болса, AE-ны тап.
13. $ABCD$ тік төртбұрыштың AD қабырғасының ортасы N нүктесінде. Егер $AB=3$, $BC=6$ болса, $\overline{NB}\cdot\overline{NC}$ скаляр көбейтіндісін тап.
14. $\bar{a}(2;x)$, $\bar{b}(-4;1)$ болып, $\bar{a}+\bar{b}$ және $\bar{b}$ векторлары перпендикуляр. x-ті тап.
15. $\bar{m}(7;3)$ және $\bar{n}(-2;-5)$ векторлар арасындағы бұрышты тап.
16. 1-суретте берілгендерді пайдаланып, суреттегі ең үлкен кесіндіні анықта.
17. $ABCD$ тік төртбұрыштың диагональдары O нүктеде қиылысады. Егер $AO=12$ *см*, $\angle AOD=120^\circ$ болса, төртбұрыш периметрін тап.
18. Тік бұрышты ABC үшбұрыштың биссектрисалары O нүктесінде қиылысады ($\angle C=90^\circ$). Егер $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$ болса, AB гипотенузасын тап (3-сурет).







III. Өзіңді сынап көр (бақылау жұмысының үлгісі)

1. Қабырғалары $a=45$, $b=70$, $c=95$ болған үшбұрыштың ең үлкен бұрышын тап.
2. Үшбұрышта $b=5$, $\alpha=30°$, $\beta=50°$ болса, үшбұрышты шеш.
3. PKH үшбұрышында $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100°$. HF медиана ұзындығын және PFH үшбұрыш ауданын тап.
4. (Қосымша). Үшбұрышта $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135°$ болса, β бұрышты тап.

Тарихи үзінділер. Синус жөнінде

Синус жайлы мәлімет алғаш IV-V ғасырлардағы үнді астрономдарының шығармаларында кездеседі.

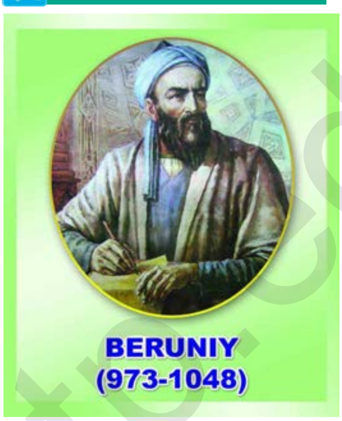
Орта Азиялық ғалымдар әл-Хорезми, Беруни, Ибн Сина, Абдурахман әл-Хазини (XII ғасыр) синус үшін ***«әл-жайб»*** атауын қолданған.

Қазіргі синус белгісін Симпсон, Эйлер, Даламбер, Лагранж (XII ғасыр), тағы басқалар қолданған.

«Косинус» атауы латынша «комплиментті синус» атауының қысқартылғаны, ол «қосымша синус», дәлірек айтқанда,«қосымша доғаның синусы» дегені.

Косинустар теоремасын гректер де білген, оның дәлелі Эвклидтің «Негіздер» туындысында өрнектелген. Синустар теоремасының өзіне тән дәлелін Әбу Райхан Беруни баян еткен.

Тарихи үзінділер.



Беруни (толық аты — Әбу Райхан Мұхаммед ибн Ахмад) (973—1048) — орта ғасырдың ұлы энциклопедист ғалымы. Ол Хорезм өлкесінің Қият қаласында туылған. Қият Әмудариядың оң жағасындағы — қазіргі Беруни қаласының орнында болған, ол қазірге дейін Шаббаз деп аталған. Берунидің математика және ғылымның басқа салаларына қосқан үлесін жазып қалдырған 150-ден астам шығармаларынан да көруге болады. Олардан ең ірілері – "Үндістан", "Ескерткіштер", "Масуди заңдары", "Геодезия", "Минералогия" және "Астрономия".

Берунидің таңдаулы еңбегі "Масуди заңдары", негізінен астрономияға тиісті болса да оның математикаға байланысты біршама жаңалықтары осы шығармада баяндалған.

Бұл шығармада Беруни екі бұрыш қосындысы мен айырмасының синустары, қосарланған және жарты бұрыштың синустары жөніндегі теоремаларымен тең болған хордалар туралы теоремаларды дәлелдеген, екі градусты доғаның хордаларын есептеп шыққан, синустар мен тангенстер кестелерін жасаған, синустар теоремасын өзіне сай тәсілмен дәлелдеген.

III ТАРАУ

ШЕҢБЕРДІҢ ҰЗЫНДЫҒЫ ЖӘНЕ ДӨҢГЕЛЕКТІҢ АУДАНЫ

Осы тарауды үйренудің нәтижесінде сен төмендегі білім және іс жүзіндік дағдыларға ие боласың:

Білімдер:

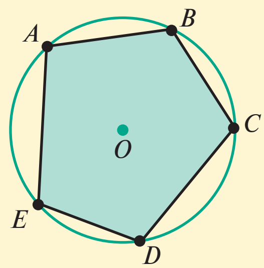
√ *көпбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің қасиеттерін білу;*
√ *дұрыс көпбұрыштардың қасиеттерін білу;*
√ *дұрыс көпбұрыштардың ауданын есептеудің формулаларын білу;*
√ *шеңбер және оның доғасының ұзындығын есептеудің формулаларын білу;*
√ *дөңгелек және оның бөліктерінің ауданын табудың формулаларын білу;*
√ *бұрыштың радиандық өлшемін білу.*

Іс жүзіндік дағдылар:

√ *дұрыс көпбұрыштарды сыза білу;*
√ *дұрыс көпбұрышқа сырттай және іштей сызылған шеңберлердің радиустарын таба алу;*
√ *шеңбер және доғаның ұзындығын есептей алу;*
√ *дөңгелек және оның бөліктерінің ауданын есептей алу.*

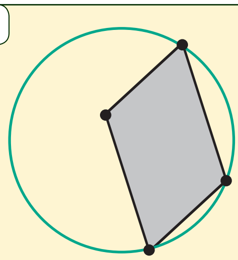
ШЕҢБЕРГЕ ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН КӨПБҰРЫШ

1

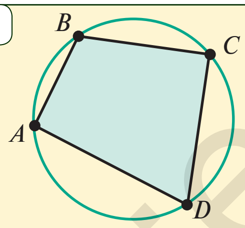


Шеңберге іштей сызылған бесбұрыш немесе бесбұрышқа сырттай сызылған шеңбер.

2



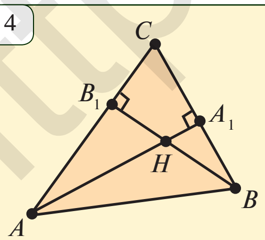
3



$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\angle B+\angle D=180^\circ$

4



Анықтама. Егер көпбұрыштың барлық төбелері шеңберде жатса, бұл көпбұрыш шеңберге *іштей сызылған*, ал шеңбер көпбұрышқа *сырттай сызылған* деп аталады *(1-сурет)*.

Кез келген үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер сызу мүмкіндігі және бұл шеңбер центрі үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярлары қиылысқан нүктеде жатуын 8-сыныпта үйренгенсің.

Егер көпбұрыш бұрыштарының саны үшеуден артық болса, көпбұрышқа әрқашан да сырттай шеңбер сызуға бола бермейді. Мәселен, тік бұрышты үшбұрыштан өзгеше параллелограмм үшін сырттай сызылған шеңбер болмайды *(2-сурет)*.

Төртбұрышқа қарама-қарсы бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болғанда және тек осы жағдайда сырттай шеңбер сызуға болатындығы бізге 8-сыныптан белгілі *(3-сурет)*.

1-есеп. Сүйір бұрышты ABC үшбұрыштың AA_1 мен BB_1 биіктіктері H нүктеде қиылысады. A_1HB_1C төртбұрыш шеңберге іштей сызылғандығын дәлелде.

Шешуі. $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ болғандықтан *(4-сурет)*

$$\angle HB_1C=\angle HA_1C=90^\circ.$$

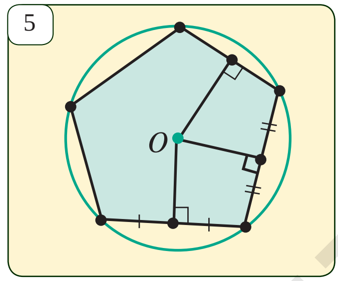
Онда $\angle HB_1C+\angle HA_1C=180^\circ$. Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 360° болғандықтан:

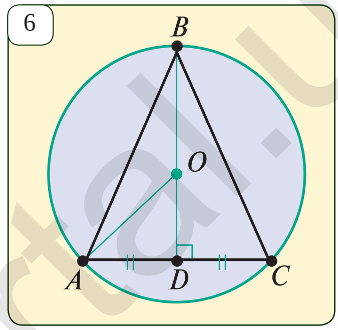
$$\angle B_1CA_1+\angle B_1HA_1=180^\circ.$$

Демек, A_1HB_1C төртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады.

Шеңберге іштей сызылған көпбұрыштың төбелері шеңбер центрінен теңдей қашықтықта жатқандықтан шеңбер центрі көпбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярында жатады *(5-сурет)*. Демек, шеңберге іштей сызылған көпбұрыш қабырғаларының орташа перпендикулярлары бір нүктеде қиылысуы шарт.

2-есеп. Табанына жүргізілген биіктігі 16 *см* болған тең бүйірлі үшбұрыш радиусы 10 см болған шеңберге іштей сызылған. Оның қабырғаларын тап.





Шешуі. ABC үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі O нүктесі AC қабырғасының орта перпендикуляры болған BD биіктікте жатады *(6-сурет)*. Онда,

$$OD = BD - OB = 16 - 10 = 6 \ (см)$$

болады және Пифагор теоремасы бойынша,

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \ (см), \ AC = 2AD = 16 (см).$$

Сондай-ақ, тік бұрышты ABD үшбұрышта

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \ (см).$$

Жауабы: $8\sqrt{5}$ *см*, $8\sqrt{5}$ *см*, 16 *см*.

Есептер мен тапсырмалар

36.1. Егер көпбұрыш шеңберге іштей сызылған болса, оның қабырғаларының орта перпендикулярлары бір нүктеде қиылысуын дәлелде.

36.2. Қандай үшбұрыш шеңберге іштей сызылуы мүмкін? Төртбұрыш ше?

36.3. $ABCDE$ бесбұрыш шеңберге іштей сызылса, $\angle ACB = \angle AEB$ болуын дәлелде.

36.4. Катеттері 16 *см* және 12 *см* болған тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.

36.5. Радиусы 25 *см* болған шеңберге бір қабырғасы 14 *см* болған тік төртбұрыш іштей сызылған. Тік төртбұрыштың ауданын тап.

36.6. Радиусы 10 *см* болған шеңберге іштей сызылған а) тең қабырғалы үшбұрыш; ә) квадрат; б) тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың қабырғаларын тап.

36.7. Қабырғалары 16 *см*, 10 *см* және 10 *см* болған үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын тап.

36.8. Шеңберге іштей сызылған $ABCDEF$ алтыбұрышта $\angle BAF + \angle AFB = 90°$ болса, шеңбер центрі AF қабырғада жатуын дәлелде.

36.9. Кез келген тең бүйірлі трапеция шеңберге іштей сызылуы мүмкін екенін дәлелде.

36.10. Тең бүйірлі трапеция сыз. Оған сырттай сызылған шеңбер кескінде.

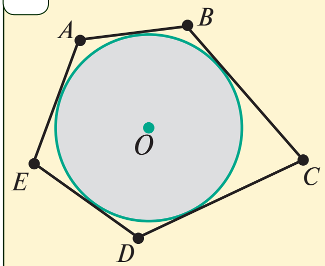
Қызық есеп

Он алты жасар Галуа (Э. Галуа — француз математигі, 1811 —1832) колледжде оқып жүрген кездерінде, оған оқытушысы бір сағат ішінде үш есепті шешіп беруін өтінген. Галуа шешуі онша оңай емес бұл есептерді 15 минутта шешіп, баршаны таң қалдырған. Міне, осы есептердің бірі. Оны сен де шешіп көр!

Есеп. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың төрт қабырғасы *a, b, c* және *d*-ға тең. Оның диагональдарын тап.

ШЕҢБЕРГЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН КӨПБҰРЫШ

1



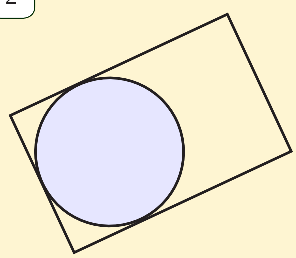
Шеңберге сырттай сызылған ABCDE бесбұрыш немесе ABCDE бесбұрышқа іштей сызылған шеңбер.

Анықтама. Егер көпбұрыштың барлық қабырғалары шеңберге жанасса, көпбұрыш шеңберге *сырттай сызылған*, ал шеңбер көпбұрышқа *іштей сызылған* деп аталады *(1-сурет)*.

Кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер салуға болатындығы және бұл шеңбер центрі үшбұрыш биссектрисалары қиылысқан нүктеде екендігімен 8- сыныпта танысқансың.

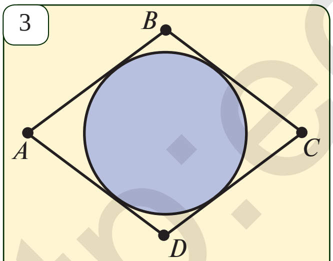
Егер көпбұрыш бұрыштарының саны үштен артық болса, бұл көпбұрышқа әрқашан да іштей шеңбер сызуға бола бермейді. Мәселен, квадраттан өзгеше тік төртбұрышқа іштей сызылған шеңбер сызуға болмайды *(2-сурет)*.

2



Төртбұрышқа тек қарама-қарсы қабырғаларының қосындысы тең болғанда іштей шеңбер сызуға болатындығын да 8-сыныпта өткенсің *(3-сурет)*.

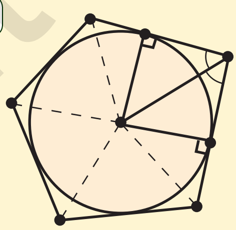
3



$AB + CD = AD + BC$

Шеңберге сырттай сызылған көпбұрыш қабырғалары шеңберге жанасқаны үшін шеңбердің центрі сол көпбұрыш бұрыштары биссектрисасында жатады *(4-сурет)*. Демек, шеңберге сырттай сызылған көпбұрыш бұрыштарының биссектрисалары бір нүктеде қиылысады.

4



Теорема. Егер r радиусты шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың ауданы S, жарым периметрі p болса, S=pr болады.

Дәлелдеуі. Теорема дәлелін шеңберге сырттай сызылған ABCDEF алтыбұрыш үшін келтіреміз. Шеңбердің центрі *O* нүктені көпбұрыш төбелерімен ұштастырып, көпбұрышты үшбұрыштарға бөлеміз. Бұл үшбұрыштардың биіктіктері *r*-ға тең *(5-сурет)*. Онда,

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + \ldots + S_{FOA} =$$
$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \ldots + \frac{1}{2} FA \cdot r =$$
$$= \frac{AB + BC + \ldots + FA}{2} \cdot r = pr.$$

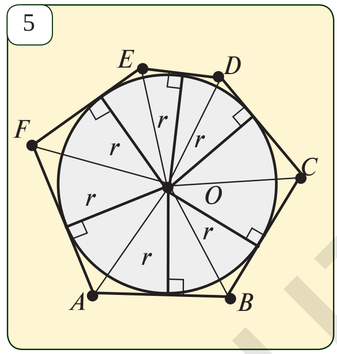
Теорема дәлелденді.

Есеп. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың ауданы 21 $см^2$-қа, ал периметрі 7 *см*-ге тең. Шеңбер радиусын тап.

Шешуі. $S=pr$ формула бойынша,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{21}{3,5}=6\ (см).$$

Жауабы: 6 *см*.



Есептер мен тапсырмалар

37.1. Қабырғасы 6 *см* болған а) тең қабырғалы үшбұрышқа; ә) квадратқа іштей сызылған шеңбердің радиусын тап.

37.2. Радиусы 5 *см* болған шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштың ауданы 18 $см^2$. Көпбұрыштың периметрін тап.

37.3. 6-суреттегі көпбұрыштардың периметрін тап.

37.4. 7-суреттегі мәліметтер негізінде сұралған кесіндіні тап.

37.5. Шеңберге сырттай сызылған параллелограмм ромб болуын дәлелде.

37.6. Тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусы катеттер қосындысы мен гипотенуза айырмасының жартысына тең екендігін дәлелде.

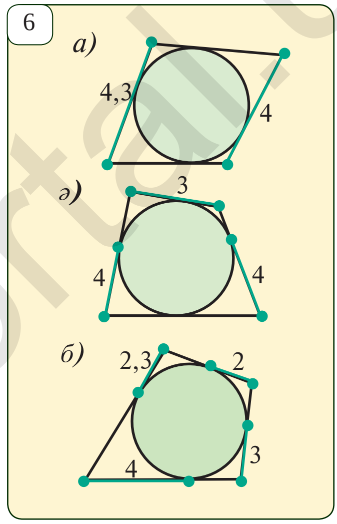
37.7. Шеңберге сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның орта сызығы оның бүйір қабырғасына тең екендігін дәлелде.

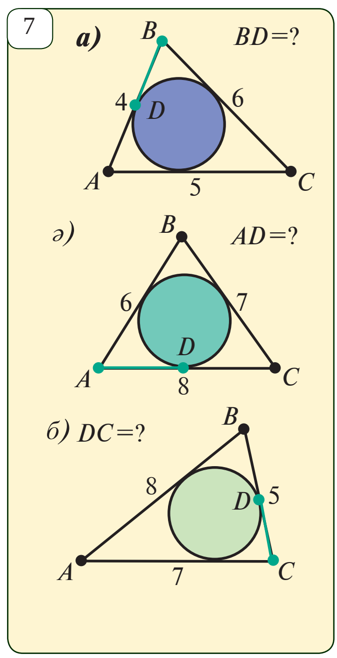
37.8. Табандары 9 *см* және 16 *см* болған тең бүйірлі трапеция шеңберге сырттай сызылған. Шеңбер радиусын тап.

37.9*. *ABCD* төртбұрышы *O* центрлі шеңберге сырттай сызылған. *AOB* және *COD* үшбұрыштар аудандарының қосындысы төртбұрыш ауданының жартысына тең екендігін дәлелде.

37.10*. Шеңберге сырттай сызылған тең бүйірлі трапецияның табандары *a* және *b* болса, оның биіктігі $\frac{\sqrt{ab}}{2}$-ға тең екендігін дәлелде.

37.11*. Төбелері *ABCD* төртбұрыш биссектрисаларының қиылысқан нүктелерінде пайда болған *EFPQ* төртбұрышына сырттай сызылған шеңбер сызуға болатындығын дәлелде.



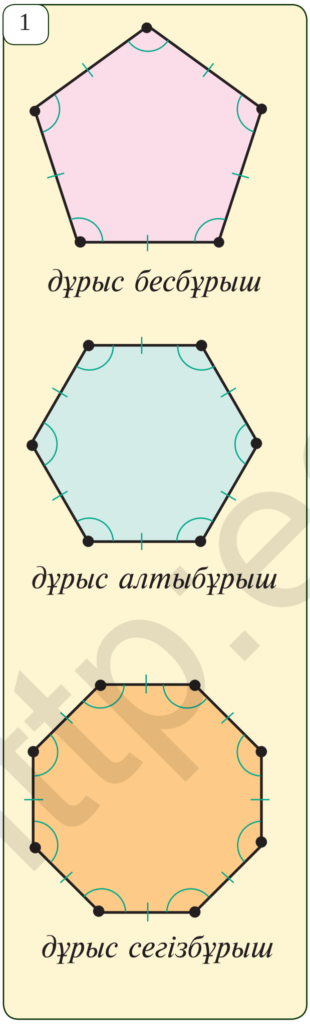


ДҰРЫС КӨПБҰРЫШТАР

Белсенділікті арттырушы жаттығу

1. Қандай фигуралар көпбұрыш деп аталады?
2. Көпбұрыштың бұрыштары, сыбайлас қабырғалары, диагональдары деген не?
3. Дөңес көпбұрыш деп қандай көпбұрыш айтылады?
4. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теореманы айтып бер.

Анықтама. Барлық қабырғалары тең және барлық бұрыштары тең болған дөңес көпбұрыш *дұрыс көпбұрыш* деп аталады.



1

дұрыс бесбұрыш

дұрыс алтыбұрыш

дұрыс сегізбұрыш

Тең қабырғалы үшбұрыш, квадрат дұрыс көпбұрышқа мысал болады. 1-суретте дұрыс бесбұрыш, алтыбұрыш және сегізбұрыштар өрнектелген.

Теорема. Дұрыс n бұрыштың әрбір бұрышы $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$-қа тең.

Дәлелдеу. Дұрыс n бұрыштың бұрыштарының қосындысы $(n-2)\cdot 180^\circ$-қа тең (8-сынып). Демек, оның әрбір бұрышы $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$-қа тең.

Теорема дәлелденді.

Есеп. Дұрыс $A_1A_2A_3A_4A_5$ бесбұрышта A_1A_3 және A_1A_4 диагональдары тең екендігін көрсет *(2-сурет)*.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — *дұрыс бесбұрыш* ⇒ $A_1A_3=A_1A_4$

Шешуі: Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісі бойынша $A_1A_2A_3$ және $A_1A_5A_4$ үшбұрыштар өзара тең. Шынында да, дұрыс көпбұрыштың қабырғалары тең және бұрыштары тең болғандықтан,

$$A_1A_2=A_1A_5,\ A_2A_3=A_5A_4 \text{ және } \angle A_1A_2A_3=\angle A_1A_5A_4.$$

Демек, $\Delta A_1A_2A_3=\Delta A_1A_5A_4$. Бұдан

$A_1A_3=A_1A_4$ екендігі келіп шығады.

Нәтиже. ***Дұрыс көпбұрыштың барлық диагональдары өзара тең.***

Есептер мен тапсырмалар

38.1. Дұрыс емес көпбұрыштарға мысалдар келтір және неліктен дұрыс еместігін түсіндір.

38.2. Төмендегі дәлелдерден дұрысын тап:

а) барлық қабырғалары тең болған үшбұрыш дұрыс үшбұрыш болады;

ә) барлық қабырғалары тең төртбұрыш дұрыс төртбұрыш болады;

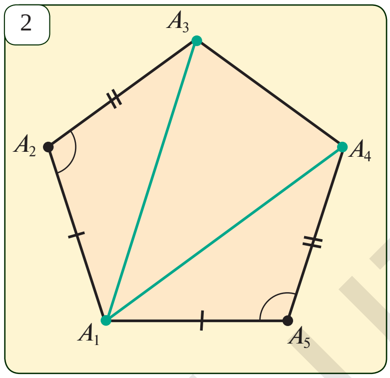
б) барлық бұрыштары тең төртбұрыш дұрыс төртбұрыш болады;

в) барлық бұрыштары тең ромб дұрыс ромб болады;

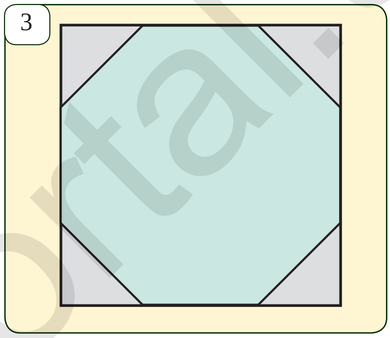
г) барлық қабырғалары тең тік төртбұрыш дұрыс тік төртбұрыш болады.

38.3. а) $n=3$; ә) $n=5$; б) $n=6$; в) $n=10$; г) $n=18$ болса, дұрыс n бұрыш бұрышын тап.

2



3



38.4. Дұрыс n бұрыштың сыртқы бұрышы неге тең болады? Егер а) $n=3$; ә) $n=5$; б) $n=6$; в) $n=10$; г) $n=12$ болса, дұрыс n бұрыштың сыртқы бұрышын тап.

38.5. Дұрыс n бұрыштың әр төбесінен біреуден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең екендігін дәлелде.

38.6. Егер дұрыс көпбұрыштың әрбір бұрышы а) 60°; ә) 90°; б) 135°; в) 150° болса, бұл көпбұрыш қабырғаларының санын тап.

38.7. Дұрыс $ABCDEF$ алтыбұрыш берілген.

а) AC және BD диагональдарының теңдігін дәлелде.

ә) ACE — дұрыс үшбұрыш болуын дәлелде.

б) AD, BE және CF диагональдары өзара тең екендігін дәлелде.

38.8. Қабырғасы 10 *см* болған дұрыс а) бесбұрыштың; ә) алтыбұрыштың; б) сегізбұрыштың; в) он екі бұрыштың; г) он сегіз бұрыштың кіші диагональдарын есепте.

38.9. Дұрыс көпбұрыштың квадрат болуын дәлелде.

38.10*. Квадраттың қабырғасы a-ға тең. Оның қабырғаларына әр төбесінен бастап диагоналының жартысына тең кесінділер салынған. Нәтижеде 3-суретте кескінделген сегізбұрыш жасалды. Оның түрін анықта және ауданын тап.

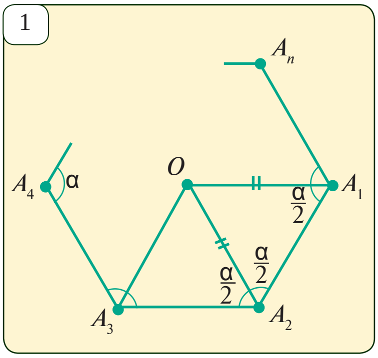
39 ДҰРЫС КӨПБҰРЫШҚА ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕР

Белсенділікті арттырушы жаттығу

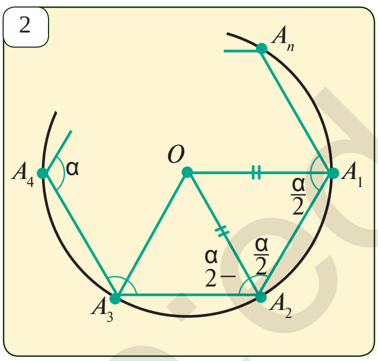
1. Шеңберге іштей сызылған көпбұрыш деп қандай көпбұрыш айтылады?
2. Шеңберге сырттай сызылған көпбұрыш деп қандай көпбұрыш айтылады?
3. Кез келген көпбұрыш шеңберге іштей (сырттай) сызылуы мүмкін бе?

Теорема. ***Кез келген дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңберді де, сырттай сызылған шеңберді де сызуға болады.***

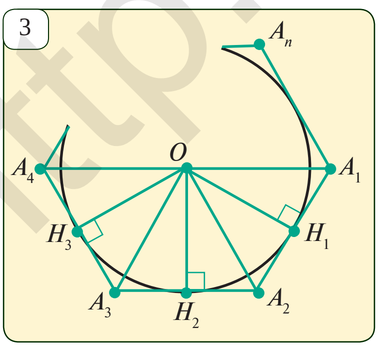
1



2



3



Дәлелдеу. Айталық, $A_1A_2 \dots A_n$ — дұрыс көпбұрыш, O — A_1 және A_2 бұрыштары биссектрисаларының қиылысу нүктесі болсын дейік. Бұл дұрыс көпбұрыштың бұрышын α-мен белгілейік.

1. $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ екенін дәлелдейік *(1-сурет)*. Бұрыш биссектрисасы анықтамасы бойынша,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Демек, A_1OA_2 — тең бүйірлі үшбұрыш. Бұдан, $OA_1 = OA_2$ келіп шығады. ΔA_1A_2O және ΔA_3A_2O үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісі бойынша тең, өйткені $A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — қабырға ортақ

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Сондықтан $OA_3 = OA_1$. Дәл осылай $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ және тағы басқа теңдіктер орынды болуы көрсетіледі.

Сөйтіп, $OA_1 = OA_2 = \dots OA_n$, яғни центрі O мен радиусы OA_1 шеңбер көпбұрышқа сырттай сызылған шеңберден құралған болады *(2-сурет)*.

2. Жоғарыда айтылғандар бойынша тең бүйірлі $A_1OA_2, A_2OA_3 \dots A_nOA_1$ үшбұрыштары тең. Сондықтан бұл үшбұрыштардың O төбесінен жүргізілген биіктіктері де тең болады *(3-сурет)*:

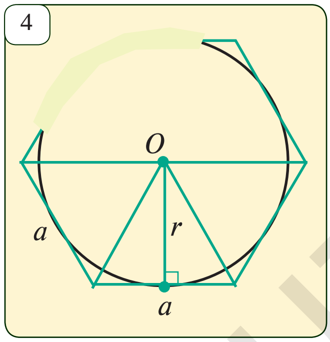
$$OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n.$$

Демек, O центрі және радиусы OH_1 кесіндісіне тең болған шеңбер көпбұрыштың барлық қабырғаларына жанасады. Яғни, бұл шеңбер көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер болады. *Теорема дәлелденді.*

Нәтиже. Дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған және сырттай сызылған шеңберлердің центрлері бір нүктеде болады.

Бұл нүкте дұрыс көпбұрыштың *центрі* деп аталады. Дұрыс көпбұрыш центрін оның екі сыбайлас төбелерімен ұштастыратын сәулелерінен құралатын бұрыш (1-суреттегі A_1OA_2, $A_2\ OA_3$... бұрыштар) оның *центрлік бұрышы* деп аталады. Дұрыс көпбұрыштың центрінен қабырғаларына жүргізілген перпендикулярлар (3-суреттегі OH_1, OH_2 ...кесінділер) оның *апофемасы* деп аталады.

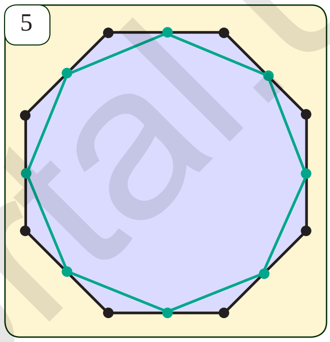
4



Есеп. Егер дұрыс n бұрыштың қабырғасы a, оған іштей сызылған шеңбердің радиусы r болса, S ауданын $S=\frac{1}{2}nar$ формуламен есептеуге болатындығын дәлелде (4-сурет).

Дәлелдеу. Көпбұрыш жартылай периметрі $p=\frac{1}{2}na$ болғандықтан, шеңберге сырттай сызылған көпбұрыш ауданы формуласы $S = pr$-ға орай, $S=\frac{1}{2}nar$ болады.

5



Есептер мен тапсырмалар

39.1. Ауданы 36 *см*^{2} болған квадратқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын есепте.

39.2. Периметрі 18 *см* болған дұрыс үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын есепте.

39.3. Дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы оның қабырғасына тең болуын дәлелде.

39.4. Дұрыс көпбұрыш қабырғаларының орталары дұрыс көпбұрыштың төбелерін жасайтынын дәлелде *(5-сурет)*.

39.5. Дұрыс үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы сырттай сызылған шеңбердің радиусынан екі есе кіші екендігін дәлелде.

39.6*. Дұрыс көпбұрыштың кез келген екі қабырғасының орта перпендикулярлары бір нүктеде қиылысуы немесе бір түзу сызық бойында жатуын дәлелде.

39.7. Шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың бір қабырғасы шеңберден а) 60°; ә) 30°; б) 36°; в) 18°; г) 72°-қа тең доға бөледі. Көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

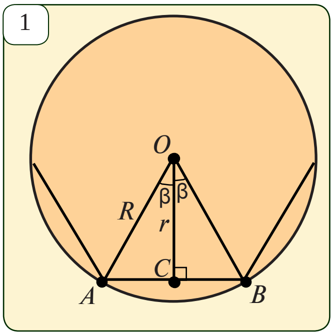
39.8. Қағаздан алты тең дұрыс үшбұрыш қиып ал. Оларды пайдаланып дұрыс алтыбұрыш сал. Қабырғалары тең болған дұрыс алтыбұрыш және үшбұрыш аудандарының қатынасын тап.

40 ДҰРЫС КӨПБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАСЫ МЕН СЫРТТАЙ ЖӘНЕ ІШТЕЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕРІНІҢ РАДИУСТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫС

Белсенділікті арттырушы жаттығу

Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының а) синусы; ә) косинусы; б) тангенсі деп нені айтады?

Қабырғасы a_n-ге тең болған дұрыс n бұрышқа сырттай сызылған шеңбердің R радиусы және іштей сызылған шеңбердің r радиусын есептеу үшін формулалар табалық. Мұның үшін тік бұрышты ACO үшбұрышын пайдаланамыз. Мұнда O — көпбұрыштың центрі, C — көпбұрыштың AB қабырғасының ортасы *(1-сурет)*. Онда,



$$\beta=\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n};$$

$$R=OA=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};\quad r=OC=\frac{AC}{tg\beta}=\frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r=OC=OA\cdot\cos\beta=R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Бұл формулалармен кейбір дұрыс көпбұрыш қабырғалары, іштей және сырттай сызылған шеңбер радиустары арасындағы байланыстарды табамыз.

1. Дұрыс үшбұрыш үшін ($n=3$):

$$\beta=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ;\quad R=\frac{a_3}{2\sin 60^\circ}=\frac{a_3}{\sqrt{3}};\quad r=\frac{a_3}{2tg\,60^\circ}=\frac{a_3}{2\sqrt{3}};\quad R=2r.$$

2. Квадрат үшін ($n=4$):

$$\beta=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ;\quad R=\frac{a_4}{2\sin 45^\circ}=\frac{a_4}{\sqrt{2}};\quad r=\frac{a_4}{2tg\,45^\circ}=\frac{a_4}{2};\quad R=r\sqrt{2}.$$

3. Дұрыс алтыбұрыш үшін ($n=6$):

$$\beta=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ;\quad R=\frac{a_6}{2\sin 30^\circ}=a_6;\quad r=\frac{a_6}{2tg\,30^\circ}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2};\quad R=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Есеп. Дұрыс n бұрыштың a_n қабырғасын көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің R радиусы мен іштей сызылған шеңбердің r радиусы арқылы өрнекте.

Шешуі. $R=\dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, $r=\dfrac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ формуладан $a_n=2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $a_n=2r\,tg\dfrac{180^\circ}{n}$ формулаларды жасаймыз. Атап айтқанда, $n=3$ болса, $a_3=R\sqrt{3}=2r\sqrt{3}$.

Есептер мен тапсырмалар

40.1. Қабырғасы 15 *см* болған а) дұрыс үшбұрышқа; ә) дұрыс төртбұрышқа; б) дұрыс алтыбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын есепте.

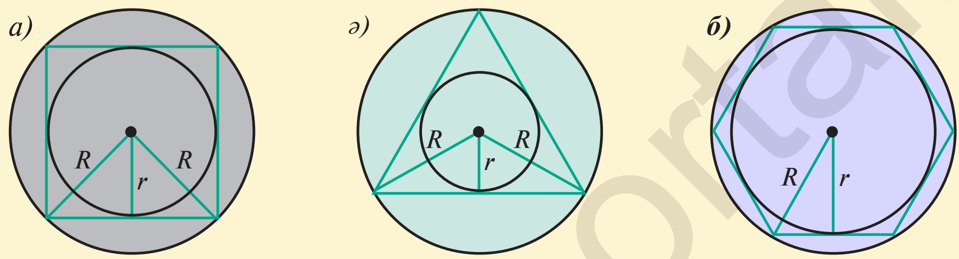
40.2. 2-суретте R радиусты шеңберге іштей сызылған квадрат, дұрыс үшбұрыш және дұрыс алтыбұрыш өрнектелген. Дәптеріңе берілген кестелерді көшіріп, оның бос торкөздерін толтыр (a_n — көпбұрыштың қабырғасы, P — көпбұрыштың периметрі, S — оның ауданы, r — оған іштей сызылған шеңбер радиусы).

40.3. Радиусы 8 *см* болған шеңберге іштей сызылған дұрыс он екібұрыштың бір төбесінен шыққан диагональдарын тап.

40.4. Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың периметрі 24 *см*. Осы шеңберге іштей сызылған квадраттың қабырғасын тап.

40.5. Цилиндр формасындағы ағаштан табанының қабырғасы 20 см болған: а) квадрат; ә) дұрыс алтыбұрыш болған призма формасындағы баған

2



	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

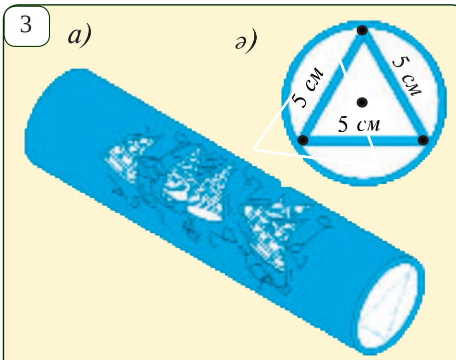
	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					$24\sqrt{3}$

дайындау керек. Ағаштың көлденең кесімінің диаметрі кемінде қанша болу керек?

40.6. 3.*а*-суретте өрнектелген сан түрлі нақыштарды тамашалауға болатын “Калейдоскоп” деп аталған ойыншық саған таныс болса керек. Ойыншық түтік және үш айна бөліктерінен құралған. 3.*ә*-суретте оның көлденең кесімі көрсетілген және өлшемдері берілген. Калейдоскоптың көлденең кесімінің радиусын тап.

3



БІЛІМІҢДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. Төмендегі көпбұрыштардың қайсысында іштей сызылған шеңбер жоқ.

А. Үшбұрышқа; Б. Квадраттан басқа ромбта;
Ә. Квадратқа; В. Ромбтан тыс тік төртбұрышқа?

2. Төмендегі көпбұрыштардың қайсысында сырттай сызылған шеңбер жоқ.

А. Үшбұрышқа; Б. Квадраттан басқа ромбта;
Ә. Квадратқа; В. Ромбтан тыс тік төртбұрышқа?

3. Шеңберге іштей сызылған барша ABCD төртбұрыштар үшін дұрыс емесін тап.

А) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; Б) $AB+CD=BC+AD$;
Ә) $\angle A+\angle C=180°$; В) $\angle B+\angle D=180°$.

4. Шеңберге сырттай сызылған барша ABCD төртбұрыштар үшін дұрыс емесін тап.

А) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; Б) $AB+CD=BC+AD$;
Ә) $\angle A+\angle C=180°$; В) $AB\text{-}BC=AD\text{-}CD$.

5. Қабырғалары 5 см және 12 см тік төртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.

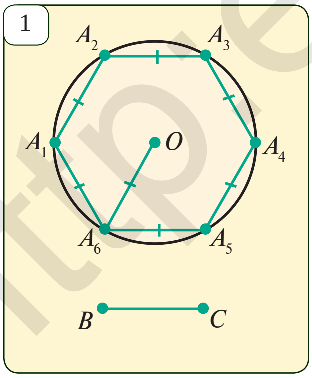
А) 6 *см*; Ә) 6,5 *см*; Б) 7 *см*; В) 7,5 *см*.

6. Дұрыс 24 бұрыштың ішкі бұрышын тап.

А) 120°; Ә) 135°; Б) 150°; В) 165°.

7. Әрбір сыртқы бұрышы 60° тік көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын тап. А) 540°; Ә) 360°; Б) 90°; В) 720°.

1



II. Салуға байланысты есептер.

1. Қабырғалары берілген кесіндіге тең дұрыс алтыбұрыш сал. Онда дұрыс алтыбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы алтыбұрыштың қабырғасына тең екенін және 1-суретті пайдалан.

2. 2-4-суреттердегі мәліметтерді пайдаланып, берілген шеңберге іштей сызылған а) дұрыс үшбұрыш; ә) квадрат; б) дұрыс сегізбұрыш сал.

3. 5-суретті пайдаланып, берілген шеңберге сырттай сызылған дұрыс алтыбұрыш сал (5-суретте бейнеленген шеңберге сырттай сызылған алтыбұрыштың қабырғалары осы шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың төбелерінен шеңберге жүргізілген жанамаларда жатады).

III. Есептеуге арналған мысалдар.

1. Дұрыс үшбұрыш, квадрат және дұрыс алтыбұрыштардың қабырғалары бір-біріне тең. Олардың аудандарының қатынасын тап.

2. Бір шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыш пен сырттай сызылған алтыбұрыш аудандары қатынасын тап.

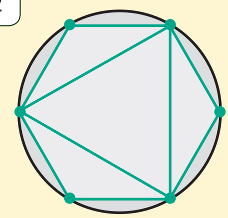
3. Дұрыс а) алтыбұрыш; ә) сегізбұрыш; б) он екібұрыштың параллель қабырғалары арасындағы қашықтық 10 *см*-ге тең. Көпбұрыштың қабырғаларын тап.

4. Радиусы R болған шеңберге $A_1A_2 \dots A_8$ дұрыс сегізбұрыш іштей сызылған. $A_3A_4A_7A_8$ төртбұрыштың тік төртбұрыш екенін дәлелдеп, ауданын тап.

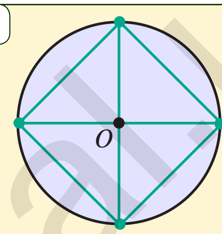
5. Шеңберге сырттай сызылған тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы осы шеңберге жанасу нүктесінде 4 см және 6 см ұзындықтағы кесінділерге бөлінеді. Үшбұрыштың ауданын тап.

6. Тік дұрыс онбұрыштың бір төбесінен шыққан ең үлкен, ең кіші диагональдары арасындағы бұрышты тап.

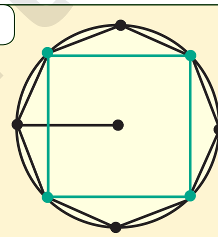
2



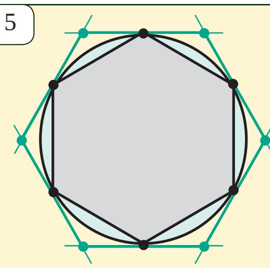
3



4



5



IV. Өзіңді сынап көр (бақылау жұмыс үлгісі).

1. Катеттері 10 см және 24 см тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарын тап.

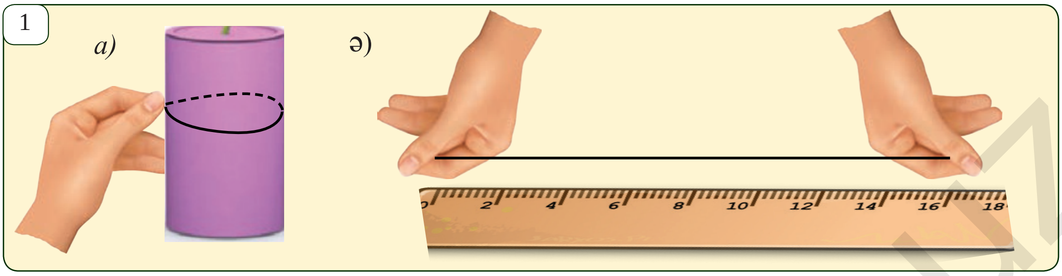
2. Радиусы 5 см шеңберге сырттай сызылған ромбтың бір бұрышы 150°-қа тең. Ромбтың а) периметрін; ә) диагональдарын; б) ауданын тап.

3. Қабырғасы 4 см дұрыс алтыбұрыштың бір төбесінен шыққан диагональдарын тап.

4. (*Қосымша*). Радиусы 3 см шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыш және дұрыс үшбұрыштар ауданының айырмасын тап.

Тарихи үзінділер. Кез келген дұрыс көпбұрышты да циркуль және сызғыш көмегімен сызуға болмайды екен. Мұны 1801 жылы неміс математигі Карл Гаусс (1777— 1855) алгебралық тәсілде дәлелдеген. Ол егер n санын $2^m p_1 p_2 \dots p_n$ жазбасында p_1, p_2, ... p_n әр түрлі түбір сандар $2^{2^k}+1$ көрінісінде болғанда ғана дұрыс n бұрышты циркуль және сызғыш көмегімен сызу мүмкіндігін дәлелдеді. Мұнда m және k теріс емес бүтін сандар.

1



Белсенділікті арттырушы жаттығу

1. Әдетте құбыр бөлігінің көлденең кесімі шеңберден құралған болады. Жіңішке жіпті бір ұшынан бастап құбырға бір рет ора. Бір рет орауға кеткен жіптің бөлігі құбырдың көлденең кесімі, яғни шеңбердің ұзындығы болады. Оны 1-суретте көрсеткеніміздей етіп сызғыш арқылы өлше.
2. Жоғарыдағы тәсілмен құбырдың көлденең кесімінің диаметрін анықта.
3. Анықталған шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасын есепте.
4. Жоғарыда көрсетілген өлшеу және есептеу жұмыстарын тағы да бірнеше түрлі өлшемдегі құбыр бөліктері үшін де орындап, шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасын тап.
5. Жаттығу нәтижесі бойынша шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы туралы қандай қорытынды шығаруға болады?

Теорема.* *Шеңбер ұзындығының шеңбер диаметріне қатынасы шеңбер радиусына байланысты емес, кез келген шеңбер үшін бұл қатынас бірдей сан.

Дәлелдеу. Екі кез келген шеңбер аламыз. Олардың радиустары R_1 және R_2, ал ұзындықтары сәйкес түрде, C_1 және C_2 – болсын. $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ теңдікті дәлелдеуіміз керек. Екі шеңберге де ішкі дұрыс n бұрышты сызамыз. Олардың периметрлерін сәйкес түрде P_1 және P_2 деп белгілейік. Онда,

$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$ болғандықтан $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$ (*) болады.

Бұл теңдік ізделінген n үшін дұрыс. n саны артқан сайын, берілген шеңберге іштей сызылған n бұрыш периметрі P_1 сол шеңбер ұзындығы C_1-ге жуықтайды. Сол сияқты P_2-де C_2-ге жуықтайды.

Сол үшін $\frac{P_1}{P_2}$ қатынасы $\frac{C_1}{C_2}$ қатынасына тең болады (толық дәлелі математиканың жоғары басқышында үйреніледі). Сөйтіп, (*) теңдіктен $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, бұдан $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ теңдік келіп шығады. *Теорема дәлелденді.*

Шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасын грек әліппесінің π әрпімен белгілеу қабылданған (*“пи”* деп оқылады). Шеңбердің ұзындығының оның диаметріне қатынасын “π” әрпімен белгілеуді ұлы математик Леонард Эйлер (1707— 1783) ғылымға енгізген. Грекшеде “шеңбер” сөзі осы әріппен басталады. π иррационалдық сан, іс жүзінде оның 3,1416-ға тең болған жуық шамасын пайдаланылады.

Сонымен, $\frac{C}{2R} = \pi$. Бұл теңдіктен радиусы R-ға тең шеңбердің ұзындығы үшін $C = 2\pi R$ формуланы жасаймыз.

Есеп. Қабырғасы 6 *см* болған дұрыс үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын тап.

Шешуі. Дұрыс үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын табу формуласы $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ бойынша, $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (*см*). Енді шеңбер ұзындығын табу формуласынан $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$ (*см*). *Жауабы:* $4\pi\sqrt{3}$ *cm*.

Есептер мен тапсырмалар

42.1. Қандай сан π-мен белгіленеді? Радиусы R-ға тең шеңбер ұзындығын табу формуласын пайдаланып, кестені толтыр ($\pi \approx 3,14$ деп есепте).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

42.2. Егер шеңбердің радиусы а) 3 есе артса; ә) 3 см-ге артса; б) 3 есе кемейсе; в) 3 *см*-ге кемейсе, шеңбердің ұзындығы қаншаға өзгереді?

42.3. Егер Жер шары экваторының 40 миллионнан бір бөлігі 1 *м*-ге тең болса, Жер шарының радиусын тап.

42.4. а) Қабырғасы a-ға тең дұрыс үшбұрышқа; ә) катеттері a және b болған тік бұрышты үшбұрышқа; б) табаны a және бүйір қабырғасы b болған тең бүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын тап.

2

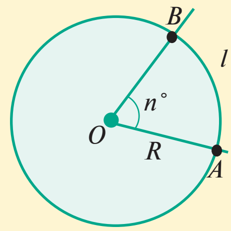
42.5. а) Қабырғасы a-ға тең квадратқа; ә) гипотенузасы c-ға тең болған тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрышқа; б) гипотенузасы c, сүйір бұрышы α болған тік бұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығын тап.

42.6. Тепловоз 1413 *м* жол басты. Мұнда оның дөңгелегі 300 рет айналды. Тепловоз дөңгелегінің диаметрін тап.

42.7. Жеңіл машина дөңгелегі шеңберінің радиусы 24 *см*-ге тең. Автомобиль 100 *км* жол басса, оның дөңгелегі неше рет айналады (*2-сурет*)?

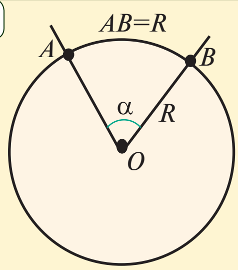
43 ШЕҢБЕР ДОҒАСЫНЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫ. БҰРЫШТЫҢ РАДИАНДЫҚ ӨЛШЕМІ

1



$l=\frac{\pi R}{180^\circ}\cdot n^\circ$

2



α=1 радиан ≈ 57°17′45″

1. *n^o-ты центрлік бұрышы тірелген доға ұзындығы.* Айталық, радиусы R-ға тең шеңберде n^o-ты центрлік бұрышы AOB берілген болсын *(1-сурет)*. Мұнда шеңбердің AOB центрлік бұрышқа тірелген AB доғаның градустық өлшемі n° немесе n°-тық доға деп айтылатынын ескертеміз.

Радиусы R-ға тең бүтін шеңбер, яғни 360^o-ты доғаның ұзындығы $2\pi R$-ге тең болғандықтан,

1°-ты доға ұзындығы $\frac{2\pi R}{360^o} = \frac{\pi R}{180^o}$ болады.

Онда, n°-ты доға ұзындығы $l = \frac{\pi R}{180^o} \cdot n^\circ$

формуласымен анықталады *(1-сурет)*.

2. *Бұрыштың радиандық өлшемі.*

Бұрыштың градустық өлшемімен бірге оның радиандық өлшемі де қолданылады.

Шеңбер доғасы ұзындығының радиусқа қатынасы жоғарыдағы формулаға орай: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^o}\cdot n^\circ$ болады.

Демек, шеңбер доғасы ұзындығының радиусына қатынасы тек сол доғаға ғана тірелген центрлік бұрыштың үлкендігіне байланысты. Бұл қасиеттені пайдаланып, бұрыштың радиандық өлшемі ретінде сол қатынасты аламыз:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^o}\cdot n^\circ.$$

Әдетте, радиан деген сөз жазылмайды. Мәселен: 5 радиан дегеннің орнына 5 деп жазылады.

Бір радиан $\frac{180^\circ}{\pi}$ градусқа тең: 1 радиан $=\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ17'45''$.

Бұрыштың градустық өлшемінен радиандық өлшеміне өту үшін

$$\alpha=\frac{\pi}{180^o}\cdot n^\circ$$

формула пайдаланылады.

Сөйтіп, n^o-ты бұрыштың радиандық өлшемін табу үшін оның градустық өлшемін $\frac{\pi}{180^o}$-ге көбейту жеткілікті. Ондай жағдайда, 180^o-ты бұрыштың радиандық өлшемі π-ге тең, 90^o-ты, яғни тік бұрыштың радиандық өлшемі $\frac{\pi}{2}$-ге тең болады.

α радианға тең центрлік бұрышқа сәйкес доғаның ұзындығы $l=\alpha R$ формуламен есептеледі.

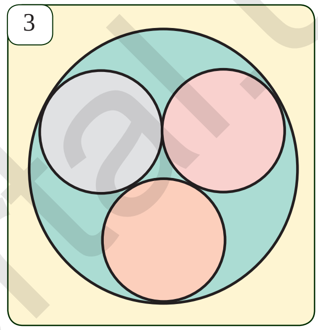
Есеп. Екі бұрышы сәйкес түрде 30° және 45° болған үшбұрыш бұрыштарының радиандық өлшемдерін тап.

Шешуі. Үшбұрыштың 30°-ты бұрышы радиандық өлшемі $30°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{6}$, 45°-ты бұрыштың радиандық өлшемі $45°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}$. Үшбұрыштың ішкі бұрыштары қосындысы 180°-қа, яғни π-ге тең екені туралы теоремаға орай, үшбұрыштың үшінші бұрышының радиандық өлшемін табалық.

$$\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Жауабы: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$

Есептер мен тапсырмалар

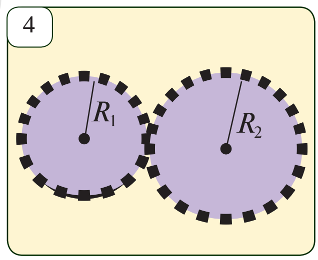


43.1. Радиусы 6 см болған шеңбердің градустық өлшемі: а) 30°; ә) 45°; б) 90°; в) 120° болған доғаның ұзындығын тап.

43.2. а) 40°; ә) 60°; б) 75°-ке тең бұрыштың радиандық өлшемін тап.

43.3. а) 1,2; ә) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$ радианға тең бұрыштың градустық өлшемін тап.

43.4. Егер шеңбер радиусы 5 *см* болса, оның а) $\frac{\pi}{8}$; ә) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{3\pi}{4}$ радианға тең центрлік бұрышы тірелген доғасының ұзындығын тап.



43.5. Радиусы 12 *см* болған шеңберге *ABC* үшбұрыш іштей сызылған. Егер а) $\angle A=30°$; ә) $\angle A=120°$ болса, *A* нүктені өз ішіне қамтымаған *BC* доғасының ұзындығын тап.

43.6. Шеңбердің тең хордалары шеңберді тең доғаларға бөлетінін дәлелде.

43.7*. Екі шеңбер бір-бірінің центрінен өтеді. Бұл шеңберлердің ортақ хордасы екі шеңберден бөлген доғалар ұзындықтарының қатынасын тап.

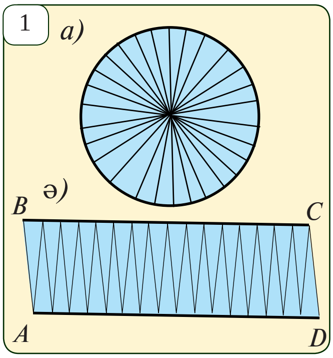
43.8*. Радиустары тең үш шеңбер бір-біріне сырттай және радиусы R-ға тең шеңберге іштей жанасады (3-сурет). а) шеңберлер радиусын тап; ә) боялған фигураны шектеуші доғалар ұзындығының қосындысын тап.

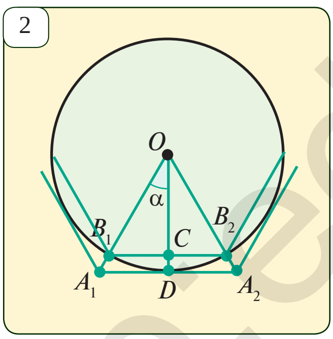
Қызық есеп

4-суретте көрсетілген екі тісті дөңгелектер бір-біріне "тістетілген". Дөңгелектердің радиусы R_1 және R_2. Бірінші дөңгелек n рет айналғанда, екінші дөңгелек неше рет айналады?

Анықтама. Жазықтықтың берілген O нүктесінен берілген R қашықтықтан үлкен емес қашықтықта жататын барша нүктелерден құралған форманы дөңгелек дейді.

Мұнда O нүкте дөңгелектің центрі, R-дің мәні болса дөңгелектің радиусы деп аталады. Осы дөңгелектің шекарасы центрі O нүктеде, радиусы болса R-ге тең шеңберден құралады.





Белсенділікті арттырушы жаттығу

Бір парақ қағазға жуан сызықпен шеңбер сыз және 1.*а*-суретте көрсетілгендей, оның бірнеше диаметрлерін жүргізіп, дөңгелекті тең бөліктерге бөл. Содан соң бұл бөліктерді қиып, 1.*ә*-суретте көрсетілгендей етіп теріп, F фигурасын жаса. Егер дөңгелек қалағанымызша көп тең бөліктерге бөлініп, бұл бөліктер суретте көрсетілген тәртіппен терілсе, нәтижеде тік төртбұрышқа өте жуық F фигурасы пайда болады.

а) F фигурасының тік төртбұрыш формасына өте жуықтығын ескеріп, оның AB қабырғасы шамамен неге тең болуын тап (нұсқау: AB қабырғаны дөңгелектің радиусымен салыстыр).

ә) F фигураның BC "қабырғасы" жуықтағанда неге тең болады? (нұсқау: BC және AD қабырғалар жуан сызықпен сызылғанына, яғни шеңбер доғаларынан құралғанына назар аудар)

б) F фигураның $ABCD$ тік төртбұрыш фигурасына өте жуықтығын ескеріп, оның ауданын жуықтап есепте. F фигураның ауданы дөңгелек ауданына өте жуық екендігін есепке алып, дөңгелек ауданы туралы қорытынды жаса.

Теорема. Радиусы R-ға тең болған дөңгелектің ауданы πR^2-қа тең.

Дәлелдеу. Радиусы R және центрі O нүктедегі шеңберді қарастыралық. Шеңберге сырттай сызылған $A_1A_2 \dots A_n$, іштей сызылған $B_1B_2 \dots B_n$ дұрыс n бұрыштардың аудандары сәйкес түрде S_n'' және S_n' болсын дейік *(2-сурет)*.

A_1OA_2 және B_1OB_2 үшбұрыштардың ауданын табалық:

$$S_{A_1OA_2} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot OD = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot R; \quad S_{B_1OB_2} = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot OC = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot OB_1\cos\alpha = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot R\cos\alpha.$$

Онда, $S_n'' = n \cdot \frac{1}{2}AA_1 \cdot R = \frac{1}{2}P_n''R, \quad S_n' = n \cdot \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot R\cos\alpha = \frac{1}{2}P_n'R\cos\alpha$ (1)

Мұнда P_n және P_n сәйкес түрде $A_1A_2...A_n$ және $B_1B_2...B_n$ көпбұрыштардың периметрлері. $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$болғандықтан n-нің ең үлкен шамаларында cosα-ның шамасы бірден, P_n және P_n-дердің шамалары шеңбердің ұзындығы, яғни $2\pi R$-дан мейлінше кем өзгешеленеді. Онда,(1) теңдіктер бойынша, n-ның жеткілікті үлкен шамаларында көпбұрыштардың ауданы πR^2-ге жуықтайды. Бұдан, дөңгелектің ауданы үшін $S=\pi R^2$ формула келіп шығады.

Теорема дәлелденді.

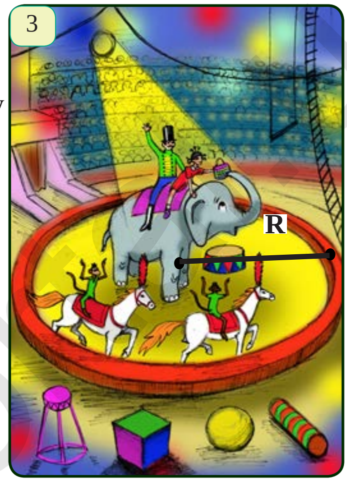
Есеп. Цирк аренасының ұзындығы 41 *м*. Арена радиусы мен ауданын тап.

Шешуі. 1) Шеңбер ұзындығын табу формуласынан радиусты табамыз *(3-сурет)*:

$$R=\frac{C}{2\pi}\approx\frac{41}{2\cdot 3{,}14}\approx 6{,}53\ (м).$$

2) Дөңгелек ауданын есептеу формуласынан аренаның ауданын табамыз: $S=\pi R^2\approx 3{,}14\cdot 6{,}53^2\approx$ $\approx 133{,}84$ ($м^2$). *Жауабы:* $R\approx 6{,}53$ *м*; $S\approx 133{,}84$ $м^2$.

3



Есептер мен тапсырмалар

44.1. Дөңгелек ауданын есептеу формуласын айт.

44.2. Радиусы R-ға тең болған дөңгелектің S ауданын табу формуласынан пайдаланып кестені толтыр ($\pi=3{,}14$ деп ал).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

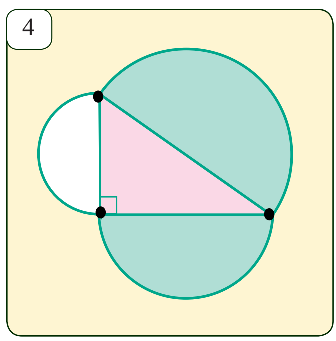
44.3. Егер дөңгелек радиусы а) k есе артса; ә) k есе кемейсе, шеңбер ауданы қалай өзгереді?

44.4. Қабырғасы 5 *см* болған квадратқа іштей және сырттай сызылған дөңгелектердің ауданын тап.

44.5. Қабырғасы $3\sqrt{3}$ *cm* болған дұрыс үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған дөңгелектердің ауданын тап.

44.6. Радиусы R дөңгелектен ең үлкен квадрат қырқып алынды.Қалған бөлігінің ауданын тап.

4



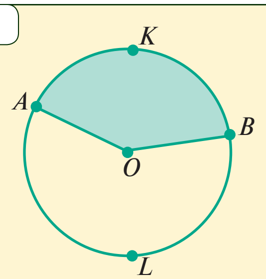
44.7. Қабырғалары 6 *см* және 7 *см* болған тік төртбұрышқа сырттай сызылған дөңгелек ауданын тап.

44.8. Қабырғасы 10 *см* және сүйір бұрышы 60° болған ромбыға іштей сызылған дөңгелектің ауданын тап.

44.9*. Тік бұрышты үшбұрыш қабырғаларын диаметр етіп, жарты дөңгелектер сызылған. Гипотенузаға сызылған жарты дөңгелек ауданы катеттерге жарты дөңгелектер аудандары қосындысына тең болатынын көрсет *(4-сурет)*.

ДӨҢГЕЛЕК БӨЛІКТЕРІНІҢ АУДАНЫ

1



Анықтама. Дөңгелектің доғасы және бұл доға ұштарын дөңгелек центрімен ұштастыратын екі радиуспен шектелген бөлігі *сектор* деп аталады. Секторды шектейтін доға *сектор доғасы* делінеді.

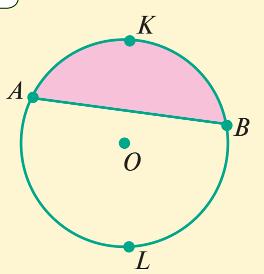
1-суретте AKB және BLA доғалы екі сектор өрнектелген (олардың біріншісі боялған).

Радиусы R-ге және доғаның градустық өлшеуіші $n°$-қа тең болған сектордың S ауданын табу үшін формула шығарамыз. Доғасы $1°$-қа тең сектордың ауданы дөңгелек (яғни доғасы $360°$-қа тең сектор) ауданының $\frac{1}{360}$ бөлігіне тең болғаны үшін, доғасы $n°$ болған сектордың ауданы

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \qquad \text{яки} \qquad S = \frac{1}{2} R \cdot l$$

формуламен табылады. l — $n°$-ты сектор доғасының ұзындығы.

2



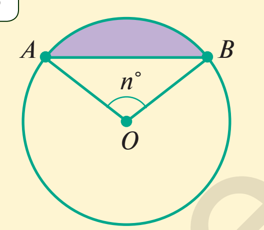
Анықтама. Дөңгелектің доғасы мен бұл доға ұштарын тұтастыратын хордасымен шектелген бөлігі *сегмент* деп аталады.

2-суретте AKB және BLA доғалы екі сегмент бейнеленген (олардың біріншісі боялған). Жарты дөңгелектен өзгеше сегменттің S ауданы

$$S = S_{сектор} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

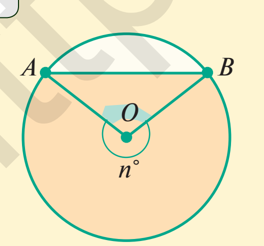
формуламен есептеледі *(3- және 4-суреттерге қара)*.

3



$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n - S_{AOB}$

4



$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n + S_{AOB}$

Есеп. Доғаның градустық өлшемі $72°$ болған сектордың ауданы 45π-ге тең. Сектор радиусын тап.

Шешуі. Сектор ауданын табу формуласына орай,

$$\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi.$$

Бұдан, $R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225$, демек, $R = 15$.

Жауабы: 15.

Есептер мен тапсырмалар

45.1. Сектор ауданын табу формуласын шығар.

45.2. Сегмент ауданын табу формуласын шығар.

45.3. Радиусы 7 *см*, доғасының градустық өлшемі а) $30°$; ә) $45°$; б) $120°$; в) $90°$ болған сектор мен сегмент аудандарын тап.

45.4. 5-суретте қабырғасы a-ға тең болған дұрыс үшбұрыш, квадрат және дұрыс алтыбұрыш өрнектелген. Боялған фигуралардың ауданын тап. Мұнда секторлардың радиустары көпбұрыш қабырғасының жартысына тең.

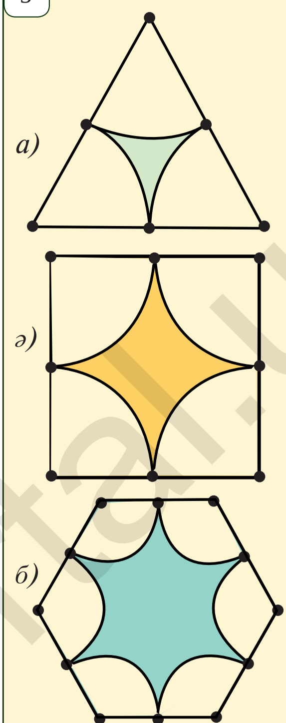
45.5. Нысанада радиустары 1, 2, 3, 4-ке тең болған төрт шеңбер бар. Ең кіші дөңгелек ауданын және әрбір сақинаның ауданын тап *(6-сурет)*.

45.6. Радиусы 10 *см*-ге тең болған дөңгелекте радиусқа тең хорда өткізілген. Пайда болған сегменттердің ауданын есепте.

45.7. Радиустары 15 *см*-ден болған екі дөңгелек центрлері арасындағы арақашықтық 15 *см*. Дөңгелектердің жалпы бөлігінің ауданын тап.

45.8. Радиусы 10 *см* болған дөңгелекке іштей және сырттай сызылған дұрыс он екі бұрыштың ауданын есепте. Нәтижелерді дөңгелек ауданымен салыстыр.

5



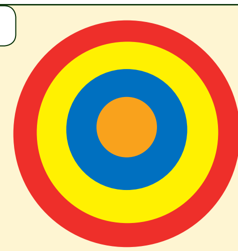
Қызық есеп

7-суретте кескінделген гүл құмырасын

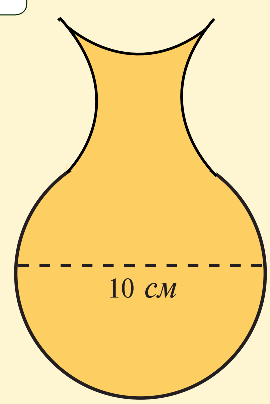
а) үш түзу сызықпен төрт бөлікке бөлгенде, олардан тік төртбұрыш жиналатын болсын;

ә) екі түзу сызықпен үш бөлікке бөлгенде, олардан квадрат жинауға болсын.

6



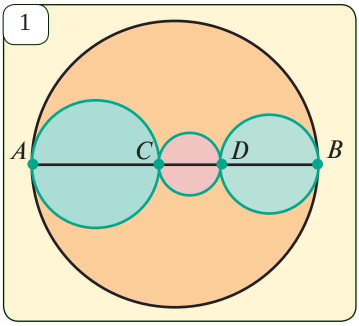
7



Тарихи үзінділер. Көп дәуірден бері әлемнің көптеген математиктері "дөңгелек квадратурасы" деп аталған төмендегі есепті шешуге әрекет еткен: Циркуль және сызғыш көмегімен ауданы берілген дөңгелек ауданына тең болған квадрат сызу. Тек XIX ғасырдың соңында ғана бұл есептің шешімі жоқ екендігі дәлелденген.

46 ІС ЖҮЗІНДІК ЖАТТЫҒУ МЕН ҚОЛДАНУ

1-есеп. C және D нүктелер шеңбердің AB диаметрін үш AC, CD және DB кесінділерге бөледі. AC, CD және DB диаметрлі шеңберлер ұзындықтары қосындысы AB диаметрлі шеңбер ұзындығына тең екендігін дәлелде *(1-сурет)*.



Шешуі. Шеңбердің ұзындығын табу формуласынан пайдаланып, AC, CD және DB диаметрлі шеңберлердің C_1, C_2 және C_3 ұзындықтарының қосындысын табалық:

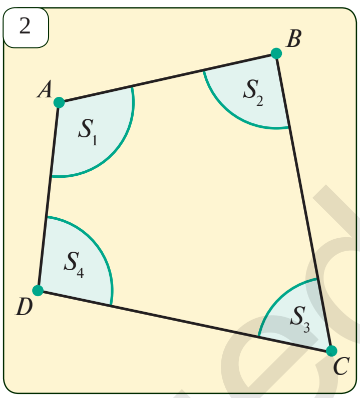
$$C_1+C_2+C_3=AC\cdot\pi+CD\cdot\pi+DB\cdot\pi=\pi(AC+CD+DB).$$

$AC+CD+DB=AB$ және AB диаметрлі шеңбердің C ұзындығы $AB\cdot\pi$-ге тең болғандықтан

$$C_1+C_2+C_3=C.$$

Осы теңдікті дәлелдеу талап етілген еді.

2-есеп. $ABCD$ төртбұрыштың төбелерін центр етіп бірдей радиусты секторлар сызылған *(2-сурет)*. Бұл секторлардан кез келген екеуі ортақ нүктеге ие емес және барлығының радиусы 1 *см*. Секторлар ауданының қосындысын тап.



Шешуі. 1) Төртбұрыштың A, B, C, D бұрыштары сәйкес түрде $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ болсын. Онда көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теорема бойынша,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360^\circ.$$

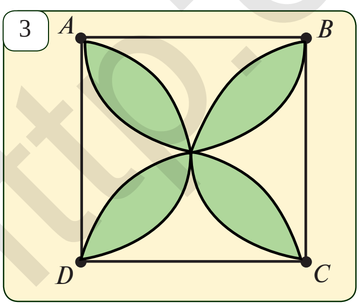
2) Сектор ауданын табу формуласына орай ($R=1$ *см*),

$$S_1=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_1,\quad S_2=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_2,\quad S_3=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_3,\quad S_4=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_4.\quad (1)$$

3) (1) теңдіктердің сәйкес бөліктерін қосамыз. Онда,

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{360^\circ}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot360^\circ=$$
$$=\pi\ (см^2).$$

Жауабы: π *см*^{2}.



Есептер мен тапсырмалар

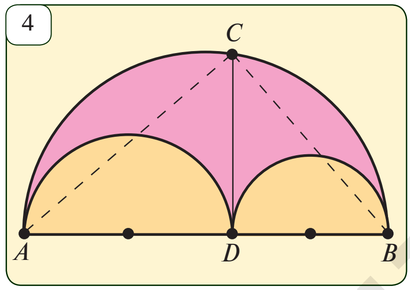
46.1. Периметрі 1 *м* болған квадрат және ұзындығы 1 *м* болған шеңбер берілген. Бұл шеңбермен шектелген дөңгелек ауданы мен квадрат ауданын салыстыр.

46.2. Радиусы 8 *см* болған дөңгелектен 60°-ты сектор қырқып алынған. Дөңгелектің қалған бөлігінің ауданын тап.

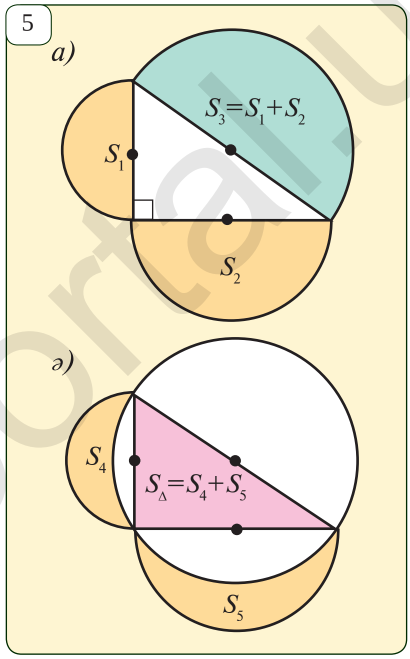
46.3. Диагональдары 6 *см* және 8 *см* болған ромбыға іштей сызылған дөңгелектің ауданын есепте.

46.4. 3-суретте бояп көрсетілген фигура ауданын тап. Онда $ABCD$ — квадрат, $AB=4$ *см.*

46.5*. 4-суретте "Архимед қайшысы" деген фигура бояп көрсетілген. Оның ауданын $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ формуламен есептелуін дәлелде (мұнда $\angle ACB = 90°$ және $CD^2 = AD \cdot DB$ екендігін пайдалан).



46.6. Егер $AD=6$ *см*, $BD=4$ *см* болса, 4-суретте бояп көрсетілген фиураның ауданы мен периметрін (оны орап тұрған доғалар ұзындығы қосындысын) тап.



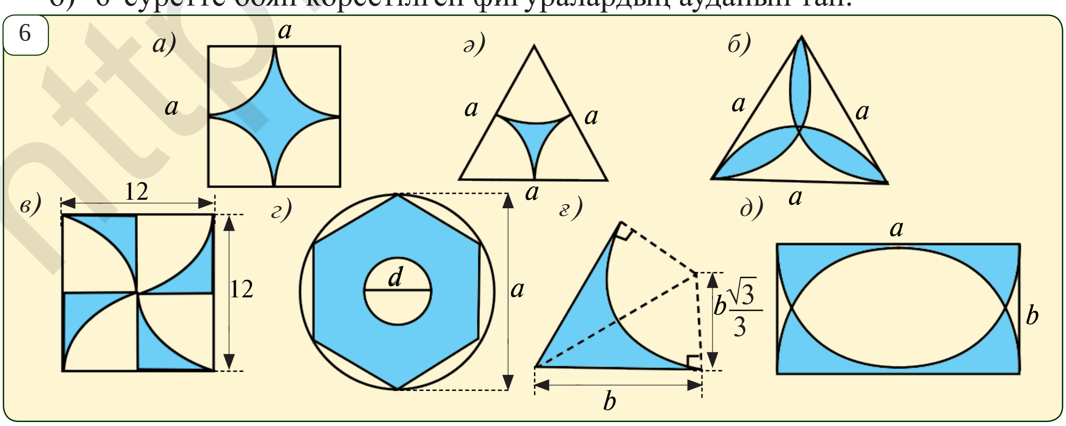
Тарихи үзінділер. Гиппократ айшықтары.

а) Гиппократ айшығы — екі шеңбер доғаларымен шектелген және төмендегі қасиетке ие болған фигура: егер шеңберлер радиустары және айшық доғалары тірелген хорда берілген болса,айшыққа теңдес квадрат салу мүмкін.

Пифагор теоремасы қолданылса, 5.*а*-суретте өрнектелген гипотенузаға құрылған жарты дөңгелек ауданы катеттерден құралған жарты дөңгелектер аудандарының қосындысына тең болады *(121-беттегі 44.9-есепке қара)*.Сондықтан 5.ә-суреттегі айшықтар аудандарының қосындысы үшбұрыш ауданына тең (ойланып көр!). Егер суреттегі үшбұрыш орнына тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш алсақ, пайда болған екі айшықтан әрқайсысының ауданы үшбұрыш ауданының жартысына тең болады. Дөңгелек квадратурасы туралы есепті шешуге тырысып, грек математигі Гиппократ (б.з.б.V ғасыр) көпбұрышпен теңдес бірнеше түрлі айшықтарды ойлап тапқан.

Гиппократ айшықтарының толық кестесі XIX — XX ғасырларда ғана жасалған.

б) 6-суретте бояп көрсетілген фигуралардың ауданын тап.



47 БІЛІМІҢДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. 45 градусты бұрыштың радиандық өлшемі неге тең?

А. 1-ге тең;; Ә. $\frac{\pi}{2}$-ге тең; Б. $\frac{\pi}{4}$-ге тең ; В. $\sqrt{2}$.-ге тең.

2. Радиусы 3 см шеңбердің градустық өлшемі 150° болған центрлік бұрышы тірелген доғаның ауданын тап.

А. $\frac{5\pi}{2}$ *см*; Ә. $\frac{5\pi}{3}$ *см*; Б. $\frac{10\pi}{3}$ *см*; В. $\frac{5\pi}{4}$ *см*.

3. Радиусы 6 см шеңберде $\frac{5\pi}{4}$ радианға тең центрлік бұрыш тірелген доғаның ауданын тап.

А. $\frac{15\pi}{2}$ *см*; Ә. $\frac{5\pi}{6}$ *см*; Б. $\frac{4\pi}{3}$ *см*; В. $\frac{5\pi}{2}$ *см*.

4. Қабырғасы 5 см квадратқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын тап.

А. $5\sqrt{2}\pi$; Ә. $\sqrt{2}\pi$; Б. $3\sqrt{2}\pi$; В. 5π.

5. Диаметрі 6-ға тең дөңгелектің ауданын тап.

А. 9π; Ә. 6π; Б. $3\sqrt{2}\pi$; В. 12π.

6. Доғаның градустық өлшемі 150°, радиусы 6 см дөңгелек секторының ауданын тап.

А. 15π *см*^{2}; Ә. 6π *см*^{2}; Б. $30\sqrt{2}\pi$ *см*^{2}; В. 24π *см*^{2}.

7. Доғасының ұзындығы 12 см және радиусы 6 см болған дөңгелек секторының ауданын тап.

А. 15π *см*^{2}; Ә. 6π *см*^{2}; Б. $30\sqrt{2}\pi$ *см*^{2}; В. 24π *см*^{2}.

8. Доғаның градустық өлшемі 120°, радиусы 3-ке тең дөңгелек секторының ауданын тап.

А. $6\pi - 4\sqrt{3}$; Ә. $6\pi + 4\sqrt{3}$; Б. $3\pi - 4\sqrt{3}$; В. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Есептер

1. $ABCDEFKL$ дұрыс сегізбұрыш қабырғасы 6 *см*. Оның AC диагоналын тап.

2. Квадрат радиусы 4 *дм* болған шеңберге іштей сызылған. Квадрат сыбайлас қабырғаларының орталарынан кесіп өтетін хорданы шеңберден бөлген доғалардың ұзындығын тап.

3. Шеңбердің 90°-ты доғасының ұзындығы 15 π *см*. Шеңбер радиусын тап.

4. Радиусы 20-ға тең шеңберден ұзындығы 10 π-ға тең доға бөлінді. Бұл доғаға сәйкес центрлік бұрышты тап.

5. Екі дөңгелектің ортақ хордасы бұл дөңгелектерді шектейтін шеңберлерден 60° және 120°-ты доғаларға бөледі. Дөңгелектер аудандарының қатынасын тап.

6. Қабырғалары 3, 4, 5 болған үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған дөңгелектердің ауданын тап.

7. Дөңгелектің хордасы 60°-ты доғаны керіп тұрады. Бұл хорда бөлген сегменттер аудандарының қатынасын тап.

8. Дұрыс алтыбұрыш ауданының іштей сызылған дөңгелек ауданына қатынасын тап.

9. Қабырғасы a-ға тең болған $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыш берілген. Центрі A нүктеде және радиусы a болған шеңбер бұл алтыбұрышты екі бөлікке бөледі. Әрбір бөліктің ауданын тап.

10. Тік бұрышты ABC үшбұрышта $\angle A=72°$, $\angle C=90°$, $BC=15$ *см*. BC диаметрлі шеңбердің ABC үшбұрыш ішінде жатқан доғасының ұзындығын тап.

11. Дөңгелекке іштей сызылған дұрыс сегізбұрыш берілген. Оның екі сыбайлас төбелеріне жүргізілген радиустар дөңгелекті екі секторға бөледі. Бұл секторлардың аудандарының қатынасын тап.

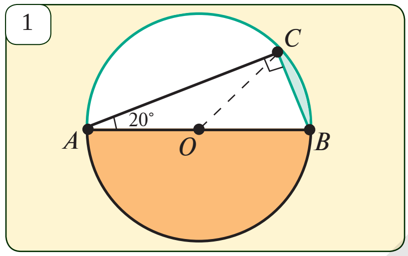
12. Тік бұрышты ABC үшбұрышта $\angle A=20°$, $\angle C=90°$, $AB=18$ *см*. BC кесінді үшбұрышқа сырттай сызылған дөңгелекті екі сегментке бөледі. Бояп көрсетілген сегменттің ауданын тап *(1-сурет)*.

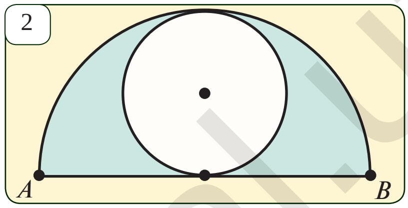
13. Кіші шеңбер үлкен шеңберге және оның AB диаметріне жанасады. Егер диаметрге жанасу нүктесі шеңбер центрі және $AB=4$ болса, суретте боялған фигураның ауданын тап *(2-сурет)*.

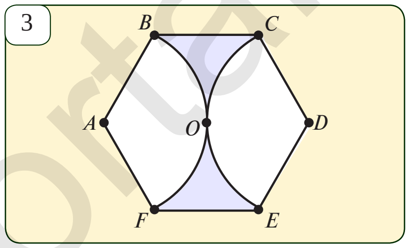
14. Дұрыс $ABCDEF$ алтыбұрыштың қабырғасы 6-ға тең және центрі O нүктеде. Центрлері A мен D нүктеде және радиустары тең болған шеңберлер O нүктеде жанасады. Боялған бөліктің ауданын тап *(3-сурет)*.

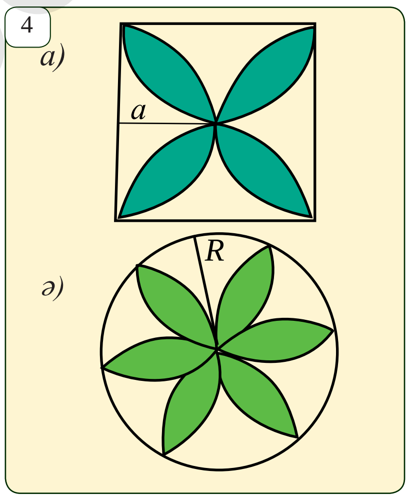
15. Тік бұрышты ABC үшбұрышта $\angle C=90°$, $AC=4$, $CB=2$. Центрі гипотенузада болған шеңбер үшбұрыш катеттеріне жанасады. Бұл шеңбер ұзындығын тап.

16. 4-суреттегі боялған фигуралардың ауданын тап. Олар қалай сызылғанын анықта.









III. Өзіңді сынап көр (бақылау жұмысы үлгісі)

1. Қабырғасы 6 *см* болған квадратқа сырттай сызылған шеңбердің ұзындығын және іштей сызылған шеңбердің ауданын тап.

2. Қабырғасы 24 *см* болған дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы $4\sqrt{3}$ *см* болса, оған сырттай сызылған шеңбердің радиусын тап.

3. 240°-ты шеңбер доғасының ұзындығы 24 *см* болса,
а) шеңбер радиусын; ә) доғасы 240° болған сектор ауданын;
б) доғасы 240° болған сегменттің ауданы тап.

Қызық есеп

Ин және Ян

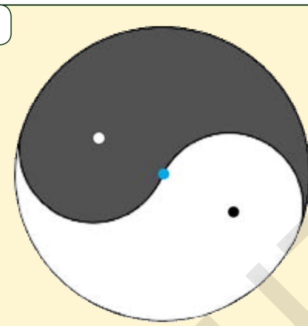
1-суреттегі табиғаттағы қайшылықтарды бейнелеуші “Ин және Ян” деген қытай рәмізі.

а) Ин және Ян рәмізі аудандары теңдігін көрсет;

ә) бір түзу сызықпен бұл рәміздердің әрбірін аудандары тең болған екі бөлікке бөл.

б) Ин және Ян рәміздер периметрін (орап тұрған доғалар ұзындығының қосындысын) тап.

1



Тарихи үзінділер. Шеңбер ұзындығын есептеу өте ертеден көкейтесті ділгірлік болған. Шеңбер ұзындығын оған іштей сызылған көпбұрыш периметріне түрлендіру тәсілі кең таралған.

Орта Азиялық математиктер де дөңгелекке іштей сызылған дұрыс көпбұрыштарды сызу, олардың қабырғаларын дөңгелектің радиусы арқылы өрнектеу мәселелерімен айналысқан. Әбу Райхан Беруни “Қонуни Масъуди” шығармасында дөңгелекке іштей сызылған көпбұрыштардың қабырғасын анықтаумен шұғылданып, іштей сызылған бесбұрыш, алтыбұрыш, жетібұрыш ..., онбұрыш қабырғаларын анықтау тәсілін көрсетеді. Бұл есептеу нәтижесінде ол $\pi \approx 3{,}14$ шамаға ие болады.

Ертедегі Бабыл және Мысыр қолжазбалары мен миххаттарында π үшке тең деп алынған. Бұл сол дәуірдегі анықтау талабы үшін жеткілікті болған. Кейін римдіктер π үшін 3,12-ні қолданған. π саны үшін Архимед берген шама 3,14 еді, бұл іс жүзіндік есептерді шешуде өте жөн.

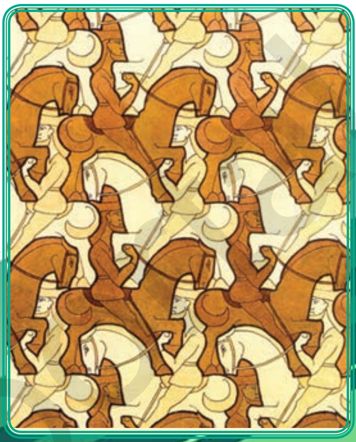
Қытай математиктерінде $\pi \approx 3{,}155$ ...және 22/7.Үнділердің “Сульва Сутра” (“Арқан ережесі”) шығармасында π үшін 3,008 және 3,1416 ...және $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ ...шамалары кездеседі.

Мырза Ұлықбектің “Астрономия мектебі” қайраткерлерінің бірі Жамшид Ғиясиддин әл-Коши 1424 жылы жазған “Шеңбердің ұзындығы туралы кітап” атты еңбегінде шеңберге іштей және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын екі еселеу жолымен $3 \cdot 2^{28} = 800335168$ қабырғалы дұрыс көпбұрыштар периметрін есептеп, π үшін $\pi = 3{,}1415826535897932$ шамасын жасаған. Бұл 16 ондық санға дейін анық.

Бірақ әл-Кошидің шығармасы ұзақ жылдар барысында Еуропада белгісіз болған. Еуропалықтардан бельгиялық Ван Ромен 1597 жылы 2^{30} қабырғалы дұрыс көпбұрышқа Архимед тәсілін қолданып, π үшін 17 ондық сандары анық болған шама тапқан. Голландиялық Рудольф ван Цейлон (1540-1610) бұл айқындықты 35 ондық санға дейін жеткізген. Қазіргі дәуірде электрондық есептеу машиналарының көмегімен π үшін миллионнан астам ондық сандары анық болған шамалар табылған. Күнделікті есептеулер үшін 3,14 шама, математикалық есептеулер үшін 3,1416 шама, тіпті астрономия және космонавтика үшін 3,1415826 шама жеткілікті.

IV ТАРАУ

ҮШБҰРЫШ ЖӘНЕ ШЕҢБЕРДЕГІ МЕТРИКАЛЫҚ ҚАТЫНАСТАР



Осы тарауды үйрену нәтижесінде сен төмендегі білім және іс жүзіндік дағдыларға ие боласың:

Білімдер:

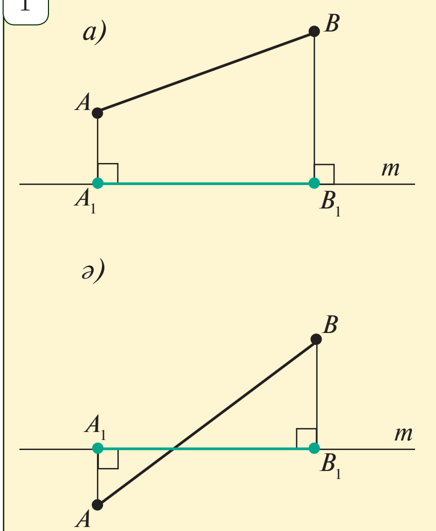
√ *пропорционал кесінділердің қасиеттерін білу;*
√ *тік бұрышты үшбұрышта гипотенузаға жүргізілген биіктіктің қасиеттерін білу;*
√ *өзара қиылысушы хордалардың кесінділері туралы және шеңберді кесуші түзу сызық кесінділері туралы қасиеттерін білу.*

Дағдылар:

√ *кесінділердің қатынасы және пропорционал кесінділерге байланысты есептерді шеше алу;*
√ *тік бұрышты үшбұрышта гипотенузаға жүргізілген биіктіктің қасиеттерін пайдаланып, есептер шеше алу;*
√ *кесуші хордалар кесінділерінің және кесуші түзу сызық кесінділерінің қасиеттерін пайдаланып, есептер шешу.*

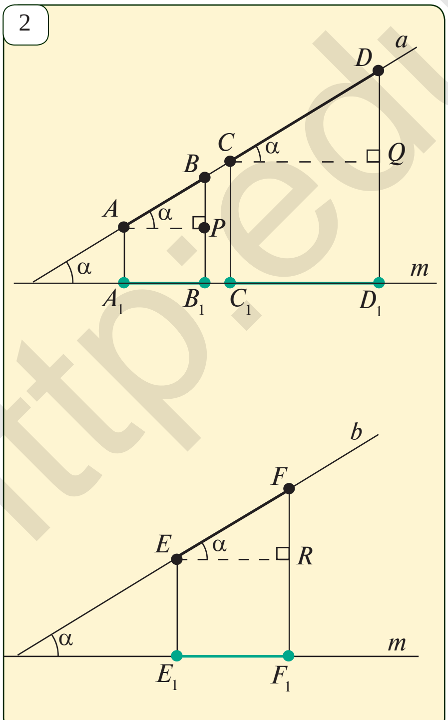
48 КЕСІНДІЛЕР ПРОЕКЦИЯСЫ ЖӘНЕ ПРОПОРЦИОНАЛДЫЛЫҚ

1



A_1 — A нүктенің,
B_1 — B нүктенің,
A_1B_1 — AB кесіндінің ***m* түзу сызықтағы проекциясы**

2



Белсенділікті арттырушы жаттығу

1. Кесінділер қатынасы нені білдіреді?
2. Қандай кесінділер пропоционал болады?
3. Фалес теоремасын айт.

Жазықтықта m түзу сызық және AB кесінді берілген болсын дейік. A және B нүктелерден m түзу сызыққа AA_1 және BB_1 перпендикулярлар жүргіземіз *(1-сурет)*. A_1B_1 кесінді AB кесіндінің m түзу сызықтағы *проекциясы (көлеңкесі)* деп аталады.

AB кесіндінің m түзу сызықтағы A_1A_1 проекциясын жасау тәсілі AB кесіндіні m түзу сызыққа *проекциялау* деп аталады.

Теорема. Бір түзу сызықта не параллель түзу сызықтарда жататын кесінділер берілген болсын. Олардың кейбір түзу сызықтағы проекциялары берілген кесінділерге пропорционал болады.

$a \parallel b$, A_1B_1 — AB-ның, C_1D_1 — CD-ның, E_1F_1 — EF-тың m түзу сызыққа проекциялары *(2-сурет)*	$\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{E_1F_1}{EF}$ (1)

Дәлелдеу. а) Егер a және b түзу сызықтар m түзу сызыққа параллель болса, $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, $EF=E_1F$ болуы және (1) теңдік орынды екендігі айқын.

ә) Егер де a және b түзу сызықтар m түзу сызыққа перпендикуляр болса, A_1 және B_1, C_1 және D_1, E_1 және F_1 нүктелері беттесіп түседі. Сондықтан A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 кесінділердің ұзындығы нөлге тең болады және (1) теңдік орындалады.

б) Енді басқа жағдайларды қарастырайық. 2-суретте кескінделгеніндей тік бұрышты ABP, CDQ, EFR үшбұрыштарын сызамыз.

Онда $a||b$ болғандықтан, $\angle BAP=\angle DCQ=\angle FER$. Демек, ABP, CDQ және EFR тік бұрышты үшбұрыштар ұқсас.

Бұдан $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF}$ теңдікті жасаймыз. *Теорема дәлелденді.*

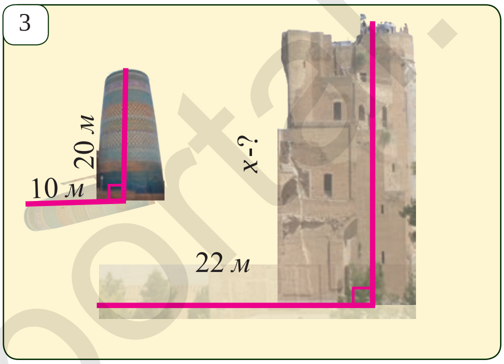
Есеп. AB және CD кесінділер параллель түзу сызық бойында жатады. Егер $AB=12$ *см*, $CD=15$ *см* және AB кесіндінің бір m түзу сызықтағы проекциясы 8 *см* болса, CD кесіндінің сол m түзу сызықтағы проекциясын тап.

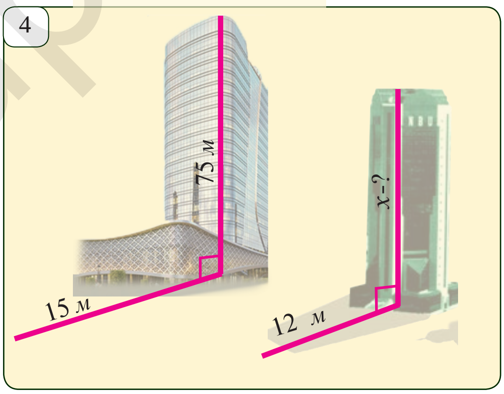
Шешуі. CD кесіндінің m түзу сызықтағы проекциясы x болсын. Онда дәлелденген теорема мен есеп шартын пайдаланып, пропорция жасаймыз:

$$\frac{x}{15}=\frac{8}{12}.$$

Бұл теңдіктен $x=10$ болуын табамыз.

Жауабы: 10 *см.*





Есептер мен тапсырмалар

48.1. Кесіндінің берілген түзу сызықтағы проекциясы деген не?

48.2. Бір түзу сызықта немесе параллель түзу сызықтарда жатқан кесінділердің дәл басқа бір түзу сызыққа проекциялары берілген кесінділерге пропорционал екендігін дәлелде.

48.3. a және b түзу сызықтар арасындағы бұрыш 45°-қа тең. a түзу сызықта ұзындығы 10 *см* болған AB кесіндісі алынған. AB кесіндінің b түзу сызықтағы проекциясын тап.

48.4. AB кесіндінің төбелері l түзу сызықтан 9 *см* және 14 *см* қашықтықта жатады. Егер AB кесінді l түзу сызықты кесіп өтпесе және $AB=13$ болса, AB кесіндінің l түзу сызықтағы проекциясын тап.

48.5. 3- және 4-суреттердегі мәліметтер негізінде ғимараттар биіктіктерін тап.

48.6. Түзу сызық және оған параллель болмаған кесінді сыз. Кесіндінің түзу сызықтағы проекциясын сал.

48.7. Координаталар жазықтығында $A(2;3)$ және $B(3;-4)$ нүктелер белгіленген. AB кесіндінің координата осіндегі проекциялары ұзындықтарын тап.

48.8. a және b түзу сызықтар арасындағы бұрыш α-ға тең. a түзу сызықта AB кесіндісі алынған. AB кесіндінің b түзу сызықтағы проекциясын тап.

48.9*. AB және CD кесінділердің l түзу сызықтағы проекциялары өзара тең. AB және CD кесінділердің ұзындықтарын не деуге болады? Мысал айт.

49 ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСІНДІЛЕРДІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

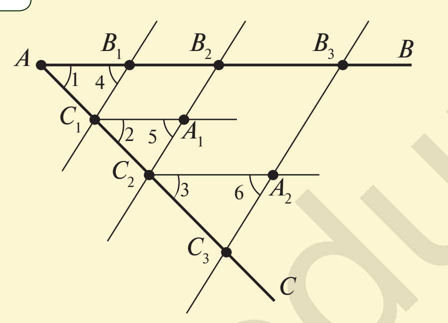
Фалес теоремасының қорытындысы болған маңызды қасиетті дәлелдейміз.

***Теорема.* Бұрыштың екі қабырғасын кесіп өткен параллель түзу сызықтар оның қабырғаларынан пропорционал кесінділер бөледі.**

$\angle BAC,\ B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ (*1-сурет*) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Дәлелдеу. C_1 және C_2 нүктелерден AB параллель C_1A_1 және C_2A_2 түзу сызықтарды жүргіземіз. Онда, біріншіден, $\angle1=\angle2=\angle3$ болады, өйткені олар өзара параллель болған AB, C_1A_1 және C_2A_2 түзу сызықтарды AC түзу сызық кесіп өткенде жасалатын сәйкес бұрыштар болады. Екіншіден, $\angle4=\angle5=\angle6$, себебі олардың қабырғалары параллель болған бұрыштар.

1



Демек, үшбұрыштар ұқсастығының ББ белгісі бойынша, $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta C_1A_1C_2 \backsim \Delta C_2A_2C_3$ болады.

Ендеше, $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{C_1A_1}{C_1C_2} = \dfrac{C_2A_2}{C_2C_3}$ (1)

теңдіктерін өрнектейміз.

Бұдан тыс, $B_1C_1A_1B_2$ мен $B_2C_2A_2B_3$ төртбұрыштар параллелограмм, өйткені

$B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ — шарт бойынша;

$AB \| C_1A_1 \| C_2A_2$ — салу бойынша.

Сондықтан, бұл параллелограмдардың қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болады:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \quad \text{және} \quad C_2A_2 = B_2B_3. \qquad (2)$$

(1) мен (2) теңдіктен $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$ болуы келіп шығады.

Теорема дәлелденді.

***Іс жүзіндік жаттығу.* Кесіндіні берілген қатынаста бөлу.**

Берілген a кесіндіні төрт бөлікке бөлгенде, бөліктердің өзара қатынасы $m:n:l:k$ сияқты болсын дейік.

Мұның үшін төмендегілерді адымдап орындаймыз:

1-адым. Кез келген сүйір бұрыш сызып, оның бір қабырғасына ұзындықтары $OA=m,\ AB=n,\ BC=l$ және $CD=k$-ға тең болған кесінділерді 2-суреттегідей етіп, кезектестіріп қойып шығамыз.

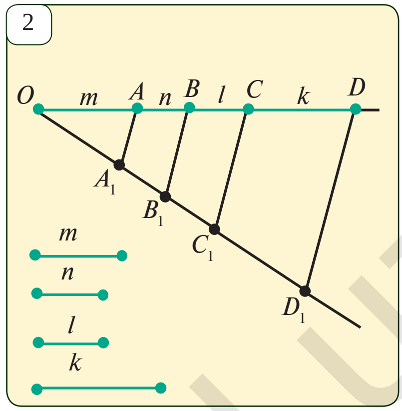
2-адым. Бұрыштың екінші қабырғасына берілген a кесіндіге тең OD_1 кесіндіні қоямыз.

3-адым. D және D_1 нүктелерді ұштастырамыз.

4-адым. A, B, C нүктелері арқылы DD_1-ге параллель AA_1, BB_1 және CC_1 кесінділерді жүргіземіз.

Жоғарыдағы теорема бойынша, берілген $a = OD_1$ кесінді A_1, B_1, C_1 және D_1 нүктелерімен $m:n:l:k$ қатынаста бөлінген болады.

Тапсырма. Бұл дәлелді өз бетіңше негізде.



Іс жүзіндік тапсырма. Төртінші пропорционал кесіндіні салу.

a, b және *c* кесінділері берілген. *a* және *b* кесінділері *c* және *d* кесінділеріне пропорционал екендігі белгілі. *d* кесіндіні сыз *(3-сурет)*.

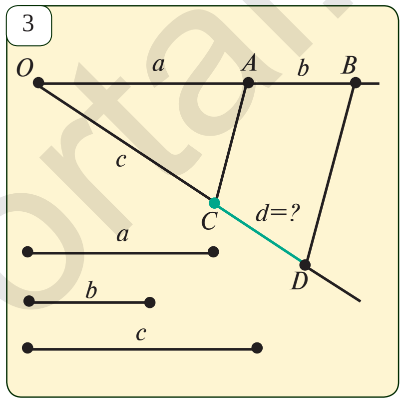
1-адым. Кез келген сүйір бұрыш сызып, оның бір қабырғасына $OA = a$ және $AB = b$ кесінділерді 3-суреттегідей қоямыз.

2-адым. Ал екінші қабырғасына $OC = c$ кесіндіні қоямыз.

3-адым. A және C нүктелерін ұштастырамыз.

4-адым. B нүктеден AC-ға параллель BD түзу сызығын жүргіземіз.

Тапсырма. CD ізделінген d кесіндісі болуын негізде.



Есептер мен тапсырмалар

49.1. Ұзындығы 42 *см* кесінді берілген. Оны а) 5:2; ә) 3:4:7; б) 1:5:1:7 қатынастағы бөліктерге бөл.

49.2. Суретте әрбір бөлік бірлік кесіндіден құралса, *AB* және *CD, EF* және *MN, AC* және *DF, AN* және *CE, EN* және *BM* кесінділерінің қатынастарын тап.

49.3. *m, n* кесінділер *l* және *k* кесінділерге пропорционал. Егер а) $m = 4$ *см*, $n = 3$ *см* және $l = 8$ *см*; ә) $m = 2$ *см*, $n = 3$ *см* және $l = 7$ *см* болса, төртінші пропорционал кесіндіні сыз және ұзындығын тап.

49.4. Төртбұрыштың периметрі 54 *см* және қабырғалары 3 : 4 : 5 : 6 сияқты қатынаста болса, оның әрбір қабырғасын анықта.

49.5. Төртбұрыштың бұрыштары өзара 3 : 4 : 5 : 6 сияқты қатынаста болса, оның кіші бұрышы неге тең екендігін тап.

49.6. Ұзындығы 4, 5 және 6 кесінділер берілген. Ұзындығы 4,8-ге тең кесінді сал.

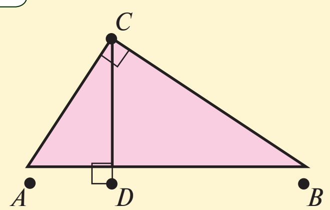
49.7*. Периметрі 60 *см* болған төртбұрыштың бір қабырғасы 15 *см*, қалған қабырғалары 2:3:4 қатынаста екені белгілі. Оның үлкен қабырғасын тап.

50 ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАҒЫ ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСІНДІЛЕР

Қасиет. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышы төбесінен жүргізілген биіктік оны өзіне ұқсас екі үшбұрышқа бөледі.

$\Delta ABC, \angle C=90^\circ$, CD — *биіктік (1-сурет)* ⇒ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

1



Дәлелдеу. ABC және ACD үшбұрыштар тік бұрышты болады, ал $\angle A$ бұрышы оларға ортақ. Демек, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Сол сияқты, ΔABC және ΔCBD да тік бұрышты болады, оларға $\angle B$ ортақ. Демек, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$.

1-суреттегі AD және DC кесінділер сәйкесінше AC және BC катеттердің гипотенузадағы проекциялары деп аталады.

Анықтама. Егер a, b және c кесінділерге $a:b=b:c$ болса, b кесіндісі a және c кесінділері арасындағы *орта пропорционал кесінді* деп аталады.

Орта пропорционалдық шартты $b^2=ac$ немесе $b=\sqrt{ac}$ өрнегінде де жазу мүмкін. Жоғарыда дәлелденген қасиетке негізделетін болсақ, орта пропорционал кесінділер туралы төмендегі теоремалар оңай дәлелденеді:

1-теорема. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен жүргізілген биіктік катеттердің гипотенузадағы проекцияларының арасында орта пропорционал болады.

Шынында да дәлелденген қасиет бойынша: $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Бұдан,

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2=AD\cdot BD \Rightarrow CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

2-теорема. Тік бұрышты үшбұрыш катеті гипотенуза мен сол катеттің гипотенузадағы проекциясы арасында орта пропорционал болады *(1-сурет)*.

Шынында да дәлелденген қасиет бойынша: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Бұдан,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AC=\sqrt{AB\cdot AD}.$$

Дәл осылайша $BC=\sqrt{BD\cdot AB}$ екенін дәлелдеуге болады.

Есеп. Катеттері 15 *см* және 20 *см* болған тік бұрышты үшбұрыштың кіші катетінің гипотенузадағы проекциясын тап.

$\Delta ABC, \angle C=90^\circ$, CD — *биіктік*, $AC=15$ *см*, $BC=20$ *см* *(1-сурет)* ⇒ $AD=?$

Шешуі. 1) Пифагор теоремасын пайдаланып, үшбұрыш гипотенузасын тап: $AB^2=AC^2+BC^2=15^2+20^2=625$, яғни $AB=25$ *см*.

2) Екінші теореманы пайдаланып AD-ны табалық:

$$AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{15^2}{25}=9\ (\text{см}).$$

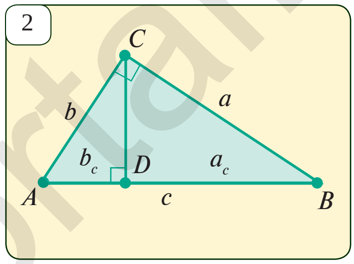
Жауабы: 9 см.

Теоремадан нәтиже ретінде Пифагор теоремасының **Пифагордың өзі жазып қалдырған дәлелі** келіп шығады *(1-сурет)*: 2-теорема бойынша,

$$\left.\begin{array}{l} AC^2=AD\cdot AB \\ BC^2=BD\cdot AB \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=AB\cdot(\underbrace{AD+BD}_{AB})=AB\cdot AB=AB^2.$$

Сонымен, $AC^2+BC^2=AB^2$.

Есептер мен тапсырмалар



2

50.1. Дәлелде *(2-сурет)*:

а) $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$;

ә) $b^2=b_c\cdot c$, $a^2=a_c\cdot c$; б) $h_c^2=a_c\cdot b_c$.

50.2. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген биіктігі гипотенузаны 9 *см* және 16 *см*-ге тең кесінділерге бөледі. Үшбұрыш қабырғаларын тап.

50.3. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 15 *см*-ге, ал бір катеті 9 *см*-ге тең. Екінші катеттің гипотенузадағы проекциясын тап.

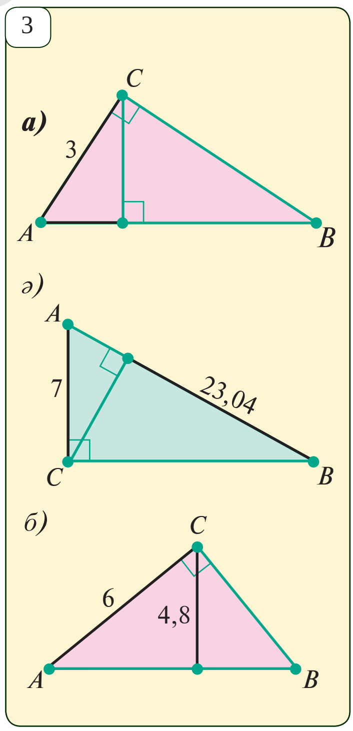
50.4. 3-суреттегі мәліметтер негізінде ABC үшбұрышының қабырғаларын тап.

50.5*. Катеттерінің қатынасы 4:5 сияқты болған тік бұрышты үшбұрыш катеттерінің гипотенузадағы проекцияларының қатынасын тап.

50.6*. Катеттерінің қатынасы 3:2 сияқты болған тік бұрышты үшбұрыш берілген. Катеттерінің гипотенузасындағы проекцияларынан бірі екіншісінен 6 *см*-ге ұзын. Үшбұрыштың ауданын тап.

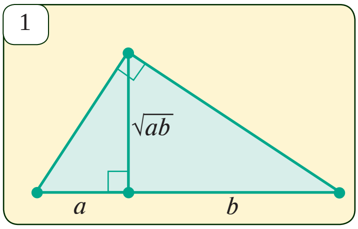
50.7. Катеттерінің гипотенузасындағы проекциялары 2 *см* және 18 *см* болған тік бұрышты үшбұрыштың ауданын тап.

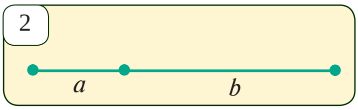
50.8*. ABC үшбұрышында $\angle C=90^\circ$, CD — биіктік, CE — биссектриса және $AE:EB=2:3$. а) $AC:BC$; ә) $S_{ACE}:S_{BCE}$; б) $AD:BD$ қатынастарын тап.

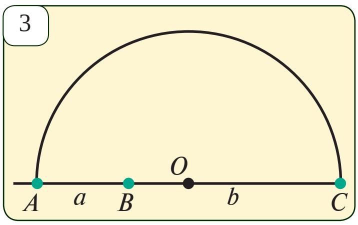


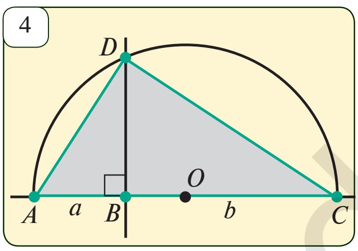
3

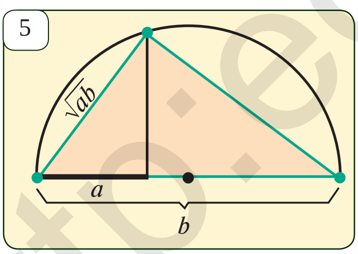
51 БЕРІЛГЕН ЕКІ КЕСІНДІГЕ ОРТА ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСІНДІНІ САЛУ











Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биіктігі гипотенузасын a және b кесінділерге бөлсе, биіктік $\sqrt{ab}$ -ға тең болуын көрсеткен едік *(1-сурет)*.

Демек берілген екі кесіндіге орта пропорционал кесінді салу үшін:

1) гипотенуза ұзындығы a+b-ға тең *(2-сурет);*

2) тік бұрышынан жүргізілген биіктігі сол гипотенузаны a және b бөліктерге бөлетін тік бұрышты үшбұрыш жасау жеткілікті.

Бұл үшін тік бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі гипотенузаның ортасында орналасқанынан пайдаланамыз *(3-сурет)*.

Сызу:

1) Түзу сызық сызып, онда $AB=a$ және $BC=b$ болатын етіп A, B және C нүктелерін белгілейміз *(3-сурет)*.

2) AC кесіндінің ортасы O нүктесін табалық. Центрі O нүктедегі AC диаметрлі жарты шеңбер сызамыз *(3-сурет)*.

3) B нүктеден AC түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызық жүргіземіз *(4-сурет)*. Бұл түзу сызық жарты шеңберді D нүктесінде кесіп өткен дейік. Онда ΔADC — тік бұрышты үшбұрыш, $BD=\sqrt{ab}$ — біз сызуымыз қажет болған кесінді болады.

Сызу орындалды.

Орта пропорционал кесіндіні сызуда тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенуза мен сол катеттің гипотенузасындағы проекциясының арасында орта пропорционал екендігін пайдалануға болады *(5-сурет)*.

? *Есептер мен тапсырмалар*

51.1. Ұзындықтары a және b болған кесінділер берілген. Ұзындығы $\sqrt{ab}$ болған кесіндіні сыз.

51.2. Ұзындығы a және b-ға тең кесінділер берілген. Пифагор теоремасын пайдаланып, ұзындығы а) $\sqrt{a^2+b^2}$; ә) $\sqrt{a^2-b^2}$ болған кесінділерді сыз.

51.3. Ұзындығы 1-ге тең кесінді берілген. Ұзындығы а) $\sqrt{2}$; ә) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{6}$; г) $\sqrt{18}$; ғ) $\sqrt{30}$ болған кесінділерді сыз.

51.4. 6-суреттегі мәліметтер негізінде ABC үшбұрышының ауданын тап.

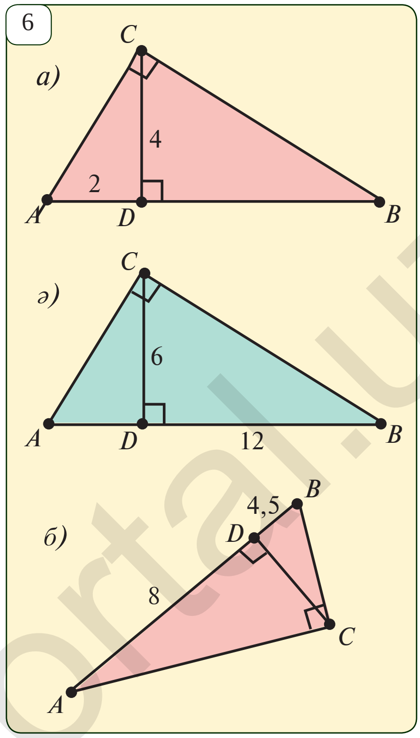
51.5. Шеңбердегі C нүктеден AB диаметрге CD перпендикуляр жүргізілген. $CD=12$ *см*, $AD = 24$ *см* болса, дөңгелек ауданын тап.

51.6. Алдыңғы есептегі ABC үшбұрышының ауданын тап.

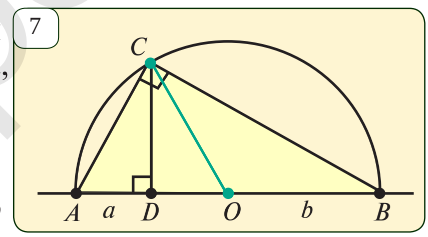
51.7. Тік бұрышты үшбұрыш тік бұрышы биссектрисасының гипотенузасы 5:3 қатынаста болады. Тік бұрыштың төбесінен жүргізілген биіктіктің гипотенузадан бөлінген кесінділерінің қатынасын тап.

51.8. Радиусы 8 *см*-ге тең дөңгелекке бір бұрышы 30°-ты тік бұрышты үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелектің үшбұрыштан сыртқағы бөлігі 3 сегменттен құралған. Сол сегменттердің аудандарын тап.

51.9*. 7-суретте $AD=a$, $DB=b$, демек, $OC=\frac{a+b}{2}$ $=$ (O— шеңбер центрі). Суретті пайдаланып, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ теңсіздігін дәлелде.



6

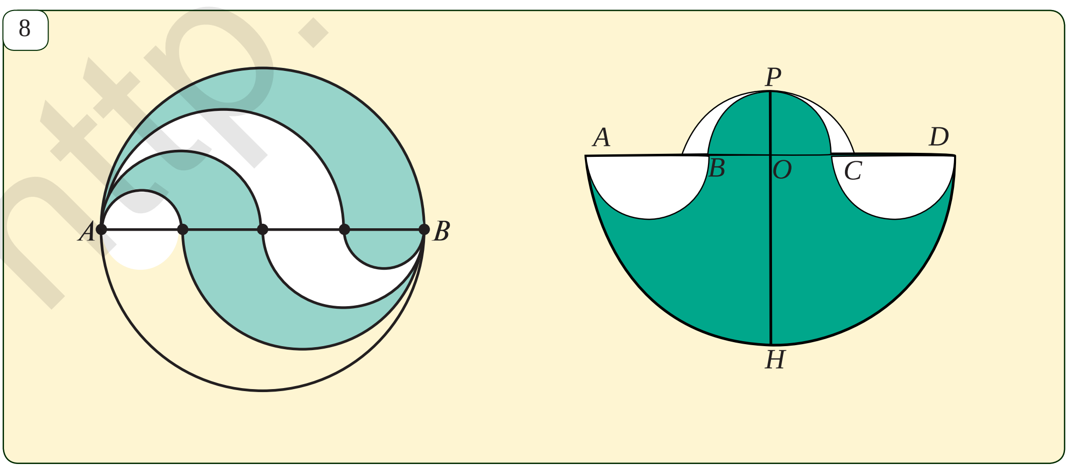


7

Қызық есеп

1. Шеңбердің AB диаметрі төрт тең бөлікке бөлінді және 8-суретте кескінделгеніндей жарты шеңберлер сызылды. Егер $AB=d$ болса, суретте бояп көрсетілген әрбір өрнектің ауданын есепте.

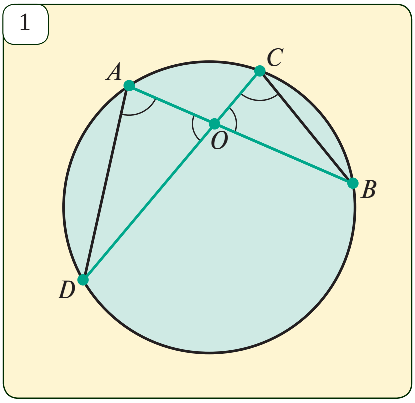
2. 9-суреттегі AB және CD кесінділер тең. O нүкте AD кесіндінің ортасы. AB, CD, AD және BC кесінділер жарты дөңгелектердің диаметрі. Бұл жарты дөңгелектер мен шектелген фигура ауданы диаметрі PH-қа тең дөңгелек ауданына тең екенін дәлелде. PH кесінді AD кесіндінің ортасы O нүктеге өткізілген перпендикуляр.



8

ШЕҢБЕРДЕГІ ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСІНДІЛЕР

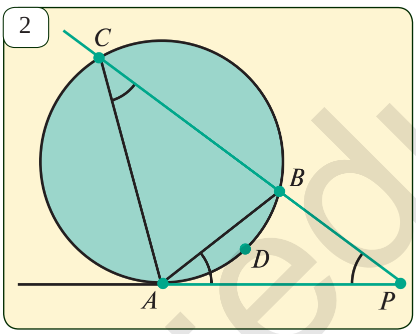
1-теорема. ***Шеңбердің AB және CD хордалары O нүктеде қиылысса, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ теңдік орынды болады.***



Дәлелдеу. AB және CD хордалары *(1-сурет)* көрсетілген тәртіпте орналасқан болсын. Төбелерін AD және BC хордаларымен ұштастырамыз. Сонда BAD және BCD бұрыштары бір доғаға тіреледі, демек, $\angle BAD = \angle BCD$. Және белгілі болғаны, $\angle AOD = \angle BOC$. Бұл екі теңдіктен ББ белгісі бойынша AOD және COB үшбұрыштардың ұқсастығы пайда болады. Ұқсас үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары пропорционал: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$ яки $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Теорема дәлелденді.

2-теорема. ***Шеңбердің сыртқы саласындағы P нүктеден шеңберге PA жанама (A – жанасу нүктесі) және шеңберді B және C нүктелерде қиып өтетін түзу сызық жүргізілген болса, $PA^2 = PB \cdot PC$ болады.***



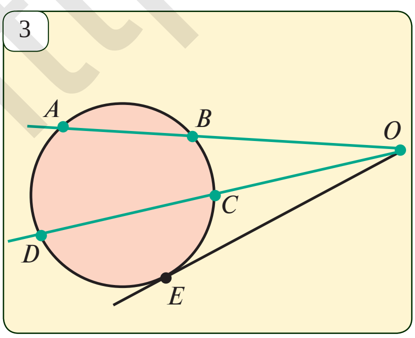
Дәлелдеу. ABP және CPA үшбұрыштарды қарастырамыз *(2-сурет)*. Онда,

$\angle C = \frac{ADB}{2} = \angle BAP$ және $\angle P$ — бұл үшбұрыштар үшін ортақ бұрыш. Демек, ABP және CPA үшбұрыштар екі бұрышы бойынша ұқсас.

Бұдан, $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$ яки $PA^2 = PB \cdot PC$.

Теорема дәлелденді.

Есеп. A, B, C және D нүктелер шеңберді AB, BC, CD және AD доғаларға бөледі. Егер AB және DC сәулелер O нүктеде қиылысса, онда $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ теңдік орынды болуын дәлелде.



Шешуі. Есеп шартына сәйкес сызба сызамыз *(3-сурет)* және O нүктеден OE жанама өткіземіз. Онда, 2-теорема бойынша,

$$\left.\begin{aligned} OB \cdot OA = OE^2 \\ OC \cdot OD = OE^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Есептер мен тапсырмалар

52.1. 4-суретте x-пен белгіленген белгісіз кесіндіні тап.

52.2. A нүктеден шеңберге AB жанама (B — жанасу нүктесі) және шеңберді C және D нүктелерінде кесетін кесуші өткізілген
а) $AB=4$ *см*, $AC=2$ *см* болса, AD кесіндіні;
ә) $AB=5$ *см*, $AD=10$ *см* болса, AC кесіндіні;
б) $AC=3$ *см*, $AD=2{,}7$ *см* болса, AB кесіндіні тап.

52.3. Шеңберге $ABCD$ төртбұрыш іштей сызылған. AB мен CD сәулелер O нүктесінде қиылысады. Егер а) $AO=10$ *дм*, $BO=6$ *дм*, $DO=15$ *дм* болса, OC кесіндіні
ә) $CD=10$ *дм*, $OD=8$ *дм*, $AB=2$ *дм* болса, OB кесіндісін тап.

52.4. Шеңбердің AB диаметрі және бұл диаметрге перпендикуляр CD хордасы E нүктесінде қиылысады. Егер $AE=2$ *см*, $EB=8$ *см* болса, CD хордасын тап.

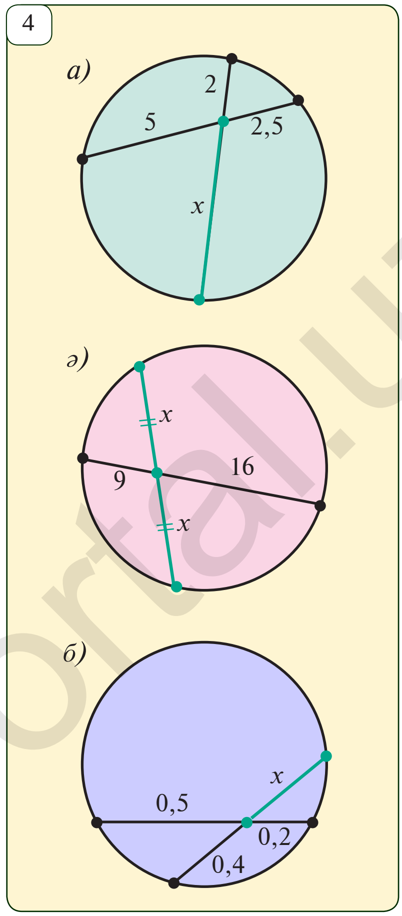
52.5. AB және CD кесінділер O нүктесінде қиылысады. Егер $AO\cdot OB=BO\cdot OD$ болса, A, B, C және D нүктелердің бір дөңгелекте жатуын дәлелде.

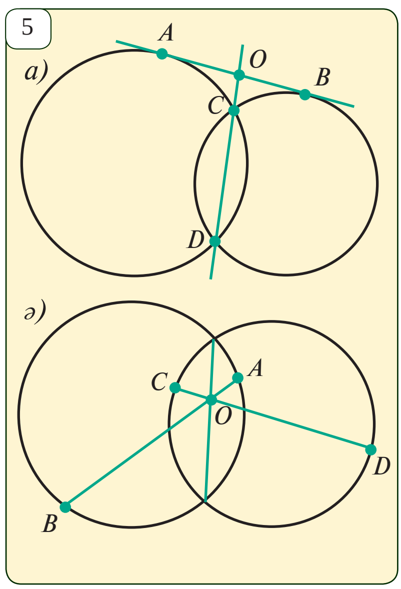
52.6. Радиусы 13 *дм* болған шеңбер центрінен 5 *дм* қашықтықта P нүктесі алынған. P нүктесінен ұзындығы 25 *дм* болған AB хордасы жүргізілген. AP және PB кесінділерін тап.

52.7. 3-суретте $AO\cdot OB=CO\cdot OD$ теңдікті AOD және BOC үшбұрыштардың ұқсас екендігінен пайдаланып дәлелде.

52.8*. 5-суреттердегі мәліметтер негізінде $AO\cdot OB=CO\cdot OD$ теңдікті дәлелде.

52.9*. Екі шеңбер C нүктеде жанасады. AB түзу сызық бірінші шеңберге A нүктеде, ал екіншісі шеңберге B нүктеде жанасады. $\angle ACB=90^\circ$ екендігін дәлелде.

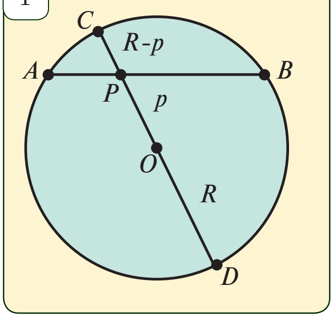




ІС ЖҮЗІНДІК ЖАТТЫҒУ МЕН ҚОЛДАНУ

Өткен сабақта шеңбер қиылысушылары мен хордаларының қасиеттерін дәлелдеген едік. Енді сол қасиеттердің кейбір ерекшеліктерімен танысамыз.

1



1-есеп. R радиусты шеңбердің ішкі саласындағы P нүктесі шеңбердің центрінен p қашықтықта орналасқан болсын дейік. Онда P нүктесінен өтетін кез келген АВ хордаға

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \qquad (1)$$

теңдік орынды болуын дәлелде.

Шешуі. P нүктесімен шеңбердің CD диаметрін жүргіземіз. Онда, $PC = R - p$, $PD = R + p$ *(1-сурет)*. Кесіп өтуші хорда теоремасы бойынша,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2.$$

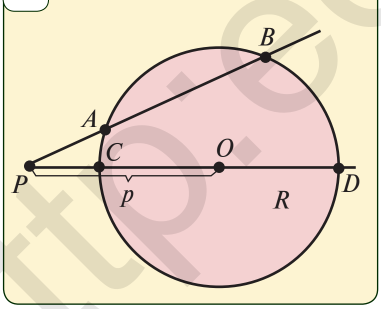
(1) теңдік орынды болады.

2-есеп. Радиусы 6 *см* болған шеңбердің O центрінен 4 *см* қашықтықта P нүктесі алынған. P нүктесі арқылы AB хорда жүргізілген. Егер AP=2 *см* болса, PB кесіндісін тап.

Шешуі. Есептің шарты бойынша R=6 *см*, d=4 *см*, AP=2 *см*. Ендеше (1) теңдік бойынша $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Бұдан, $PB = 10$ *см*.

Жауабы: $PB = 10$ *см*.

2



3-есеп. R радиусты шеңбердің сыртқы саласындағы P нүкте оның центрінен p қашықтықта орналасқан дейік. Онда P нүктесі арқылы өтетін және шеңберді A және B нүктелерде кесіп өтетін кез келген түзу сызыққа

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \qquad (2)$$

теңдік орынды болауын дәлелде?

Шешуі. Шеңбердің O центрі арқылы өтетін PO түзу сызық шеңбермен C және D нүктелерде қиылыссын *(2-сурет)*. Онда шарт бойынша, $PC = p - R, PD = p + R$. Шеңбердің сыртқы саласындағы нүктеден жүргізілген қиылысушылар туралы теорема бойынша,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Сонымен (2) теңдік дәлелденді.

4-есеп. Радиусы 7 *см* шеңбердің центрінен 13 *см* қашықтықтағы P нүктеден өтетін түзу сызық шеңберді A және B нүктелерде кесіп өтеді. Егер $PA=10$ *см* болса, AB хордасын тап.

Шешуі. Шарт бойынша $R = 7$ *см*, $d = 13$ *см*. Онда (2) формула бойынша,

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 = 13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120.$$

Бұдан, $PB = \dfrac{120}{PA} = \dfrac{120}{10} = 12$ (*см*). Демек,

$AB = PB - PA = 12 - 10 = 2$ (*см*). *Жауабы:* 2 *см*.

Есептер мен тапсырмалар

53.1. Радиусы 5 *см* болған шеңбер центрінен 3 *см* қашықтықта P нүктесі алынған. AB хордасы P нүктесі арқылы өтеді. Егер $PA=2$ *см* болса, AB хордасының ұзындығын тап.

53.2. Радиусы 5 *м* болған шеңбердің центрінен 7 *м* қашықтықта P нүктесі алынған. P нүктесі арқылы өтетін түзу сызық шеңберді A және B нүктеде кесіп өтеді. Егер $PA=4$ *м* болса, AB хордасының ұзындығын тап.

53.3. 3-суреттегі мәліметтер негізінде x-пен белгіленген кесіндіні тап (O — шеңбер центрі).

53.4. 4-суретті пайдаланып есепті шеш. Онда

а) $PC=5$ *дм*, $OD=7$ *дм*, $AB=2$ *дм*, $PA=$?

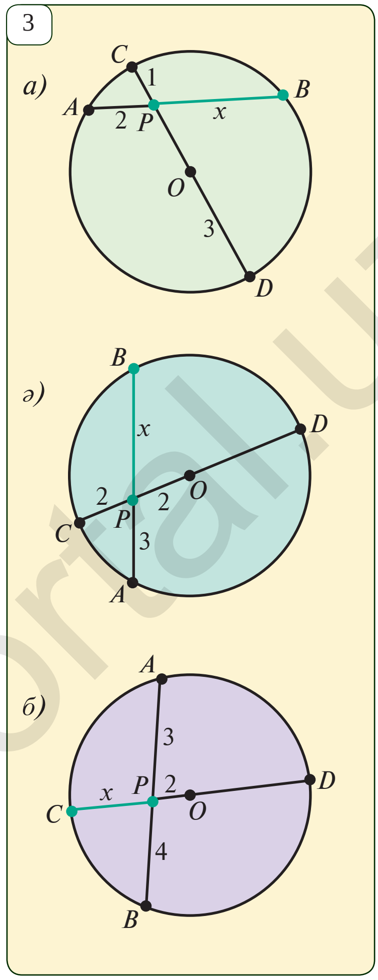
ә) $PA=5$ *дм*, $AB=4$ *дм*, $PC=3$ *дм*, $OD=$?

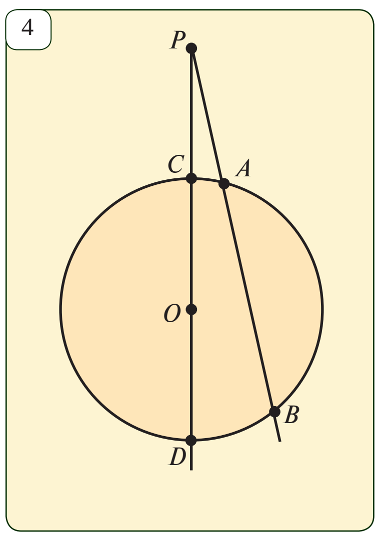
53.5. Шеңбердің $AB=7$ *см* және $CD=5$ *см* хордалары P нүктесінде қиылысады. Егер $CP:PD=2:3$ болса, P нүктесі AB хорданы қандай қатынаста бөледі?

53.6. Шеңбердің C нүктесінен AB диаметріне CD перпендикуляры жүргізілген. Егер $AD=2$ *см*, $DB=18$ *см* болса, CD кесіндісін тап.

53.7*. Шеңберге іштей сызылған $ABCD$ төртбұрышының диагональдары K нүктесінде қиылысады. Егер $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ және $CK:KA=1:2$ болса, AD кесіндісін тап.

53.8*. Шеңберге іштей сызылған $ABCD$ төртбұрышында $AB:DC=1:2$ және $BD:AC=2:3$ болса, $DA:BC$ қатынасын тап.





БІЛІМІНДІ СЫНАП КӨР

I. Тест

1. **Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген биіктігі туралы бұрыс дәлелдеуді көрсет.**
   А. Катеттерінен кіші;
   Ә. Үшбұрышты екі ұқсас үшбұрыштарға бөледі;
   Б. Катеттердің гипотенузадағы проекциялары арасында орта пропорционал;
   В. Гипотенузаның жартысына тең.
2. **AB және CD хордалар O нүктесінде қиылысады. Бұрыс дәлелді тап.**
   А. $\angle DAB=\angle DCB$; Ә. ΔAOD мен ΔCOB үшбұрыштар ұқсас;
   Б. $AO\cdot OB=CO\cdot OD$; В. $AO=CO$.
3. **Дұрыс дәлелді тап.**
   А. Тең кесінділердің проекциялары да тең;
   Ә. Үлкен кесіндінің проекциясы да үлкен;
   Б. Бір түзу сызықтағы тең кесінділердің проекциялары тең;
   В. Проекция ұзындығы проекцияланушы кесінді ұзындығына тең.
4. **Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген биіктігі оны екі үшбұрышқа бөледі. Бұл үшбұрыштар:**
   А. тең; Ә. тендес; Б. ұқсас; В. тең бүйірлі.
5. **Ұзындығы a және b болған кесінділердің орта пропорционалы неге тең?**
   А. $a+b$; Ә. $\sqrt{ab}$; Б. $\frac{a+b}{2}$; В. $a:b$.
6. **$ABCD$ төртбұрышы O центрлік шеңберге іштей сызылған. Бұрыс дәлелді көрсет.**
   А. $\Delta AOB\sim\Delta COD$; Ә. $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$;
   Б. $AO\cdot OB=CO\cdot OD$; В. $AB\cdot CD=BC\cdot AD$.

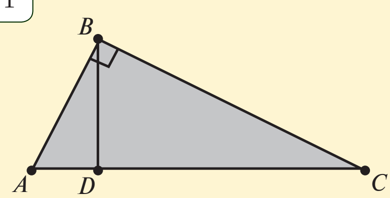
II. Есептер.

1. Тік бұрышты үшбұрыш катеттерінің қатынасы 3:4-ге тең, гипотенузасы 50 *см*. Үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен түсірілген биіктігі гипотенузадан қандай қашықтықтағы кесінділер бөледі?
2. Шеңбердің AB және CD хордалары E нүктесінде қиылысады. Егер $AE=$ $=5$ *см*, $BE=2$ *см* және $EC=2,5$ *см* болса, ED-ны тап.
3. Радиусы 6 *м* болған шеңбердің центрінен 10 *м* қашықтықта K нүктесі алынды және K нүктеден шеңберге жанама өткізілді. Жанаманың жанасу нүктесі P нүктесі мен K нүктесі арасындағы қашықтықты тап.
4. ABC үшбұрышта $\angle C=90°$ және CD биіктігі 4,8 *дм*. Егер $AD=3,6$ *дм* болса, AB қабырғасын тап.
5. Шеңбердің AB және CD хордалары O нүктесінде қиылысады. Егер $AO=6$, $OB=4$ және $CO=3$ болса, OD кесіндіні тап.

6. Шеңберде A,B,C,D нүктелер белгіленген. BA және CD сәулелер O нүктеде қиылысады. Егер $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$ болса, DC хордасын тап.
7. Шеңберге B нүктесінде жанасатын түзу сызықтың үстінде A нүктесі алынды. Егер $AB=12$ және A нүктесінен шеңберге дейін болған ең қысқа қашықтық 8 болса, шеңбер радиусын тап.
8. Жарты шеңбердегі C нүктесінен AB диаметрге жүргізілген CD перпендикуляр AB кесіндісінде 4 және 9-ға тең кесінділер бөледі. CD кесіндіні тап.
9. Тік бұрышты үшбұрыштың биіктігі гипотенузаны 3 *дм* және 12 *дм*-ға тең кесінділерге бөледі. Үшбұрыш ауданын тап.
10. Радиусы 5 *см* болған O центрлік шеңбердің AB хордасында D нүктесі алынған. Егер $AD=2$ *см*, $DB=4{,}5$ *см* болса, OD кесіндісін тап.
11. Радиусы 5 *м* болған O центрлік шеңберді A және B нүктелерінде қиюшы түзу сызықта P нүктесі алынды. Егер $PA=5$ *м*, $AB=2{,}8$ *м* болса, OP қашықтығын тап.
12. Төрт параллель түзу сызық берілген. Бұрыш қабырғаларын A және A_1, B және B_1, C және C_1, D және D_1 нүктелерінде қияды. Егер $AB=8$, $CD=12$ және $C_1D_1=9$ болса, A_1B_1 кесіндіні тап.
13. Шеңбер бұрышқа іштей сызылған. Егер бұрыш төбесінен шеңберге дейінгі болған қашықтық радиусқа тең болса, бұрыш үлкендігін тап.
14. Шеңберге AB диаметрінің B төбесінен BC жанама және AC кесіп өтуші сызық жүргізілген. AC шеңбермен D нүктесінде қиылысады. Егер $AD=DC$ болса, CBD бұрышын тап.
15. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттерінің қатынасы 2:3 сияқты. Үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген биіктігі оны екі үшбұрышқа бөледі. Олардың аудандарының қатынасын тап.

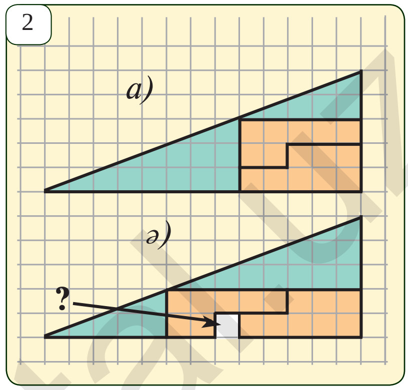
III. Өзіңді сынап көр (бақылау жұмысының үлгісі)

1. Шеңбер сыртындағы нүктеден жанама жүргізілген. Бұл нүктеден шеңберге дейінгі ең қысқа қашықтық 2 *см*-ге, ал жанама нүктесіне шейінгі қашықтық 6 *см*-ге тең. Шеңбердің радиусын тап.
2. ΔABC тік бұрышты, $AD=9$ *дм*, $BD=16$ *дм* болса, сол үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын есепте (1-сурет).
3. Нүктеден түзу сызыққа екі көлбеу өткізілген. Егер көлбеулер 1:2 қатынаста болып, олардың проекциялары 1 *м* және 7 *м* болса, көлбеулердің ұзындықтарын тап.
4.* (*Қосымша*) PQ және одан ұзын ET кесінділер берілген. Мынадай $ABCD$ төртбұрышын сыз, онда $AB=BC=PQ$; $BD=ET$, ал диагональдары қиылысатын O нүкте үшін $AO\cdot OC=BO\cdot OD$ теңдік орынды болсын.

1


Қызық есеп

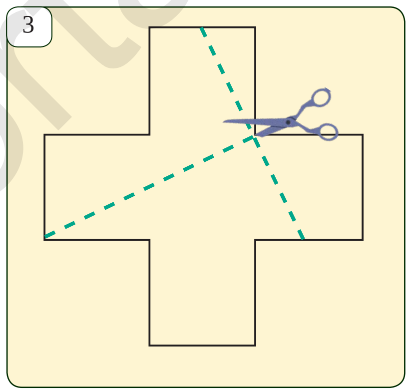
Үшбұрыш 2.а-суретте сызылғанындай етіп төрт бөлікке бөлінген және 2.ә-суретте сызылғанындай етіп қайта жиналған. Онда артықша квадрат қайдан пайда болып қалды?

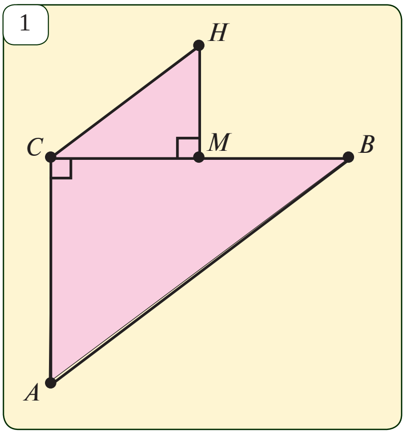


Грекше крест

Бұл пішін біздің эрамыздан 500 жыл бұрын белгілі болып, ол нан бетіне өмір рәмізі ретінде кескінделген (3-сурет).

Осы пішінді қалың қағаз бетіне салыңдар да суреттегідей етіп бөліктерге бөліп қырқыңдар. Алынған бөліктерден квадрат құрастыруға көз жеткізіңдер.





I. Бақылау жұмысының үлгісі

1. $ABCD$ параллелограмда $\angle A = 45°$, $AD = 4$. Параллелограмның AB қабырғасының бойына $\angle PDA = 90°$-қа тең болатын BP кесіндісі қойылды. BC және PD кесінділер T нүктеде қиылысады. Мұнда $PT : TD = 3 : 1$.

а) $\Delta BPT \backsim \Delta CDT$ екендігін дәлелде, бұл үшбұрыштар аудандарының қатынасын тап.

ә) $ABCD$ параллелограмның ауданын тап.

б) AB және TD кесінділерінің орталарын ұштастырушы кесіндінің ұзындығын тап.

в) $\overline{AB}$ векторды $\overline{CA}$ және $\overline{TB}$ векторлар арқылы өрнекте. г) CAD бұрыштың синусын тап.

2. *(Қосымша)* 1-суретте $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0{,}5\ AC$ болса, $AB \| CH$ екендігін дәлелде.

II. Бақылау жұмыс үшін тест үлгілері

1. Егер тік бұрышты үшбұрыштың биіктігі гипотенузасын 6 *см* және 54 *см* кесінділерге бөлсе, бұл үшбұрыштың ауданын тап.

А) 648 *см*^{2}; Ә) 324 *см*^{2}; Б) 1080 *см*^{2}; В) 540 *см*^{2}.

2. C нүктесінен жүргізілген бір кесуші шеңберді A және B, ал екіншісі D және E нүктелерде кеседі. Егер CD=18 *см*, CB=8 *см*, CD=8 см болса, DE кесіндісінің ұзындығын тап.

А) 17 *см*; Ә) 1 *см*; Б) 9 *см*; В) дұрыс жауабы жоқ.

3. Егер $A(-5;2\sqrt{3}), B(-4;2), C(-2;\sqrt{3}), D(0;2)$ болса, $ABCD$ төртбұрыштың диагональдары арасындағы бұрышты тап.

А) 30°; Ә) 60°; Б) 90°; В) дұрыс жауабы жоқ.

4. Егер параллелограмның диагональдары 10 *см* және $8\sqrt{2}$ *см*-ге тең және олардың арасындағы бұрыш 45° болса, параллелограмның қабырғаларын тап.

А) $\sqrt{17}$ *см* және $\sqrt{97}$ *см*; Ә) 5 *см* және 6 *см*;
Б) $\sqrt{34}$ *см* және $\sqrt{63}$ *см*; В) дұрыс жауабы жоқ.

5. Радиусы 8 *см* болған шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың ауданын тап.

А) $48\sqrt{3}$ *см*^{2}; Ә) $192\sqrt{3}$ *см*^{2}; Б) $96\sqrt{2}$; В) дұрыс жауабы жоқ.

6. Центрлік бұрышы 140° ауданы $31{,}5\pi$ *см*^{2} болған дөңгелек сектордың радиусын анықта.

А) 9 *см*; Ә) 18 *см*; Б) 9π *см*; В) дұрыс жауабы жоқ.

7. Табанының ұзындығы 15 *см* болған үшбұрыш табанына параллель кесінді жүргізілген. Егер пайда болған трапецияның ауданы үшбұрыш ауданының $\frac{3}{4}$ бөлігін құрауы белгілі болса, кесіндінің ұзындығын тап.
А) 6,5; Ә) 7; Б) 7,5 В) 5.

8. Бүйір қабырғасы $2\sqrt{39}$ *см* болған тең бүйірлі үшбұрыштың биіктігінің табанына қатынасы 3:4-ке тең болса, үшбұрыштың ауданын тап.
А) 260; Ә) 245; Б) 310; В) 72.

9. $\bar{a}(4;4\sqrt{3})$ және $\bar{b}(8\sqrt{3};8)$ векторлар арасындағы бұрышты тап.
А) 45°; Ә) 90°; Б) 30°; В) 60°.

10. Тең бүйірлі трапецияның табандары 10 *см* және 16 *см*, ал бүйір қабырғасы 5 *см*. Трапецияның ауданын тап.
А) 45; Ә) 50; Б) 48; В) 52.

11. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 13 *см*, катеттерінің бірі екіншісінен 7 *см* үлкен. Үшбұрыштың ауданын тап.
А) 30 $см^2$; Ә) 25 $см^2$; Б) 45 $см^2$; В) 40 $см^2$.

12. Қабырғасы 5 *см* болған ромбының бір диагоналы 6 *см*-ге тең. Ромбының ауданын тап.
А) 24 $см^2$; Ә) 30 $см^2$; Б) 29 $см^2$; В) 40 $см^2$.

13. Диагоналы $6\sqrt{2}$ болған квадратқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығын тап.
А) 10π; Ә) 8π; Б) 9π; В) 6π.

14. Қабырғасы $6\sqrt{2}$ *см* болған квадратқа сырттай сызылған дөңгелектің ауданын тап.
А) 9π; Ә) 12π; Б) 15π; В) 18π.

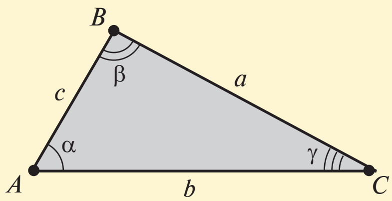
15. Биіктіктері 4 *см* және 6 *см* болған параллелограмның ауданы 36 $см^2$-қа тең. Оның периметрін тап.
А) 26 *см*; Ә) 30 *см*; Б) 29 *см*; В) 36 *см*.

16. Периметрі 30 *см* болған параллелограмның қабырғалары 2:3 қатынаста. Егер параллелограмның сүйір бұрышы 30° болса, оның ауданын тап.
А) 26 $см^2$; Ә) 27 $см^2$; Б) 29 $см^2$; В) 30 $см^2$.

17. Егер ABC үшбұрышында $AB=6\sqrt{3}$ *см*, $BC=12$ *см* және $\angle C=60°$ болса, үшбұрыштың A бұрышын тап.
А) 45°; Ә) 90°; Б) 30°; В) 60°.

ПЛАНИМЕТРИЯҒА БАЙЛАНЫСТЫ НЕГІЗГІ ТҮСІНІК ЖӘНЕ МӘЛІМЕТТЕР

1 **ҮШБҰРЫШТАР**



1°. Негізгі түсініктер

Жазықтықта бір түзу сызық бойында жатпаған үш нүкте берілген. Сол нүктелердің екеуін кесінділермен ұштастырамыз. Пайда болған фигура *үшбұрыш* деп аталады. Нүктелер *үшбұрыштың төбелері*, ал кесінділер *қабырғалары* деп аталады. Белгіленуі: *A, B, C* —төбелері, *a, b, c* — қабырғалары *(1-сурет)*.

Үшбұрыш ішкі үш бұрышқа ие: $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$. Белгіленуі: α , β, γ.

Медиана — үшбұрыштың төбесі мен қарама-қарсы қабырға ортасын ұштастырушы кесінді. Үшбұрышта үш медиана бар, олар m_a, m_b, m_c деп белгіленеді.

Биссектриса — үшбұрыш төбесін оның қарама-қарсысындағы қабырғамен ұштастыратын және сол төбедегі бұрыш биссектрисасында жататын кесінді. Үшбұрышта үш биссектриса болады,олар l_a, l_b, l_c деп белгіленеді.

Биіктік — үшбұрыш төбесінен оның қарсысындағы қабырға жатқан түзу сызыққа жүргізілген перпендикуляр. Үшбұрышта үш биіктік болады, олар h_a, h_b, h_c сияқты белгіленеді.

Орта сызық — екі қабырға орталарын ұштастырушы кесінді.

Орта сызықтардың саны да үшеу.

Периметр — үш қабырға ұзындықтарының қосындысы. Белгіленуі *P*.

Үшбұрыштар қабырғаларына қарай үш түрге бөлінеді:

а) тең қабырғалы ($a=b=c$); ә) тең бүйірлі (a,b,c-лардың кез келген екеуі тең); б) әр түрлі қабырғалы (a,b,c-лардың ешқандай екеуі тең емес).

Үшбұрыштың үш қабырғасына жанасып өтетін шеңбер оған *іштей сызылған шеңбер* деп аталады (мұндай шеңбер бар және ол жалғыз). Іштей сызылған шеңбер радиусы *r* арқылы белгіленеді.

Үшбұрыштың үш төбесінен өтетін шеңбер оған *сырттай сызылған шеңбер* деп аталады және оның радиусы *R* арқылы белгіленеді (мұндай шеңбер бар және ол жалғыз).

2°. Негізгі қатынастар

1) $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Үшбұрыш бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.

2) Үш медиана бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте медиананы 2:1 қатынаста бөледі. Медиана үшбұрышты ауданы тең екі үшбұрыштарға бөледі. Медианалардың ұзындығы $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ формулалармен табылады.

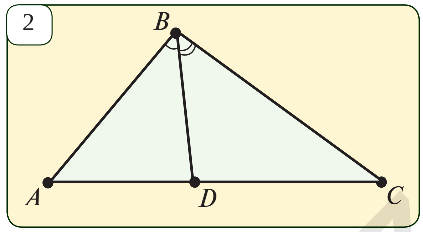
3) Үш биссектриса бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте іштей сызылған шеңбер центрі болады. Биссектриса өзі жүргізілген қабырғаны қалған қабырғаларға пропорционал бөліктерге бөледі *(2-сурет)*.

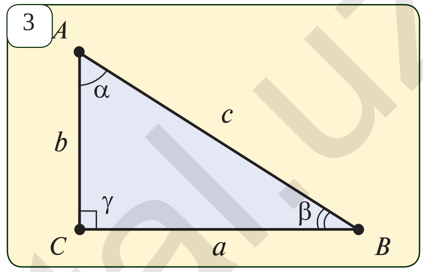
BD биссектриса болса, $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DC}$.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}; \quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}, \qquad p = (a+b+c)$$

Биссектрисаның ұзындығын осы формулалар бойынша табады.





4) Үшбұрыштың биіктіктері немесе олардың жалғастары бір нүктеде қиылысады. Биіктік ұзындықтары

$$h_a = \frac{2S}{a}; \qquad h_b = \frac{2S}{b}; \qquad h_c = \frac{2S}{c}$$

формулалардан табылады. Мұнда

S — үшбұрыштың ауданы.

5) Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярлары бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте үшбұрышқа *сырттай сызылған шеңбер центрі* болады.

6) Үшбұрыштың *орта сызығы* үшінші қабырғаға параллель және оның жартысына тең.

7) Синустар теоремасы: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

8) Косинустар теоремасы:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

9. Үшбұрыш ауданын есептеу формулалары:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

10. Герон формуласы:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}; \qquad S = \frac{abc}{4R}, \qquad S = pr.$$

3°. Маңызды дербес жағдайлар

а) *Тік бұрышты үшбұрыш (3-сурет).*

$\angle\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, AC және BC — катеттер, AB — гипотенуза. Пифагор теоремасы: $a^2 + b^2 = c^2$.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad R = \frac{c}{2}; \qquad r = \frac{a+b+c}{2};$$

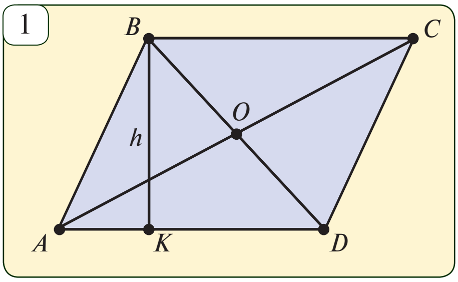
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \qquad \frac{a}{c} = \cos\beta; \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta; \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha.$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha; \qquad \frac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,\beta; \qquad \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha; \qquad \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta.$$

ә) *Тең қабырғалы үшбұрыш*

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ, \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

ТӨРТБҰРЫШТАР



1°. Параллелограмм

Қарама-қарсы қабырғалары параллель болған төртбұрыш *параллелограмм* деп аталады *(1-сурет)*.

Сыбайлас болмаған төбелерді ұштастырушы кесінді *диагональ* деп аталады.

AB және CD; AD және BC параллель қабырғалар; BD және AC диагональдар.

Негізгі қасиеттер мен қатынастар

1) Диагональдар қиылысу нүктесі параллелограмның симметрия центрі болады.

2) Қарама-қарсы қабырғалардың ұзындықтары өзара тең:

$$AB = CD \quad \text{және} \quad AD = BC.$$

3) Параллелограмның қарама-қарсы бұрыштары өзара тең:

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \text{және} \quad \angle ABC = \angle ADC.$$

4) Сыбайлас бұрыштардың қосындысы $180°$-қа тең.

5) Диагональдар қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді: $BO = OD$ және $AO = OC$

6) Қабырғалары квадраттарының қосындысы диагональдары квадраттарының қосындысына тең:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ немесе $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Параллелограмның ауданы: а) $S = ah_a$, мұнда $a = AD$ қабырға, $h_a = BK$ — биіктік; ә) $S = ab\sin\alpha$, мұнда $b = AB$ — қабырға, $\alpha = \angle BAD$ — AB және AD қабырғалар арасындағы бұрыш.

2°. Ромб

Барлық қабырғалары өзара тең болған параллелограмм *ромб* дейіледі.

Параллелограмға орынды болған барша қасиеттер ромб үшін де орынды.

Ромбының қосымша қасиеттері.

1) Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр.

2) Ромбының диагональдары ішкі бұрыштар биссектрисалары болады.

3) Ромбының ауданы $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, мұнда d_1, d_2 — ромб диагональдары.

3°. Тік төртбұрыш

Барлық бұрыштары $90°$-қа тең болған параллелограмм *тік төртбұрыш* деп аталады. 1) Тік төртбұрыш диагональдары өзара тең. 2) Тік төртбұрыш ауданы $S = ab$, мұнда a және d тік төртбұрыштың іргелес қабырғалары.

4°. Квадрат

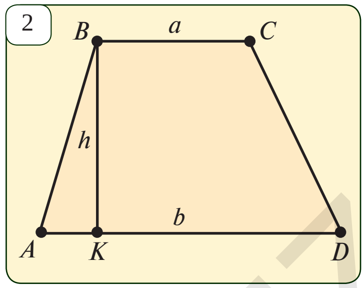
Барлық қабырғалары өзара тең болған төртбұрыш *квадрат* деп аталады.

Ромб пен тік төртбұрышқа тән болған барлық қасиеттер квадратқа да тән болады.

Егер a — квадрат қабырғасы, d диагоналы болса: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Трапеция

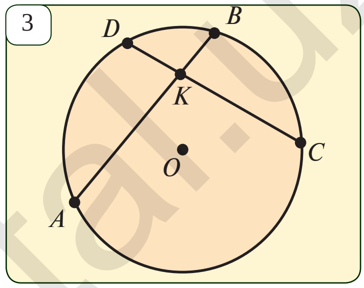
Табандары деп аталатын екі қабырғасы өзара параллель және бүйір қабырғалары деп аталатын қалған екі қабырғасы параллель болмаған төртбұрыш *трапеция* деп аталады. Бүйір қабырғаларының орталарын ұштастырушы кесінді трапецияның *орта сызығы* дейіледі.



Негізгі қасиеттер

1) Трапеция орта сызығы табанына параллель және олардың жартылай қосындысына тең.

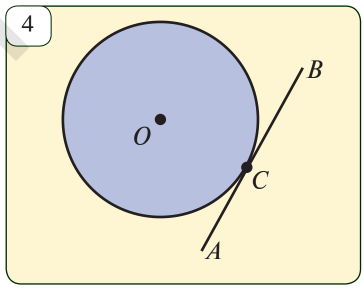
2) Трапеция ауданы $S=\frac{a+b}{2}h$, мұнда a және b – табан, h биіктік (*2-сурет*).



ШЕҢБЕР, ДӨҢГЕЛЕК

1°. Оң сан R және жазықтықта O нүктесі берілген болсын. O нүктеден R қашықтықта орналасқан нүктелерден құралған фигура *шеңбер* деп аталады. O нүктесі *шеңбердің центрі*, центр мен шеңбердегі нүктені ұштастырушы кесінді *радиусы*, R саны радиус ұзындығы дейіледі. Шеңбердегі екі нүктені қосатын кесінді *хорда*, центрінен өтетін хорда *диаметр* деп аталады.

Жазықтықтың шеңбермен шектелген бөлігі — *дөңгелек* деп аталады.



Негізгі қатынастар

1) $D=2R$, мұнда D — диаметр ұзындығы.

2) $l=2\pi R$ — шеңбер ұзындығы. 3) $S=\pi R^2$ — дөңгелек ауданы.

4) AB және CD хордалары K нүктесінде қиылысса, (*3-сурет*) $AK\cdot KB=CK\cdot KD$ қатынас орындалады.

5) Хорданы тең екіге бөлетін диаметр осы хордаға перпендикуляр.

6) Тең хордалар центрден тең қашықтықта орналасқан және керісінше центрден тең қашықтықта орналасқан хордалар өзара тең.

2°. Жанама

Шеңбермен (немесе дөңгелекпен) жалғыз ортақ нүктеге ие түзу сызық *жанама* деп аталады. Ал нүкте *жанама нүктесі* деп аталады (4-сурет).

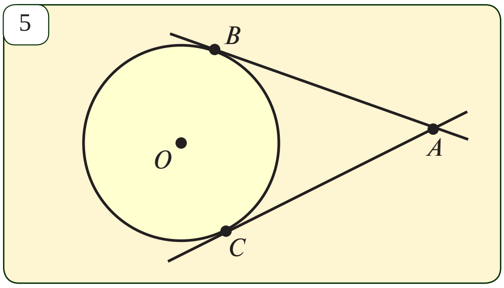
Шеңбермен 2 ортақ нүктеге ие түзу сызық *қиюшы* деп аталады.

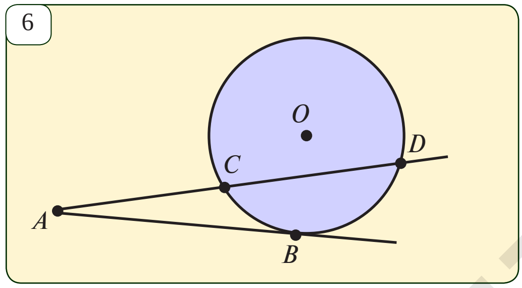
Жанаманың қасиеттері

1) Жанама нүктесіне өткізілген радиус жанамаға перпендикуляр.

2) Дөңгелектің сыртындағы нүктеден осы дөңгелекке екі жанама өткізуге болады. Бұл жанамалардың кесінділері өзара тең (*5-сурет*): $AB=AC$.

3) Егер AC қиылысушы болып, шеңберді C және D нүктелерінде қиып өтсе, AB жанама болса, $AB^2=AD\cdot AC$ теңдік орынды (*6-сурет*).





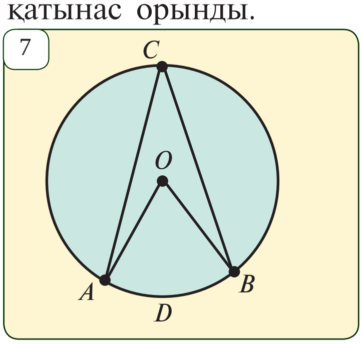
3°. Центрлік және іштей сызылған бұрыштар

Шеңбердегі екі нүкте арқылы шеңбер екіге бөлінеді. Бұл бөліктер *доғалар* деп аталады. Белгіленуі ADB; ACB.

AOB бұрышы ADB доғаға тірелген *центрлік бұрыш* (*7-сурет*) ACB бұрышы ADB доғасына *тірелген* және шеңберге *іштей сызылған бұрыш* дейіледі. Бұл бұрыштар арасында

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

қатынас орынды.



Атап айтқанда, жарты шеңберге тірелген ішкі бұрыш тік бұрыш болады *(8-сурет)*. Бір доғаға тірелген шеңберге іштей сызылған бұрыштар өзара тең болады.

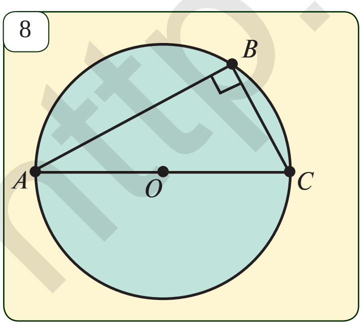
4°. Сектор және сегмент

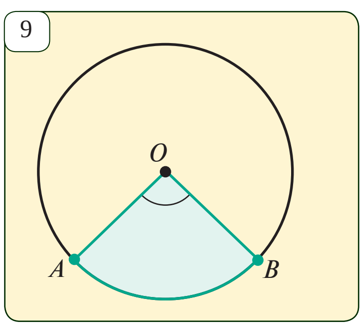
Дөңгелектің екі радиуспен шектелген бөлігі *сектор* делінеді (*9-сурет*). Сектор доғасы ұзындығы:

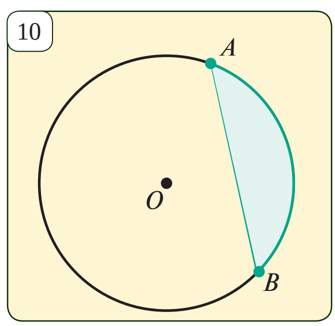
$l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, мұнда α — центрлік бұрыштың градустық өлшемі.

Сектор ауданы: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2} Rl$.

Сегмент — дөңгелектің хордасы және сол хорда тірелген доғамен шектелген болады (*10-сурет*).







Сегмент ауданы: $S = S_{сектор} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$

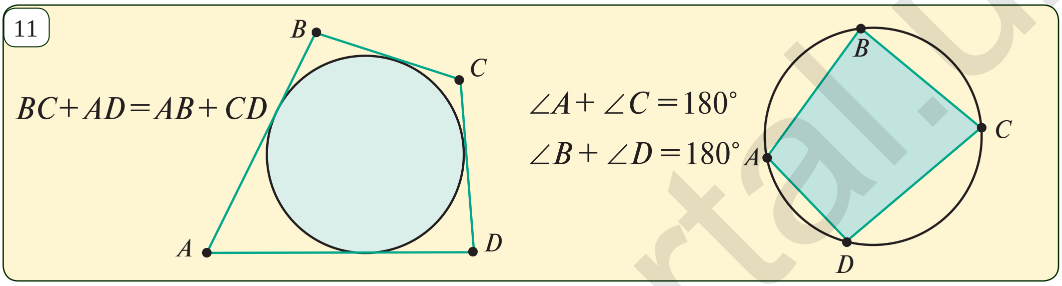
ДҰРЫС КӨПБҰРЫШТАР

Дұрыс n бұрыштың қабырғасы a_n, периметрі P_n, ауданы S_n, іштей сызылған шеңбер радиусы r_n, сырттай сызылған шеңбердің радиусы R_n, ішкі бұрышы α_n болса,

$$P_n = na_n, \qquad S_n = \frac{1}{2}P_n r_n = \frac{1}{2}na_n r_n, \qquad \alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r_n = \frac{a_n}{2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Шеңберге сырттай және іштей сызылған төртбұрыштар (11-*сурет*).



10-нан 99-ға дейінгі натурал сандар квадраттарының кестесі

ондық / бірлік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Кейбір шама белгілерінің кестесі

$\pi \cong 3{,}1416$	$\sqrt{8} \cong 2{,}8284$
$\sqrt{2} \cong 1{,}4142$	$\sqrt{10} \cong 3{,}1623$
$\sqrt{3} \cong 1{,}7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}7071$
$\sqrt{5} \cong 2{,}2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}5774$
$\sqrt{6} \cong 2{,}4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cong 0{,}3183$
$\sqrt{7} \cong 2{,}6457$	

Тригонометриялық функциялардың мәндерінің кестесі

α°	sinα	cosα	tgα	ctgα	α°	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	**46**	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	**47**	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	**48**	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	**49**	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	**50**	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	**51**	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	**52**	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	**53**	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	**54**	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	**55**	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	**56**	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	**57**	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	**58**	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	**59**	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	**60**	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	**61**	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	**62**	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	**63**	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0326	0,946	0,344	2,904	**64**	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	**65**	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	**66**	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	**67**	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	**68**	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	**69**	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	**70**	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	**71**	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	**72**	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	**73**	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	**74**	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	**75**	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	**76**	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	**77**	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	**78**	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	**79**	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	**80**	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	**81**	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	**82**	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	**83**	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**84**	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**85**	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**86**	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**87**	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**88**	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**89**	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**90**	1,000	0,0000	-	0,0000

ЖАУАПТАР ЖӘНЕ НҰСҚАУЛАР

1-тақырып. 5. 50°; 130°; 133°; 97°. **6.** 65°; 70°; 45°. **7.** 105°; 130°; 125°. **8.** 35°; 35°; 110°. **9.** 94°; 56°; 30°. **10.** 110°; 130°; 120°. **11.** *Нұсқау:* Төрт үшбұрыштың әрқайсысының қабырғалары бастапқы үшбұрыштың сәйкес қабырғаларының жартысына тең. **12.** *Нұсқау:* DF кесінді ABH үшбұрыштың да, CEB үшбұрыштың да орта сызығы болады. **13.** *Нұсқау:* ANC және CKA үшбұрыштардың және ішкі ауысу бұрыштардың теңдігін пайдалан.

2-тақырып. 2. а) $\sqrt{34}$ яки ≈ 5,8 *см*; ә)14 $\sqrt{2}$ *м*; б) ≈ 21,5 *см;* в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *см;* г) $\sqrt{2}$ *см;* ғ) $\sqrt{13}$ *см.* **4.** а) $\sqrt{21}$ *см,* $\sqrt{5}$ *см;* ә) $\sqrt{21}$ *см,* $\sqrt{22}$ *см;* б) $\sqrt{2}$ *см,* $\sqrt{3}$ *см.* **5.** 12 *см.* **6.** а) $\sqrt{10}$ *см;* ә) $2\sqrt{5}$ *см*; б) $\sqrt{33}$ *м.* **8.** ә), г) мен ғ) **9.** барлығы. **10.** 225. **11.** 5 *см.* **12.** $\sqrt{27}$ *м.* **14.** ә) ≈ 4,3 *м;* б). ≈ 2,23. **15.** а) 8,62 *м*; ә) ≈ 5,97 *м.* **16.** ≈ 1,84 *м*^{2}. **17.** ≈ 105,6 *м.* **18.** ≈ 102,5 *км.* **19.** ≈ 48,4 *км.*

3-тақырып. 1. а) 11,7 *м*; ә) 35 *мм*; б) 6,2 *км*; в) 172 *см*; г) $4(x\text{-}1)$ *см*; ғ) $(4x+2)$ *м*; д) $(13x+2)$ *км*; е) $(6y\text{-}8)$ *см*; ё) $8x$ *км* . **2.** а).≈ 7,967 *см*; ә) ≈ 44,329 *м*; б) ≈ 409,86 *мм.* **3.** а) иә; ә) жоқ; б) иә; в) иә. **4.** 0,8 *м*; 24,64 *м*^{2}; 21,12 *м*^{2}. **5.** ≈ 50 рет. **7.** 17,5 *см*; 10,5 *см*; 38,1 *см*; 59,1 *см.* **8.** 91,5 *м.*

4-тақырып. 1. *c*. **2.** а)C; ә) A ; **3.** 8, 2,4 *м.* **5.** ≈ 53,4 *м.* **6.** ≈ 19,25 *м*^{2}. **9.** 12 **10.** Біріншісінде. **11.** 80 . **12.** 7 *дм*^{2}. **14.** а)180 *дм*^{3}; ә)105 *см*^{3} б)1364 *см*^{3}. **15.** 1,8 *м*^{3}. **16.** а) 22 *см;* ә) 20 *см* және *24 см*^{2}*;* б) 96 *см*^{3}. **20.** а) $4\sqrt{2}$; ә) $2\sqrt{21}$; б) h= $2\sqrt{7}$. **21.** а) $(384+80\sqrt{5})$ *см*^{2}*,* 640 *см*^{3} ; ә) 84 *см*^{2}*,* 36 *см* ^{3} . б) $(12\sqrt{34}+156)$ *м*^{2}*, 180 м*^{3}. в) $36564+306\sqrt{97}$ *см*^{2}*,* 404838 *см*^{3}.

6-тақырып. 2. Үшбұрыштар ұқсас. **4.** 5; 8; $\frac{1}{2}$. **5.** 72; 162; 90.

7-тақырып. 3. 12 *м.* **4.** 7,5 *см*; 12,5 *см*; 15 *см.* **6.** 73,5 *м*^{2}; 37,5 *м*^{2}. **7.** Үшбұрыштар ұқсас.

8-тақырып. 3. а) 4,5; ә) 10,5; б) 4,5. **4.** а) 10; ә) 6; б) 4,5. **5.** а) 5 *см*, 3,5 *см*; ә) $5\frac{5}{7}$*см*, $2\frac{2}{7}$*см.* **6.** а) 8; ә) 3,5; б) 12,5. **8.** 12 *см.*

9-тақырып. 3. а) иә; ә) жоқ; б) жоқ. **4.** $2\frac{1}{3}$ *см*, 9. **5.** а) 15 *см*; 20 *см*; ә) 24 *см*; 18 *см*; б) 144 *см*^{2}; 256 *см*^{2}.

10-тақырып. 2. иә. **3.** а) мен б); в) мен г). **4.** 108 *см*^{2}. **5.** 4 *см*; 6 *см.* **7.** 4,8 *см.* **9.** 12.

11-тақырып. 1. а) мен в); ә) мен г); д) мен ғ). **2.** 36 *м* яки 20,25 *м.* **3.** 12 *см*; 14 *см.* **5.** $5\frac{5}{11}$*см.* **7.** 4 *м* . **8.**16 *м* **9.** 8,4 *м.*

12-тақырып. 3. а) 15; ә) $3\frac{2}{11}$; б) $3\frac{5}{17}$. **4.** 18 *см*; 6 *см.* **5.** 29 *дм*^{2}. **6.** 6 *дм*. **7.** m:n. **10.** иә.

13-тақырып. 1. $3\frac{3}{17}$ *м*; 13,6 *см.* **7.** n:m. **8.** а) S:4; ә) S:2; б) S:4. **9.** 30. **10.** 57,75.

14-тақырып. II. 1. 12 *см*^{2}. **2.** 8,4. **3.** 2,4. **4.** 24. **5.** 8. **6.** 1,6. **7.** 18 *мм.* **8.** а)4; ә)10;

б)32. **9.** иә. Үшбұрыштар ұқсастығының 2-белгісіне орай. **10.** 16. **11.** иә, $k=2$. **12.** 24 *мм.* **13.** а) 36 *см*²; b) *54 мм*². **14.** а) ; ә) . **15.** а) 7; ә) 7. **16.** 6*м.* **17.** 12 *м.*

15-тақырып. **1.** а) (1;-1); ә) (-2;3); б) (0;-4). **2.** (-1;5). **4.** (0;-3). **5.** (-1;-8). **6.** иә. **7.** жоқ. **8.** BB_1-ге.

16-тақырып. **1.** а) *Ox* оське қатысты симметрияда: (1;-2), (0;-2), (2;-2). ә) *Oy* оське қатысты симметрияда: (-1;2), (0;2), (-2;2). **2.** *Ox* оське қатысты. **4.** Сәйкес түрде: 2, 4, 2, 1, 1. **8.** АНА, МУМ.

17-тақырып. **1.** (8;3). **3.** (2;-5), (-2;-2), (6;-12). **6.** Тік төртбұрыш, квадрат, параллелограмның симметрия центрі - диагональдары қиылысу нүктесінде, түзу сызықтың симметрия центрі - оның кез келген нүктесінде. **12.** а) оське қатысты симметрия (1). ә) центрлік симметрия, оське қатысты симметрия (4). б) центрлік симметрия. в) оське қатысты симметрия (5). г) центрлік симметрия, оське қатысты симметрия (6)

13. а) оське қатысты симметрия: М, Х, В, Т, Й, В, Ө, В, В, Һ, К, Ц, И, Е, А. ә) центрлік симметрия: Н, С, З, Х, Һ, И.

14. а) 180°-қа; ә) жоқ; б) жоқ; в) 90°-қа; г) жоқ; ғ) 120°-қа.

15. а) $\frac{360^\circ}{7}$; ә) 60°; б) 360°. **17.** 15

18-тақырып. **5.** 1 *км* 750 *м.* **8.** 7,2 *см.* **9.** $k=\frac{1}{2}$ немесе $k=2$.

19-тақырып. **4.** $k=2$. **5.** 6 *см*²; 24 *см*². **6.** 104 *см*². **7.** Әр екі жағдайда $k=1$. **8.** 1,2 *м*².

9. 16 *см,* 32 *см.*

20-тақырып. **4.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **5.** X_1X және Y_1Y сәулелердің қиылысу қиылысу нүктесі гомотетия центрі. **6.** $OX_1=2.OX$. **7.** *Нұсқау:* Тақырыпта шешілген есепті пайдалан.

21-тақырып. **4.** а) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; ә) $S_1=12$, $k=2$; в) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; г) $P_1=10$, $S_2=216$.

22-тақырып. **1.** ≈6,94 м. **2.** 300 *м.* **3.** ≈72 *м.* **4.** 6,6 *м.*

23-тақырып. **1.** 9. **2.** $P_2=39$ *дм.* **3.** 8 *м.* **4.** 24 *дм*². **6.** *Нұсқау: ABC* үшбұрыш сыз, көпбұрыштар салу тақырыбындағы 1-есепті пайланып, сызылған үшбұрыш қабырғаларынан үш есе кіші үшбұрыш сыз.

9. 72°; 72°; 36°. **11.** 12 *см*². **12.** 150 000 000 *км.* **13.** а) иә; ә) иә. **15.** 6 *см,* 12 *см*, 18 *см.* **16.** 84 *м.*

24-тақырып. **II.** **1.** 8 *см.* **2.** $4\frac{4}{9}$ *см.* **3.** 48 *м.* **4.** 4 *см*; 0,5 *см*². **5.** $5\frac{1}{3}$ м. **6.** 867 *км.* **III.** **7.** 7,5 *м.* **8.** 6 *см.* **9.** а) 7,5 *см*; ә) 6 *см*; в) 16,2 *см.* *Қызық есеп:* **1.** Өзгермейді. **2.** а) иә; ә) жоқ. **3.** *Нұсқау:* Сызғышпен әрбір ойыншықтың бойын өлшеп, олардың қатынасын тап.

25-тақырып. **1.** $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$. **5.** а) 1; ә) 1; в) 1. **6.** 3,5 *см.* **7.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; ә) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 0. **8*.** а) 30°; ә) 135°; в) 150°.

26-тақырып. **2.** 36 *см*². **3.** 24 *см.* **4.** а) $6\sqrt{3}$; ә) 30; в) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. **5.** $(24+4\sqrt{3})$ *см*; $(24+8\sqrt{3})$ *см*². **6.** $10\sqrt{3}$ *см.* **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; ә) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** ≈807 *м*². **9.** ≈88 *м.*

10. 1000, 37°. **12.** 2°. **13.** 34°. **14.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **15.** $R = 3\sqrt{3}$ *см;* $BO = 6\sqrt{3}$. **16.** 5 *см.* **17.** 12, $24\sqrt{3}$. **18.** 20 *см,* 200 см². **19.** 4, $16\sqrt{3}$. **20.** 30°; 60°. **22.** 12 *см*; $4\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см.* **23.** 32 *см*².

27-тақырып. **2.** а) 6 *см*²; ә) 73,5 *см*²; в) 6 *см*². **3.** 36 *см*². **4.** $49\sqrt{2}$ *см*². **5.** $54\sqrt{3}$ *см*².

6. $2\frac{2}{3}$ *см*; $4{,}5\sqrt{2}$ *см*. **7.** $S = \dfrac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$ **8.** $4{,}8\sqrt{3}$ *см*.

28-тақырып. **2.** а) $BC=6$; ә) $AB=8\sqrt{2}$; в) $AC=7\sqrt{2}$. **3.** а) $\sin C=\frac{1}{3}$; ә) $\sin A=\frac{7}{16}$; в) $\sin B=\frac{2}{3}$. **4.** 4,8 *дм*. **5.** 30° немесе 150°. **6.** Мүмкін. **7.** $AB\approx21{,}1$ *м*; $\angle B\approx37°$, $\angle C\approx76°$. **8.** 76°; 26,1 *см*; 23,8 *см*.

29-тақырып. **2.** а) $\sqrt{13}$ *см*; ә) 4 *м*; в) $\sqrt{283}$ *дм*. **3.** $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13}$ *см* немесе $2\sqrt{109}$ *см*. **5.** $\sqrt{31}$ *см*, $\sqrt{91}$ *см*. **6.** $\sqrt{109}$ *см*, $\sqrt{39}$ *см*.

7. *Нұсқау: ADB* және *BDC* үшбұрыштарға косинустар теоремасын қолданып, a^2 мен c^2-ні тауып, бұл теңдіктерді мүшелеп қос. **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ *см*; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ *см*; $\frac{\sqrt{190}}{2}$ *см*.

30-тақырып. **1.** $\angle B$ және $\angle C$. **2.** *AB* және *BC*. **3.** а) сүйір бұрышты; ә) тік бұрышты; в) доғал бұрышты. **4.** а) $8\frac{1}{8}$; ә) $8\frac{1}{8}$; в) $24\frac{1}{6}$; е) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6.** *Нұсқау:* Синустар теоремасын пайдалан. **7.** *Нұсқау:* 6-есеп сияқты шешіледі.

8. *Нұсқау:* Синустар теоремасын пайдалан.

31-тақырып. **1.** а) $10\sqrt{3}$; ә) $28\sqrt{2}$; в) 12; г) ≈0,3064. **2.** а) —2; ә) 0; в) 2. **3.** а) 8; ә) 24; в) 8; г) 0. **5.** а) —7,5; в) 0. **6.** $a\perp b$, $c\perp d$.

32-тақырып. **1.** а) $\alpha=90°$, $c=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. ә) $\gamma\approx45°$; $a\approx27{,}3$, $b\approx24{,}5$; в) $\alpha=20°$; $b\approx65.8$; $c\approx88{,}6$; г) $\gamma=119°$; $a\approx8{,}1$; $b\approx5{,}8$. **2.** а) $c\approx5{,}29$; $\alpha\approx79°6'$; $\beta\approx138°21'$; ә) $c\approx53{,}09$; $\alpha\approx11°39'$; $\beta\approx38°21'$; в) $a\approx19{,}9$; $\beta\approx58°19'$; $\gamma\approx936°41'$; г) $a\approx22{,}9$; $\beta\approx21°$; $\gamma\approx15°$. **3.** а) $\alpha\approx29°$; $\beta\approx47°$; $\gamma\approx104°$; ә) $\alpha\approx54°$; $\beta\approx13°$; $\gamma\approx113°$; в) $\alpha\approx34°$; $\beta\approx44°$; $\gamma\approx102°$; г) $\alpha\approx39°$; $\beta\approx93°$; $\gamma\approx48°$.

33-тақырып. **1.** а) $2\sqrt{3}$ *см*; ә) 16 *см*; в) $\frac{\dot{a}b\sqrt{2}}{4}$.**2.** $4\sqrt{2}$ *м*; 8 *м* мен $4+4\sqrt{3}$ *м*. **3.** $50\sqrt{3}$ *кг*. **4.** 14 *см*. **5.** $2\sqrt{14}$ *см*. **6.** $6\sqrt{3}$ *см*. **7.** 50 *см*.

34-тақырып. **1.** ≈10,8 *м*. **2.** ≈15 *м*. **3.** ≈43,4 *м*. **4.** ≈35°. **5.** ≈73,2 *м*. **6.** ≈49 *м*. **7.** Асфальт жолмен.

35-тақырып. **II.** **1.** $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}$; 0,89; —0,65. **3.** $2\sqrt{7}$ *см*; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ *см*. **4.** $30\frac{1}{30}$*см*. **5.** 28 *см*. **6.** 8 *см*^{2}; $(4+4\sqrt{5})$ *см*; $h_a=4$ *см*, $h_b=0{,}8\sqrt{5}$ *см*. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** а) өткір бұрышты; ә) тік бұрышты, в) доғал бұрышты. **9.** 63 *см*^{2}. **10.** ≈3,7 *см*. **11.** 7 *см*. **12.** 6. **13.** 0. **14.** —9. **15.** 135°. **16.** $OC\approx9{,}6$. **17.** $(24+24\sqrt{3})$ *см*. **18.** 5. **III.** **1.** ≈109°. **2.** $\gamma=100°$, $a\approx3{,}25$; $c\approx6{,}43$. **3.** 6,25; 14,76.

36-тақырып. **2.** а) Кез келген үшбұрыш шеңберге іштей сызылуы мүмкін; ә) Қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180° болған төртбұрыштар. **3.** Бір доғаға тірелген бұрыштар. **4.** 10 *см*. **5.** 672 *см*^{2}. **6.** а) $10\sqrt{3}$ *см*; b) $10\sqrt{2}$ *см*; d) $10\sqrt{2}$ *см*; $10\sqrt{2}$ *см*; 20 *см*. **7.** $8\frac{1}{3}$*см*. **8.** ΔABF-те, $\angle BAF+\angle AFB=90°$, $\angle ABF=90°$. Демек, *AF* – диаметр. **9.** Қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 180°, яғни шеңберге іштей сызуға болады. **10.** *Нұсқау:* Бір табан мен бір бүйір қабырғаның орта перпендикулярлары қиылысқан нүкте шеңбер центрі болады.

37-тақырып. **2.** 7,2 *см*. **3.** а) 16,6; ә) 22; в) 22,6. **4.** а) 2,5; ә) 3,5; в) 2. **8.** 6 *см*.

38-тақырып. **3.** а) 60°; ә) 108°; в) 120°; г) 144°; ғ) 160°. **4.** а) 120°; ә) 72°; в) 120°; г) 36°; ғ) 30°. **5.** а) 3; ә) 4; в) 8; г) 12.

39-тақырып. **1.** 3 *см* және $3\sqrt{2}$ *см*. **2.** $\sqrt{3}$ және $2\sqrt{3}$. **7.** а) 6; ә) 12; в) 10; г) 20; ғ) 5.

40-тақырып. **3.** 8 *см*; $8\sqrt{2}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *см*; 16 *см*.
4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ *см*; **5.** а) $20\sqrt{2}$ *см*; ә) 40 *см*. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *см*.

41-тақырып. **I.** **1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** E; **7.** E. **III.** **1.** $\sqrt{3}$:4: $6\sqrt{3}$. **2.** 3:4. **3.** а) ≈5,780 *см*; ә) ≈4,142 *см*; в) ≈2,679 *см*. **4.** $S=\sqrt{2}R^2$. **5.** 24 *см*^{2}. **IV.** **1.** 4 *см*; 13 *см*. **2.** а) 80 *см*; ә) $20\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ *см*; $40\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ *см*; в) 200 *см*^{2}. **3.** $4\sqrt{3}$ *см*; 8 *см*. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ *см*^{2}.

42-тақырып. **2.** а) 3 есе артады; ә) 6π *см*-ге артады; в) 3 есе азаяды; г) 6π *см*-ге азаяды.
3. 6369 *км*. **4.** а) $\frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}$; ә) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** а) πa;
ә) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. **6.** 1,5 *м*. **7.** 66348 рет.

43-тақырып.1. а) π *см*; ә) 1,5π *см*; в) 3π *см*; е) 4π *см*. **2.** а) $\frac{2\pi}{9}$ ә) $\frac{\pi}{3}$d в) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** а) ≈69°; ә) 120°; в) 150°. **4.** а) $\frac{5\pi}{8}$ *см*; ә) 2π *см*; в) $\frac{15\pi}{4}$ *см*; **5.** а) 4π; ә) 16π. **7.** 2.

44-тақырып. **3.** а) k^2 есе артады; ә) k^2 есе азаяды. **4.** 6,25π *см*^{2}; 12,5π *см*^{2}. **5.** 2,25π *см*^{2}; 9π *см*^{2}. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** 21,25 π *см*^{2}. **8.** 18,75 *см*^{2}.

45-тақырып. **3.** а) $\frac{49}{12}$ π *см*^{2}; $\frac{49(\pi-3)}{12}$ *см*^{2}; ә) 6,125π *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ *см*^{2}; в) $\frac{49\pi}{3}$ *см*^{2}; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ *см*^{2}; г) $\frac{49\pi}{4}$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2)}{4}$ *см*^{2}. **4.** а) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; ә) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ в) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}$ a^2;
5. π *см*^{2}; 3π *см*^{2}; 5π *см*^{2}; 7π *см*^{2}. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2}; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2};
7. $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ *см*^{2}. **8.** $S_1<S<S_2$; 300 *см*^{2} < 314*см*^{2} < 321,48 *см*^{2}.

46-тақырып. **1.** Шеңбердікі үлкен. **2.** $\frac{160\pi}{3}$ *см*^{2}. **3.** 5,76π *см*^{2}. **4.** 8.(π—2) *см*^{2}. **6.** 6π *см*^{2}; 10π *см*.

47-тақырып. **II.** **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}$ *дм*. **3.** 30 *см*. **4.** 90°. **5.** 3. **6.** π және 6,25π. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$.
8. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}$ a^2. **10.** 1,5π. **11.** 7. **12.** ≈9π—26,04. **13.** π. **14.** $54\sqrt{3}$—24π.
15. $\frac{3\pi}{8}$. **III.** **2.** $8\sqrt{3}$ *см*. **3.** а) $\frac{18}{\pi}$ *см*; ә) $\frac{216}{\pi}$ *см*^{2}; в) $\frac{216\pi+81\sqrt{3})}{\pi^2}$ *см*^{2}.

48-тақырып. **3.** $5\sqrt{2}$ *см*. **4.** 12 *см*. **5.** 44 *м*, 60 *м*. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

49-тақырып. **1.** а) 30 *см*, 12 *см*; ә) 9 *см*, 12 *см*, 21 *см*; в) 3 *см*, 15 *см*, 3 *см*, 21 *см*. **3.** 6 *см*; 10,5 *см*. **4.** 9 *см*, 12 *см*, 15 *см*, 18 *см*. **5.** 60°. **6.** 21 *см*. **7.** 20 *см*.

50-тақырып. **1.** *Нұсқау:* $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$. **2.** 25 *см*, 15 *см*, 20 *см*. **3.** $9\frac{3}{5}$ *см*.
4. а) 5, 4; ә) 24, 25; в) 8,10. **5.** 16:25. **6.** 56,16 *см*^{2}. **7.** 60 *см*^{2}. **8.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$.

51-тақырып. **2.** *Нұсқау:* а) катеттері *a* және *b* болған тік төртбұрыш сал; ә) гипотенузасы *a*, бір катеті *b* болған тік бұрышты үшбұрыш сал. **3.** *Нұсқау:* Катеттері $AB=BC=1$ болған ΔABC сал. Соң катеті $CC_1=1$ және $\angle C_1=90°$ болған $DBCC_1$ сал, т.б. **4.** а) 20; ә) 45; в) 37,5. **5.** 225π *см*^{2}. **6.** 180 *см*^{2}. **7.** 25:9. **9.** $OC\geq OD$ болғандықтан теңсіздік әрдайым дұрыс.

52-тақырып. **1.** а) 6,25; ә) 12; в) 0,25. **2.** а) 8 *см*; ә) 2,5 *см*; в) 0,9 *см*. **3.** а) 4 *дм*; ә) 4 *дм*. **4.** 8 *см*. **6.** 9 *дм*; 16 *дм*.

53-тақырып. **1.** 10 *см*. **2.** 2 *см*. **3.** а) 2,5; ә) 4; в) 2. **4.** а) $4\sqrt{6}-1$ *см*; ә) 6 *см*. **5.** 1:6.

6. 6 *см*. **7.** 3. **8.** 1:4.

54-тақырып. II. 1. 18 *см*; 32 *см*. **2.** 4 *см*; **3.** 8 *см*; **4.** 6,4 *дм*. **5.** 8 *см*. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 $дм^2$. **10.** 4 *см*. **11.** 8 *см*. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9.

III. 1. 8 *см*. **2.** 5 *дм*. **3.** 4 *см*; 8 *см*.

55-тақырып.1. а) 9; ә) 4 $см^2$; в) 3,5 *см*; г) $\frac{1}{2}TB - CA$; ғ) 0,2. **2.** $\Delta CмH \backsim \Delta BCA$.

Оқулықты құрастыруда пайдаланылған және қосымша оқуға ұсынылатын оқу әдебиеттері мен электронды ресурстар

1. A’zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. "O‘qituvchi", 1993.
2. Александров А.Д. "Геометрия -9", учебник, Москва. "Просвешение", 2013.
3. Атанасян С. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. "Просвешение", 2002.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Вежа", 2007
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Освита", 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9" учебник, Харьков, "Гимназия", 2008.
8. Перельман Я.И. Қизиқарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. "Просвешение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. "Наука", 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. http://www.uzedu.uz - Халыққа білім беру министрлігінің ақпараттық білім порталы.
15. http://www.eduportal.uz - Мультимедиа орталығы ақпараттық білім порталы.
16. http://www.matematika.uz - Қашықтықтан оқыту сайты (өзбек тілінде).
17. http://www.problems.ru/ Математикалық есептерді іздеу жүйесі (орыс тілінде).
18. http://www.ixl.com - Қашықтықтан оқыту сайты (ағылшын тілінде).
19. http://www.mathkang.ru - "Кенгуру" халықаралық математика байқауы сайты (орыс тілінде).
20. http://www.khanakademy.org -"Хан академиясы" қашықтықтан оқыту сайты (ағылшын тілінде)
21. http://www.brilliant.org – Математикалық қашықтықтан оқыту сайты (ағылшын тілінде).
22. http://www.markaz.tdi.uz - Білім беру сапасын бағалау бойынша халықаралық зерттеулерді жүзеге асыратын ұлттық орталық сайты.
23. http://www.occd.org/pisa - Экономикалық ынтымақтастық және даму ұйымы сайты, PISA – зерттеулердің ашық материалдары.

Хайдаров Баходир Қаюмович
Геометрия: 9-сыныпқа арналған оқулық / Б.Қ.Хайдаров, Е.С.Сариқов, А.Ш.Қучқоров. — Т.:, 2019.—160 б.

Х 18
Қ.Хайдаров, Баходир.
ISBN 978-9943-07-296-1

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ya7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo‘chqorov

GEOMETRIYA
9-sinf uchun darslik

To‘ldirilgan va to‘rtinchi nashri
(*Qozoq tilida*)

Оригинал-макет “Huquq va Jamiyat” баспасында дайындалды.

Аудармашы *Т.Ахметов*
Редактор *К.Нгрбаева*
К„ркемдеуші редактор *А.Умарова*
Бас дизайнер *H&J дизайн ґжымы*
Беттеуші *Д.Искандарбеков*

Лицензия AI №160, 14.08.2009 ж.

Басуға қол қойылды .08.2019 ж. Пішімі $70 \times 100^1/_{16}$. “Таймс” гарнитурасы.
Кеглі 10. Офсет әдісінде басылды. Шартты баспа табағы 11,7.
Нақты баспа табағы 11,83. Таралымы дана. Тапсырыс № 14-286.

“Huquq va Jamiyat” баспасының полиграфия бөлімі.
Ташкент, Юнусабад 6, Жумамасжид көшесі.
Куәлік №10-2750, 13.06.2017 жыл.

Жалға берілген оқулық жағдайын көрсететін кесте

Р/с	Оқушының аты, жөні	Оқу жылы	Оқулықтың алынғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы	Оқулықты тапсырғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Оқулық жалға берілгенде және оқу жылы соңында қайтарып алынғанда жоғарыдағы кесте сынып жетекшісінің қолымен төмендегі бағалау өлшемдеріне негізделіп толтырылады:

Жаңа	Оқулықтың пайдалануға алғаш берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқаба бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен бөлінбеген. Барлық беті түгел, жыртылмаған, көшпеген, жазу, сызық жоқ.
Қанағаттанарлы	Мұқаба езілген, біршама сызылып, беттері жемірілген, оқулықтың негізгі бөлігінен бөлектенуге жақын. Пайдаланушы біршама түптеп жыртылған беттерін желімдеген, кей беттері сызылған.
Қанағаттанарлықсыз	Мұқаба сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыралған немесе бүтіндей жоқ. Қанағаттанарлықсыз түптелген. Беттері жыртылған, парақтары жетпейді, сызып, бояп тасталған, оқулықты қайта түптеу мүмкін емес.