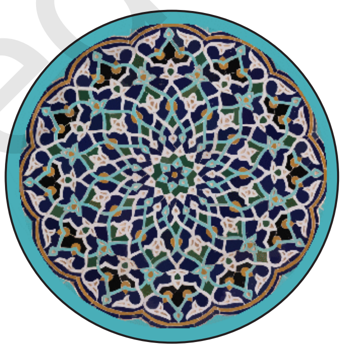
B. Xaydarov, E. Sariqov, A. Qo'chqorov

GEOMETRIYA 9

Ulıwma orta bilim beriw mektepleriniń
9-klass ushın sabaqlıq
Ózbekston Respublikasi Xalıq bilimlendiriw
ministrligi tárepinen baspaǵa usınıs etilgen

Qayta islengen toltırılǵan hám tórtinshi basılım



Tashkent — 2019

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ya7
X-18

Pikir bildiriwshiler:

Shaniyazova M. — Sergeli rayonındaǵı 300-sanlı mekteptiń joqarı kategoriyalı matematika páni oqıtıwshısı

Soibova I. — Yunosabat rayonındaǵı 307-sanlı mekteptiń joqarı kategoriyalı matematika páni oqıtıwshısı

Tajabbinova Sh. — Sergeli rayonındaǵı 104-sanlı mekteptıń joqarı kategoriyalı matematika páni oqıtıwshısı

Ózbekstan Respublikası Pánler akademiyasınıń haqıyqıy aǵzası, fizika-matematika ilimleriniń doktorı, professor A. Azamovtıń redaktorlawında.

9-klasta geometriyanıń planimetriya bólimin—tegis geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyreniw dawam ettiriledi. Bunda siz geometriyalıq figuralardıń uqsaslıǵı, úshmúyeshliklerdiń tárepleri hám múyeshleri arasındaǵı qatnaslar, sheńber uzınlıǵı hám dóńgelektiń maydanı, úshmúyeshlik hám sheńberdegi metrikalıq qatnaslar menen tanısasız.

Bul “Geometriya” sabaqlıǵınıń mazmunı qatań aksiomatikalıq sistema tiykarında qurılǵan. Bunda teoriyalıq materiallar múmkinshiligi bolǵansha ápiwayı hám anıq tilde bayan etilgen. Barlıq tema hám túsiniklerdi hár túrli turmısta ushırasatuǵın mısallar arqalı ashıp beriwge háreket etilgen. Hár bir temadan soń berilgen sorawlar, dálillewler, esaplawlarǵa hám jasawlarńa tiyisli másele hám mısallar oqıwshını dóretiwshilik pikirlewge jeteleydi, oǵan ózlestirilgen bilimlerdi tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwıǵa járdem beredi. Sabaqlıq óziniń ózgeshe dizayn hám sabaq materialınıń kórgizbeli etip usınılıwı menen de ajıralıp turadı. Sabaqlıqta keltirilgen súwret hám sızılma sabaqlıq materialın jaqsılap ózlestiriwge xızmet etedi.

Respublika maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan ijara ushın basıp shıǵarıldı.

ISBN 978-9943-5875-1-9

MAZMUNI

5-8- KLASLARDA ÓTILGENLERDI TÁKIRARLAW

Bul bólimdegi máseleler 5-8-klaslarda úyrenilgen geometriyalıq figuralar hám olardıń qásiyetlerin yadǵa alıw ushın berilmekte.

Bólimde PISA hám TIMSS - oqıwshılar bilimin bahalawdıń xalıqaralıq baǵdarlamaları máselelerinen hám keltirilmekte.

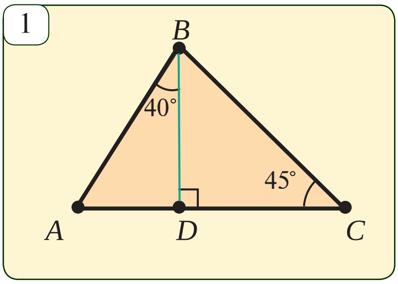
Bul bólimdegi materiallardı úyreniw nátiyjesinde tómendegi bilim hám kónlikpelerdi jańalaw imkaniyatına iye bolasız:

√ 5-8-*klaslarda geometriyadan ótilgen temalardı tákirarlap, alǵan bilimlerińizdi eske alasız hám erisken kónlikpelerińizdi bekkemleysiz.*

√ *PISA va TIMSS - oqıwshılar bilimin bahalawdıń xalıqaralıq baǵdarlamaları máseleleri menen tanısasız;*

√ *Bul sizge 9-klasta geometriyanı úyreniwdi tabıslı dawam ettiriwińizge qolaylılıq jaratadı.*

Bul bólimdegi máselelerdi sheshiw ushın sabaqlıqtıń aqırında keltirilgen tiykarǵı geometriyalıq figuralarǵa tiyisli maǵlıwmatlar hámde olardıń qásiyetlerin ańlatıwshı formulalardan paydalanıwımız múmkin.



1.1. *ABC* úshmúyeshliktiń *BD* biyikligi júrgizilgen (*1-súwret*). Eger $\angle ABD = 40°$, $\angle BCD = 45°$ bolsa úshmúyeshliktiń *A* hám *B* tóbesindegi múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshlikde $\angle ABD = 40°$ hám úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° ge teń bolǵanı ushın

$$\angle A = 180° - (90° + 40°) = 50°.$$

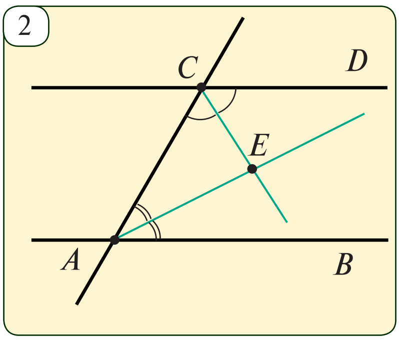
2) Tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikde $\angle BCD = 45°$ bolǵanı ushın

$$\angle DBC = 180° - (90° + 45°) = 45°.$$

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ bolǵanı ushın

$$\angle B = 40° + 45° = 85°.$$

Juwabı: 50°, 85°.



1.2. Eki parallel tuwrı sızıqtı kesiwshi menen keskende payda bolǵan ishki bir tárepleme múyeshlerdiń bissektrisaları arasındaǵı múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. *AC* tuwrı sızıq *AB* hám *CD* - parallel tuwrı sızıqlardı 2-súwrette súwretlengendey kesip ótken bolsın. Ishki bir tárepi *BAC* hám *ACD* múyeshlerdiń bissektrisalari *E* noqatta kesilisken bolıp $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ bolsın onda múyesh bissektrisa anıqlaması boyınsha,

$$\angle BAC = x + x = 2x, \quad \angle ACD = y + y = 2y.$$

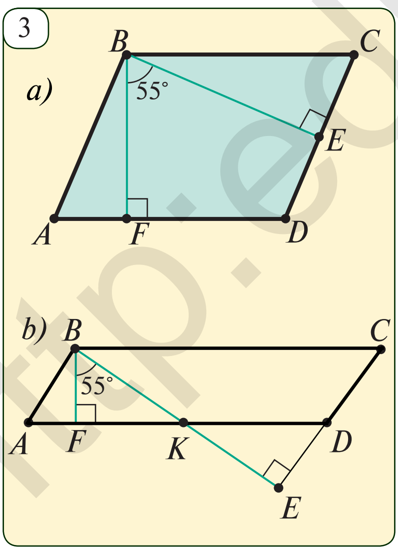
AB||CD bolǵanı ushın ishki tárepleméli múyeshlerdiń qásiyeti boyınsha,

$$2x + 2y = 180°, \qquad x + y = 90°.$$

ACE úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° ga teń bolǵanı ushın

$$\angle AEC = 180° - (x + y) = 180° - 90° = 90°.$$

Juwabı: 90°.



1.3. Eger parallelogrammnıń doǵal múyeshi bir tóbesinen onıń ekinshi tárepine túsirilgen biyiklikleriniń arasındaǵı múyesh 55° qa teń bolsa, parallelogrammnıń múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. Parallelogrammnıń BF hám BE biyiklikleriniń arasındaǵı múyesh 55° bolsın (*3-súwret*).

Súwrette súwretlengen eki jaǵday: a) BE biyikligi CD tárepine; b) BE biyikligi CD tárepiniń dawamına túsken bolıwı múmkin.

a) jaǵdayda $BEDF$ tórtmúyeshliktiń múyeshlikleriniń qosındısı 360° bolǵanı ushın,

$55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ$. Bunnan, $\angle D = 125^\circ$.

b) jaǵdayda BE biyikligi AD tárepi menen kesilisken noqat K bolsin. Onda,

$$\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Úshmúyeshliktiń sırtqı múyeshleriniń qásiyetleri boyınsha,

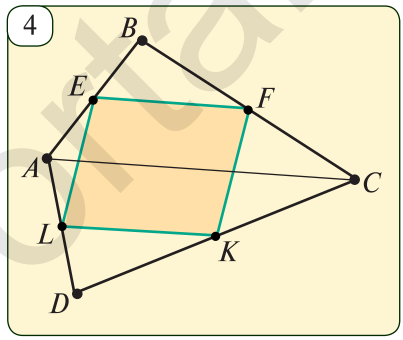
$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ.$$

Demek, hár eki jaǵdayda da $\angle D=125^\circ$.

Onda, $\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle D = 55^\circ$, $\angle B = \angle D = 125^\circ$. *Juwabı:* 55°, 125°, 55°, 125°.

1.4. Tórtmúyeshliktiń tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolatuǵının dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ tórtmúyeshliginiń AB, BC, CD hám DA tárepleriniń ortaları sáykes túrde E, F, K hám L noqatları bolsın AS diaganalın ótkizemiz (*4-súwret*). $EFKL$ — parallelogramm ekenligin kórsetemiz.



EF kesindisi ABC úshmúyeshliginiń, KL kesindisi ACD úshmúyeshliginiń orta sızıǵı boladı. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetlerinen,

$$EF \| AC,\ KL \| AC,\ EF = \frac{1}{2} AC,\ \ KL = \frac{1}{2} AC.$$

Bunnan $EF \| KL$ hám $EF = LK$. Sonıń ushın, parallelogrammnıń belgileri boyınsha $EFKL$ — parallelogramm boladı.

1.5. ABC úshmúyeshlikde $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiń úshinshi ishki múyeshin hám sırtqı múyeshlerin tabıń.

1.6. ABC úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel tuwrı sızıq AB hám BC táreplerin saykes túrde E hám F noqatlarına kesip otedi. Eger $\angle BEF = 65^\circ$ hám $\angle EFC = 135^\circ$ bolsa, ABC úshmúyeshliginiń tabıń.

1.7. ABC úshmúyeshlik bissektrisaları I noqatta kesilisedi. Eger $\angle A = 80^\circ$ hám $\angle B = 70^\circ$ bolsa, AIB, BIC hám CIA múyeshlerin tabıń.

1.8. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń bir sırtqı múyeshi 70° qa teń. Úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

1.9. ABC úshmúyeshliktiń AK bissektrisası júrgizilgen. Eger $\angle BAK = 47^\circ$ hám $\angle AKC = 103^\circ$ bolsa, úshmúyeshlik múyeshlerin tabıń.

1.10*. ABC úshmúyeshlik biyiklikleri H noqatta kesilisedi. Eger $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ bolsa, AHB, BHC hám CHA múyeshlerin tabıń.

1.11. Úshmúyeshliktiń orta sızıqları onı teńdey tórt úshmúyeshliklerge ajıratuǵının dáliylleń.

1.12*. ABC úshmúyeshlikte CD mediana dawam ettirip bul medianaǵa teń DE kesindisi qoyıladı. AF mediananıń dawamına AF medianaǵa teń FH kesindisi qoyılǵan. B, H, E noqatları bir tuwrıda jatatuǵınlıǵın dáliylleń.

1.13. ABC teń qaptallı úshmúyeshlikte ($AB=BC$) AN hám CK bissektrisalar júrgizilgen.

a) KN kesindisi AC tárepke parallel ekenligin kórsetiń.

b) $AK=KN=NC$ teńlik orınlı bolıwın dáliylleń.

1.14. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliginiń A hám D múyeshleriniń bissektrisaları BC tárepinde kesilisedi. Eger $AB = 4$ cm bolsa, tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanın tabıń.

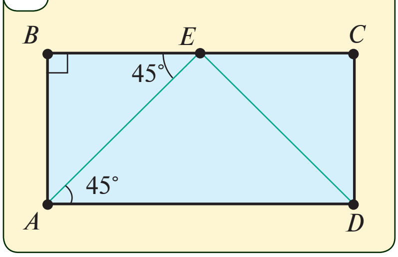
Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshliktiń A hám D múyeshleriniń bissektrisaları kesilisken noqat E bolsın (*5-súwret*). Onda, $\angle B=90^\circ$, $\angle BAE=45^\circ$ bolǵanı ushın, $\angle AEB=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$. Yaǵnıy, ABE — teńqaptallı úshmúyeshlik.

Bunda, $AB = BE = 4$ (cm). Dál usıǵan uqsas $EC = CD = 4$ (cm) ekenligin kórsetiw múmkin. Bunnan BC = BE + EC = 8 (cm) hám

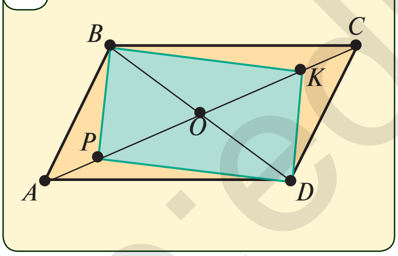
$S_{ABCD}=AB\cdot BC= 4 \cdot 8 = 32$ (cm^2). *Juwabı:* 32 cm^2.

1.15. Tórtmúyeshliktiń úsh múyeshi 47°, 83° hám 120° ǵa teńligi málim. Onıń tórtinshi múyeshin tabıń.

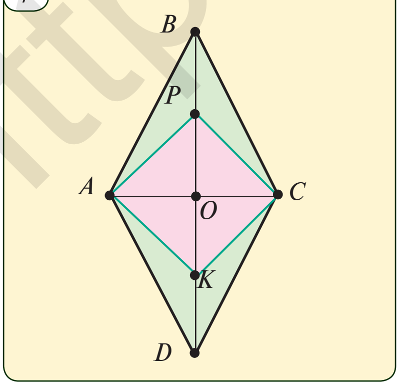
5



6



7



1.16. Parallelogrammnıń eki múyeshi qosındısı 156° ǵa teń. Onıń múyeshlerin tabıń.

1.17. Tuwrı tórtmúyeshlik diagonalları arasındaǵı múyesh 74°. Onıń bir diagonalı menen tárepleri arasındaǵı múyeshlerdi tabıń.

1.18. Ten qaptallı trapetciyanıń eki múyeshi ayırması 40° qa teń. Onıń múyeshlerin tabıń.

1.19. Romb múyeshlerinen biri ekinshisinen úsh márte úlken. Rombnıń múyeshlerin tabıń.

1.20. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń A múyeshi bissektrisası BC tárepin 2 cm va 6 cm ge teń kesindilerge ajratadı. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

1.21. Tárepleri 3 cm hám 6 cm, úlken tárepleri arasındaǵı aralıq bolsa 2 cm bolǵan parallelogramm jasań.

1.22. $ABCD$ parallelogrammnıń AC diagonalında P hám K noqatlar tańlanǵan (6-súwret). Eger $OP=OB=OK$ bolsa, $BKDP$ tuwrı tórtmúyeshlik bolıwın dáliylleń.

1.23*. $ABCD$ rombnıń BD úlken diagonalında P hám K noqatlar tanlanǵan (*7-súwret*). Eger $OA=OP=OK$ bolsa, $APCK$ tórtmúyeshlik kvadrat ekenligin dáliylleń.

1.24*. $ABCD$ parallelogrammnıń BD diagonalında P hám K noqatlar tańlanǵan. Eger $BP=KD$ bolsa, $APCK$ tórtmúyeshlik parallelogramm ekenligin dáliylleń.

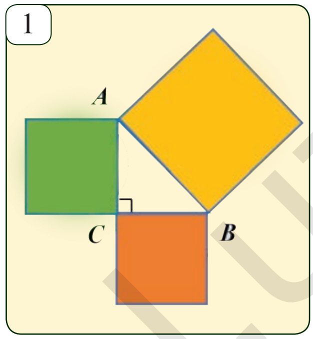
2 PIFAGOR TEOREMASÍ HÁM ONÍN QOLLANÍLÍWLARÍ

Bul belgili teoremanıń 3 túrli ańlatpasın keltirip, onı eske alamız.

a) Tekstli ańlatpası: Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası kvadratı katetleri kvadratlarınıń qosındısına teń.

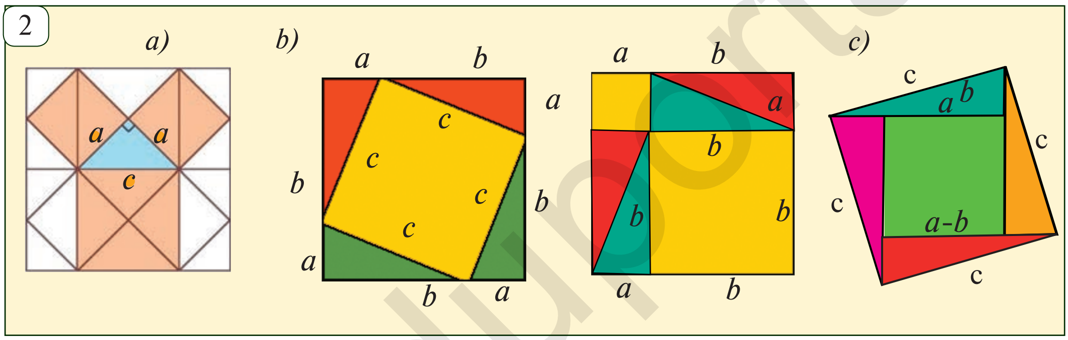
b) matematikalıq ańlatpası: ABC úshmúyeshlikte: $\angle C = 90^\circ, AB = c,\ BC = a,\ AC = b$ bolsa, $c^2 = a^2 + b^2$ boladı.

d) Súwretli ańlatpası: (1-súwret).

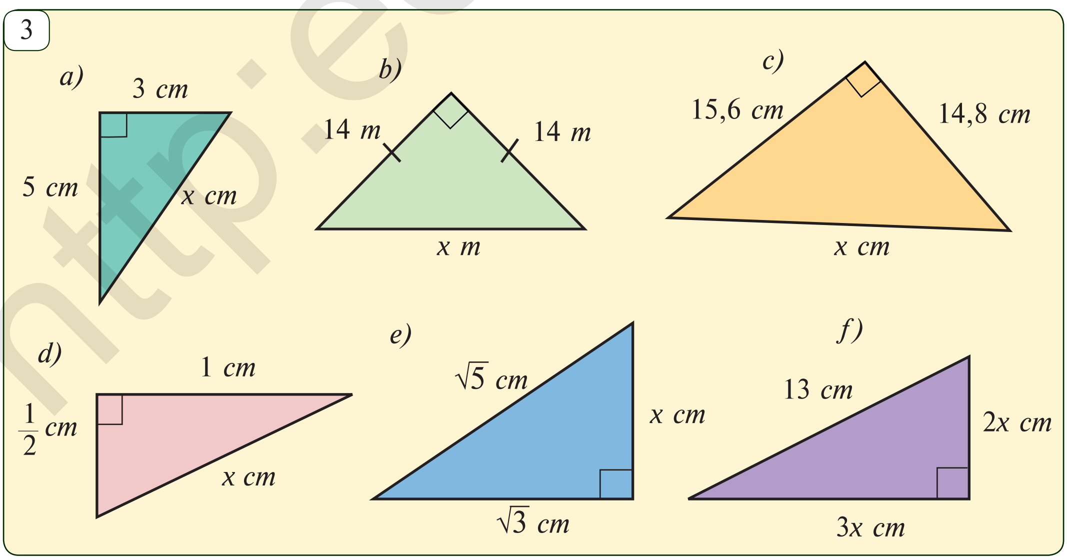


Másele hám shınıǵıwlar

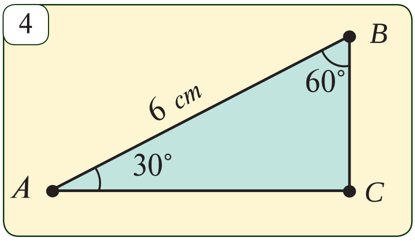
2.1. 2-súwrette keltirilgen sızılmalar tiykarında Pifagor teoremasınıń bir neshe dáliyllin **tikleń**.



2.2. 3-súwrette berilgenlerge kóre belgisizdi tabıń.



2.3. *ABC* úshmúyeshliktiń *AB* tárepi *6 cm, A* hám *B* múyeshleri, sáykes túrde, 30° hám 60° bolsa, *ABC* úshmúyeshlik maydanın tabıń.



Sheshiw. Úshmúyeshliktiń C múyeshin tabamız:

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$.

Demek, tuwrı múyeshli *ABC* úshmúyeshliktiń *AB* gipotenuzası *6 cm* hám *A* múyeshi 30° eken. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° li múyesh qarsısındaǵı katet gipotenuzanıń yarımına teń bolǵanı ushın, $BC=3$ cm (*4-súwret*).

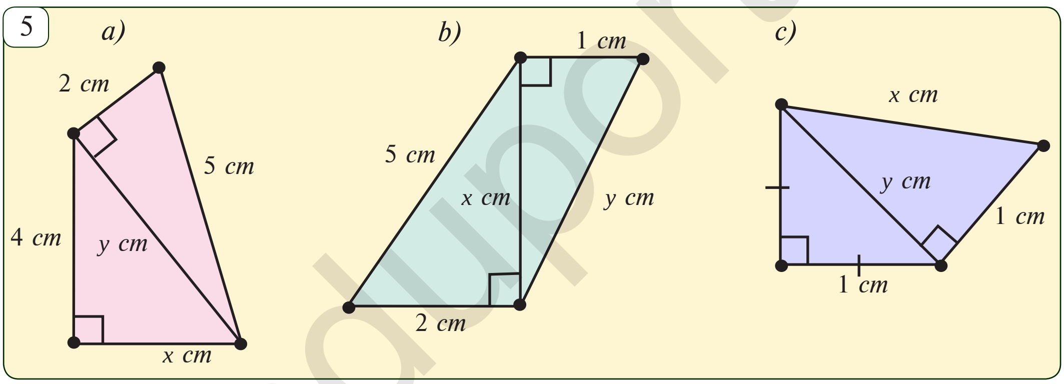
Pifagor teoremasınan paydalanıp *AC* katetti tabamız:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27\ (cm), \qquad AC = 3\sqrt{3}\ cm.$$

Endi úshmúyeshlik maydanın tabamız:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ (cm^2).$$

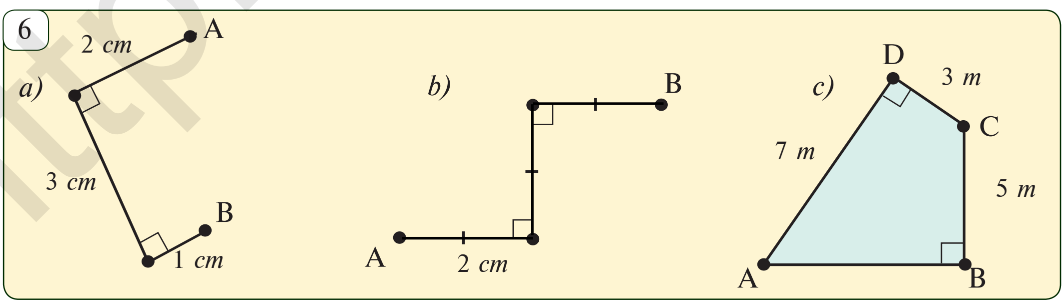
Juwabı: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2.



2.4. 5-súwrette berilgenlerge kóre belgisizdi tabıń.

2.5. Katetleri 15 *cm* hám 20 *cm* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik gipotenuzasına túsirilgen biyiklikti tabıń.

2.6. 6-súwrette tiyisli kesindilerdi jasap belgisiz AB kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

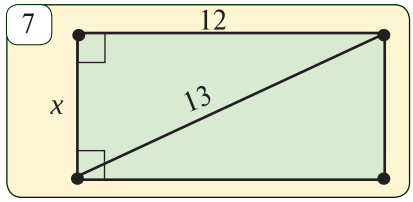


2.7. 7-súwrette berilgenlerden paydalanıp tuwrı tórtmúyeshlik maydanın tabıń.

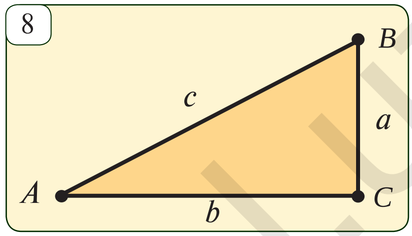
Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshliktiń kishi tárepin *x* penen belgilesek, onda Pifagor teoreması boyınsha: $x^2 + 12^2 = 13^2$;

$x^2 + 144 = 169$; $x^2 = 169 - 144 = 25$; $x = \pm 5$. Uzınlıq oń shama bolǵanı ushın $x = 5$ *cm*. Onda tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı

$S = a\ \ b = 5 \cdot 12 = 60$ (cm²). *Juwab:* 60 cm^2.

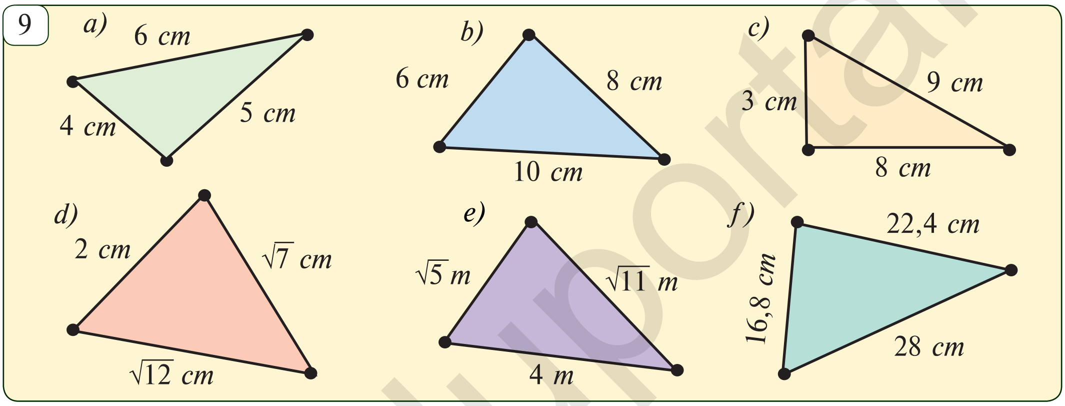


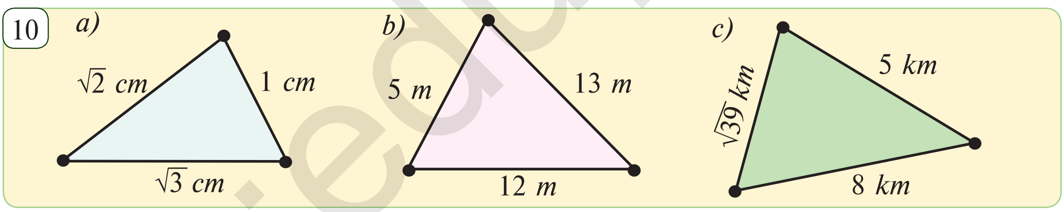
Teorema. ***Eger tárepleri a, b hám c bolǵan úshmúyeshlikte $c^2 = a^2 + b^2$ bolsa, bul úshmúyeshlik tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. (8-súwret).***



2.8. 9-súwrettegi úshmúyeshlikler anıq emes súwretlengen. Olardıń qaysı biri tuwrı múyeshli?

2.9. 10-súwrettegi úshmúyeshlikler anıq emes súwretlengen. Olardıń qaysı biri tuwrı múyeshli?





2.10. 11-súwrette súwretlengen belgisiz maydandı tabıń.

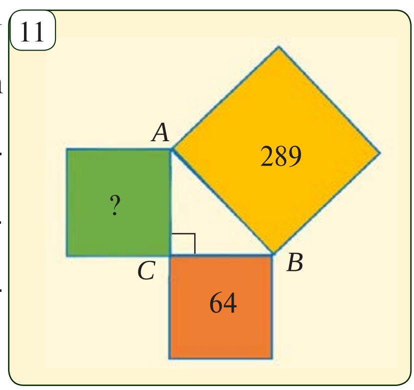
2.11. 12-súwrettegi rombınıń diagonalları 6 *cm* hám 8 *cm* bolsa, onıń tárepin tabıń.

2.12. 13-súwrettegi teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepi 6m bolsa, onıń biyikligin tabıń.

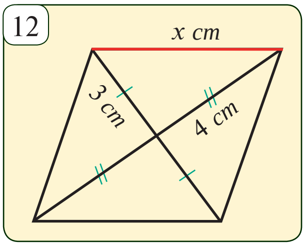
2.13. 14-súwrette sızılǵan figuranıń perimetrin tabıń.

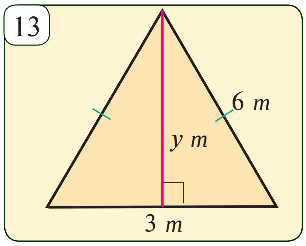
2.14. 15-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz uzınlıqtı tabıń.

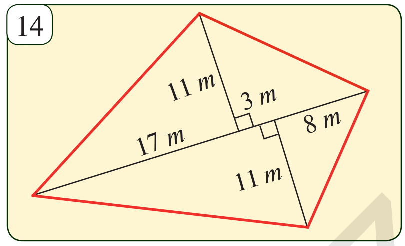
2.15. 16-súwrette berilgenlerden paydalanıp, *AB* kesindi uzınlıǵın tabıń.

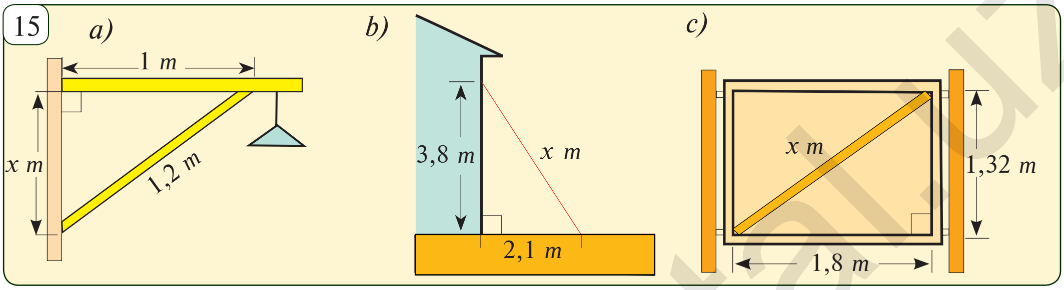


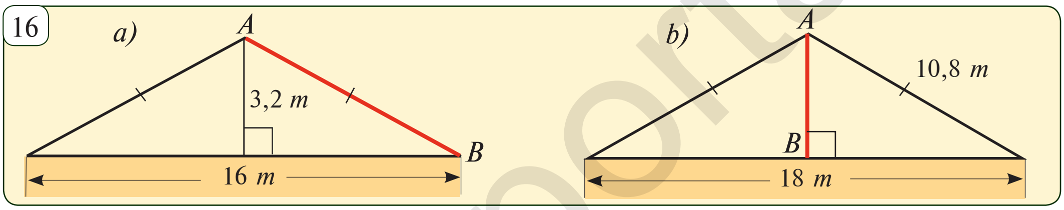
2.16. 17-súwrette sızılǵan sızılmanıń aldı tárepi teń tárepli úshmúyeshlik formasında. Berilgenlerden paydalanıp sızılma ultanınıń maydanın tabıń.

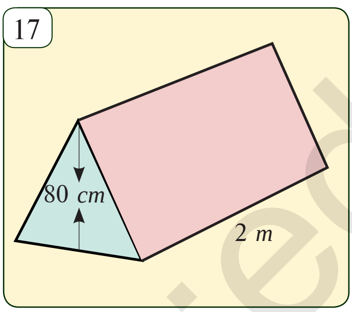


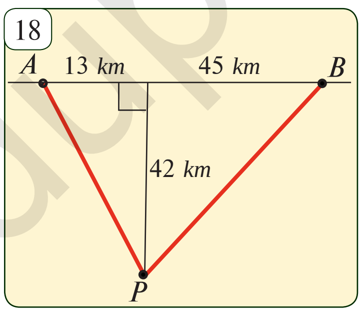


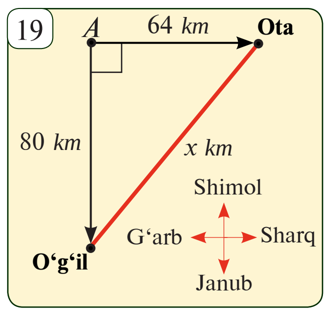












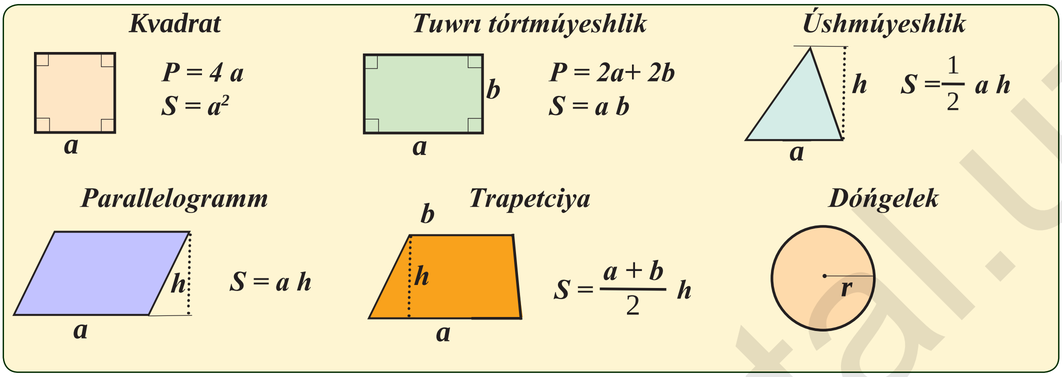
2.17. 18-súwrette P elektr stanciyadan A hám B qalalarǵa shekem sım tartpaqshı. Bunıń ushın qansha sım kerek boladı?

2.18. A noqattan ake 16 *km/h* tezlik penen shıǵısqa, ulı bolsa 20 *km/h* tezlik penen velosipedte arqaǵa qarap háreketlenbekte (19-súwret). 4 saattan keyin olar arasındaǵı aralıq qansha boladı?

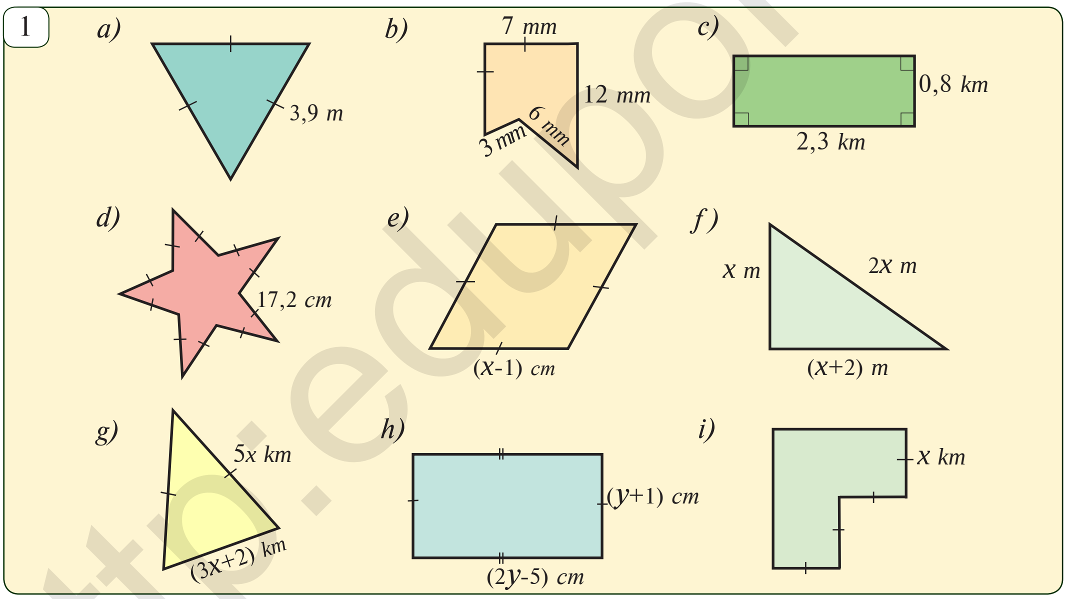
2.19. Eki kapitan Jek hám Huk Jumabay aralıǵınan óz kemelerinde saparǵa shıqtı (20-súwret). Birinshisi 15 *km/h* tezlik penen qublaǵa, ekinshisi bolsa 19 *km/h* tezlik penen batısqa júzip ketti. 2 saattan keyin olar arasındaǵı aralıq qansha boladı?

3 GEOMETRIYALÍQ FIGURALARDÍŃ PERIMETRI HÁM MAYDANÍN ESAPLAWǴA TIYISLI MÁSELELER

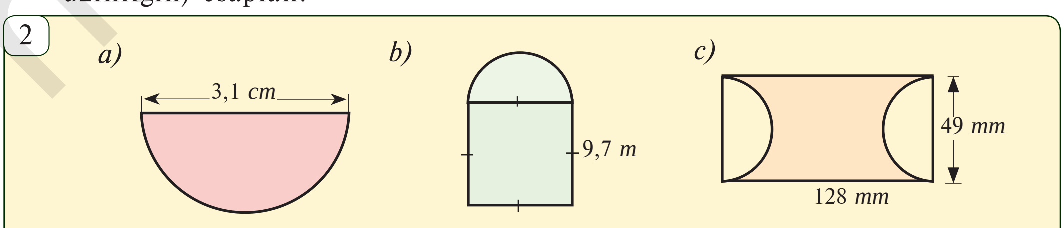
Tómende tegis geometriyalıq figuralardıń perimetri hám maydanın esaplawǵa tiyisli túrli máselelerdi kórip shıǵamız.



3.1. 1-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler perimetrin esaplań.



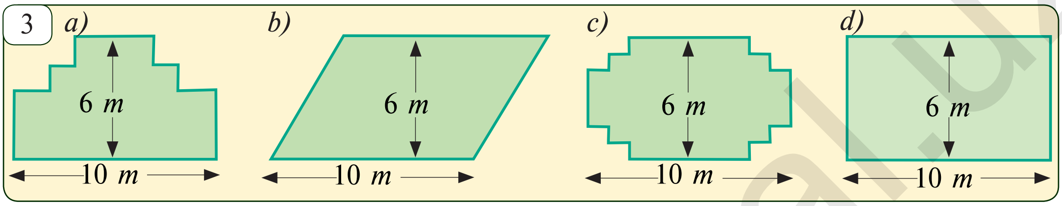
3.2. 2-súwrette súwretlengen geometriyalıq figuralardıń perimetrin (shegarasınıń uzınlıǵın) esaplań.

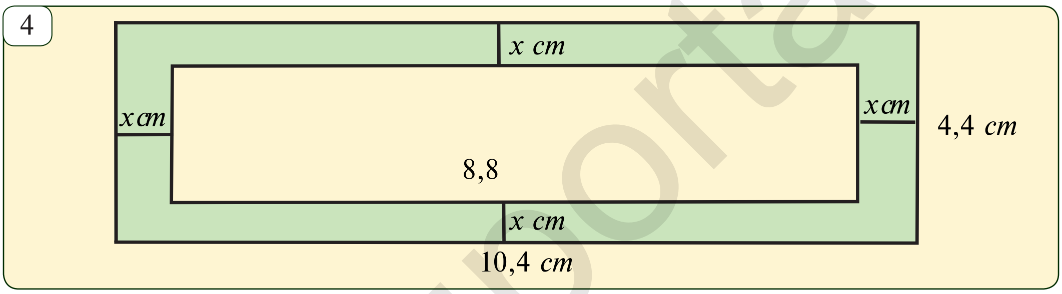


3.3. 3-súwrette súwretlengen gúlzarlardı 32 *m* sım menen orap bolama?

3.4. 4-súwrette xana tóbesi súwretlengen. Tóbeniń ishki bólegin aq, sırtqı bólegin bolsa jasıl reń menen boyaw kerek. 1. Súwrette belgilengen belgisiz kesindi úzınıǵın tabıń. 2. Jasıl reńge boyalǵan tóbe bóleginiń maydanın tabıń. 3. Aq reńge boyalǵan tóbe bóleginiń maydanın tabıń.

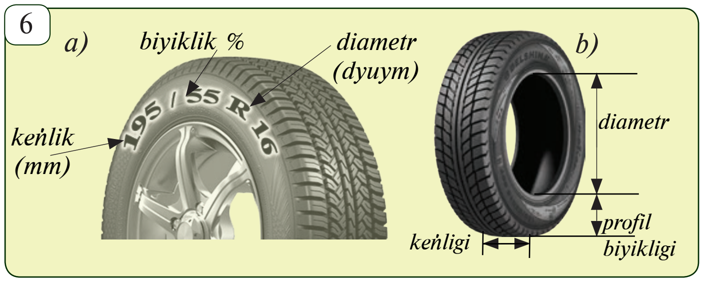
3.5. Velosiped dóńgeleginiń diametri 64 cm. (5-súwret) Ashraf velosipedte 100 m aralıqtı basıp ótti. Bunda velosipedtıń hár bir dóńgelegi neshe márte tolıq aylandı? (Esletpe: sheńber uzınlıǵı C=2πr formula menen esaplanadı).





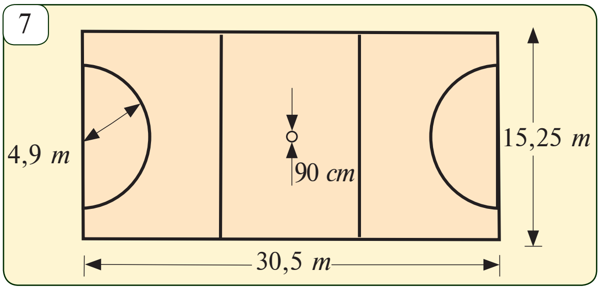
3.7. Avtomobil shinası sırtındaǵı jazıw belgili ólshemlerdi bildiredi (6.a-súwret). Mısalı, 195/55 R16 jazıwda 195 sanı shina keńligin mm lerde ańlatadı. (6.b-súwret). Ekinshi san 55 - .shina profili biyikliginiń shina keńligine salıstırmalı payızın kórsetedi. Biziń jaǵdayda shina profili biyikligi 195 · 55% = 107 mm = 10,7 cm. R16 jazıw bolsa shinanıń ishki diametriniń dyumlerdegi ańlatpası. 1 dyum shama menen 2,54 cm ekenligin esapqa alsaq, biziń shina ishki diametri 16 · 2,54 = 40,64 cmge teń boladı.

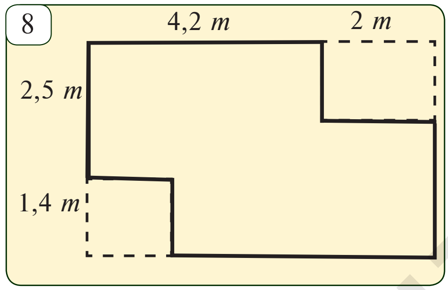
Ravon markadaǵı Neksiya avtomobili shinasında 175/60 R15 jazıw bar. Bul avtomobil shinasınıń keńligi, profil biyikligi, ishki diametri hám dóńgeleginiń biyikligi yaǵnıy sırtqı diametrin santimetrlerde anıqlań.



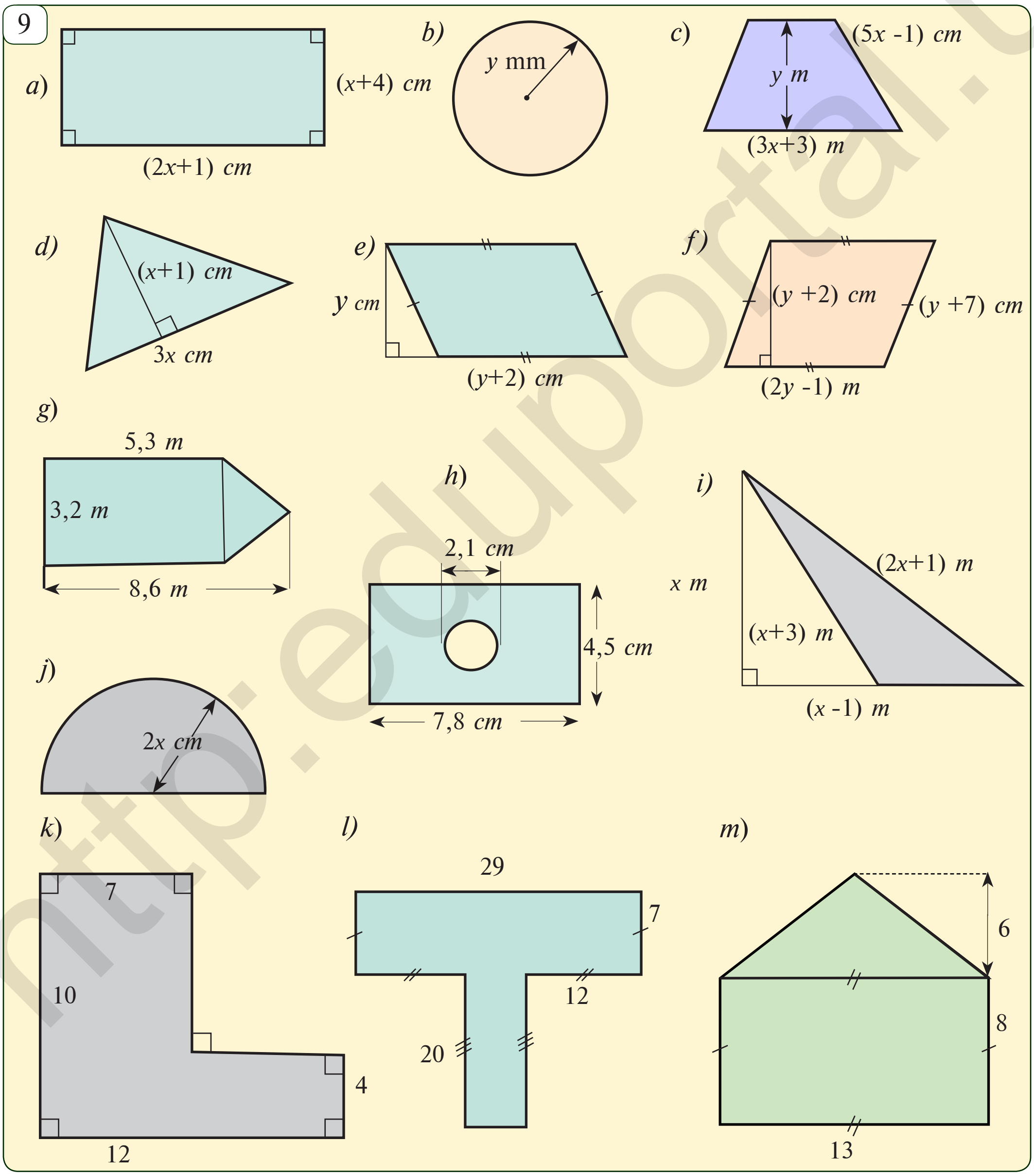
3.8. 7-súwrette berilgen amerikansha futbol stadionınıń perimetrin esaplań. Bul stadion maydanın belgilew ushın sızılatúǵın sızıqlardıń jámi uzınlıqların tabıń.

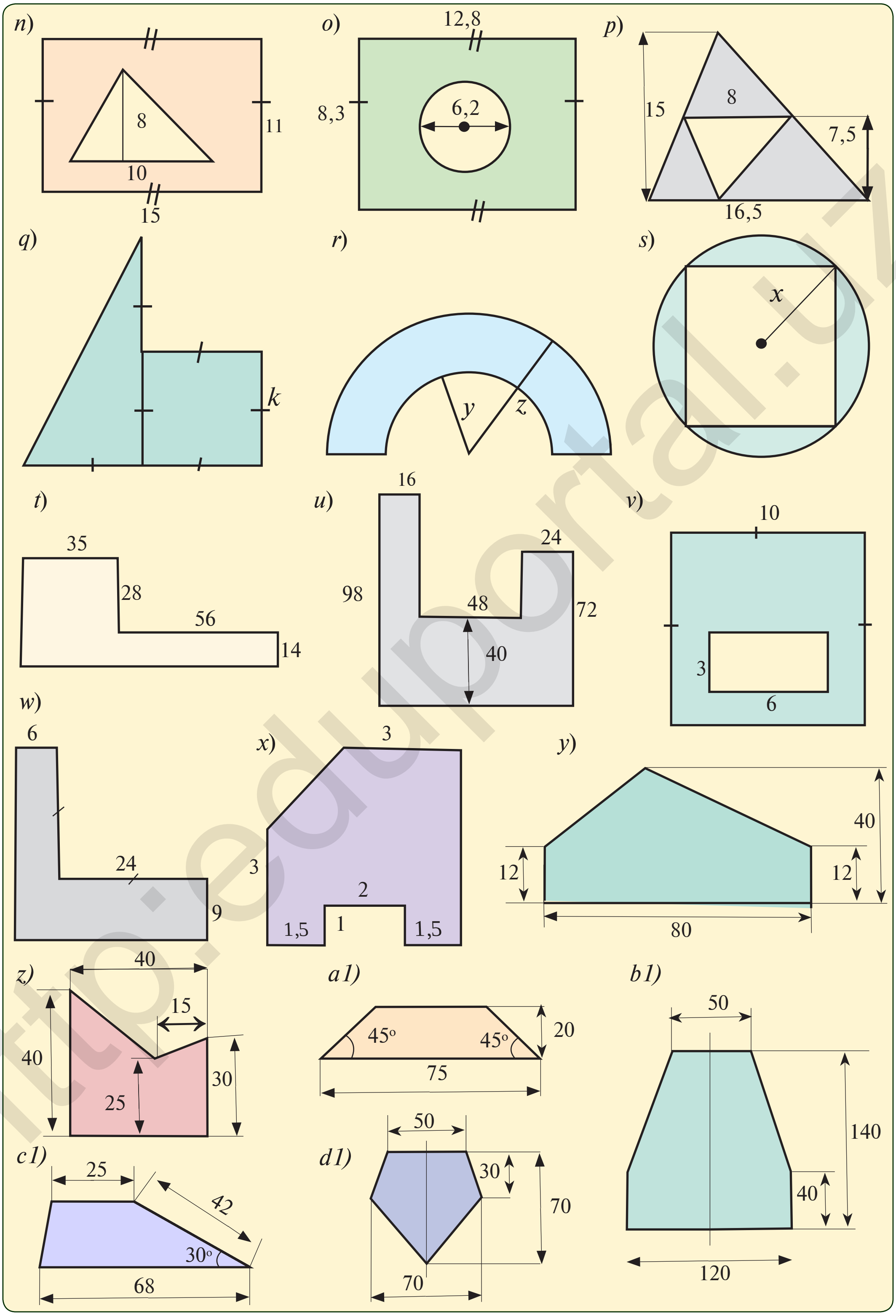
3.9. 8-súwrette súwretlengen jer maydanınıń perimetrin tabıń.





3.10. 9-súwrette súwretlengen túrli figuradaǵı betiniń maydanıń tabıń.




n)
8
10
11
15
o)
12,8
8,3
6,2
p)
15
8
7,5
16,5
q)
k
r)
y
z
s)
x
t)
35
28
56
14
u)
16
24
98
48
72
40
v)
10
3
6
w)
6
24
9
x)
3
3
2
1,5
1
1,5
y)
40
12
12
80
z)
40
15
40
25
30
a1)
45°
45°
20
75
b1)
50
140
40
120
c1)
25
42
30°
68
d1)
50
30
70
70

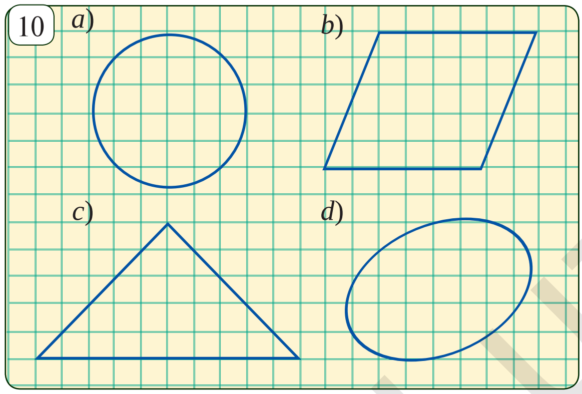
3.11. Ámeliy tapsırma. 10-súwrette keltirilgen figuralardı kletkalı dápterińizge sızıp alıń. Olardıń maydanın tabıw ushın qanday usıllardı usınasız? Dápterińiz kletkalerınan paydalanǵan halda olardıń maydanın shama menen qanday anıqlaw múmkin?

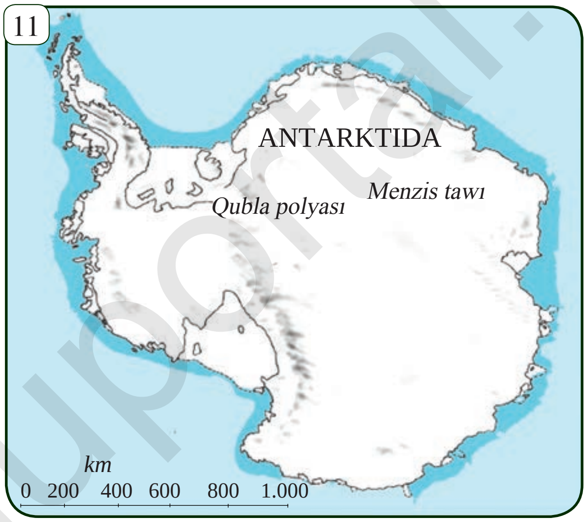
3.12. 11-súwrette Antraktida materiginiń kartası keltirilgen. Berilgen masshtabtan paydalanıp hám tiyisli járdemshi jasawlardı orınlap, materiktiń maydanın shama menen anıqlań.

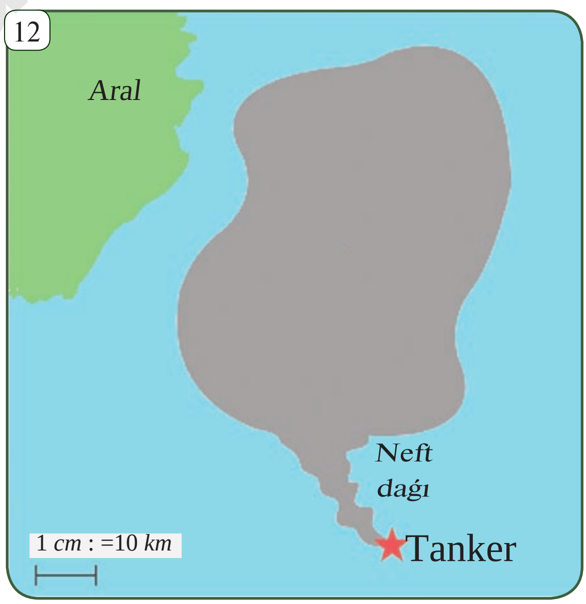
3.13. 12-súwrette neft tasıp kiyatırǵan tanker avariyaǵa ushırap, teńiz sırtında úlken neft dagı payda bólgan. Berilgen masshtabtan hám tiyisli ólshem islerin orınlap, neft dagınıń maydanın tabıń.

3.14. Tamarqa perimetri 48 m bólgan kvadrat túrinde. Onı 8 teńdey tuwrı tórtmúyeshlik figuradaǵı uchastkalarǵa bólingen. Payda bolgan tórtmúyeshli uchastkalarǵa a) tareplerin; b) maydanın anıqlań. Uchastkalardıń maydanı tamarqa maydanınan neshe payizǵa kishi?

3.15. Perimetri 20 *m*, uzınlıǵı eninen 1,5 márte uzın bólǵan túwrıtórtmúyeshlik kórinisindegi tamarqa kishi uchastkalarǵa bólingen. Eger uchastkalar a) kvadrat; b) tuwrı tórtmúyeshlik formasında bolsa, olar arasında maydanı eń úlken bolǵanınıń ólshemlerin anıqlań.







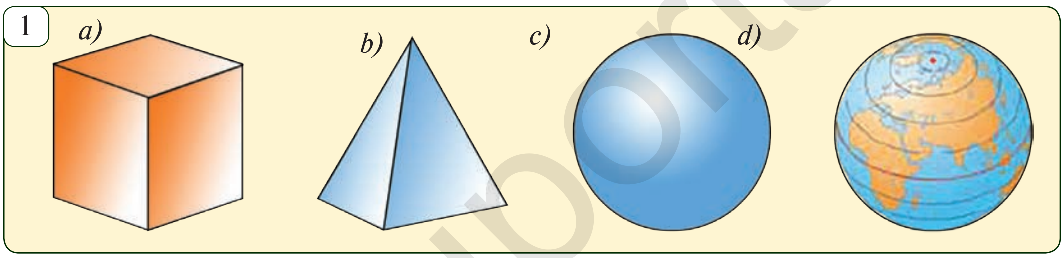
4 3D-GEOMETRIYA – KEŃISLIKTEGI DENELERDE PLANIMETRIYA MÁSELELERI

Málim bolıwınsha, tegis figuralardı geometriyaniń planimetriya bólimi, Keńislik denelerin stereometriya bólimi úyrenedi. Mısalı, túwrıtórtmúyeshlik - tegis figura bólıp, onıń uzınlǵı hám eni, yaǵnıy eki ólshemi bar. Parallelepiped bolsa keńisliktegi figura bolıp, onıń boyı, eni hám biyikligi, yaǵniy úsh ólshemi bar.

Keńislik deneleri haqqında aldıńǵı klasslarda bilimge iye bolǵansız. Olardı 10—11-klasslarda stereometriya kursında tolıq, sistemalı túrde úyrenesiz. Sonday bolsada, stereometriyaniń qatar máseleleri bar, olardı tek planimetriya járdeminde hám sheshiw múmkin. Tómende planimetriyaǵa baylanıslı sonday 3D (3 demention - 3 ólshemli) geometrik máselelerdi keltiremiz. Keńisliktegi deneler haqqındaǵı tiykarǵı túsiniklerdi qısqasha esletip ótiwdi lazım taptıq.

Keńisliktiń shegaralanǵan bólegi *keńislik denesi* deb ataladı. Keńislik denesiniń shegarasına (qabıǵına) onıń *beti* delinedi. Mısalı, Keńislik figurası - kubtıń beti 6 kvadrattan, shardıń beti sferadan ibarat boladı.

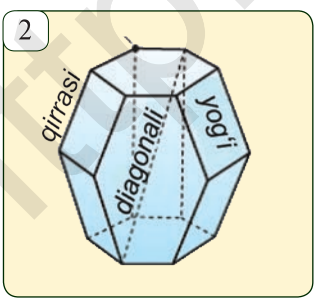
Eki bettiń kesilispesinen sızıq payda boladı. Mısalı, 1- súwrettegi kub hám

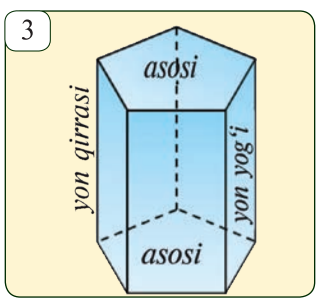


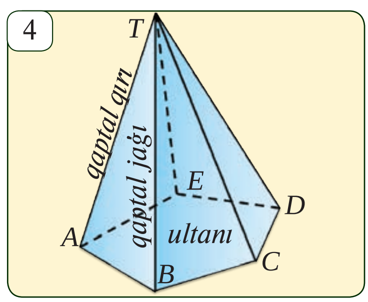
piramida qırları sonday tegisliklerdiń kesilispesinen payda bolǵan. Sfera hám tegisliktiń kesilispesinen bolsa sheńber payda boladı.

Eki sızıqtıń kesilispesinen noqat payda boladı. Mısalı, 1-súwrettegi kub hám piramidaniń qırlarınan noqatlar, yaǵnıy olardıń ushları payda boladı.

Kópjaqlılar deb tegis kópmúyeshlikler menen shegaralanǵan denege aytıladı. Tegis kópmúyeshlikler bul *kópjaqlılar jaqları,* kópmúyeshliklerdiń ushları *kópjaqlılar ushları,* tárepleri bolsa *kópjaqlılar qırları* deb ataladı. Bir jaqqa tiyisli bólmaǵan ushların birlestiriwshi kesindi *kópjaqlılar diagonalı* dep ataladı (2-súwret).





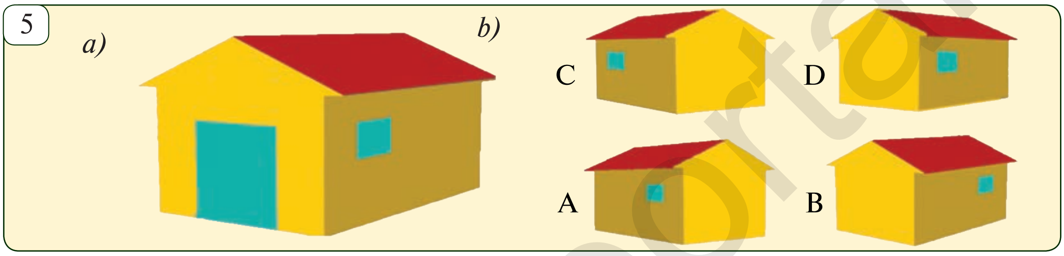


Prizma dep eki jaǵı teń kópmúyeshlikden, qalǵan jaqları bolsa parallelogrammlardan ibarat kópjaqlıǵa aytıladı (3-súwret). Teń jaqlar prizmanıń *ultanları,* parallelogrammlar bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. Ultanınıń tárepleri sanına qarap prizmalar *úshmúyeshli, tórtmúyeshli hám basqa n-múyeshli prizmalar* dep júritiledi.

Piramida dep bir jaqlı kópmúyeshlikten, qalǵan jaqları bolsa bir ushqa iye úshmúyeshliklerden ibarat kópjaqlıǵa aytıladı. Kópmúyeshlik piramidanıń *ultanı*, úshmúyeshlikler bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. 4-súwrette *TABCDE* bes-múyeshlik piramida súwretlengen. *ABCDE* becmúyeshlik piramidanıń ultanı, *ATB, BTC, CTD, DTE* hám *ETA* úshmúyeshlikler - onıń qaptal jaqları, T - bolsa onıń tóbesi.

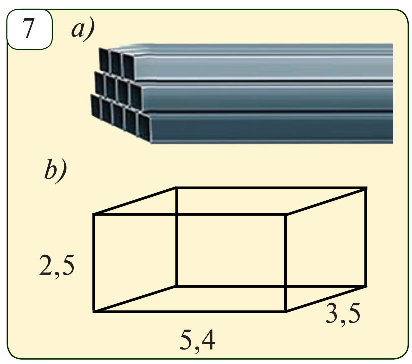
4.1 5.a- súwrette garaj súwretlengen. 5.b- súwrette bolsa onıń túrli jaqtan kórinisleri berilgen. Olardan tek birewi joqarıdaǵı garajǵa tiyisli. Bul kórinis qaysı?

4.2. 6.a- hám 6.b- súwrette imarattıń qaptal tárepinen qaraǵanda kóringen súwretler keltirilgen. 6.c- súwrette bolsa imarat tóbesinen kórinisi hám oǵan qaraǵan tórt noqatlar orni belgilengen. Qaysı noqattan imaratqa qaraǵanda 1) 6.a- súwrettegi; 2) 6.b-súwrettegi súwretlerdi kóriw múmkin?

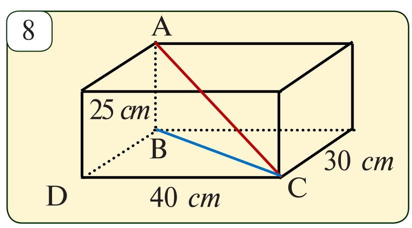


4.3. 12 dana 6 metrlik trubalar bar. (7.a-súwret). Olardan eni 3,5 *m*, boyı 5,4 *m* hám biyikligi 2,5 *m* bólgan túwrı múyeshli parallelepiped figuradaǵı garaj karkasın tayarlaw kerek. (7.b-súwret). Trubalar kerekli uzınlıqtaǵı bóleklerge kesilip, sóń paydalanadı.

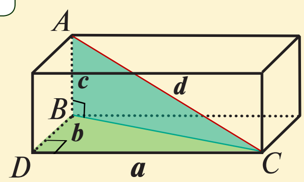
Eń únemli variantta kesiwde bul karkas ushın neshe truba sarplanadı? Bunday kesiw-de qansha truba shıǵındıǵa ketedi?



4.4. Bazı hawa jolları kompaniyaları samolyotlarına shıǵarılıp atırǵan jolawshılardıń chemodanı diagonalınıń uzınlıǵı 56 *cm* den úlken bolmawı kerek. 8-súwrette súwretlengen tuwrı múyeshli parallelepiped kórinisindegi, ólshemleri 40 *cm* x 30 *cm* x 25 *cm* bolǵan chemodandı samolyotqa alıp shıǵıw múmkinbe?



9



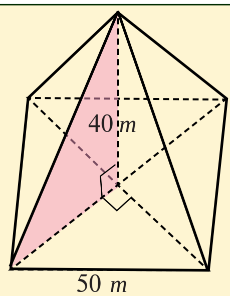
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Sheshiliwi: Aldın chemodan ultanındağı BC kesindiniń uzınlığın tabamız. Pifagor teoremasına kóre: $BC^2 = 40^2 + 30^2$.
ABC úshmúyeshlik tuwrımúyeshli úshmúyeshlik. Jáne Pifagor teoremasınan paydalanıp, chemodannıń diagonalın tabamız:
$AC^2 = AB^2 + BC^2$,
$AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125$. $AC = 55{,}9$ *cm*.
Juwabı: Múmkin, sebebi $AC < 56$ *cm*.

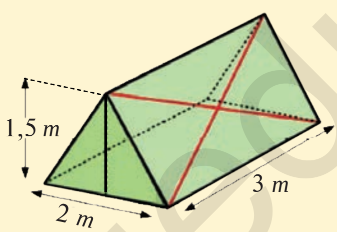
Joqarıdağı máseleniń sheshiminen ulıwma halda tómendegi ájayıp qásiyet kelip shıǵadı. Onı Pifagor teoremasınıń keńisliktegi analogi (uqsaslığı) dep hám ataydı. Bul qásiyetti erkin orınlawǵa urınıp kóriń. (9-súwret).

Teorema.* *Tuwrı tórtmuyeshli parallelepiped diagonalınıń kvadratı onıń úsh ólshemleri (uzınlığı, eni hám biyikligi) kvadratlarınıń qosındısına teń.

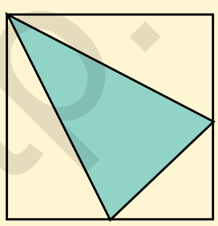
10



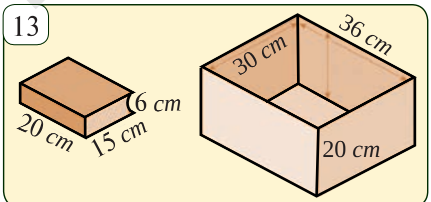
11



12



13



4.5. 10- súwrette súwretlengen túwrıtórtmuyeshli piramidanıń biyikligi 40 *m* ge teń, ultanı bolsa tárepi 50 *m* bolǵan kvadrattan ibarat. Piramidanıń qaptal qırın tabıń.

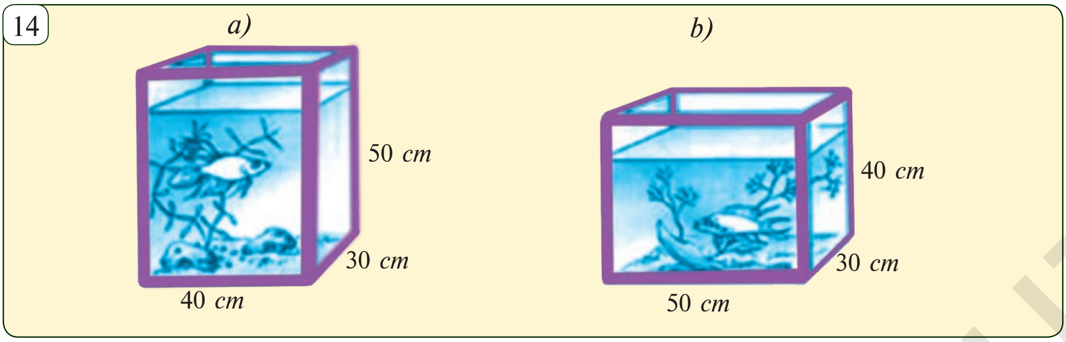
4.6. 11- súwrette súwretlengen prizma kórinisindegi shertek tigiw ushın qansha material kerek boladı?

4.7. Tárepi 8 *cm* ge teń bolǵan kvadrat kórinisindegi qaǵaz 12-súwrette kórsetilgendey qılıp búklep piramida payda qılındı. Piramidanıń kólemin tabıń.

4.8. Túwrı tórtmúyeshli parallelepiped kórinisindegi ıdıstı hesh qanday ólshew ásbaplarınan paydalanbastan, hesh qanday esaplawlardı orınlamastan qanday qılıp jartısına shekem suw menen toltırıw múmkin? Eger ıdıstıń bóyı 4 *cm*, eni bolsa biyikliginen 0,5 *cm* uzın, biyikligi bolsa boyınıń 37,7 % in qurasa, ıdıstaǵı suw kólemin esaplań.

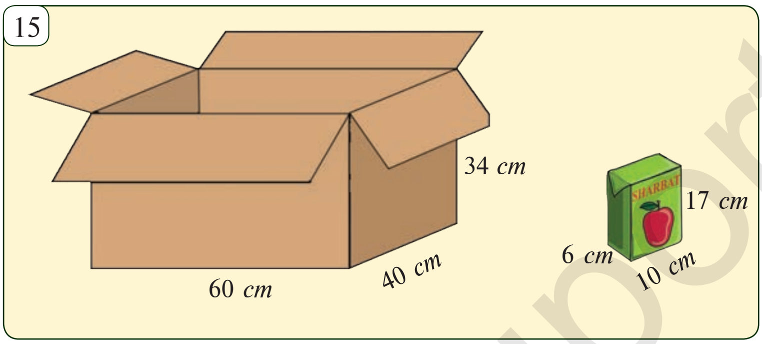
4.9. Birdey ólshemdegi kitaplardı sandıqqa salıw kerek (13-súwret). Bul sandıqqa neshe kitaptı jaylastırıwǵa boladı?

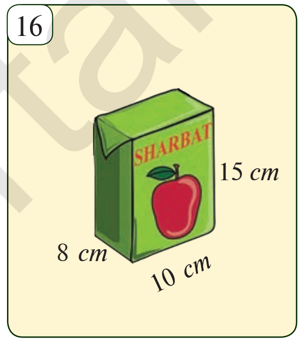
4.10. Eki akvariumge joqarı shetinen 10 cm tómen qılıp suw quyıldı (14-súwret). Qaysı akvariumde suw kóp?



4.11. Qutıǵa neshe paket miywe sherbeti sıyadı (15-súwret)?

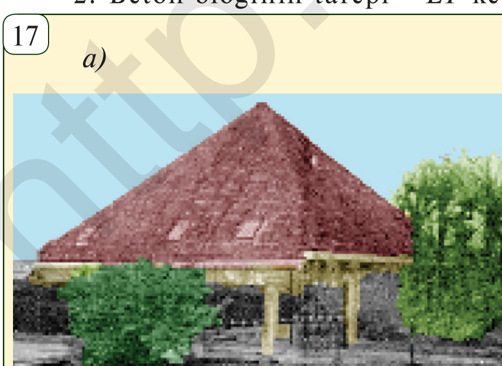
4.12. 1 litrli miywe sherbeti paketi túwrıtórtmuyeshli parallelepiped kórinisinde (16-súwret). Bir qutı ushın qansha material kerek boladı?

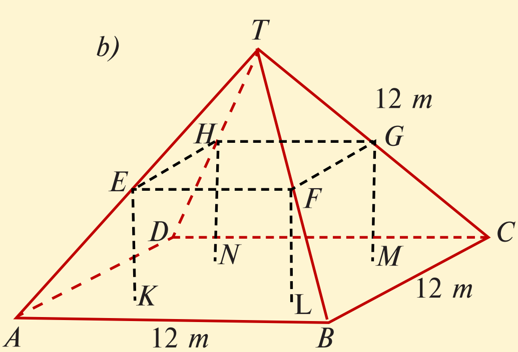




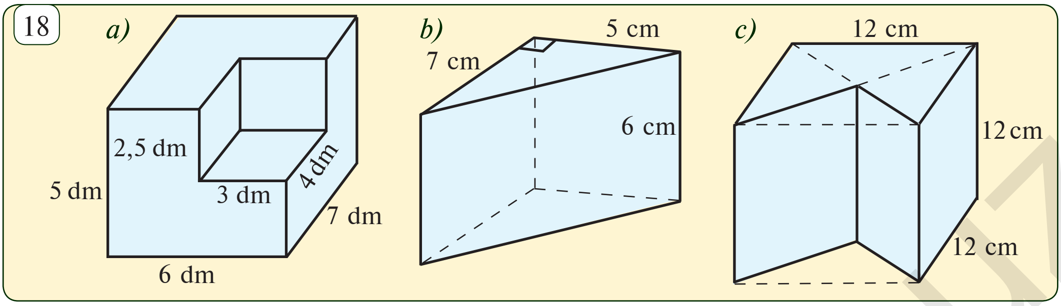
4.13. 17.a-súwrette súwretleńen uydıń tóbesi piramida kórinisinde. Tómende oqıwshılar tárepinen bul úydiń sızılması (matematik modeli) sızılǵan. (17.b-súwret) hám bazı kesindilerdiń uzınlıqları kórsetilgen. Sızılmaǵa kóre úydiń ultanı *ABCD* kvadrat kórinisinde. Úydiń qırları *EFGHKLMN* tuwrı tórtmúyeshli parallelepiped kórinisindegi beton blokka tirelgen: *E* - *AT* qırınıń, *F* - *BT* qırınıń, *G* - *CT* qırınıń hám *H* - *DT* qırınıń órtası. Piramidanıń hámme qırları uzınlıǵı 12 *m*.

1. Úydiń ultanı *ABCD* kvadrattıń maydanın tabıń.
2. Beton blogınıń tárepi - *EF* kesindi uzınlıǵın tabıń.

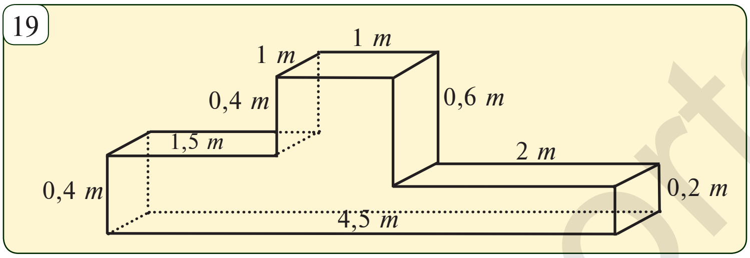


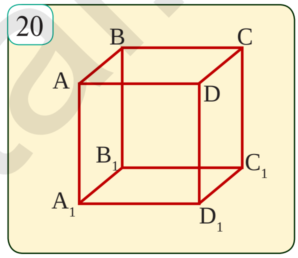


4.14*. 18-súwrette súwretlengen aǵash bólekleriniń kólemin esaplań.

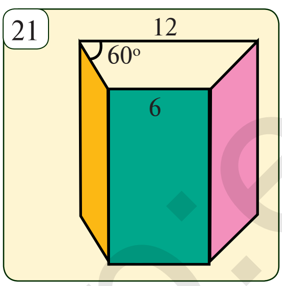


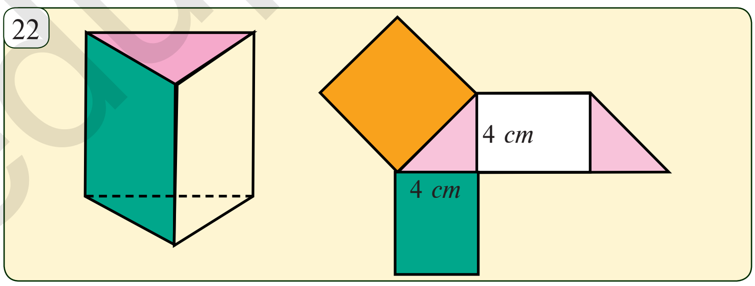
4.15. 19-súwrette sport arenasındaǵı jeńimpaz orınları súwretlengen. Berilgenlerden paydalanıp, onıń kólemin tabıń (barlıq eki jaqlı múyeshleri durıs).

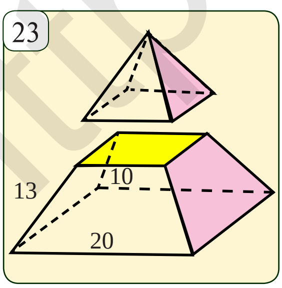




4.16. 20-súwrette tuwrı tórtmúyeshli parallelepipedtiń AA_1D_1D jaqlarınıń perimetri 20 cm, $ABCD$ jaǵı - perimetri 16 cm bólgan kvadrattan ibarat. a) $ABCC_1D_1A_1$ sınıq sızıqtıń uzınlıǵın; b) DD_1C_1C jaqtıń perimetrin hám maydanın; c) parallelepipedtiń kólemin tabıń.





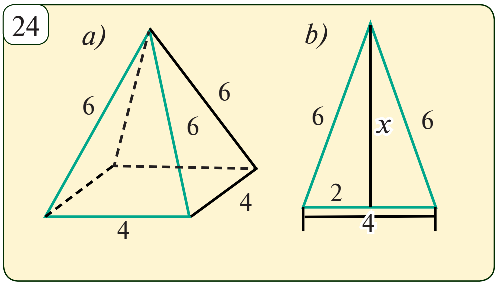


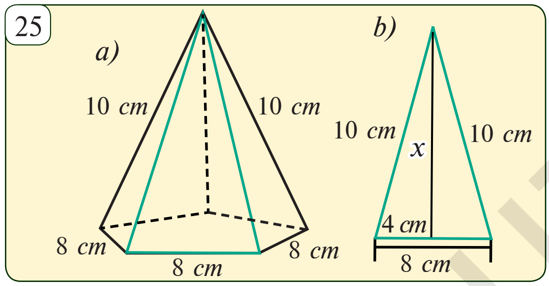
4.17. 21-súwrette súwretlengen durıs prizmanıń ultanı teń qaptallı trapetsiyadan ibarat. Trapetciyanıń ultanları 12 *cm* hám 6 *cm*, ultanındaǵı súyir múyeshlerden biri 60° qa teń. Eger prizma úlken jaǵı kvadrattan ibarat bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

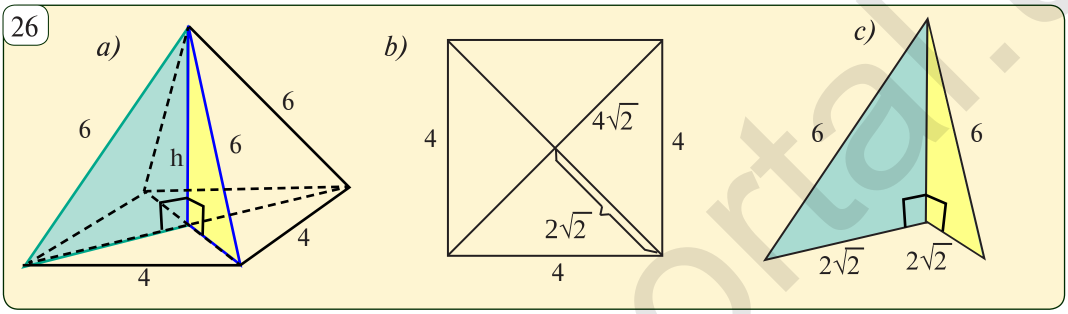
4.18. 22-súwrette prizma hám onıń jayılması súwretlengen. Eger prizma úlken jaǵı kvadrattan ibarat bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

4.19. 23-súwrettegi durıs tórtmúyeshli piramida ultanına parallel bolǵan tegislik penen kesiliskende, kesik piramida payda boladı. Kesik piramida ultanlarınıń tárepi 20 *cm* hám 10 *cm*, qaptal qırı 13 *cm* bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

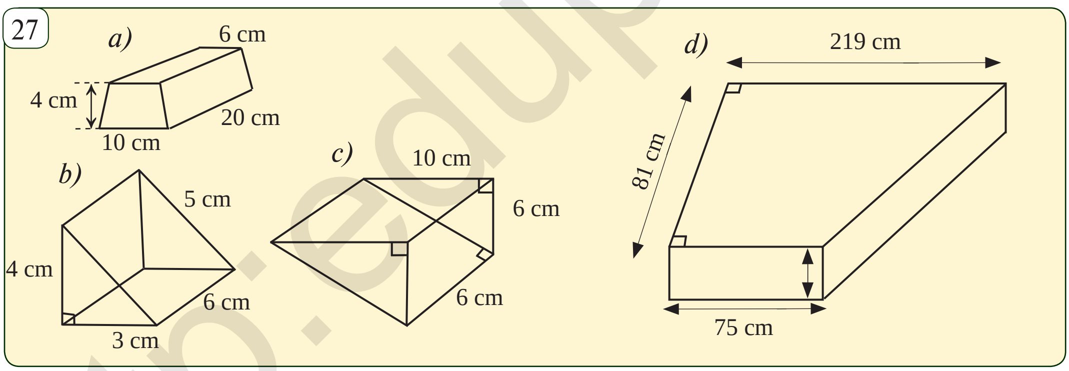
4.20. 24-26-súwretlerde berilgan maǵlıwmatlar hám járdemshi sızılmalar tiykarında belgisiz aralıqlardı tabıń.







4.21. 27-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında kópjaqlılardıń tolıq betin hám kólemin tabıń.



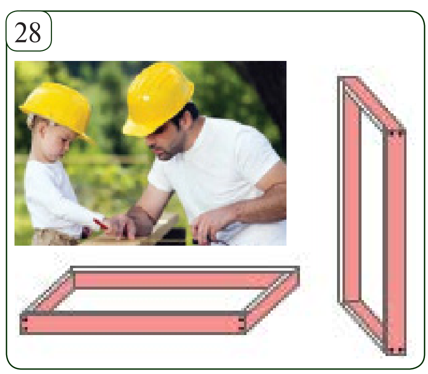
Geometriya hám aǵash ustashılıǵı

Uzınlıǵı 2 *m* 20 *cm*, eni 12 *cm* hám qalıńlıǵı 2 *cm* bolǵan reykalardan ata hám bala eni 1 *m* boyı 1 *m* 80 *cm* bolǵan ayna jasamaqshı.

1. Bul aynanı jasaw rejesin dúziń.

2. Jasalǵan aynanıń tuwrı tórtmúyeshlik figurada ekenligi a) Muyeshli sızǵısh; b) ruletka járdeminde qalay tekseriw múmkin.

3. 4 ta aynanı jasaw ushın neshe dana reyka talap qılınadı? (28-súwret).



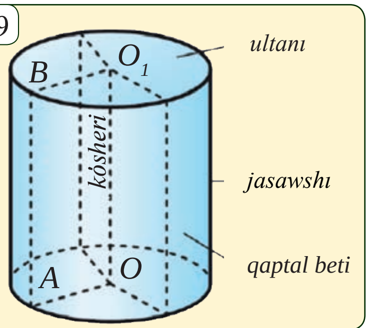
Keńislik figuralarınıń jáne áhmiyetli klaslarınan biri- bul aylanıw deneleri. Olarǵa cilindr, konus hám shar kiredi.

Tuwrı tórtmúyeshlik bir tárepi átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denege *silindr* dep aytıladı. 29-súwrette cilindrdiń elementleri: ultanları, jasawshısı, kósheri hám qaptal beti súwretlengen.

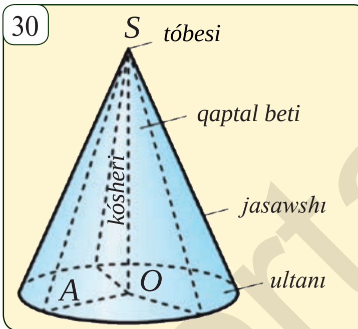
Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikti bir kateti átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denege *konus* dep aytıladı. 30-súwrette konustıń tóbesi, qaptal beti, jasawshısı hám ultanı súwretlengen.

Dóńgelekti óz diametrik átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denege *shar*

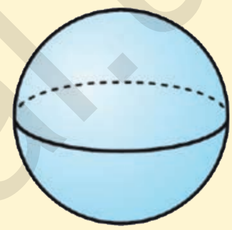
29



30

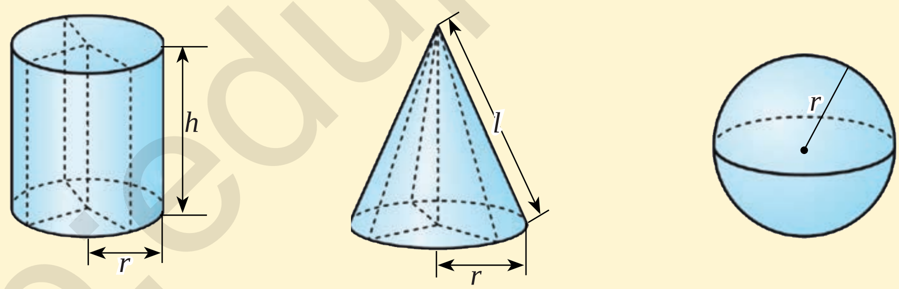


31



dep aytıladı. (31-súwret). Bul aylandırıwda sheńber payda qılǵan betı *sfera* dep ataladı. Bunnan belgili shardıń beti sferadan ibarat boladı. Sfera orayınan onıń qálegen noqatına shekem bolǵan aralıq onıń radiusin anıqlaydı.

Aylanıw deneleriniń qaptal hám tolıq beti maydanınıń formulaları:



Cilindr	**Konus**	**Shar**
$S_{q.b} = 2\pi rh$	$S_{q.b} = \pi rl$	$S = 4\pi r^2$
$S_{tolıq\ b} = 2S_{ult} + S_{q.b} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$S_{tolıq\ b} = S_{ult} + S_{q.b} = \pi r^2 + \pi rl$	

1- másele

$h = 5\ cm$, $r = 6\ cm$ bolsa,

$S_{q.b} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h \approx$

$\approx 2\cdot 3,14\cdot 5\cdot 6 = 565(cm^2)$.

2- másele

$r = 5\ cm$, $l = 12\ cm$ bolsa,

$S_{tolıq\ b} = \pi r^2 + \pi rl \approx$

$\approx 3,14\cdot 5^2 + 3,14\cdot 5\cdot 12 =$

$= 267(cm^2)$.

3- másele

$r = 8\ cm$ bolsa,

$S = 4\cdot\pi r^2 \approx$

$\approx 4\cdot 3,14\cdot 8^2 =$

$= 803,84(cm^2)$.

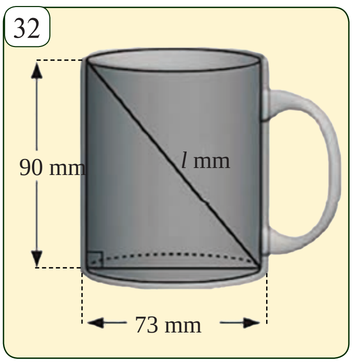
Tómende planimetriya járdeminde sheshiletuǵın aylanıw denelerge tiyisli máselelerdi qarap shıǵamız.

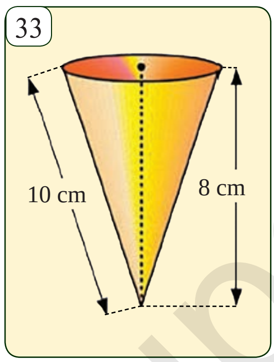
4.22. Shar orayınan onıń sırtında jatqan 4 noqatqa shekem bolǵan aralıqlar qosındısı 24 *cm* ge teń. Shar diametrin tabıń.

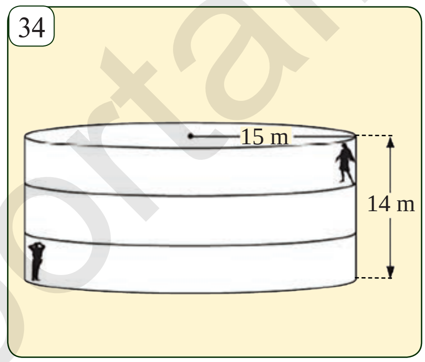
4.23. Ashraftıń finjani (kofe ishetuǵın ıdısı) biyikligi 90 *mm*, ultanınıń diametri 73 *mm* ge teń (32-súwret). Kofege salınǵan qumsheker yaki sútti aralastırıw waqtında Ashraftıń qolı kúymewi ushın qasıqtıń uzınlıǵı keminde qansha bolıwı kerek.

Sheshiw: Qasıqtıń uzınlıǵın 32-súwrettegidey l dep alsaq, onda Pifagor teoremasına kóre: $l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$ ga iye bolamız. Bundan $l = 115{,}9$ *mm*.

Juwabı: Qasıqtıń uzınlıǵı 116 *mm* den kem bolmawı lazım.



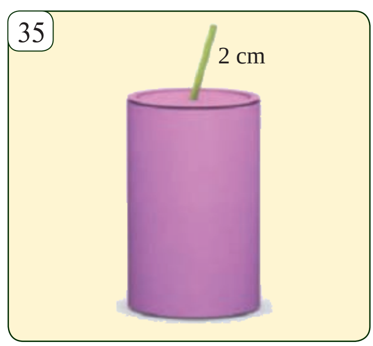




4.24. 33-súwrette berilgenlerden paydalanıp, konus formasındaǵı muzqaymaq ultanınıń radiusın tabıń. Onıń kólemin tabıń.

4.25. 34-súwrette súwretlengen London qalasındaǵı Shekspir Globus teatr silindr formasında. Súwrette berilgenlerden paydalanıp teatrdıń tómengi muyeshindegi aktyor dawısı joqarıda turǵan tamashagóyge jetip barıwı ushın qansha aralıqtı basıp ótiwin anıqlań?

4.26. 35-súwrette súwretlengen cilindr formasında ıdıstıń biyikligi 12 *cm*, kenligi bolsa 8 *cm*. Joqarı ultanı qaq ortasında tesik bar. Bul ıdıstan ishimlik ishiw ushın mólsherlengen naysha uzınlıǵı qansha bolıw kerek? Nayshanıń kórinip turǵan bóleginiń uzınlıǵı 2 *cm*.



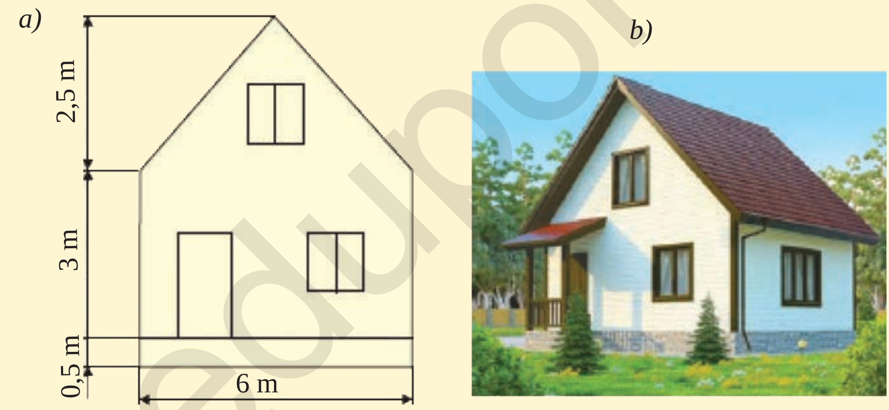
4.27. Mıstan islengen biyikligi 30 *cm* bolǵan konus eritilip, onnan cilindr jasaldı. Eger konus hám cilindr ultanları teń shenberlerden ibarat bolsa, payda bolǵan cilindr biyikligin tabıń.

5 JOYBAR JUMÍSÍN ORÍNLAW BOYÍNSHA KÓRSETPELER

Joybar jumısı teması ústinde oqıwshılar jeke-jeke yáki 3-4 kisilik topar bolıp islewleri mumkin. Joybar jumısı oqıw jılı aqırında ótkiziletuǵın qorǵaw (kishi konferenciya) menen tamamlanadı. Joybar jumısı ustinde jumıs prosesi tómendegi oqıw iskerliklerin óz ishine alıwı múmkin: izleniw iskerligin rejelestiriw, wazıypalardı óz ara bólistiriw, oqıw maqsetlerin qoyıw, kerekli maǵlıwmatlardı izlep tabıw, temaǵa tiyisli mashqalalı sheshimlerin izlew, olardan eń kereklisin tańlaw hám onı tiykarlaw, zárur jaǵdaylarda sorawlar yaki tájiriybeler ótkiziw, joybar jumısı natiyjeleri boyınsha esabat tayarlaw, óz jumıs barısın analizlew hám bahalaw, joybar jumısı qorǵawı ushın kórgizbe tayarlaw hám onı qorǵaw. Oqıwshilar joybar jumısı boyınsha izleniwlerdi jıl dawamında ádette sabaqtan tısqarı óz betinshe shınıǵıwlarda alıp barıladı.

Joybar jumısı temaları ámeliy, teoriyalıq hám izertlew xarakterinde bolıwı múmkin. Ameliy jumısta geometriyadan ózlestirilgen bilim hám kónlikpeler turmıs jaǵdaylarındaǵı mashqalalardı sheshiwge qollanıladı. Teoriyalıq joybar jumıslarında bolsa geometriyanıń bazı bir teması tereńirek úyreniledi. Izertlew jumıslarında

36



bolsa bazı bir standart emes geometriyalıq másele yáki turmıslıq mashqalanı sheshiw ústinde kishi ilimiy izleniwler alıp barıladı.

Ámeliy joybar jumısı úlgisi

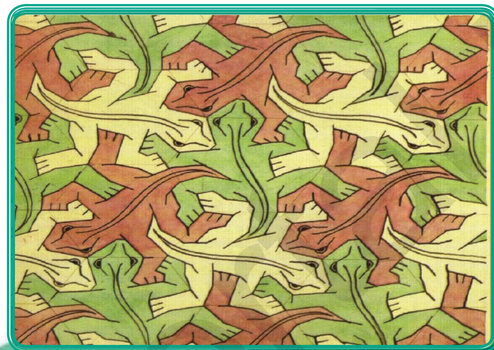
Joybar tapsırması. 36-súwrette súwretlengen dala hawlisindegi úy diywalların boyaw kerek. Úydi qurıw rejesi (tapsırmaǵa qosımsha etiledi) tiykarında bul jumıstı orınlaw ushın eń tejemli (arzan) joybardı islep shıǵıń.

Joybar jumısın orınlaw prosesinde oqıwshılar úy rejesin óz úyrenip shıǵadı. Wazıypalardı anıqlap, reje dúzedi hám jumıslardı óz ara bólisip aladı. Dáslep boyalatuǵın maydandı anıqlap alınadı. Boyaw ushın qansha boyaw kerekligi sorap anıqlanadı. Bir neshe boyaw túrleri boyınsha esap-kitap qılınadı. Qaysı boyaw isletilse, maqsetke muwapıq bolıwı anıqlanadı hám tiykarlanadı. Tańlanǵan boyaw boyınsha barlıq esap-kitap isleri orınlanadı ham joybar jumısın hámde ol boyınsha kórgizbe tayarlanadı.

Eskertiw: Súwrette úy rejesiniń hámmesi keltirilmegen.

I BAP

GEOMETRIYALÍQ ALMASÍWTÍRÍWLAR HÁM UQSASLÍǴÍ



Bul baptı úyreniw barısında siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

Bilimler:

√ *uqsas figuralardıń táreplerin hám belgileniwin biliw;*
√ *úshmúyeshliktiń uqsaslıq belgilerin biliw;*
√ *gomotetiya túsinigin biliw.*

Ámeliy kónlikpeler:

√ *eki uqsas úshmúyeshliklerden óz ara sáykes elementlerin taba alıw;*
√ *úshmúyeshliklerdiń uqsaslıq táreplerin dálillew hám esaplawǵa baylanıslı máselelerdı sheshıwde qollay alıw;*
√ *gomotetiyadan paydalanıp uqsas kóp múyeshliklerdi jasay alıw.*

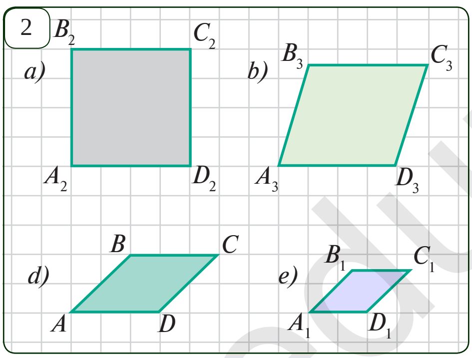
6 KÓPMÚYESHLIKLERDIŃ UQSASLÍǴÍ

1

Kúndelikli turmısta teń figuralardan basqa forması (kórinisi) bir qıylı, lekin ólshemleri túrlishe bolǵan figuralarǵa da dus kelemiz. Tariyx hám geografiya pánlerinde túrli masshtabta islengen kartalardan paydalanǵanbız. Klass taxtasına ildirilgen hám sabaqlıqta súwretlengen respublikamızdıń kartaları túrli ólshemde, lekin olar bir qıylı formada (kóriniste). Sonday-aq, bir foto-plyonkadan túrli ólshemdegi fotosúwretler tayarlanadı. Bul súwretlerdiń ólshemleri túrlishe bolsa da, bir qıylı kóriniste, yaǵniy olar bir-birine uqsaydı (*1-súwret*).

Shınıǵıw. 2-súwrette tórt romb súwretlengen. Olardan tek d)hám e) romblar bir qıylı kóriniske iye. Bul romblar nesi menen basqa romblardan ajıralıp turadı? Keliń, birgelikte anıqlayıq.

2



Keliń, bunı birgelikte anıqlaymız.

1. Súwretten kórinip turǵanınday, $AD=3$, $A_1D_1=2$. Rombınıń tárepleri teń bolǵanı ushın,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

teńligin payda etemiz. Bul jaǵdayda romblardıń sáykes tárepleri proporcional dep aytıladı.

2. $ABCD$ hám $A_1B_1C_1D_1$ romblarda $\angle A=\angle A_1=45^\circ$, $\angle B=\angle B_1=135^\circ$, $\angle C=\angle C_1=45^\circ$, $\angle D=\angle D_1=135^\circ$. Bul jaǵdayda romblardıń sáykes múyeshleri óz ara teń dep júritiledi.

Solay etip, bul romblardıń bir-birine uqsaslıǵınıń sebebi — sáykes tárepleriniń proporcionallıǵı hám sáykes múyeshleriniń teńligi dep ayta alamız. Qálegen kópmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı túsinigi de usı tiykarında kiritiledi.

Eki kópmúyeshlik (besmúyeshlik) $ABCDE$ hám $A_1B_1C_1D_1E_1$ kópmúyeshlikleriniń múyeshleri sáykes túrde teń bolsın: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$. Bunday múyeshler sáykes múyeshler dep aytıladı. Onda, AB hám A_1B_1, BC hám B_1C_1, CD hám C_1D_1, DE va D_1E_1, EA hám E_1A_1 tárepleri kópmúyeshlikke *sáykes tárepleri* dep aytıladı.

Anıqlama. Bir qıylı atamalı kópmúyeshliklerdiń biriniń múyeshleri ekinshisiniń múyeshlerine sáykes túrde teń, sáykes tárepleri bolsa proporcional bolsa, bunday kópmúyeshlikler *uqsas kópmúyeshlikler* dep ataladı (*3-súwret*).

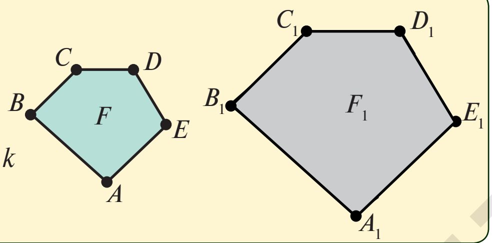
Kópmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı ∽ belgisi menen belgilenedi.

3

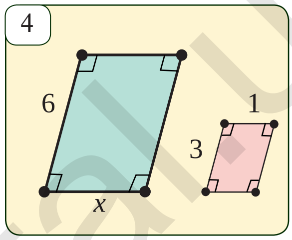
Sáykes múyeshlerge teń

$$F \backsim F_1 \begin{cases} \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1, \\ \angle D=\angle D_1,\ \angle E=\angle E_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{E_1A_1}{EA}=k \end{cases}$$

Sáykes tárepler proporcional



Uqsas kópmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnasına teń bolǵan k sanı bul kópmúyeshliklerdiń *uqsaslıq koefficenti* delinedi.



1- Másele. 4-súwrettegi kópmúyeshliktiń uqsaslıǵı belgili bolsa, belgisiz uzınlıqtı tabıń.

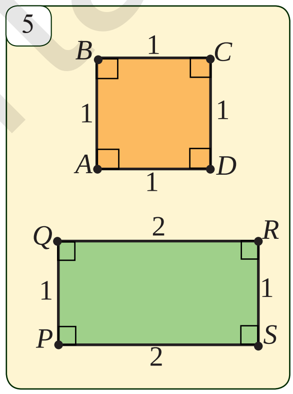
Sheshiliwi: Bul kópmúyeshlik uqsaslıǵınan olardıń sáykes tárepleriniń proporcional ekenligi kelib shıǵadı.

Demek, $\frac{x}{6}=\frac{1}{3}$. Bunnan $x = 6 : 3 = 2$ ekenligin tawamız. *Juwabı.* $x = 2$.

2-másele. 5-súwrette súwretlengen tórtmúyeshlikler uqsaspa? Nege?

Sheshiliwi: Yaq sebebi, olardıń sáykes tárepleri teń (90°) bolsada, sáykes tárepleri proporcional emes:

$$\frac{AB}{PQ}=1 \neq \frac{BC}{QR}=\frac{1}{2}$$

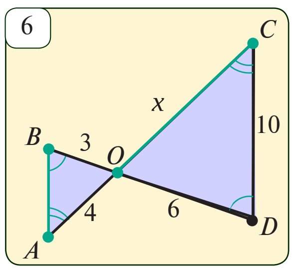


Másele hám shınıǵıwlar

6.1. Uqsas koefficenti degen ne hám ol qanday anıqlanadı?

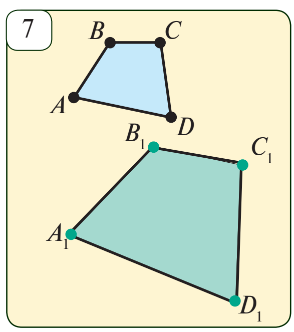
6.2. Eger ABC hám DEF úshmúyeshliklerinde $\angle A=105°$, $\angle B=35°$, $\angle E=105°$, $\angle F=40°$, $AC=4{,}4$ *cm*, $AB=5{,}2$ *cm*, $BC=7{,}6$ *cm*, $DE=15{,}6$ *cm*, $DF=22{,}8$ *cm*, $EF=13{,}2$ *cm* bolsa, olar uqsas bola ma?

6.3. 2-súwrettegi súwretlengen a) hám b) romblar ne sebepten uqsas emes? b) hám d) romblar-she?



6.4. 6-súwrettegi ABO hám CDO úshmúyeshlikleri uqsas bolsa, AB, OC tárepleri uzınlıǵın hám uqsaslıq koefficientin tabıń.

6.5. 7-súwrette $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. A_1B_1, D_1A_1 hám C_1D_1 lardı tabıń.



6.6*. ABC úshmúyeshliginiń AB hám AC tárepleriniń ortaları sáykes túrde P hám Q bolsın. $\Delta ABC \backsim \Delta APQ$ ekenligin dáliylleń.

7 UQSAS ÚSHMÚYESHLIKLER HÁM OLARDÍŃ QÁSIYETLERI

Eń ápiwayı kópmúyeshliklerden bolǵan úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın úyrenemiz.

Teorema. Eki uqsas úshmúyeshlik perimetrleriniń qatnasına uqsaslıq koefficientiniń teń.

Bul teoremanı óz betińizshe dáliylleń.

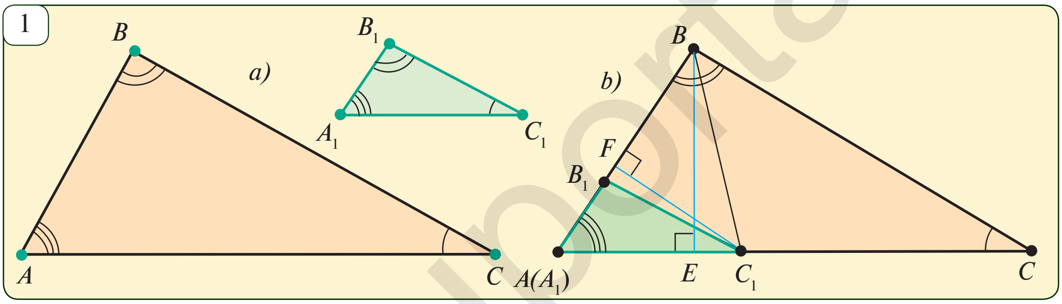
Teorema. Eki uqsas úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası uqsaslıq koefficientiniń kvadratına teń.

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ *(1-a súwret),*
k — uqsaslıq koefficienti

$\Rightarrow$

$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$

Dálillew: Teoremanıń shárti boyınsha, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Demek, kópmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń anıqlaması boyınsha, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$



$\angle A = \angle A_1$ ekenliginen paydalanıp, olardı 1-b, súwrettegidey ústpe-úst qoyamız hám tiyisli jasaw hámde belgilewlerdi ámelge asıramız.

Tómendegi úshmúyeshliklerdiń maydanların tabamız hám olardıń qatnasların qaraymız:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \qquad (2).$$

(1) teńlikti aǵzama-aǵza (2) teńlikke bólsek, teń múyeshke iye bolǵan úshmúyeshliklerdiń maydanınıń qatnası ushın (3) teńlikti payda etemiz.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \qquad (3)$$

Bul jerde shárt boyınsha, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ ekenligin esapqa alsaq,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

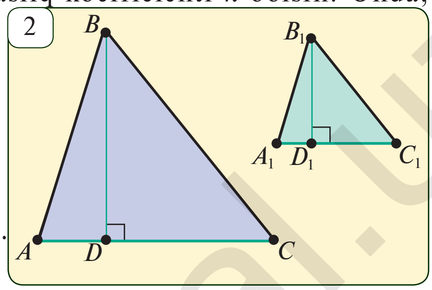
teńlik kelip shıǵadı. *Teorema dáliyllendi.*

<u>1-másele.</u> Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnası usı táreplerge túsirilgen biyikliklerdiń qatnasına teń ekenligin dáliylleń (*2-súwret*).

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1,\ BD, B_1D_1 -$ *biyiklikleri* $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$

Sheshiliwi. Berilgen úshmúyeshliklerdiń uqsaslıq koefficienti k bolsın. Onda, $AC : A_1C_1 = k;$ $\quad S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2 \quad (1)$ boladı. Ekinshi tárepten,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} \quad . (2)$$



(1) hám (2) teńliklerden $k \cdot \dfrac{BD}{B_1D_1} = k^2$ yaki $\dfrac{BD}{B_1D_1} = k$.

Solay etip, $\dfrac{BD}{B_1D_1}$ hám, $\dfrac{AC}{A_1C_1}$ qatnası da k ga teng, yaǵnıy $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$.

Másele hám shınıǵıwlar

7.1. Uqsas úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı teoremanı aytıń hám dáliylleń.

7.2. Eki ABC hám $A_1B_1C_1$ uqsas úshmúyeshlikleri berilgen. Eger $S_{ABC} = 25\ cm^2$ hám $S_{A_1B_1C_1} = 81\ cm^2$ bolsa, uqsaslıq koefficientin tabıń.

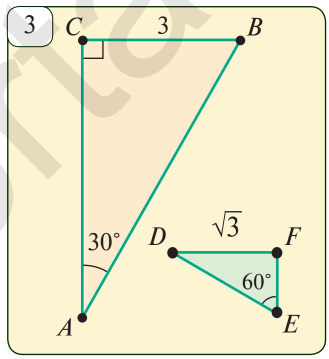
7.3. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanları 65 m^2 hám 260 m^2. Birinshi úshmúyeshliktiń bir tárepi 6 m bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń oǵan sáykes tárepin tabıń.

7.4. Berilgen úshmúyeshliktiń tárepleri 15 cm, 25 cm hám 30 cm. Eger perimetri 35 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen úshmúyeshlikke uqsas bolsa, onıń tároplerin tabıń.

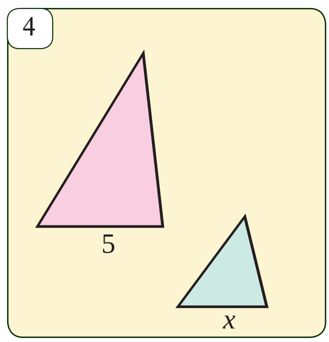
7.5. Tárepleri 12 cm, 20 cm hám 13 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen. Eger kishi tárepi 9 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen úshmúyeshlikke uqsas bolsa, onıń qalǵan tároplerin tabıń.

7.6. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ hám bul úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnası 7:5 ke teń. Eger ABC úshmúyeshliginiń maydanı $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliginiń maydanınan 36 cm^2 ge artıq bolsa, bul úshmúyeshliklerdiń maydanların tabıń.

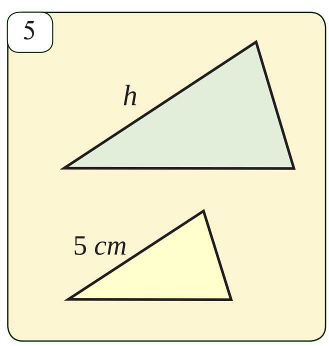
7.7. 3-súwrette berilgenlerden paydalanıp, úshmúyeshliklerdiń uqsas yaki uqsas emesligin anıqlań.



7.8. 4-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas hám maydanlarınıń qatnası 25:9 qatnasta bolsa, belgisiz kesindiniń uzınlıǵın tabıń.



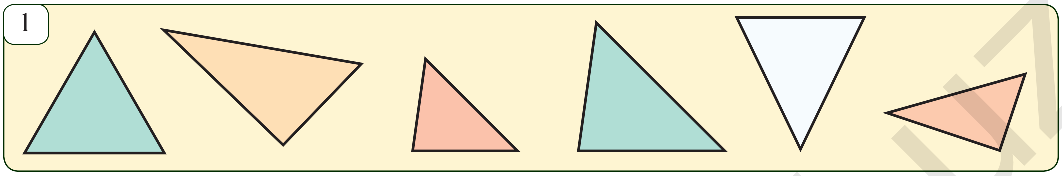
7.9. 5-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas hám $S_1:S_2=49:25$ bolsa belgisiz tárepin tabıń.



8 ÚSHMÚYESHLIKLERDIŃ UQSASLÍǴÍNÍŃ BIRINSHI BELGISI

Jedellestiriwshi shınıǵıw

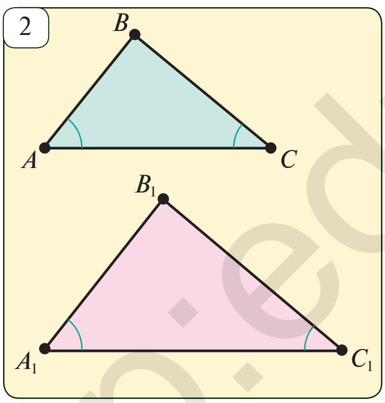
1-súwrette súwretlengen úshmúyeshliklerdiń ishinen uqsasların anıqlań. Olardıń uqsaslıǵın qalay anıqladıńız?


1

Anıqlama boyınsha eki úshmúyeshliktiń uqsaslıǵın anıqlaw ushın olardıń múyeshleriniń teńligin hám sáykes tárepleriniń proporcional ekenligin tekseriw kerek boladı. Úshmúyeshlikler ushın bul is ansatlasadı eken. Tómende keltirilgen teoremalar usı tuwralı bolıp, olar "úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń belgileri" dep ataladı.

Teorema. (Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń BB belgisi). Eger bir úshmúyeshliktiń eki múyeshi ekinshi úshmúyeshliktiń eki múyeshine sáykes túrde teń bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı (2-súwret).

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \angle C=\angle C_1 \ \Rightarrow\ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$


2

Dáliyllew. 1. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındaǵı teorema boyınsha,

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C),\\ \angle B_1=180^\circ-(\angle A_1+\angle C_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle B=\angle B$$

Demek, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń múyeshleri sáykes túrde teń.

2. Shárt boyınsha, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$. Teńdey múyeshke iye bolǵan úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı teorema bolsa,

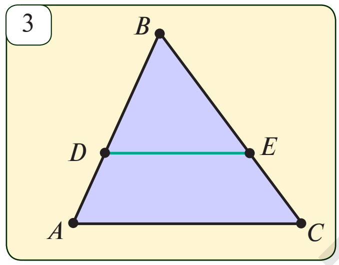
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \text{ hám } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}.$$

Bul teńliklerdiń oń bólimlerin teńlestirip, bir qıylı aǵzalar qısqartılsa, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ teńligi payda boladı. Sonday-aq, $\angle A=\angle A_1$ hám $\angle B=\angle B_1$ teńliklerinen paydalanıp, $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$ teńliklerinen paydalanıp, teńligine iye bolamız. Solay etip, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń múyeshleri teń hám sáykes tárepleri proportcional, yaǵnıy bul úshmúyeshlikler uqsas boladi. *Teorema dáliyllendi.*

Másele. ABC úshmúyeshliginiń eki tárepin kesip ótiwshi hám úshinshi tárepine parallel bolǵan DE tuwrısı úshmúyeshlikten oǵan uqsas úshmúyeshlik ajıratatuǵının dáliylleń *(3-súwret)*.

Dáliyllew. ABC hám DBE úshmúyeshliklerde $\angle B$ — ulıwma, $\angle CAB = \angle EDB$ (AC hám DE parallel tuwrılarıń AB kesiwshi menen keskende payda bolǵan sáykes múyeshler bolǵanı ushın) (*3-súwret*).

Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, $ABC \backsim \Delta DBE$.

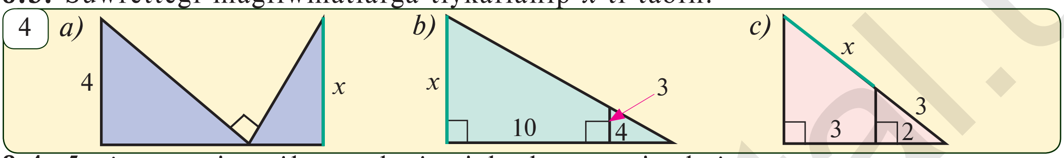


Másele hám tapsırmalar

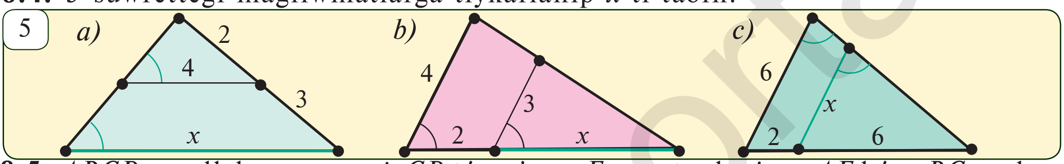
8.1. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıq anıqlaması hám MM belgisin óz ara salıstırıń.

8.2. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisin dáliylleń.

8.3. Súwrettegi maǵlıwmatlarǵa tiykarlanıp x tı tabıń.



8.4. 5-súwrettegi maǵlıwmatlarǵa tiykarlanıp x ti tabıń.

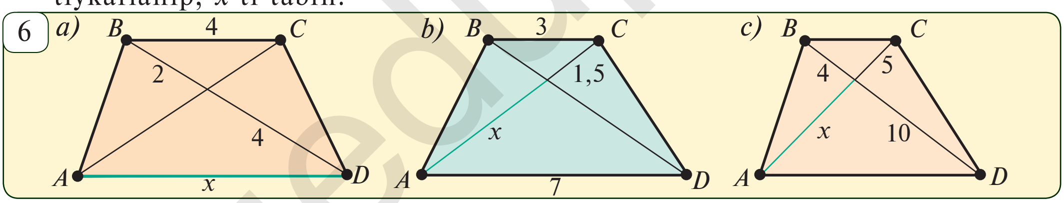


8.5. $ABCD$ parallelogrammnıń CD tárepinen E noqatı alınǵan. AE hám BC nurları F noqatında kesilisedi.

a) Eger $DE = 8$ *cm*, $EC = 4$ *cm*, $BC = 7$ *cm*, $AE = 10$ *cm* bolsa, EF hám FC ti;

b) Eger $AB = 8$ *cm*, $AD = 5$ *cm*, $CF = 2$ *cm* bolsa, DE hám EC ti tabıń.

8.6. 6-súwrette $ABCD$ — trapeciyası berilgen. Súwrettegi maǵlıwmatlarǵa tiykarlanıp, x tı tabıń.

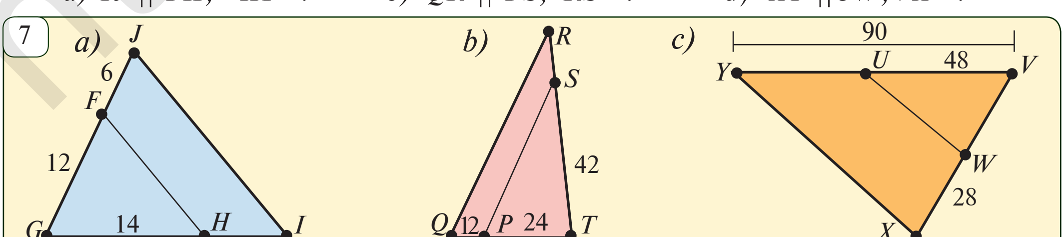


8.7*. Bir súyir múyeshleri teń bolǵan eki tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler uqsas ekenligin dáliylleń.

8.8*. ABC úshmúyeshliginiń AC tárepinde D noqatı alınǵan. Eger $\angle ABC = \angle BDC$ bolsa, ABC hám BDC úshmúyeshlikleriniń uqsas ekenligin dáliylleń. Eger $3AB = 4BD$ hám $BC = 9$ cm bolsa, AC kesindisin tabıń.

8.9. 7-súwrette berilgenlerge tiykarlanıp belgisiz kesindini tabıń.

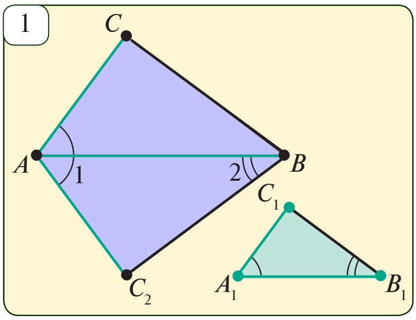
a) $IJ \parallel FH$, HI - ? b) $QR \parallel PS$, RS - ? d) $XY \parallel UW$, VX - ?



9 ÚSHMÚYESHLIKLERDIŃ UQSASLÍǴÍNÍŃ EKIHSHI BELGISI

Teorema. (Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TMT belgisi). **Eger bir úshmúyeshliktiń eki tárepi ekinshi úshmúyeshliktiń eki tárepine proporcional hám bul tárepler payda etken múyeshler teń bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı (*1-súwret*).**

ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



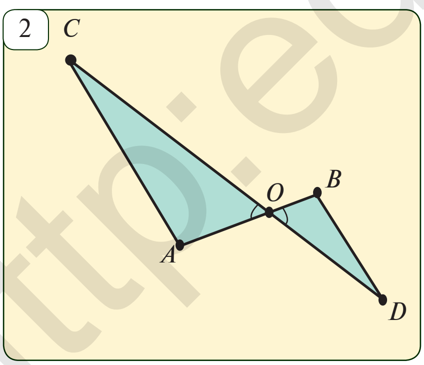
Dáliyllew. $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ bolatuǵınday etip ABC_2 úshmúyeshligin jasaymız (*1-súwret*). Ol MM belgisi boyınsha $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligine uqsas boladı.

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC_2: \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$$

Shárt boyınsha: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

Bul eki teńlikten, $AC_2 = AC$ ekenligin anıqlaymız. Onda úshmúyeshliklerdiń teńliginiń TMT belgisi boyınsha, $\Delta ABC = \Delta ABC_2$. Sonlıqtan, $\angle 2 = \angle B$. Lekin, jasaw boyınsha, $\angle 2 = \angle B_1$ edi. Demek, $\angle B = \angle B_1$. Onda, $\angle A = \angle A_1$ hám $\angle B = \angle B_1$ bolǵanı ushın, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *Teorema dáliyllendi.*

Másele. AB hám CD kesindileri O noqatında kesilisedi, $AO = 12$ *cm*, $BO = 4$ *cm*, $CO = 30$ *cm*, $DO = 10$ *cm* bolsa, AOC, BOD úshmúyeshlikleriniń maydanlarınıń qatnasın tabıń.



Sheshiliwi: Shárt boyınsha,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{30}{10} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = 3.$$

Demek, AOC úshmúyeshliginiń eki tárepi BOD úshmúyeshliginiń eki tárepine proporcional hám bul tәreplerdiń arasındaǵı sáykes múyeshler vertikal múyeshler bolǵanı ushın: $\angle AOC = \angle BOD$. Sonıń ushın, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TMT belgisi boyınsha, $\Delta AOC \backsim \Delta BOD$ hám uqsaslıq koefficienti $k = \dfrac{OA}{OB} = 3$. Endi uqsas úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı teoremanı qollanamız: $\dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = k^2 = 9$. *Juwabı:* 9.

Másele hám tapsırmalar

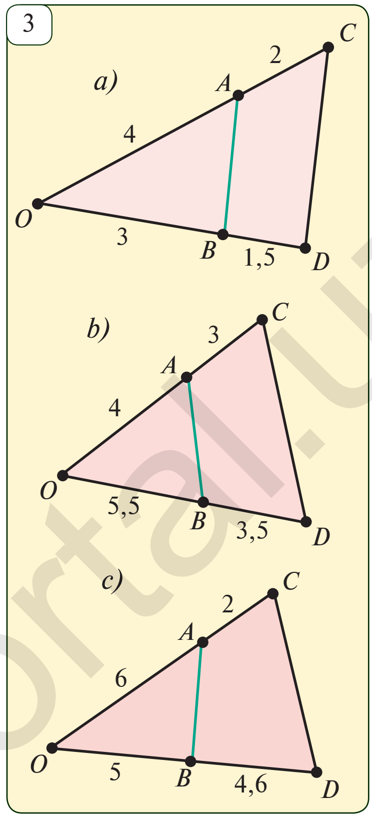
9.1. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń anıqlaması hám TMT belgilerin óz ara salıstırıń.

9.2. Tóbesindegi múyeshleri teń bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın a) MM, b) TMT belgisinen paydalanıp dáliylleń.

9.3. 3-súwrette súwretlengen OAB hám OCD úshmúyeshlikleri uqsas pa? Eger uqsas bolsa, bul úshmúyeshlikler perimetriniń qatnasın tabıń.

9.4. AC hám BD nurları O noqatında kesilisedi. Eger $AO:CO=BO:DO=3$, $AB=7\,cm$ bolsa, CD kesindisin hám de AOB hám COD úshmúyeshlikleriniń maydanınıń qatnasın tabıń.

9.5. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmuyeshliklerde $\angle A=\angle A_1$, $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1=4:3$.
a) Eger AB kesindisi A_1B_1 den 5 cm artıq bolsa, AB hám A_1B_1 tároplerin tabıń;
b) Eger A_1B_1 kesindi AB dan 6 cm qısqa bolsa, AB hám A_1B_1 tároplerin tabıń;
c) Eger berilgen úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qosındısı 400 cm^2 bolsa, onda hár bir úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.



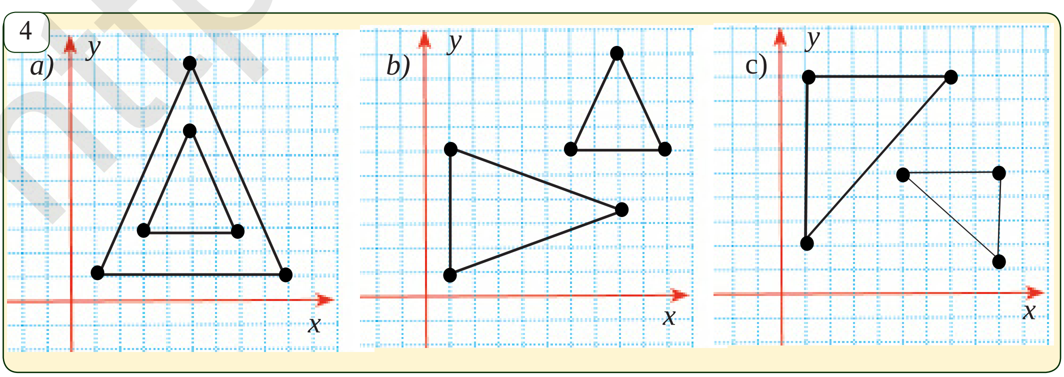
3

9.6. Eger bir tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri ekinshi tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń sáykes katetlerine proporcional bolsa, onda úshmúyeshliklerdiń uqsas ekenligin dáliylleń.

9.7. Katetleri 3 dm hám 4 dm bolǵan tuwrımúyeshli úshmúyeshlik penen bir kateti 8 dm hám gipotenuzası 10 dm bolǵan tuwrımúyeshli úshmúyeshliktiń uqsas ekenligin dáliylleń.

9.8*. AB kesindi hám l tuwrı sızıq O noqatta kesilisedi. l tuwrı sızıqqa AA_1 hám BB_1 perpendikularlar túsirilgen. Eger $AA_1=2\,cm$, $OA_1=4\,cm$ hám $OB_1=3\,cm$ bolsa, BB_1, OA hám AB kesindilerin tabıń.

9.9*. 4-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında úshmúyeshliktiń uqsaslıǵın anıqlań.

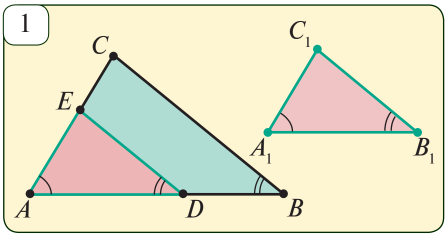


4

10 ÚSHMÚYESHLIKLERDIŃ UQSASLÍǴÍNÍŃ ÚSHINSHI BELGISI

Teorema. (Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TTT belgisi). ***Eger bir úshmúyeshliktiń úsh tárepi ekinshi úshmúyeshliktiń úsh tárepine proporcional bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı.***

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$ (1-súwret) $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



1

Dáliyllen. ABC úshmúyeshliginiń AB tárepinde $AD=A_1B_1$ bolatuǵınday etip D noqatın belgileymiz. D noqatinan BC tárepine parallel etip júrgizilgen tuwrı sızıq AC tárepin E noqatında kesip ótsin. Onda úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, ΔADE hám ΔABC uqsas boladı. Ol jaǵdayda bul uqsaslıq teorema shárti boyınsha tómendegi teńlikler juplıǵına iye bolamız:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \text{ hám } \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}, \ (1) \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \text{ hám } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}. \ (2)$$

Ol jaǵdayda $A_1B_1=AD$ ekenligin esapqa alsaq, olardıń birinshisinen, $B_1C_1=DE$ ekinshisinen bolsa $A_1C_1=AE$ ekenligi payda boladı. Solay etip, úshmúyeshliklerdiń teńliginiń TTT belgisi boyınsha, $\Delta ADE=\Delta A_1B_1C_1$. Onda $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Másele. Eger eki teń qaptallı úshmúyeshliktiń birewiniń ultanı hám qaptal tárepi ekinshisiniń ultanı hám qaptal tárepine proporcional bolsa, onda bul úshmúyeshliklerdiń uqsas ekenligin dáliyllen.

$\Delta ABC,\ AB=BC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ A_1B_1=B_1C_1, \ \Big|\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Dáliyllew. Berilgen $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$ teńlikler hám $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ qatnastan $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ teńliklerin payda etemiz. Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TTT belgisi boyınsha, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Másele hám tapsırmalar

10.1. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TTT belgisin aytıń hám dáliyllewin túsindirip beriń.

10.2. $AC=14$ *cm*, $AB=11$ *cm*, $BC=13$ *cm*, $A_1C_1=28$ *cm*, $A_1B_1=22$ *cm*, $B_1C_1=26$ *cm* ekenligi belgili. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleri uqsas bolama?

10.3. 2-súwrettegi uqsas úshmúyeshlikler juplıqların kórsetiń.

10.4. $ABCD$ trapeciyanıń AB hám CD qaptal tárepleri dawam ettirilse, E noqatında kesilisedi. Eger $AB=5$ *cm*, $BC=10$ *cm*, $CD=6$ *cm*, $AD=15$ *cm bolsa*, AED úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.

10.5. Trapeciyanıń ultanları 6 *cm* hám 9 *cm*, biyikligi 10 *cm*. Trapeciyanıń diagonalları kesilisken noqatınan ultanlarına shekemgi aralıqların tabıń.

10.6. Qálegen eki teń tárepli úshmúyeshliktiń uqsas ekenligin dáliyllen.

10.7. Ultanı 12 *cm*, biyikligi 8 *cm* bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliktiń ishine kvadrat sonday etip ishley sızılǵan, kvadrattıń eki tóbesi úshmúyeshliktiń ultanında, al qalgan eki tóbesi bolsa qaptal tárep-lerde jatadı. Kvadrattıń tárepin tabıń.

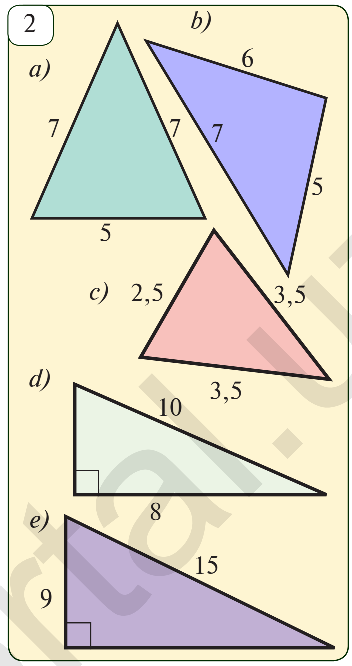
10.8*. Súyir múyeshli ABC úshmúyeshliginiń AA_1 hám BB_1 biyiklikleri júrgizilgen. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C$ eken-ligin dáliylleń.

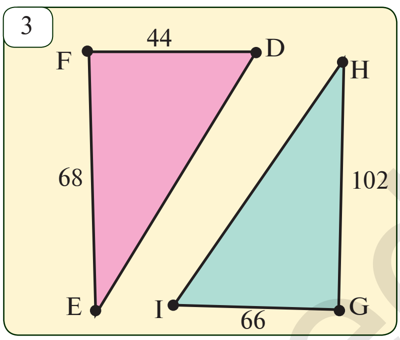
10.9. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanları 6 hám 24 ge teń. Olardın birewiniń perimetri ekinshisinen 6 ǵa artıq. Úlken úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

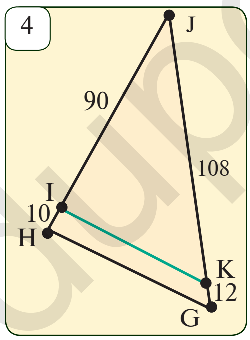
10.10. 3-súwrettegi úshmúyeshlikler qaysı belgi boyın-sha uqsas?

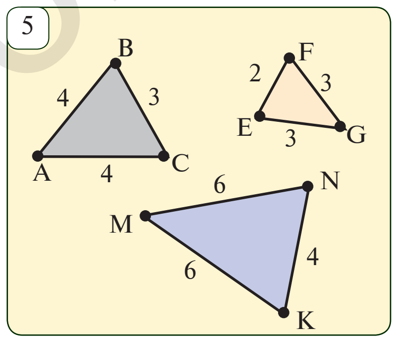
10.11. 4-súwrettegi JKL hám JGH úshmúyeshlikler qaysı belgi boyınsha uqsas?

10.12. 5-súwrettegi úshmúyeshliklerdiń qaysıları bir-birine uqsas?

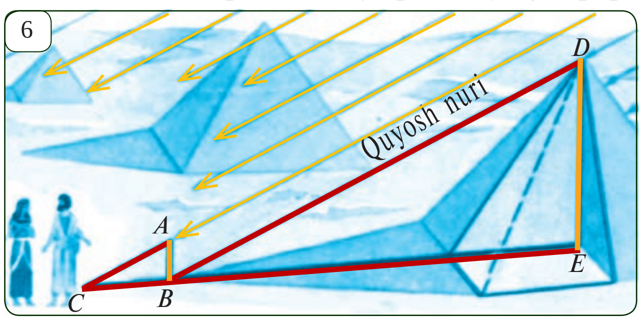








Tariyxıy waqıyalar. Bul waqıya eramızdan aldıńǵı VI ásirde bolǵan edi. Bul waqıtta grekler geometriya menen derlik shuǵıllanbaytuǵın edi. Grek filosofi Fales mısr páni menen tanısıw ushın ol jerge barǵan. Mısrlılar oǵan qıyın másele bergen eken: úlken piramidalardan biriniń biyikligin qalay tabıw múmkin? Fales bul máseleniń ápiwayı hám jeńil sheshimin taptı. Ol tayaqshanı jerge qaqtı hám sonday dedi: “Qashan bul tayaqsha sayasınıń uzınlıǵı tayaqshanıń uzınlıǵı menen teń bolsa, piramida sayasınıń uzınlıǵı piramida biyikligi me-nen teń boladı” 6-súwret. Falestiń pikirin tiykarlawǵa háreket etiń!



11 TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDIŃ UQSASLÍQ BELGILERI

Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń bir-birden múyeshleri tuwrı múyeshten ibarat boladı. Sonıń ushın bunday úshmúyeshlikler ushın uqsaslıq belgileri ápiwayılastırıladı.

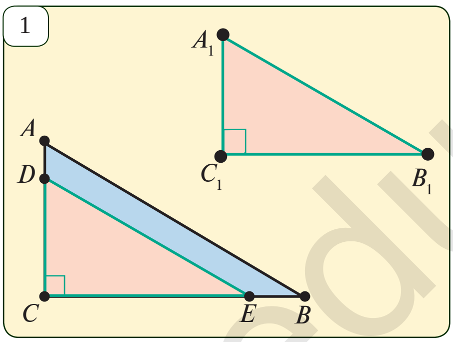
***1-teorema**. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń bir-birden súyir múyeshi sáykes túrde teń bolsa, onda olar uqsas boladı.*

***2-teorema**. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń katetleri sáykes túrde proporcional bolsa, onda olar uqsas boladı.*

***3-teorema**. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń biriniń gipotenuzası hám kateti, ekinshisiniń gipotenuzası hám katetine sáykes túrde proporcional bolsa, onda olar uqsas boladı.*

Bul belgilerdiń birinshi ekewiniń durıs ekenligi óz-ózinen ayqın. Úshinshi belgisin bolsa dáliyllewimiz kerek.

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \ \angle C=90^\circ, \angle C_1=90^\circ, \quad \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Dáliyllew. ABC úshmúyeshliginiń BC tárepinde $CE=C_1B_1$ bolatuǵınday etip C_1B_1 kesindisin qoyamız hám $DE \parallel AB$ nı júrgizemiz (*1-súwret*). Onda úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, ΔDEC hám ΔABC uqsas boladi. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń proporcionallıǵınan: $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CB}{CE}$

Jasalıwı boyınsha, $CE=C_1B_1$. Demek,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{C_1B_1} \qquad (1)$$

teńligi orınlı boladi. Basqa tárepten, teorama shárti boyınsha, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CB}{C_1B_1}$ (2)

(1) hám (2) teńliklerden $DE=A_1B_1$ ekenligin anıqlaymız.

$A_1B_1C_1$ hám DEC úshmúyeshliklerdi qaraymız. Olarda;

2. $DE=A_1B_1$ (dálillengen teńlik boyınsha).

Demek, tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń bir-birden kateti hám de gipotenuzasınıń teńlik belgisi boyınsha, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Ekinshi tárepten bolsa $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$. Onda, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ boladı.

Teorema dáliyllendi.

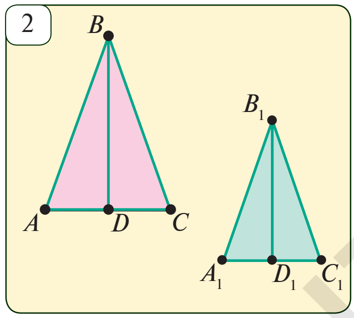
***Másele**.* Eger eki teń qaptallı úshmúyeshlikten birewiniń qaptal tárepi hám biyikligi ekinshisiniń qaptal tárepi hám biyikligine proporcional bolsa, onda bul úshmúyeshliklerdiń uqsas ekenligin dáliyllen (*2-súwret*).

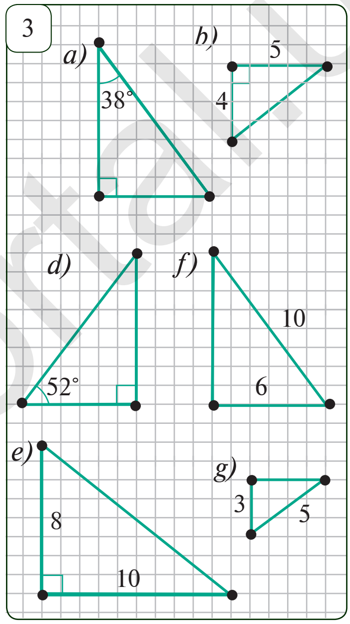
Dáliyllew. Tuwrı múyeshli ABD hám $A_1B_1D_1$ úshmúyeshliklerin qaraymız. Shárt boyınsha olardıń birewden kateti hám gipotenuzası óz ara proporcional. Demek, 3-Teoremaǵa tiykarlanıp $\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D_1$. Onda $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń ultanına túsirilgen biyikliktiń bissektrisası da bolıwın esapqa alsaq, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ boladı.

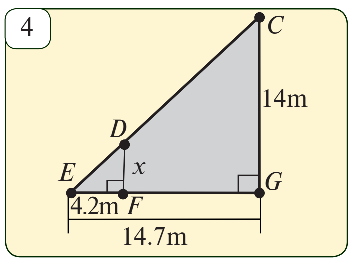
Nátiyjede, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliklerde

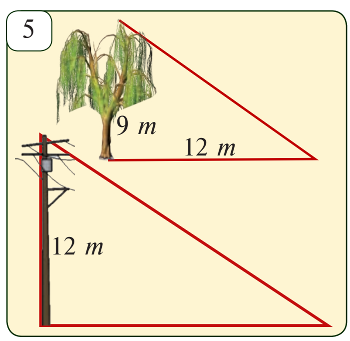
$\angle B = \angle B_1$ hám $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ teńliklerine iye bolamız.

Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TTT belgisi boyınsha, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Soralǵan tasdıq dáliyllendi.









Másele hám tapsırmalar

11.1. 3-Súwrettegi uqsas úshmúyeshliklerdi tabıń.

11.2. Katetleri 3 *m* hám 4 *m* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke uqsas úshmúyeshliktiń bir kateti 27 *m* bolsa, ekinshi kateti neshe *m* boladı?

11.3. Maydanları 21 m^2 hám 84 m^2 bolǵan eki tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler óz ara uqsas. Eger birinshi úshmúyeshliktiń bir kateti 6 *m* bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

11.4. Bir sheńberge eki uqsas tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ishley sızılǵan. Bul úshmúyeshliklerdiń teńligin dáliylleń.

11.5*. Katetleri 10 cm hám 12 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke bir múyeshi ulıwma bolǵan kvadrat ishley sızılǵan. Eger kvadrattıń bir tóbesi gipotenuzada ekenligi belgili bolsa, kvadrattıń tárepin tabıń.

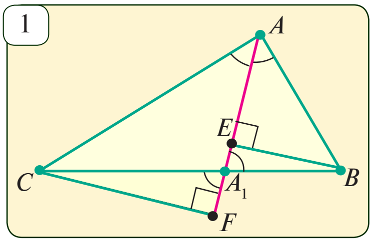
11.6*. ABC úshmúyeshlik berilgen. Oǵan $ADEF$ sonday etip ishley sızılǵan D, E hám F noqatlar sáykes tárizde úshmúyeshliktiń AB, BC hám CA tareplerinde jatadı? Eger $AB=c,\ AC=b,$bolsa, rombnıń tárepin tabıń.

11.7. 4-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında belgisiz kesindi uzınlıǵın tabıń.

11.8. Tal tereginiń biyikligi 9 *m*, sım aǵashtıń biyikligi bolsa 12 *m* (*5-súwret*). Eger taldıń sayası 12 *m* di qurasa, sım aǵashtıń sayasınıń uzınlıǵın tabıń.

11.9. Anar tereginiń biyikligi 3 *m* bolıp onıń sayası keshke qaray 6 *m* di payda etti. Biyikligi 4,2 m bolǵan alma aǵashınıń sayası bul waqıtta qanshanı payda etedi?

12 UQSASLÍQ BELGILERINIŃ DÁLIYLLEWGE BAYLANÍSLÍ MÁSELELERGE QOLLANÍWLARÍ



1-másele. Úshmúyeshliktiń bissektrisası ózi túsken tárepti qalǵan eki tárepke proporcional bolǵan kesindilerge ajıratatuǵının dáliylleń.

ΔABC, AA_1 — *bissektrisa (1-súwret)* $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{A_1B}=\dfrac{AC}{A_1C}$

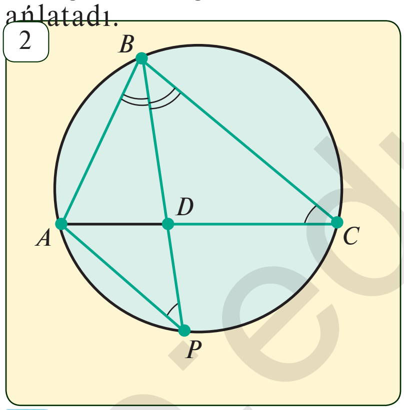
Dáliyllew. AA_1 tuwrısına BE hám CF perpendikulyarın túsiremiz. Onda $\angle CAF=\angle BAE$ bolǵanı ushın tuwrı múyeshli CAF hám BAE úshmúyeshlikler uqsas boladı. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń proporcionallıǵınan

$$\Delta CAF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{CF}{BE}. \qquad (1)$$

Buǵan uqsas,

$$\Delta CA_1F \backsim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1}=\frac{CF}{BE} \qquad (2)$$

(1) hám (2) teńliklerdi salıstırsaq, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$ yaki $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$ boladı. Bul A_1B hám A_1C kesindileri AB hám AC kesindilerge proporcional ekenligin ańlatadı.



2-másele. ABC úshmúyeshliginiń BD bissektrisası úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdi B hám P noqatında kesip ótedi. $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$ ligin dáliylleń (*2-súwret*).

Sheshiliwi. ΔABP hám $\angle BDC$ da:

1. $\angle DBC=\angle ABP \Leftarrow$ shárt boyınsha;
2. $\angle DCB=\angle APB \Leftarrow$ sebebi olar bir doǵaǵa tirelgen.

Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$.

Másele hám tapsırmalar

12.1. Úshmúyeshliktiń bissektrisası ózi túsken tárepte ajıratqan kesindileri hám úshmúyeshliktiń qalǵan tárepleri arasındaǵı proporcionallıqtı jazıp kórsetiń.

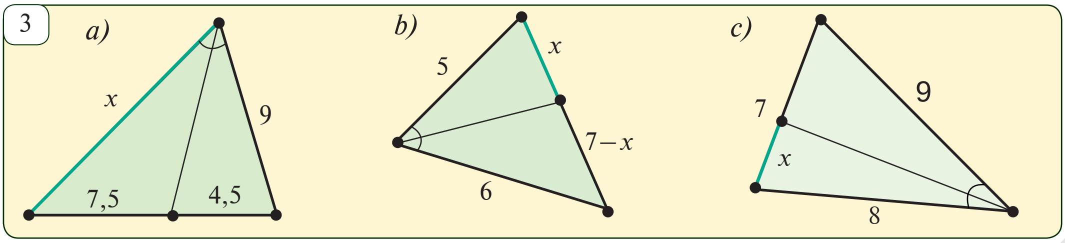
12.2. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliginiń C tuwrı múyeshinen CD biyikligi júrgizilgen. $\angle ACD=\angle CBD$ ekenligin dáliylleń. Payda bolǵan figurada neshe óz ara uqsas úshmúyeshliklerdi kórsete alasız?

12.3. 3-súwrettegi maǵlıwmatlarǵa tiykarlanıp x tı tabıń.

12.4. ABC úshmúyeshliginiń AD bissektrisası júrgizilgen. Eger CD =4,5 *m*; BD=13,5 *m* hám ABC úshmúyeshliktiń perimetri 42 *m* bolsa, AB hám AC tároeplerin tabıń.

12.5. ABC úshmúyeshliginiń medianaları N noqatında kesilisedi. Eger ABC úshmúyeshliginiń maydanı 87 dm^2 bolsa, ANB úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.

3



12.6. ABC úshmúyeshliginiń medianaları kesilisken N noqatınan AB hám BC táreplerine shekem bolǵan aralıqlar sáykes túrde 3 *dm* hám 4 *dm* ge teń. Eger $AB = 8$ *dm* bolsa, BC tárepin tabiń.

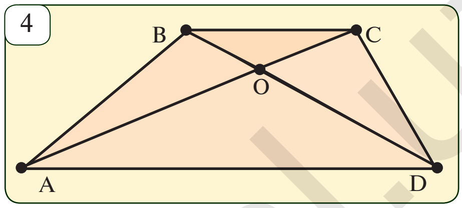
12.7*. Trapeciyanıń ultanına parallel tuwrı sızıq qaptal tárepleriniń birewin m:n qatnasta bolıwı múmkin. Bul tuwrı sızıq onıń ekinshi qaptal tárepin qanday qatnasta bóledi?

12.8. 4-súwrette trapeciya súwretlengen. AOD hám COB úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın dáliylleń.

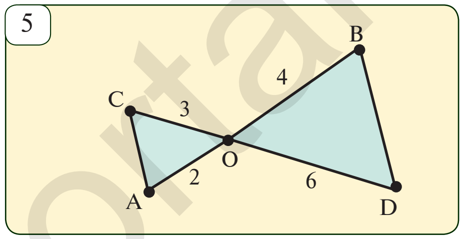
12.9. 5-súwrette AOC hám DOB úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın kórsetiń.

12.10. 6-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsaspa?

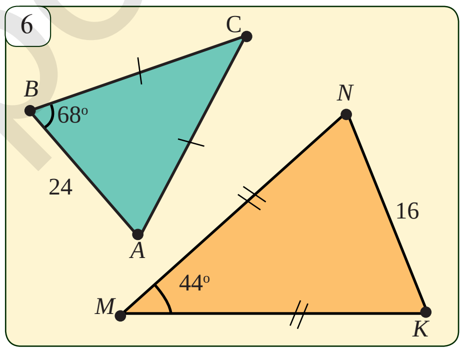
4



5



6



Qızıqlı máseleler

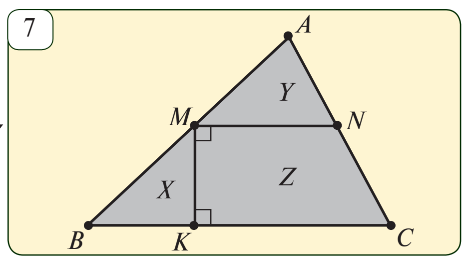
Geometriya hám ingliz tili. Tómendegi ingliz tilinde berilgen geometriyalıq máseleni sheship kóriń! Bunıń menen hám ingliz, hám geometriyadan bilimińizdi bilip alasız.

1) Dissection Puzzle: Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC. The triangle has been dissected into parts X, Y, Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendicular to the base BC (*picture* 7). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively to different parallelograms.

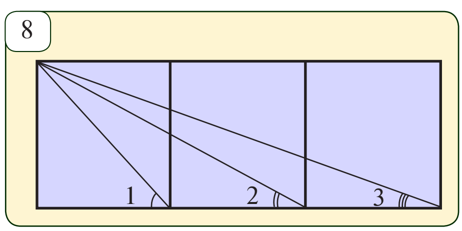
2) Look at the picture 5 and proof

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$$

7



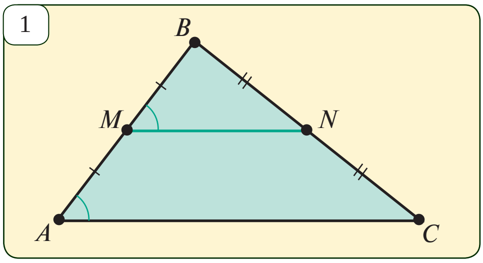
8



13 AMELIY MÁSELELER HÁM OLARDÍŃ QOLLANÍWLARÍ

1-máseleA. Úshmúyeshliktiń uqsaslıǵınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń orta sızıǵı úshmúyeshliktiń bir tárepine parallel hám usı táreptiń yarımına teń ekenligin dáliylleń.

$\Delta ABC, MN$ — *orta sızıq (1-súwret):* $MA=MB, NC=NB$ ⇒ $MN \parallel AC, \; MN=\frac{1}{2}AC$



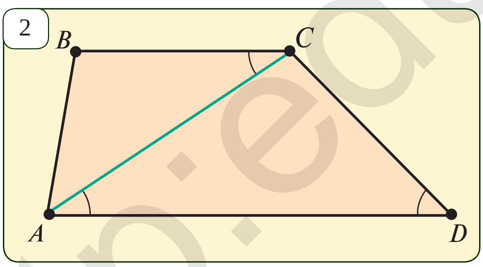
Sheshiliwi. ΔABC hám ΔMBN ushın: $\angle B$ — ulıwma, $\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}$

Sonıń ushın, úshmúyeshlikler uqsaslıǵına TMT ámeliyat boyınsha, bul eki úshmúyeshlik uqsas. Bul pikirdi tómendegidey dawam ettiremiz:

$$\Delta MBN \backsim \Delta ABC \;\Rightarrow\; \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \dfrac{MN}{AC}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN=\dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$$

2-máseleA. Eger tiykarǵı BC hám AD bolǵan $ABCD$ trapeciyanıń AC diagonalı onıń eki uqsas úshmúyeshlikke ajıratsa, $AC^2=BC\cdot AD$ bolıwın dáliyllen.

$ABCD$ — *trapeciya,* $BC \parallel AD$, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ *(2-súwret)* ⇒ $AC^2=BC\cdot AD$



Sheshiliwi. **1-qádem.** ABC hám ACD úshmúyeshlikleriniń múyeshlerin salıstıramız. $\angle ACB=\angle CAD$, sebebi bul múyeshler — ishki ayqısh múyeshler. $\angle B\neq\angle D$, sebebi ABCD — trapeciya (keri jaǵdayda,

$$\angle D+\angle A=\angle B+\angle A=180°,$$

yaǵnıy $AB\parallel CD$ bolıp, $ABCD$ trapeciya bolmay qalar edi). Solay etip, $\angle D=\angle BAC$ hám $\angle ACD=\angle B$.

2-qádem. Endi ABC hám DCA úshmúyeshliktiń sáykes tárepleriniń qatnasın jazamız: $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AC}$ bunnan $AC^2=BC\cdot AD$.

Máseler hám tapsırmalar

13.1. a) Boyı 170 *cm* bolǵan adam sayasınıń uzınlıǵı 1 *m* bolsa, biyikligi 5,4 *m* bolǵan terek sayasınıń uzınlıǵın tabıń.

b) Eki teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshleri teń. Birinshi úshmúyeshliktiń qaptal tárepi 17 *cm*, ultanı 10 *cm* ge, ekinshi úshmúyeshliktiń ultanı 8 *cm* ge teń. Ekinshi úshmúyeshliktiń qaptal tárepin tabıń.

13.2. 3-súwrettegi hár bir sızılmadan uqsas úshmúyeshliklerdi kórsetiń.

13.3. *ABC* úshmúyeshliginiń *AP* medianası *BC* tárepine parallel hám tóbeleri *AB* hám *AC* táreplerinde jatqan qálegen kesindini teń ekige bóletuǵının dáliylleń.

13.4. Úshmúyeshliktiń tóbeleri onıń orta sızıǵın óz ishine alǵan tuwrı sızıqtan teńdey aralıqta jata-tuǵının dáliylleń.

13.5. Sheńberge ishley sızılǵan ABCD tórtmúyeshliktiń diagonalları O noqatta kesilisedi. $\Delta AOB \backsim \Delta COD$ ekenligin dáliylleń.

13.6. *ABC* úshmúyeshliktiń ishinen *O* noqatı hám *OA, OB, OC* nurlarında sáykes túrde *E, F, K* noqatları alınǵan (*4-súwret*). Eger $AB \| EF$ hám $BC \| FK$ bolsa, *ABC* hám *EFK* úshmúyeshlikleriniń uqsas ekenligin dáliylleń.

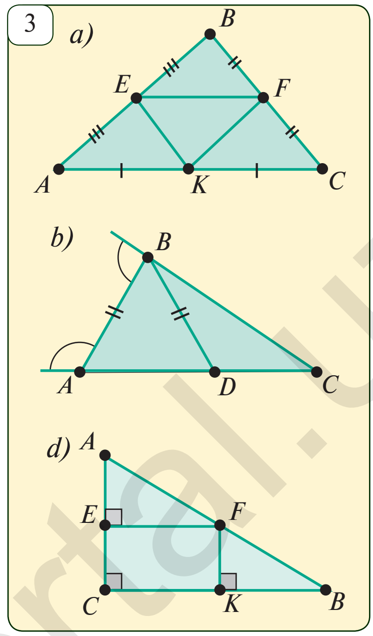
13.7*. Trapeciyanıń diagonalları kesilisiw noqatınan ótiwshi tuwrı sızıq trapeciya ultanlarınan birin m:n qatnasta bóledi. Bul tuwrı sızıq ekinshi ultanın qanday qatnasta bóledi?

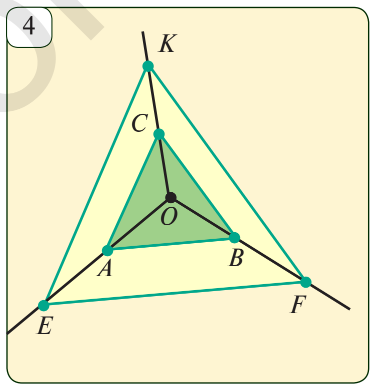
13.8. Eger *ABC* úshmúyeshliklerdiń maydanı *S* ǵa teń bolsa, 5-súwrettegi *x* penen belgilengen maydandı tabıń.

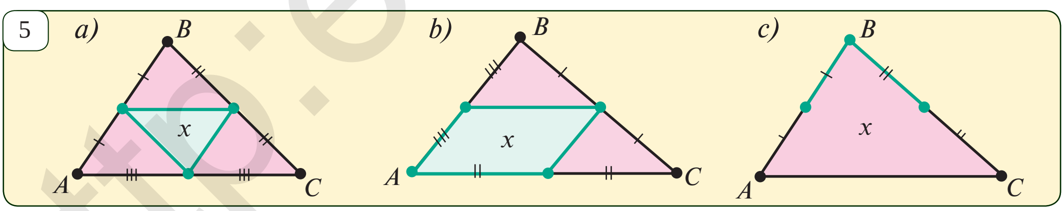
13.9. 6-súwrette $EQ \| BC$. *AQ* nı tabıń.

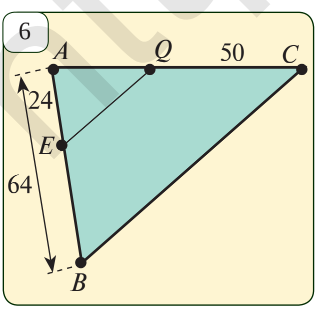
13.10. 7-súwrette $AB \| EC$. *QC* nı tabıń.

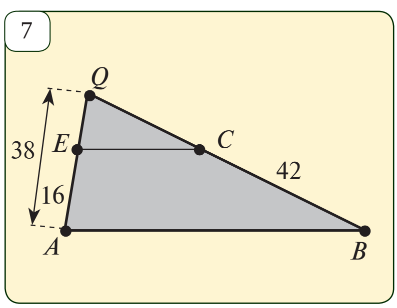
13.11. 8-súwrette *ABC* úshmúyeshliginiń biyiklikler júrgizilgen. Nátiyjede neshe uqsas úshmúyeshlikler payda boldı?

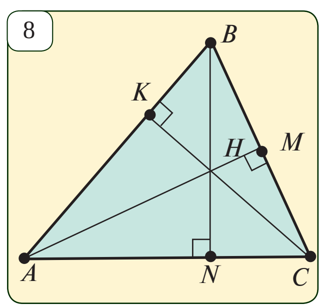












BILIMIŃIZDI SÍNAP KÓRIŃ

I. Testler

1. Tómendegi tastıyıqlawlardan qaysı biri durıs?
A) Eki úshmúyeshliktiń múyeshleri sáykes túrde teń bolsa, olar uqsas delinedi;
B) Eki úshmúyeshliktiń tárepleri sáykes túrde teń bolsa, olar uqsas delinedi;
D) Eki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleri proporcional hám sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas delinedi;
E) Eki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleri hám sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas delinedi.

2. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanlarınıń qatnası nege teń?
A) Uqsaslıq koefficientine;
B) Olardıń sáykes tárepleriniń qatnasına;
D) Olardıń perimetrleriniń qatnasına;
E) Uqsaslıq koefficientiniń kvadratına.

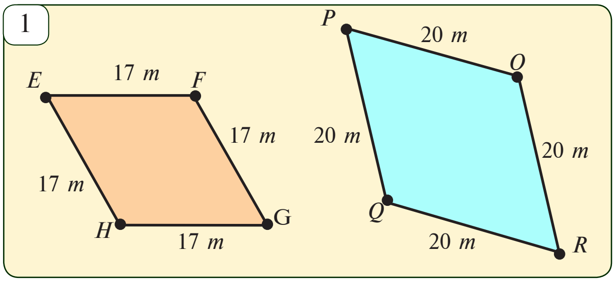
3. Tómendegi tastıyıqlawdan qaysı biri durıs?
A) Úshmúyeshliklerdiń biriniń eki múyeshi ekinshisiniń eki múyeshine teń bolsa, olar uqsas boladı;
B) Úshmúyeshliklerdiń biriniń eki tárepi ekinshisiniń eki tárepine teń bolsa, olar uqsas boladı;
D) Eki úshmúyeshliktiń bir-birden múyeshleri teń hám eki tárepleri proporcional bolsa, olar uqsas boladı;
E) Eki úshmúyeshliktiń bir-birden múyeshleri teń hám bir-birden tárepleri proporcional bolsa, olar uqsas boladı.

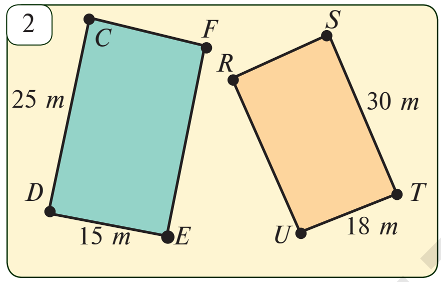
4. Durısın tabıń. Eger eki úshmúyeshlik uqsas bolsa, olardıń ...
A) Biyiklikleri teń boladı; B) Tárepleri proporcional boladı;
D) Tárepleri teń boladı; E) Maydanları teń boladı.

5. Uqsas úshmúyeshliklerdiń perimetrleriniń qatnası nege teń?
A) Sáykes tárepleri qatnasınıń kvadratına; B) Uqsaslıq koefficientine;
D) Uqsaslıq koefficientiniń kvadratına; E) Maydanlarınıń qatnasına.

6. Qaysı bandte 1-súwrette súwretlengen romblar uqsaslıǵı durıs jazılǵan?
A) $EHGF \backsim PQRO$; B) $HGFE \backsim PQRO$;
D) $GFEH \backsim QROP$; E) $EHGF \backsim QROP$.

7. 2-súwrettegi kópmúyeshlikler uqsaspa? Nege?
A) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri teń hám sáykes tárepleri proporsional;
B) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri proporcional hám sáykes tárepleri teń;
D) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri teń;
E) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes tárepleri proporcional;





8. 3-súwrettegi SRQT hám VWXU trapeciyalar uqsaspa? Eger uqsas bolsa, olardıń uqsaslıq koefficienti nege teń?
A. Awa, k= 0,4; B. Awa, k= 0,5;
D. Awa, k= 0,8; E. Yaq.

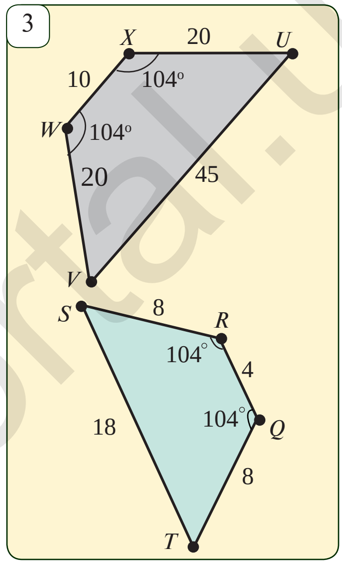
9. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleri 4 *cm* hám 13 *cm*. Eger birinshi úchmúyeshlik maydanı 16 cm^2 qa teń bolsa, ekinshi úshmúyeshlik maydanın tabıń.
A. 169 cm^2; B. 16 cm^2;
D. 52 cm^2; E. 189 cm^2;

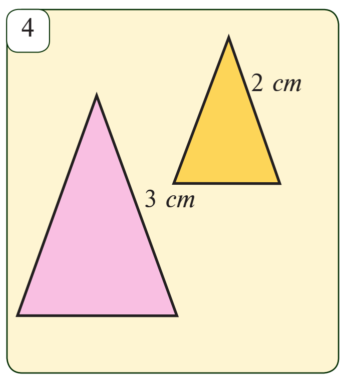
10. Eki uqsas úshmúyeshlik maydanları qatnası 144 ge teń. Olardıń sáykes tárepleriniń qatnası nege teń?
A. 13 ge; B. 12 ge;
D. 14 ge; E. 16 ǵa;

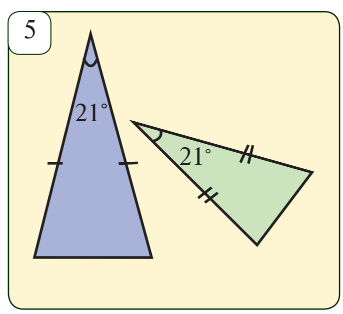
11. 4-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas. Súwrette berilgen keteklerge kóre úlken úshmúyeshlik maydanınıń kishi úshmúyeshlik maydanına qatnasın tabıń.
A. 9:4; B. 3:2;
D. 4:9; E. 2:3;

12. Eki uqsas úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası a ǵa teń bolsa, bul úshmúyeshlikler uqsaslıq koefficienti nege teń boladı?
A. $1:a^2$; B. a^2 ; D. $\sqrt{a}$; E. $1:a$;

13. 5-súwrette keltirilgen teń qaptallı úshmúyeshlikler uqsaspa? Nege?
A. Awa, sebebi olardıń eki tárepleri proporcional hám olar arasındaǵı múyeshler teń;
B. Yaq, sebebi olardıń eki múyeshler óz ara teń emes;
D. Yaq, sebebi olardıń sáykes múyeshleri teń emes;
E. Yaq, sebebi olardıń tárepleri proporcional emes;

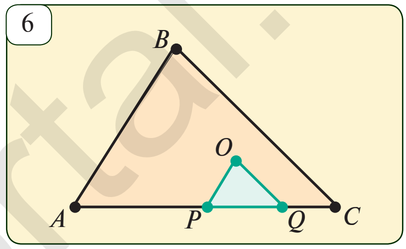




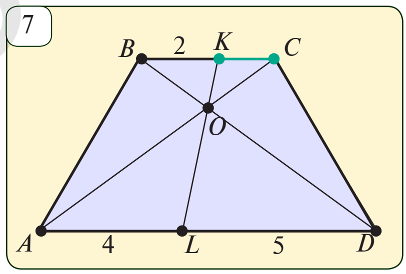


II. Máseleler

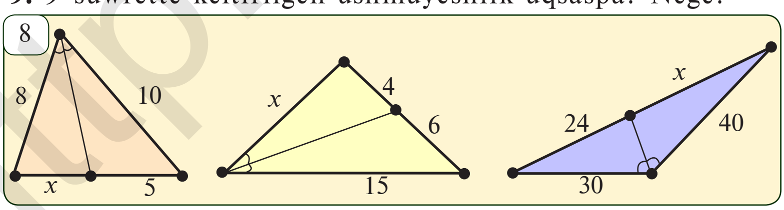
1. ABC úshmúyeshliginiń AB hám AC tárepleriniń ortaları sáykes túrde E hám F noqatları bolsın. Eger AEF úshmúyeshliginiń maydanı 3 cm^2 bolsa, ABC úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.
2. ABC úshmúyeshliginiń AC tárepine parallel tuwrı sızıq AB hám BC táreplerin sáykes túrde N hám P noqatlarda kesip ótedi. Eger $AN= 4$, $NB= 3$, $BP= 3{,}6$ bolsa, BC tárepin tabıń.
3. Súyir múyeshli ABC úshmúyeshliginiń AB tárepinde K noqatı alınǵan. Eger $AK= 3$, $BK= 2$ hám úshmúyeshliktiń BD biyikligi 4 ke teń bolsa, K noqatınan AC kesindisine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
4. $ABCD$ parallelogrammnıń BC tárepiniń ortasındaǵı K noqatınan júrgizilgen DK nurı menen AB nurı F noqatında kesilisedi. Eger $AD= 4$, $DK=5$ hám $DC= 5$ bolsa, AFD úshmúyeshliginiń perimetrin esaplań.

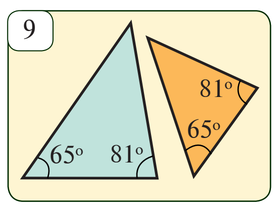


5. ABC úshmúyeshligi ishinde alınǵan O noqatınan úshmúyeshliktiń AB hám BC táreplerine parallel tuwrı sızıqlar júrgizilgen. Bul tuwrı sızıqlar AC tárepin sáykes túrde P hám Q noqatlarda kesip ótedi. Eger $PQ=2$, $AC=7$ hám ABC úshmúyeshliginiń maydanı 98 ge teń bolsa, POQ úshmúyeshliginiń maydanın anıqlań. *(6-súwret).*

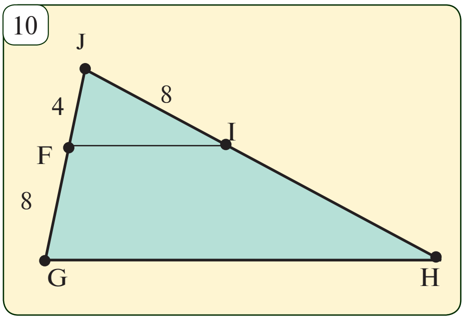


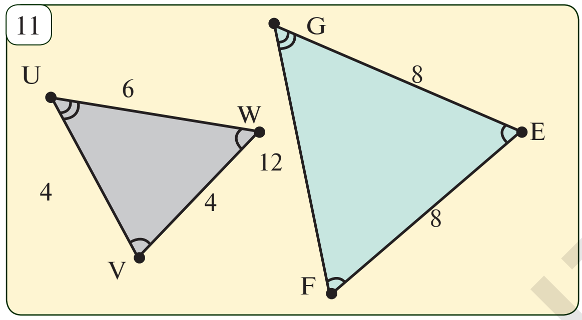
6. $ABCD$ trapeciyasınıń BC hám AD ultanlarında K hám L noqatları sáykes túrde alınǵan. KL kesindisi trapeciyanıń diagonalları kesisken noqattan ótedi. Eger $AL=4$, $LD=5$ hám $BK=2$ bolsa, KC kesindisin tabıń (*7-súwret*).
7. Eki uqsas úshmúyeshliktiń birinshisiniń maydanı 15 mm^2, ekinshisiniń maydanı bolsa 135 mm^2. Birinshi ushmúyeshliktiń bir tárepi 6 mm bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń oǵan sáykes tárepin tabıń?
8. 8-súwrette berilgenlerge kóre belgisiz kesindini tabıń.
9. 9-súwrette keltirilgen úshmúyeshlik uqsaspa? Nege?



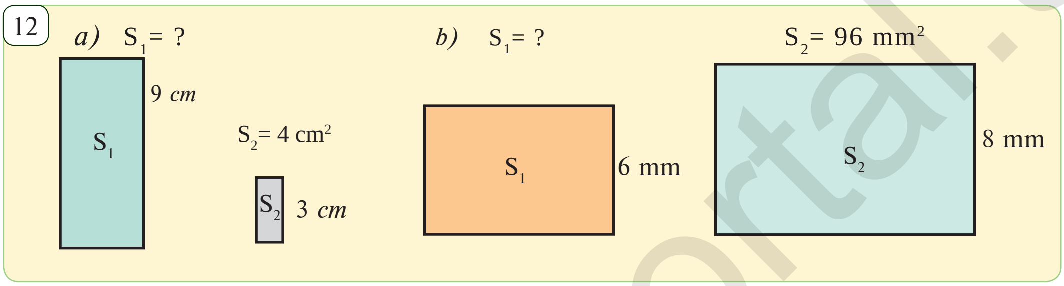


10. 10-súwrette JIF ∾α HJG. IH kesindi uzınlıǵın tabıń.
11. 11-súwretlengen ushmúyeshlik uqsaspa? Eger uqsas bolsa, olardıń uqsaslıq koefficientin tabıń.
12. Eki uqsas ushmúyeshliklerden birewiniń maydanı 24 mm^2, ekinshisiniń maydanı bolsa 216 mm^2. Birinshi úshmúyeshliktiń biyikliklerinen biri 8 mm bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń biyikligin tabıń.

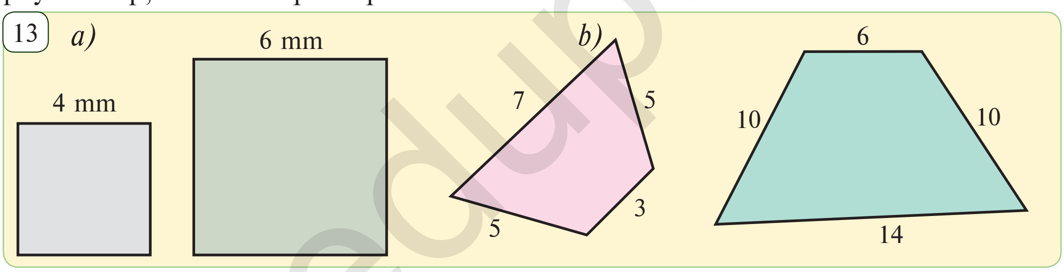




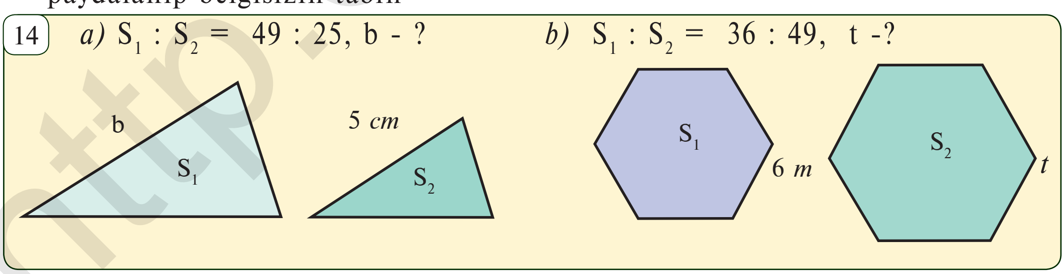
13. 12-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp belgisiz aralıqtı tabıń.



14. 13-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp, olardıń uqsaslıq koefficientin tabıń



15. 14-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp belgisizin tabıń

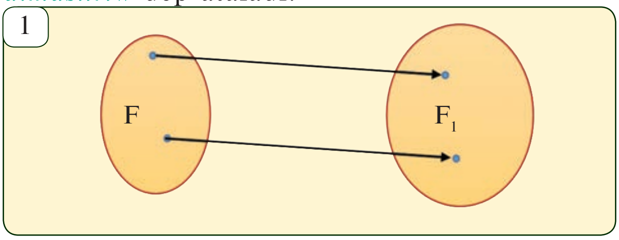


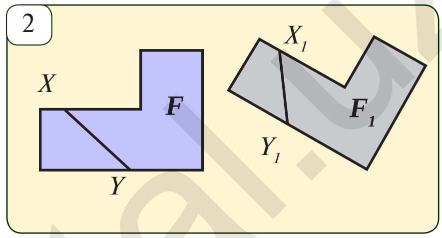
16. Shınar tereginiń sayası 12 *m*. Onıń janındaǵı kóp qabatlı úydiń sayası bolsa 6 *m*. Eger shınar teregi úyden 16 *m* biyik bolsa, úydiń biyikligi qanshanı payda etedi?

17. Háykeldiń biyikligi 9 *m* bolıp, onıń sayası 12 *m*. Háykel janında ósip atırǵan Terektiń sayası bolsa 16 *m*. Terektiń biyikligi qansha?

15 TEGISLIKTE GEOMETRIYALÍQ ALMASHTÍRÍWLAR. HÁRAKET HÁM PARALLEL KÓSHIRIW

Tegislikde berilgan F figuranıń hár bir noqatında qaysı bir usılda kóshirilse, jańa F_1 figura payda boladı (1-súwret). Eger bul kóshiriwde (sáwleleniwdi) birinshi figuranıń hár túrli noqatları ekinshi figuranıń hár túrli noqatlarına kóshedi (sáwlelenediriw óz ara bir mánisli bolsa), bul kóshiriwde *geometrikalıq figuranı almastırıw* dep ataladı.





Eger figuranı túrlendiriwde tegisliktiń barlıq noqatları kóshse onda tegislikti ózin-ózine sáwlelendiriw haqqında da aytıw múmkin. Tómende tegisliktegi bázı bir geometriyalıq almastırıwlarǵa toqtalamız.

Noqatlar arasındaǵı aralıqtı saqlaytuǵın figura almastırıw *háreket* dep ataladı.

Anıqlamaǵa muwapıq, figura almastırıwda F figuranıń qálegen X hám Y noqatları F_1 figuranıń qanday da bir X_1 ham Y_1 noqatlarına ótken bolıp, $XY = X_1Y_1$ teńlik orınlansa (yaǵnıy aralıq saqlansa), bunday figura almastırıw háreket boladı (*2-súwret*).

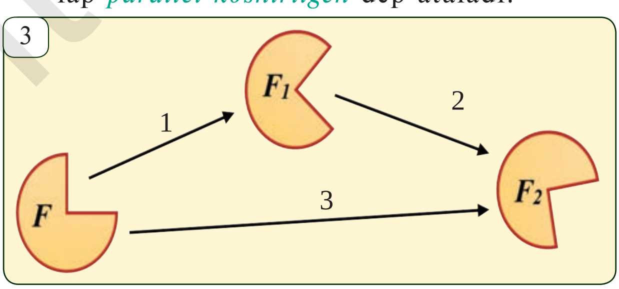
Hárekettiń tómendegi qásiyetlerin keltiriw múmkin.

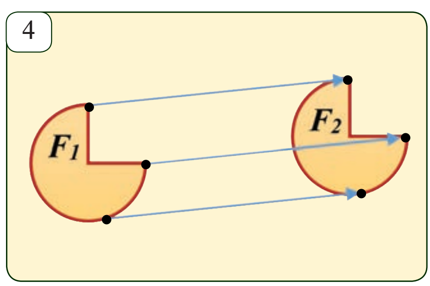
Hárakette tuwrı sızıq — tuwrı sızıqqa, nur — nurǵa, kesindi - oǵan teń kesindige, múyesh - oǵań teń múyeshke, úshmúyeshlik oǵan teń úshmúyeshlikke kóshedi (sáwlelenedi).

Aytayıq, F figura birinshi háreket nátiyjesinde F_1 figuraǵa, F_1 figuraǵa ekinshi háreket járdeminde F_2 figuraǵa ótken bolsın. Nátiyjede, F figura bul eki háreket járdeminde F_2 figuraǵa ózgeredi hám bul ózgeriw óz náwbetinde jáne háreket boladı (*3-súwret*).

Tegislikte qandayda bir háreket járdeminde birewin ekinshisine kóshiriw múmkin bolǵan figuralar teń dep ataladı.

Tegislikte qandayda bir $\overline{AB}$ vektor hám qálegen X noqatı berilgen bolsın. Eger X_1 noqatı ushın $XX_1 = AB$ shárt orınlansa, X noqatı X_1 noqatına AB vektor boylap *parallel kóshirilgen* dep ataladı.

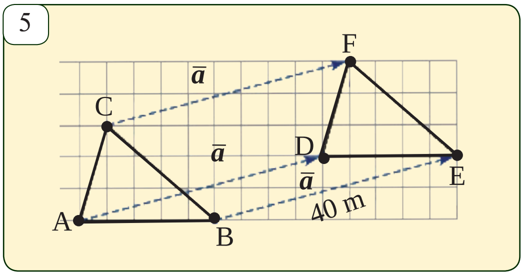




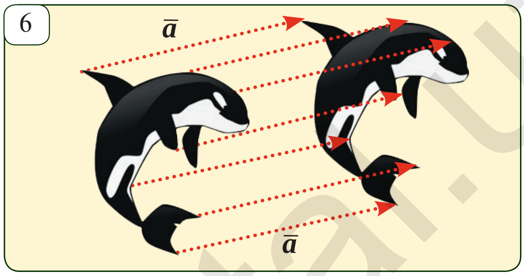
Eger tegislikte berilgen F figuranıń hár bir noqatı $\overline{AB}$ vektor boylap kóshirilse (5-súwret), jańa F_1 figura payda boladı. Bul jaǵdayda F figura F_1 figuraǵa parallel kóshirilgen dep ataladı. Parallel kóshiriwde F figuranıń har bir noqatı birdey jóneliste birdey aralıqqa kóshirilgen boladı.

5-súwrette súwretlengen úshmúyeshliktiń hár bir noqatı baslanǵısh jaǵdayına qaraǵanda 40 m ge parallel kóshirilgen. 6-súwrettegi delfin hám $\overline{a}$ vektor boylap parallel kóshirilgen.

5



6



Kórinip turǵanınday parallel kóshiriw háreket bolıp esaplanadı. Sonıń ushın parallel kóshiriwde tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa, nur-nurǵa kesindi - oǵan teń kesindige kóshiriledi hám t.b

Aytayıq, $\overline{AB}$ = (a; b) vektor boylap parallel kóshiriwde F figuranıń noqatı X (x; y) hám F_1 figuranıń noqatı $X_1(x_1; y_1)$ ge ótsin. Onda anıqlamaǵa muwapıq tómendegilerge iye bolamız:

$$x_1 - x = a, \quad y_1 - y = b \quad \text{yaki} \quad x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b.$$

Bul teńlikler parallel kóshiriw formulaları dep ataladı.

1-mısal. $\overline{p}$ = (3; 2) vektor boylap parallel kóshiriwde P (-2; 4) noqatı qaysı noqatqa kóshedi?

Sheshiliwi: Joqarıdaǵı parallel kóshiriw formulasınan paydalanamız:

$x_1 = -2 + 3 = 1, \quad y_1 = 4 + 2 = 6.$ **Juwabı:** $P_1(1; 6)$.

? Másele hám tapsırmalar

15.1. $\overline{p}$= (-2; 1) vektor boylap parallel kóshiriwde a) (3; -2); b) (0; 2); c) (2; -5) noqatı qaysı noqatqa kóshedi?

15.2. Parallel kóshiriwde A(4; 2) noqat B(3; 7) noqatına kóshedi. Parallel kóshiriw qaysi vektor boylap ámelge asırılǵan?

15.3. Parallel kóshiriwde a) tuwrı sızıq — tuwrı sızıqqa; b) nur — nurǵa; c) kesindi- oǵan teń kesindige kóbiwin dáliylleń.

15.4. Parallel kóshiriwde (1; 2) noqatı (1; -1) noqatına ótedi. Koordinata bası bul almastırıwda qaysı noqatqa ótedi?

15.5. Parallel kóshiriwde (3; 4) noqatı (2; -4) noqatına ótedi. Bul almastırıwda koordinata bası qaysı noqatqa óredi?

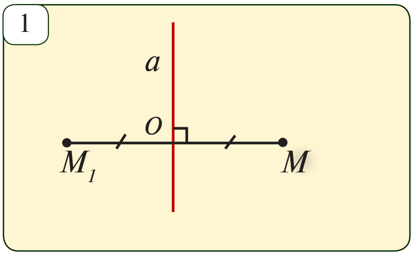
15.6. A(2; 1) noqatı B(1; 0) noqatına, C(3; -2) noqatı D(2; -3) noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw múmkinbe?

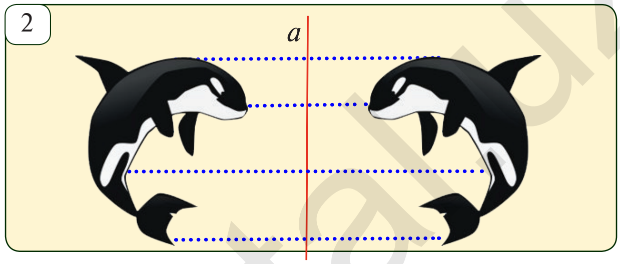
15.7. A(-2; 3) noqatı B(1; 2) noqatına, C(4; -3) noqatı D(7; -2) noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw múmkinbe?

15.8. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. Parallel kóshiriwde A_1D kesindi B_1C kesindige ótedi. Bul kóshiriwde AA_1 kesindi qaysı kesindige ótedi?

16 KÓSHERGE QARATA SIMMETRIYA

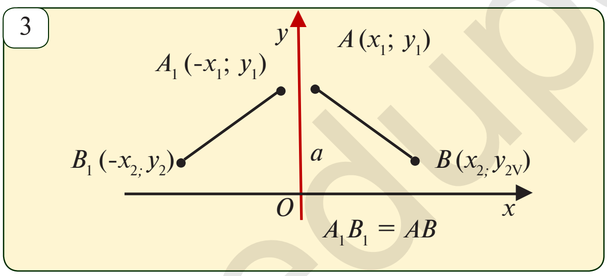
Tegislikte qandayda bir a tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın qálegen M noqatı berilgen bolsın. M noqatınan a tuwrı sızıqqa perpendikulyar túsiremiz hám onıń ultanın O menen belgileymiz (1-súwret). Perpendikulyarda jatqan M_1 noqat ushın $MO = M_1O$ bolsa, M hám M_1 noqatlarǵa a tuwrı sızıq yaki *kósherge qarata simmetryalı* noqatlar dep ataladı.

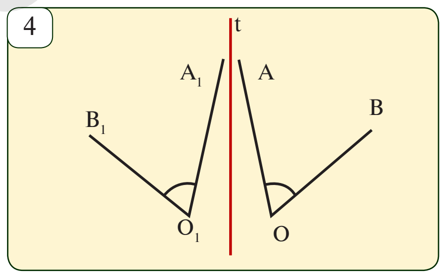
1


2


Tegisliktiń qálegen M noqatına a tuwrı sızıq (kósherge) qaraǵanda onıń simmetriyalıq bolǵan M_1 noqattı sáykes qoyamız. Tegislikti bunday óz-ózine sáwlelendiriwge *kósherge qarata simmetriyalı* deymiz. Tuwrı sızıqtı bolsa *simmetriya kósheri* dep jurgizemiz.

2-súwrette súwretlengen delfinler óz ara a kósherine qaraǵanda simmetriyalı boladı.

3


4


Kósherge qarata simmetriya háreket boladı yaǵnıy ol noqatlar arasındaǵı aralıqtı saqlaydı.

Keliń bul tasdıyıqlawdı dáliylleyik 3- súwrette qálegen $A\ (x_1;\ y_1)$ hám $B\ (x_2;\ y_2)$ noqatlar bolıp, $A_1(-x_1;\ y_1)$ hám $B_1(-x_2;\ y_2)$ noqatları bolsa a tuwrı sızıqqa (Oy kósherge) qarata sáykes túrde simmetriyalı sáwleleniwi bolsın. $AB = A_1B_1$ ekenligin kórsetemiz.

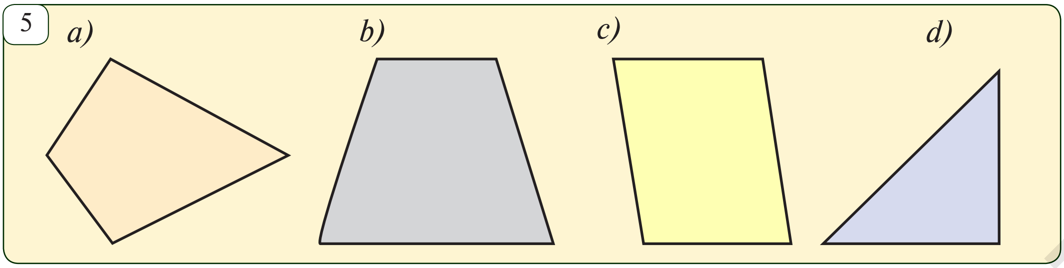
Haqıqatanda da, eki noqat arasındaǵı aralıqtı esaplaw formulası boyınsha

$$AB = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

$$A_1B_1 = (-x_2-(-x_1))^2+(y_2-y_1)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

yaǵnıy bul aralıqlar óz ara teń. Bunnan kósherge qarata simmetriyada hár bir kesindi ózine teń kesindige ótiwi de kelip shıǵadı.

Tap soǵan uqsas, kósherge qarata simmetriyada múyesh — ózine teń múyeshke ótiwin de kórsetiw múmkin. Bunda tek múyeshtiń jónelisi ózgerip qaladı (4-súwret).



Koordinatalar tegisliginde berilgen *A(x; y)* noqatı *Ox* kósherine qarata simmetriyada $A_1(x; -y)$ noqatqa, *Oy* kósherine qarata simmetriyada bolsa $A_2(-x; y)$ noqatına ótedi.

Máseleler hám tapsırmalar

16.1. (1; 2), (0; 2), (2; 2) noqatlar koordinata kósherine qarata simmetriyalarda qaysı noqatlarǵa ótedi? a) OX kósherine qarata; b) OY kósherine qarata.

16.2. (2; 4) noqatı koordinata kósherine qarata simmetriyali sawlelendiriwde (2; -4) noqatqa ótedi. Sáwlelendiriw qaysı koordinata kósherine qarata ámelge asırılǵan?

16.3. 5- súwrette súwretlengen figuralardıń qaysıları simmetriya kósherine iye? Bul figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń hám olardıń simmetriya kósherlerin jasań.

16.4. Tuwrı tórtmúyeshlik, kvadrat, romb, teń qaptallı trapeciya hám teń qaptallı úshmúyeshliktiń neshe simmetriya kósheri bar?

16.5. Qálegen *ABC* úshmúyeshlik sızıń. Onıń *C* ushınan ótiwshi tuwrı sızıqqa qarata oǵan simmetriyalı bolǵan úshmúyeshlikti súwretleń.

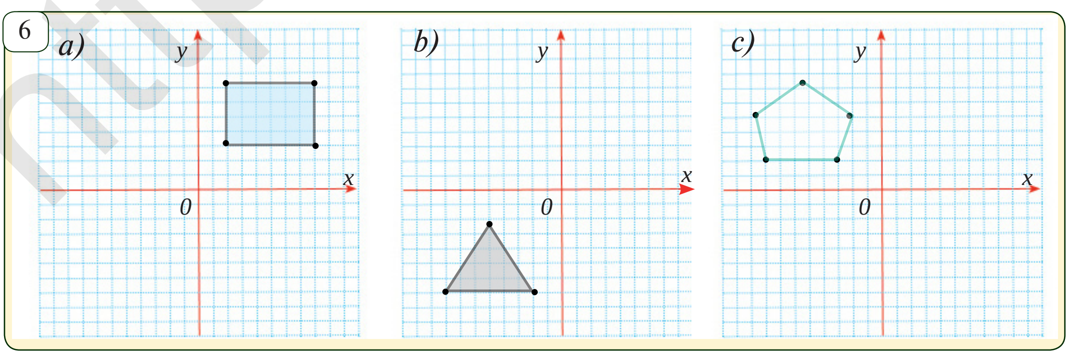
16.6. Koordinata tegisliginde ushları *A*(3; 2), *B*(2; 7), *C*(6; 7) hám *D*(7; 2) noqatlarda bolǵan *ABCD* parallelogrammǵa *Oy* kósherine qarata simmetriyalıq bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammdı súwretleń.

16.7. Koordinata tegisliginde $y = x + 4$ funkciya grafigin sızıń. Bul grafikke Ox kósherine qarata simmetriyalıq bolǵan tuwrı sızıqtı súwretleń hám ol qaysı funkciya grafigi ekenligin anıqlań.

16.8. Shepten ońǵa da, ońnan shepkede oqısa bolatuǵın sózlerge polindromlar delinedi. Tómendegi polindrom sózlerdiń qaysılarınıń simmetriya kósheri bar?

KIYIK QABAQ NAN SOS KETEK BAB MUM RADAR

16.9. 6- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń. Usı koordinatalar tegisliginde bul figuralarǵa *Ox* hám de *Oy* kósherine qarata simmetriyalı bolǵan figuralardı dúziń.



17 ORAYLÍQ SIMMETRIYA HÁM BURÍW

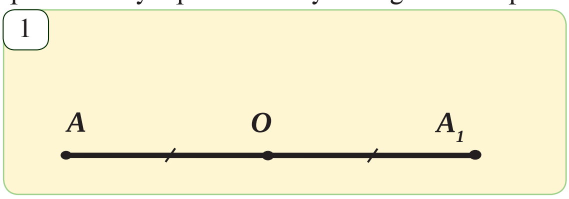
Tegislikte berilgen A hám A_1 noqatlar O noqatqa qarata simmetriyalı dep ataladı. Eger $AO = OA_1$ yaǵnıy O noqat AA_1 kesindisiniń ortası bolsa (1- súwret).

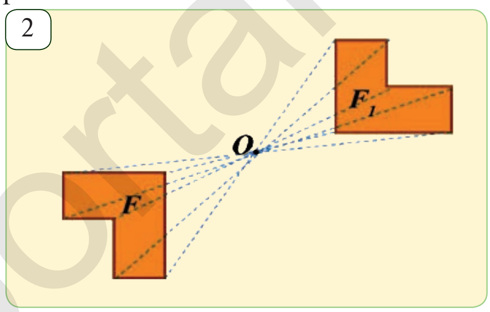
Eger tegislikde berilgen F figurasınıń hár bir noqatı O noqatına qarata simmetriyalı noqatqa kóshse (2- súwret), taza F_1 figura payda boladı. Bunday almastırıwda F hám F_1 figuralar *O noqatqa qarata simmetryalı* delinedi. 3-súwrettegi delfinler súwreti O noqatqa qarata simmetriyalı figuralar boladı.

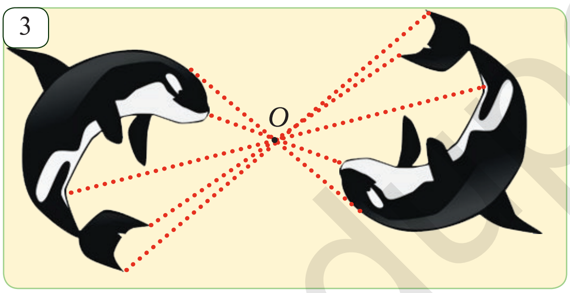
Noqatqa qarata simmetriya — háreket bolıp tabıladı.

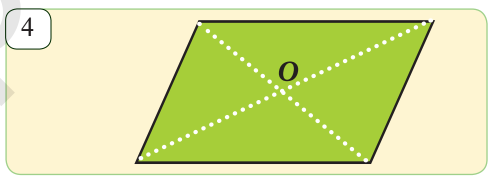
Eger F figura O noqatqa qarata simmetriyalı almastırıwda ózine kóshse, ol *oraylıq simmetriyalı figura* dep ataladı.

Máselen, parallelogramm (4-súwret) diagonallarınıń kesilisiw noqatı O ǵa qarata oraylıq simmetriyalı figura bolıp esaplanadı.





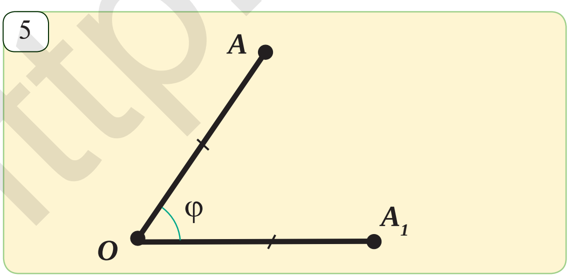


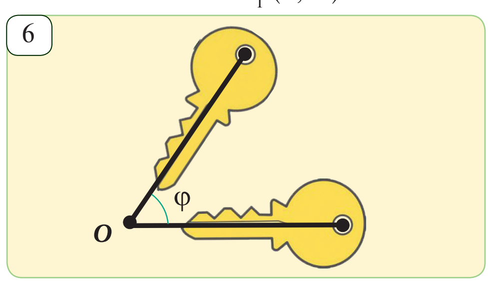


1-másele. O (2; 4) noqatqa qarata simmetriyada A (1; 2) noqat qaysı noqatqa ótedi?

Sheshiliwi. $A_1(x;\ y)$ izlenip atırǵan noqat bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq, O noqatta AA_1 kesindiniń ortası. Demek, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$.

Bul teńliklerden $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$.. *Juwabı:* A_1 (3; 6).





Aytatın bolsaq, tegislikte O noqatı hám φ múyesh berilgen bolıp, figura almastırıwda tegisliktiń qálegen A noqatı sonday A_1 noqatqa kóshirilsin, $OA = OA_1$ hám $\angle AOA_1 = \varphi$ bolsın. Bunday figura almastırıw tegislikti O noqatı átirapında φ múyeshke *burıw* dep ataladı. (5-súwret).

Eger tegislikte berilgen F figuranıń hár bir noqatın O noqatına qarata φ múyeshke bursaq, taza F_1 figura payda boladı. Bunda F figura O noqatqa qarata φ múyeshke burıwda F_1 figuraǵa ótiw delinedi. 6-súwrette gilttiń súwretti hám onı qandayda bir múyeshke burıwda payda bolǵan figura keltirilgen.

Noqatqa qarata burıw da háreket boladı.

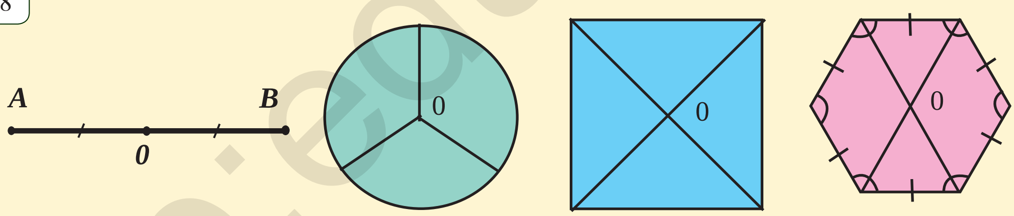
O noqatqa qarata 180° múyeshke burıw O noqatqa qarata oraylıq simmetriyadan ibarat boladı.

Koordinataları menen berilgen A $(x;\ y)$ noqatı koordinata basına qarata simmetriyada A_1 $(-x;\ -y)$ noqatqa ótedi: $A\ (x;\ y) \longrightarrow A_1\,(-x;\ -y)$.

Tabiyatta simmetriyanı hár qádemde ushıratıw múmkin. Máselen, janlı tirishiliktiń kópshiligi, atap aytqanda, insan hám haywanlar denesi, ósimliklerdiń japıraqları hám gúlleri simmetriyalı dúzilgen (7- súwret). Sonday-aq jansız tábiyat unsurları da bar, máselen qar ushqınları, duz kristalları, zatlardıń molekulyar dúziliwi de ájayıp simmetriyalı figuralalardan ibarat. Tábiyattaǵı bul gózzallıq hám quramallıqtan úlgi alǵan qurıwshı, injener hám arxitektor sıyaqlı qurıwshılar jaratqan kóplep imaratlar, qurılma hám mexanizmler, texnika hám transport qurılmaları da simmetriyalı jaratılǵan.

7

8



Másele hám tapsırmalar

17.1. O (-2; 3) noqatqa qarata oraylıq simmetriyada A (4; 2) noqat qaysı noqatqa ótedi?

17.2. 8-súwrette súwretlengen figuralarda O noqatı simmetriya orayı ekenligin tiykarlań.

17.3. (-2; 5), (2; 2), (-6; 12) noqatlar koordinata basına qarata oraylıq simmetriyada qaysı noqatqa ótedi?

17.4. Oraylıq simmetriyanıń háreket ekenligin dáliyllen.

17.5. Parallelogrammnıń (4-súwret) diagonalları kesilisken noqatı O ǵa qarata oraylıq simmetriyalı figura ekenligin dáliyllen.

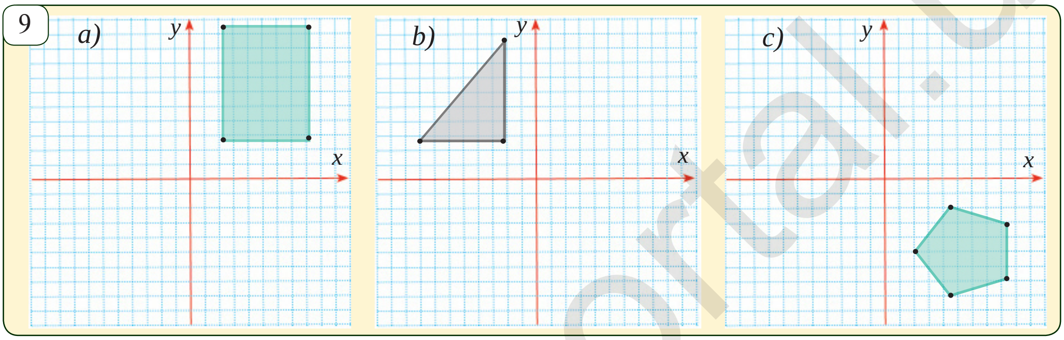
17.6. Tuwrı tórtmúyeshlik, kvadrat, parallelogramm, múyesh, tuwrı sızıq hám teń qaptallı úshmúyeshliklerdiń qaysı birewi óraylıq simmetriyalı figuradan ibarat boladı? Olardıń simmetriya orayı qáy jerde jaylasqan?

17.7. Qálegen AB kesindi hám onda jatpaytuǵın M noqatın sızıń. AB kesindige M noqatına qarata simmetriyalı bolǵan A_1B_1 kesindini súwretleń.

17.8. Qálegen ABC úshmúyeshlik sızıń. a) C ushına qarata; b) medianaları kesilisiw noqatına qarata simmetriyalı bolǵan úshmúyeshlikti súwretleń.

17.9. Koordinata tegisliginde ushları A (3; 2), B (2; 7), C (6; 7) hám D (6; 2) noqatlarda bolǵan $ABCD$ parallelogrammǵa koordinata bası O (0, 0) noqatqa qarata simmetriyalı bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammdı súwretleń.

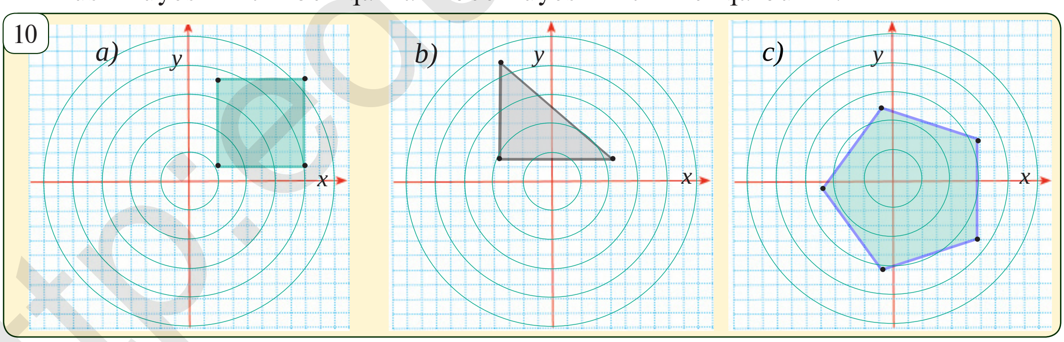
9



17.10. 9- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń. Usı koordinatalar tegisliginde bul figuralarǵa koordinata basına qarata simmetryalı bolǵan figuralardı jasań.

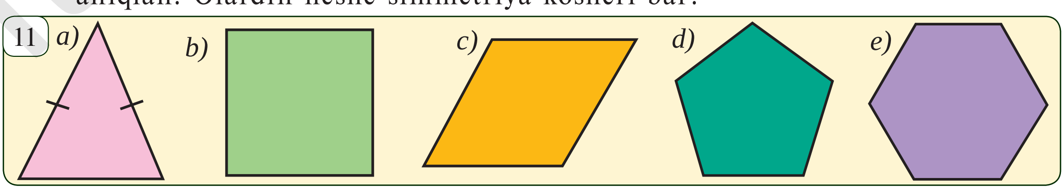
17.11. 10- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń. Usı koordinatalar tegisliginde kvadrattı 90° qa, úshmúyeshlikti 180° qa hám becmúyeshlikti 120° qa burıń.

10



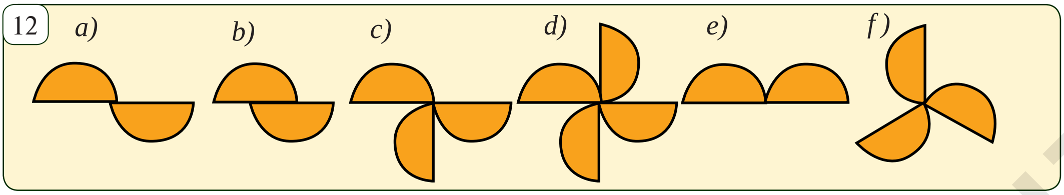
17.12. 11- súrettegi kópmúyeshlikler qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań. Olardıń neshe simmetriya kósheri bar?

11

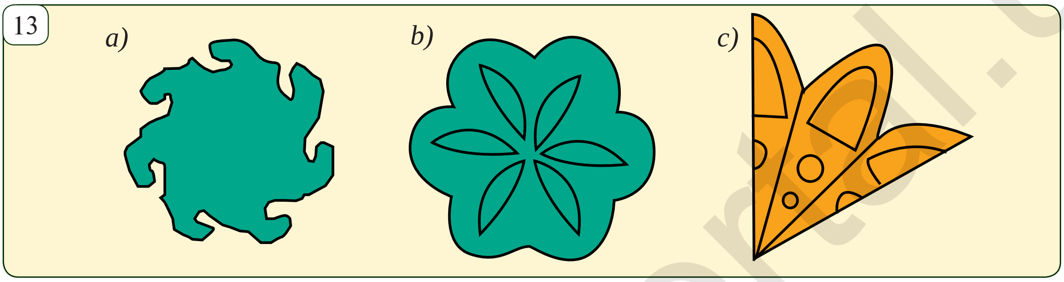


17.13. M, N, S, X, Z, V, T, Y, U, W, D, B, H, K, C, I, E, A háripleri qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań.

17.14. 12- súwrettegi figuralar bir neshe bir qıylı yarım dóńgeleklerden dúzilgen. Bul figuralardı óz-ózine ótkizetuǵın burıw bar yaki joq ekenligin anıqlań. Eger bar bolsa ol qanday burıw boladı?



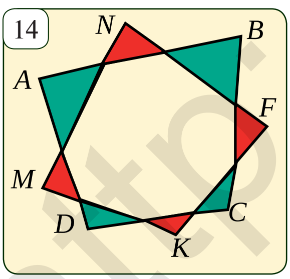
17.15. 13-súwrettegi figuralardıń qaysıları simmetriya orayına iye. Qanday múyeshke burıwda bul figuralar óz-ózine ótedi?

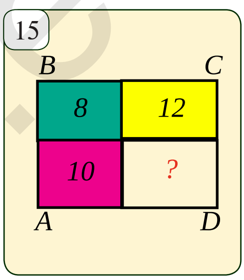


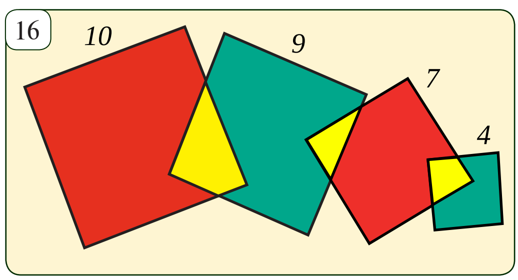
17.16. Eki $ABCD$ hám $MNPK$ teń yaǵnıy teń maydanǵa ie bolǵan tórtmúyeshlikler bir-biriniń ústine 14-súwrette kórsetilgendey etip qoyılǵan. Qızıl reńdegi úshmúyeshlik maydanları qosındısı jasıl reńge boyalǵan úshmúyeshlikler maydanı qosındısına teńligin kórsetiń.

17.17. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik tárepleri parallel tuwrı sızıqlar menen tórt tuwrı tórtmúyeshlikke bólingen. 15-súwrette berilgenlerden paydalanıp, boyalmaǵan tuwrı tórtmúyeshlik maydanın tabıń.

17.18. 16-súwrettegi kvadratlardıń tárepleri 10 *cm*, 9 *cm*, 7 *cm* hám 4 *cm*. Qızıl reńdegi kvadratlar maydanı qosındısı 112 cm^2 qa teń. Kók reńdegi kvadratlar maydanınıń qosındısın tabıń.



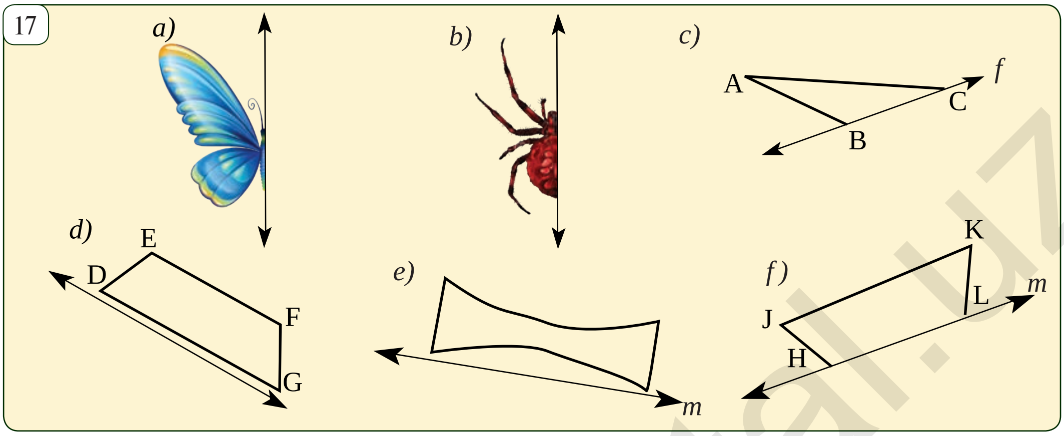




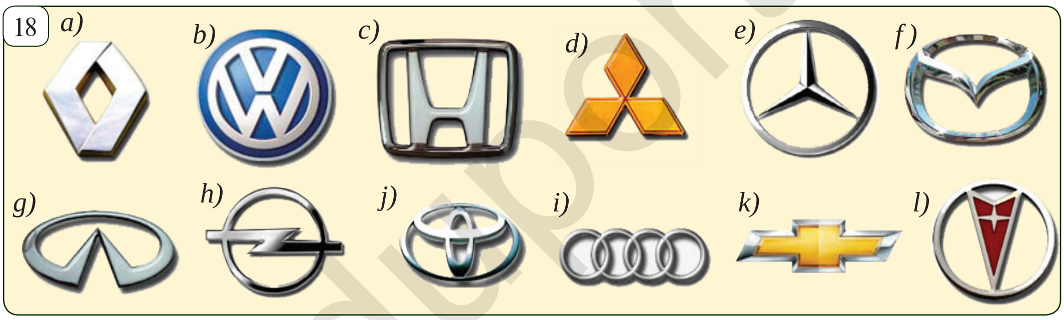
"Qar ushqınları" joybarlaw jumısı

Tábiyatta barlıq qar ushqınları simmetriyalı formaǵa iye boladı hám bir birine uqsamaydı. Hár bir qar ushqını orayǵa qarata 60° qa burıwda óz-ózine ótetuǵın figuralardı qaǵazdan qanday qırqıp alıw múmkin? Bir neshe túrli formadaǵı qar ushqınların qaǵazdan qırqıp alıń.

17.19. 17-súwrette súwretlengen figuralardı dápterińizge sızıp alıń hám berilgen kósherge qarata simmetriyalı sáwleleniwin jasań.

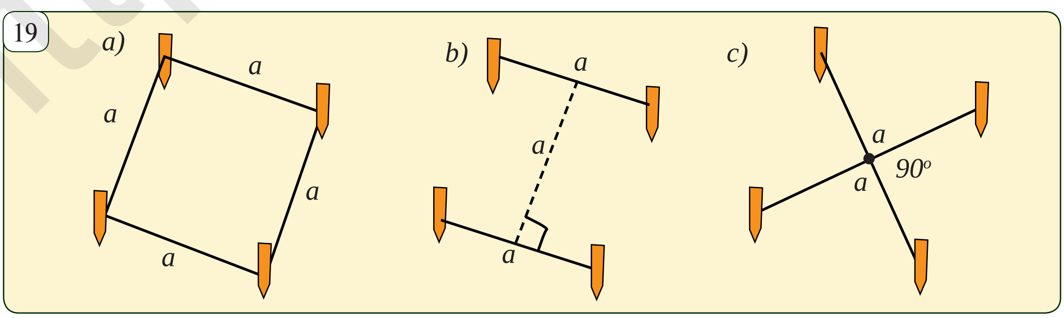


17.20. 18-súwrette súwretlengen avtomobil kompaniyalarınıń logotipleri qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań.



"Gulzardaǵı geometriyalıq" joybarlaw jumısı.

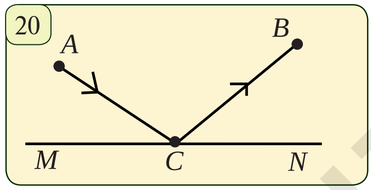
Úsh dos Ali, Váli hám Soli kvadrat formasındaǵı gúlzar jaratpaqshı. Ali kvadrat formadaǵı gúlzardı 4 qazıqqa 4 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdi tartıp ajıratpaqshı (19.a-súwret). Váli kvadrat formadaǵı gúlzardı 2 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdi qazıqqa tartıp, olardı parallel halda aralarındaǵı aralıq jip uzınlıǵına teń qılıp ornatıp ajıratpaqshı (19.b-súwret). Soli 2 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdiń ortaların túyip, olardıń ortaları ústpe-úst túsetuǵın hám bir-birine perpendikulyar qılıp tartıp qazıqlarǵa baylap ajıratpaqshı (19.c-súwret). Aytıńshı, olardıń qaysı biri qoyılǵan máseleni tuwrı sheshken? Nege?



"Geometriyalıq hám optikalıq" joybarlaw jumısı.

XVII ásirde ullı fransuz matematik alımı Per Ferma tómendegi nızamlıqtı payda etti: jaqtılıq nurı bir noqattan ekinshi noqatqa eń qısqa waqt dawamında jetip baradı.

1. Aynanıń bir tárepindegi A hám B noqatlar berilgen. Jaqtılıq nurı A noqattan shıǵıp, aynaǵa urılıp B noqattan ótedi (20-súwret). Ferma principinen paydalanıp, ACM (túsiw múyeshi) hám BCN (qaytıw múyeshi) arasındaǵı qatnastı tabıń.



20

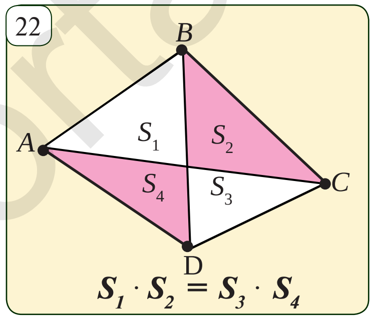
2. Dáryanıń jaǵasındaǵı A noqattı fermerdiń úyi hám B noqatta onıń ferması jaylasqan (21-súwret). Fermer hár kúni dáryaǵa barıp, ıdıslarǵa suw toltırıp fermasına alıp baradı. Ol jumıstı eń qısqa jol menen ámelge asırıw ushın qanday joldan júrgeni maqul?

21

Qızıqlı geometriya

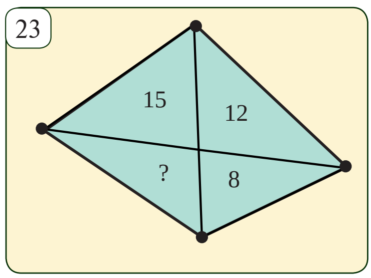
a) 22-súwrette qálegen dóńis tórtmúyeshlik súwretlengen. Tórtmúyeshliktiń diagonalları onı tórtmúyeshlikke ajıratadı. Bul úshmúyeshlikler maydanı ushın $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ bolıwın dáliylleń.

Kórsetpe: Uqsas figuralardıń qásiyetlerinen paydalanıń.



22

b) 23-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz maydandı tabıń.

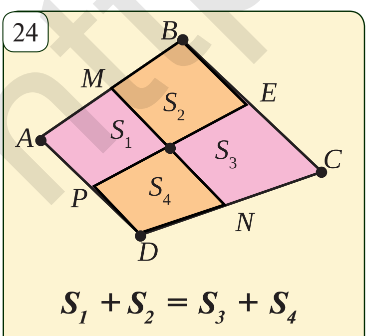


23

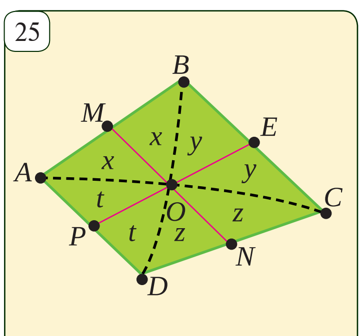
c) 24-súwrette qálegen durıs tórtmúyeshlik súwretlengen. Tortmúyeshlik qarama qarsı tárepleriniń ortaları tutastırılǵan. Nátiyjede tórtmúyeshlik tórt tórtmúyeshlikke ajıraldı. Bul tórtmúyeshlikler maydanı ushın $S_1+S_2=S_3+S_4$ ekenligin dálilleń.

Kórsetpe: dáliyllew ushın 25-súwrettegi járdemshi figuralardan paydalanıń.

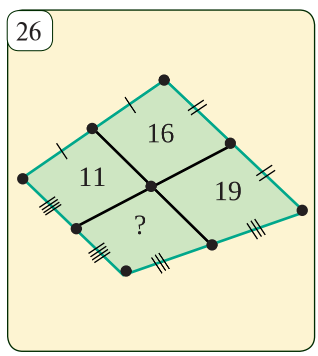
d) 26-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz maydandı tabıń.



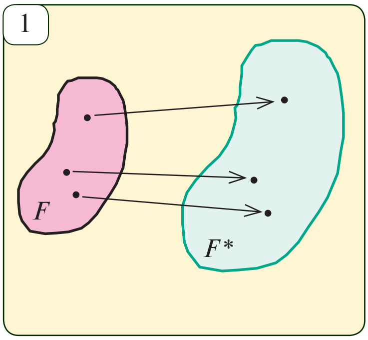
24



25



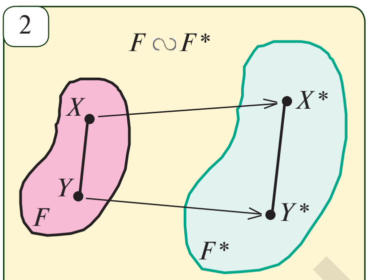
26



Ótken sabaqlarda kópmúyeshliklerdiń uqsaslığı túsinigi menen tanıstıq. Uqsaslıq túsinigin tek kópmúyeshlikler ushın emes, bálki qálegen geometriyalıq figuralar ushın da kiritiw múmkin.

Eger F hám F^* figuraları berilgen bolıp, F figurasınıń hár bir noqatına F^* figurasınıń qaysı bir noqatı sáykes qoyılğan bolsa hám bunda F^* figurasınıń hár bir noqatı F figurasınıń tek bir noqatı sáykes kelse, *(1-súwret)*. *F figurası F* figurasına túrlendiriw* delinedi.

Anıqlama. Eger F figurasın F^* figurasına túrlendiriwde noqatlar arasındağı aralıqlar 0 den ózgeshe anıq bir sanğa kóbeyse, bunday túrlendiriw *uqsaslıq túrlendiriw* delinedi (2-súwret).



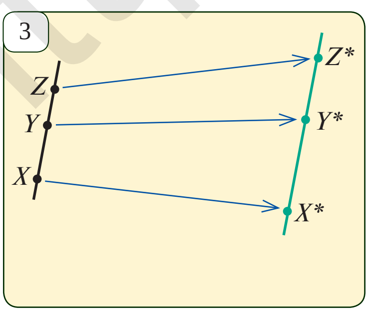
$X^*Y^* = kXY$
k — uqsaslıq koefficiyenti

Bul anıqlamanı tómendegishe talqılaw múmkin: Aytayıq, qandayda bir túrlendiriw nátiyjesinde F figurasınıń qálegen X, Y noqatlarına F^* figurasınıń X^*, Y^* noqatları sáykes qoyılğan bolsin. Eger $X^*Y^*=k.XY$, $k>0$ bolsa, bunday túrlendiriwge *uqsaslıq túrlendiriw* delinedi. Bunda k — barlıq X hám Y noqatları ushın bir qıylı san bolıp, ol uqsaslıq koefficienti delinedi.

Eger F hám F^* figuraları berilgen bolıp, bul figuralardıń birin ekinshisine ótkeretuğın uqsaslıq túrlendiriwi bar bolsa, F hám F^* figuraları óz ara uqsas delinedi. Figuralardıń uqsaslığı $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ sıyaqlı jazıladı. Eger uqsaslıq koefficienti k nı da kórsetiw lazım bolsa, $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ túrinde belgilenedi.

Eger uqsaslıq túrlendiriwinde X noqatına X^* noqatı sáykes qoyılğan bolsa, *X noqatı X* noqatına túrlendi* yaki *ótti* delinedi.

Teorema. Uqsaslıq túrlendiriwi a) tuwrı sızıqtı tuwrı sızıqqa; b) nurdı nurğa; d) múyeshti (onıń úlkenligin saqlağan halda) múyeshke; e) kesindini (uzınlığı bul kesindiden k márte uzın bolğan) kesindige ótkeredi.



Dáliyllew. a) Uqsaslıq koefficienti k bolğan uqsas túrlendiriwde bir tuwrı sızıqta jatqan túrli X, Y hám Z noqatlarına sáykes túrde X^*, Y^* hám Z^* noqatlarğa túrlendirsin (3-súwret).

X, Y, Z noqatlarınan biri, aytayıq, Y qalğan ekewiniń ortasında jatsın. Onda $XZ = XY + YZ$. Uqsaslıq túrlendiriwdiń anıqlaması boyınsha:

$$X^*Z^*=k\cdot XZ=k\cdot(XY+YZ)=k\cdot XY+k\cdot YZ=X^*Y^*+Y^*Z^*.$$

Bul teńlikten X^*, Y^* hám Z^* noqatları bir tuwrı sızıqta jatatuǵını kelip shıǵadı.

Bul teoremanıń dáliyllewin tek: a) tastıyıqlaw ushın keltirdik. Qalǵan jaǵdaylardıń óz betińizshe dáliylleń.

Másele hám tapsırmalar

18.1. Uqsaslıq túrlendiriw degen ne?

18.2. Qanday figuralar uqsas figuralar delinedi?

18.3. Eni 3 *cm*, biyikligi 4 *cm* bolǵan tuwrı tórtmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 2 ge teń bolǵan tórtmúyeshlik jasań.

18.4. 4-súwrette mektep átirapınıń sxeması 1:1000 masshtabta súwretlengen. Ólshew islerin orınlań.
a) háwliniń; b) mektep imaratiniń; d) gúlzarlardiń; e) sport maydaniniń; f) baǵdiń haqıyqıy ólshemlerin tabıń.

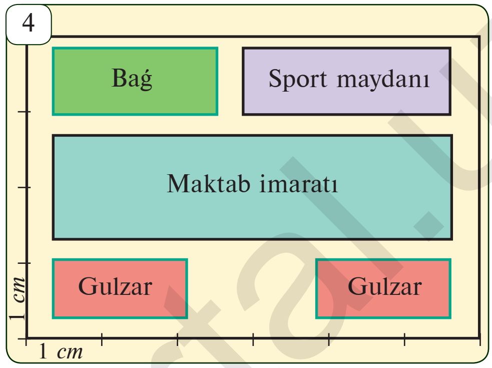
18.5. Eger karta 1:50000 masshtabta súwretlengen bolsa, Abat hám Azat awılları arasındaǵı aralıqtı tabıń.

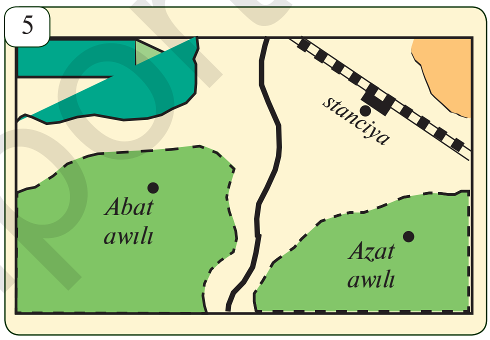
18.6. Uqsaslıq túrlendiriwde nurlar arasındaǵı múyesh saqlanatuǵının dáliylleń.

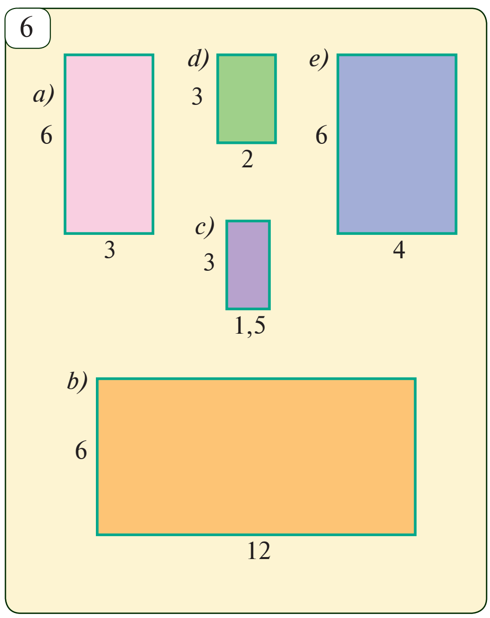
18.7*. Uqsaslıq túrlendiriwde a) parallelogramm parallelogrammǵa; b) kvadrat kvadratǵa; d) tuwrı tórtmúyeshlikke; e) trapeciya trapeciyaǵa túrlendiriwin dáliylleń.

18.8*. ABC úshmúyeshliginiń uqsaslıq túrlendiriwinde $A^*B^*C^*$ úshmúyeshligine túrlendiriledi. Eger uqsaslıq koefficienti 0,6 ǵa hám ABC úshmúyeshliginiń perimetri 12 *cm* ge teń bolsa, $A^*B^*C^*$ úshmúyeshliginiń perimetrin tabıń.

18.9. 6-súwretten uqsas tuwrımúyeshliklerdiń juplıqların tabıń hám uqsaslıq koefficientlerin anıqlań.







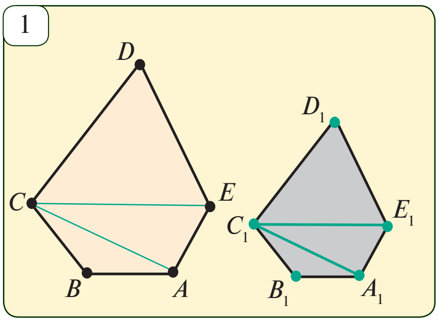
***1-teorama.* Uqsas kópmúyeshliklerdiń perimetrleriniń qatnası uqsaslıq koefficientine teń.**

Dáliyllew. Haqıyqattan da, $A_1A_2...A_n$ hám $B_1B_2...B_n$ kópmúyeshlikleri uqsas hám uqsaslıq koefficienti k bolsa, $B_1B_2=k\cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k\cdot A_2A_3$, ..., $B_nB_1=k\cdot A_nA_1$ boladı. Bunnan

$$P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1= k\cdot A_1A_2+k\cdot A_2A_3+...+k\cdot A_nA_1=k\cdot(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=kP_1$$

teńlikti payda etemiz. *Teorema dáliyllendi.*

***2-teorema.* Uqsas kópmúyeshliklerdi bir qıylı sandaǵı uqsas úshmúyeshliklerge ajıratıw múmkin.**



Dáliyllew. Aytayıq, $ABCDE$ hám $A_1B_1C_1D_1E_1$ kópmúyeshlikler uqsas bolıp, uqsaslıq koefficienti k bolsın.

Óz ara sáykes C hám C_1 tóbelerinen CA, CE hám C_1A_1, C_1E_1 diagonallarin júrgizemiz (1-súwret). Nátiyjede kópmúyeshlikler bir qıylı sandaǵı úshmúyeshliklerge ajıratıldı. Payda bolǵan úsh jup sáykes úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın kórsetemiz.

1.$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Sebebi bul úshmúyeshliklerde, shárti boyısha, $\angle B=\angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=$ k. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TMT belgisi boyınsha,

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. $\Delta CDE \backsim \Delta C_1D_1E_1$. Bul uqsaslıq 1-bántindegi sıyaqlı dáliyllendi.

3.$\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Haqiyqattanda, $\angle CAE$ hám $\angle C_1A_1E_1$ múyeshlerin qaraymız:

$$\angle CAE=\angle BAE-\angle CAB,\ \angle C_1A_1E_1=\angle B_1A_1E_1-\angle C_1A_1B_1.$$

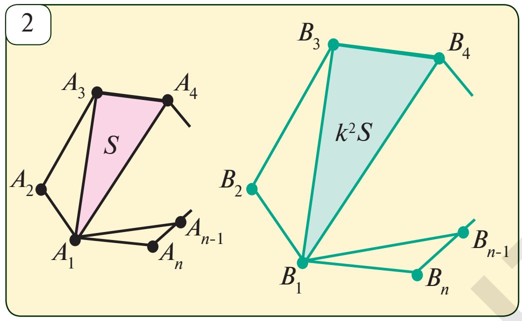
Bul jerde, $\angle BAE=\angle B_1A_1E_1$ (berilgen uqsas becmúyeshliklerdiń sáykes múyeshleri). $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ (uqsas ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń sáykes múyeshleri).

Demek, $\angle CAE=\angle C_1A_1E_1$.

AC hám AE hámde A_1C_1 hám A_1E_1 tárepleri qaraymız: $AC=kA_1C_1$, sebebi olar óz ara uqsas ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń sáykes tárepleri, $AE=kA_1E_1$, sebebi olar da berilgen uqsas becmúyeshlikleriniń sáykes tárepleri. Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TMT belgisi boyınsha, $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Qálegen uqsas kópmúyeshlikler ushın da usı sıyaqlı talqılawlar paydalı bolıwı anıq. *Teorema dáliyllendi.*

***3-Teorema.* Uqsas kópmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası uqsaslıq koefficientiniń kvadratına teń.**

Dáliyllew. Aytayıq, $A_1A_2...A_n$ hám $B_1B_2...B_n$ kópmúyeshlikler uqsas hám k — uqsaslıq koefficienti bolsın. Onda $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ úshmúyeshlikleri sáykes túrde, $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ úshmúyeshliklerine uqsas bolıp, uqsas úshmúyeshleriniń maydanlarınıń qatnası k^2 qa teń boladı (2-súwret):



$$S_{A_1A_2A_3}=k^2S_{B_1B_2B_3},\ S_{A_1A_3A_4}=k^2S_{B_1B_3B_4},\ \dots,\ S_{A_1A_{n-1}A_n}=k^2S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Bul teńliklerdiń sáykes bólimlerin qossaq,

$S_{A_1A_2...A_n}=k^2\,S_{B_1B_2...B_n}$ boladı. *Teorema dáliyllendi.*

Másele. Perimetrleri 18 *cm* hám 24 *cm* bolǵan eki uqsas kópmúyeshlik maydanlarınıń qatnasın tabıń.

Sheshiliwi. 1) Uqsas kópmúyeshlikler perimetrleriniń qatnası uqsaslıq koefficientine teń ekenliginen paydalanıp, k=24:18=4:3 ekenligin tabamız.

2) Uqsas kópmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası uqsaslıq koefficientiniń kvadratına teń bolǵanı ushın izlengen qatnas $k^2=\frac{16}{9}$ ǵa teń. *Juwabı:* $\frac{16}{9}$.

Másele hám tapsırmalar

19.1. Uqsas kópmúyeshlik perimetrleriniń qatnası nege teń?

19.2. Uqsas kópmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı teoremanı túsindiriń.

19.3. Úshmúyeshlik penen tórtmúyeshlik uqsas bolıwı múmkin be?

19.4. Maydanları 6 m^2 hám 24 m^2 bolǵan eki tórtmúyeshlik uqsas. Uqsaslıq koefficientin tabıń.

19.5. Eki kópmúyeshliktiń perimetrleri 18 *cm* hám 36 *cm* ge, maydanlarınıń qosındısı bolsa 30 cm^2 qa teń. Kópmúyeshliklerdiń maydanların tabıń.

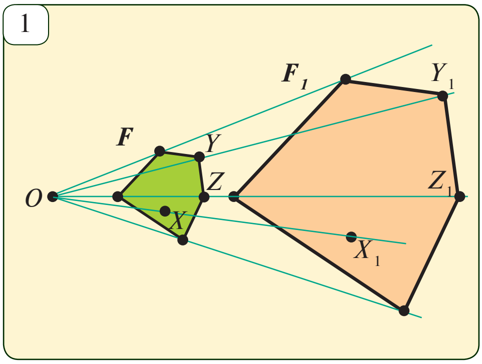
19.6. Perimetri 84 *cm* bolǵan úshmúyeshliktiń bir tárepine parallel etip júrgizilgen tuwrı, onnan perimetri 42 *cm* ge hám maydani 26 cm^2 qa teń úshmúyeshlik ajıratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

19.7. O noqatına salıstırǵanda simmetriyalı figuralar uqsas bola ma? Kósherge salıstırǵanda simmetriyalı figuralarna? Olardıń uqsaslıq koefficienti nege teń?

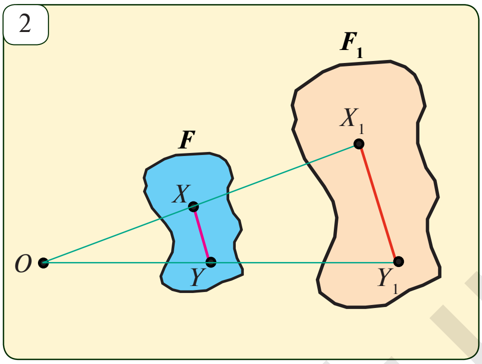
19.8. Tórtmúyeshlik formasındaǵı paxta atızı kartada maydanı 12 cm^2 bolǵan tórtmúyeshlik penen kórsetiledi. Eger karta masshtabı 1:1000 bolsa, atızdıń maydanın esaplań.

19.9*. Maydanları 8 cm^2 hám 32 cm^2 bolǵan eki uqsas úshmúyeshlik perimetrleriniń qosındısı 48 *cm* ge teń. Úshmúyeshliklerdiń perimetrlerin tabıń.

20 GOMOTETIYA HÁM UQSASLÍQ

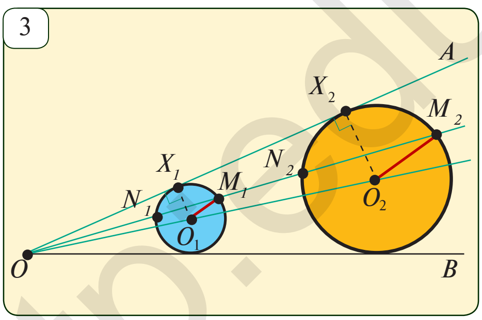


Eń ápiwayı uqsas túrlendiriwlerden biri gomotetiya boladı. Aytayıq, F — figura, O— noqat hám k — oń sanı berilgen bolsın. F figurasınıń qálegen X noqatı arqalı OX nurın júrgizemiz hám bul nurda uzınlıǵı $k \cdot OX$ bolǵan OX^* kesindisin qoyamız (1-súwret). Bul usıl menen F figurasınıń hár bir X noqatına X_1 noqatın sáykes qoyatuǵın túrlendiriw *gomotetiya* delinedi. Bunda, O noqatı gomotetiya orayı, k sanı gomotetiya koefficienti, F hám gomotetiya nátiyjesinde F figura almasatuǵın F_1 figuralar bolsa *gomotetiyalıq figuralar* delinedi.



Teorema. Gomotetiya uqsaslıq túrlendiriwi boladı.

Dáliyllew. Erkli O orayına iye, k koefficientli gomotetiyada F figuranıń X hám Y noqatları X_1 hám Y_1 noqatlarına ótsin (2-súwret). Onda, gomotetiya anıqlaması boyınsha, XOY hám X_1OY_1 úshmúyeshliklerinde $\angle O$ — ulıwma hám $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k$ boladı.



Demek, XOY hám X_1OY_1 úshmúyeshlikleri eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi boyınsha uqsas.

Sonıń ushın $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{OX_1}{OX}$, sonlıqtan, $X_1Y_1 = k \cdot XY$.

Teorema dáliyllendi.

Másele. AOB múyeshiniń tareplerine urınıwshı qálegen eki sheńber gomotetiya bolıwın hám O noqatı bul gomotetiya ushın oray ekenligin dáliylleń.

Sheshiliwi. Oraylari O_1 hám O_2 bolǵan sheńberler AOB múyeshiniń tareplerine urınsın (3-súwret). Bul sheńberlerdiń gomotetikalıq ekenligin dálilleymiz.

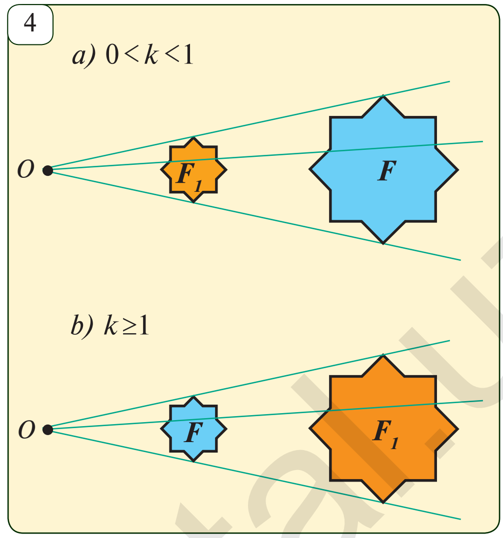
Sheńberler OA nurına sáykes túrde X_1 hám X_2 noqatlarında urınǵan bolsın (3-súwret).

Onda, $\Delta OX_1O_1 \sim \Delta OX_2O_2$, sebebi

$$\angle X_1OO_1 = \angle X_2OO_2 \quad \text{hám} \quad \angle OX_1O_1 = \angle OX_2O_2 = 90°.$$

Bunnan, $\frac{O_2X_2}{O_1X_1} = \frac{OO_2}{OO_1}$.

Ońtáreptegi qatnas k menen belgileymiz hám koefficienti $k = \frac{O_2X_2}{O_1X_1}$, orayı O bolǵan gomotetiyanı qaraymız. Aytayıq, bul gomotetiyada O_1 orayına iye sheńberdiń qálegen M noqatı M^* noqatına túrlendirilgen bolsın onda $O_2M^* = k \cdot O_1M$ yaki $O_2M_2 = \frac{O_2X_2}{O_1X_1} \cdot O_1M_1$.



Bunnan, $O_1X_1 = O_1M_1$ bolǵanı ushın, $O_2M_2 = O_2X_2$ teńligin payda etemiz. Bul M_2 noqatı orayı O_2 noqatında bolǵan radiusi O_2X_2 ge teń bolǵan sheńberde jatatuǵının bildiredi. Demek, qaralıp atırǵan sheńberler óz ara gomotetikalıq eken.

Jedellestiriwshi tapsırma

4-súwrette gomotetiya koefficienti a) 0<k<1; b) k≥1 bolǵan gomotetiyalıq figuralar súwretlengen. Gomotetiya koefficientiniń shamasına qarap gomotetiyalıq figuralardıń “qısılıwı” yaki “sozılıwı” haqqında qanday juwmaq shıǵarıw múmkin?

Másele hám tapsırmalar

20.1. Gomotetiya degen ne? Gomotetiya orayı, koefficienti she?

20.2. Gomotetiya uqsaslıq túrlendiriw ekenligin dáliylleń.

20.3. Úshmúyeshlik sızıń: a) Úshmúyeshliktiń ishinde; b) Úshmúyeshliktiń sırtınan O noqatın belgileń hám koefficienti 2 ge teń bolǵan O orayına iye gomotetiyanı qarap shıǵıp, berilgen úshmúyeshlikke gomotetiyalı úshmúyeshlik jasań.

20.4. Perimetrleri 18 *cm* hám 27 *cm* bolǵan eki romb óz ara gomotetikalıq boladı. Bul rombılardıń tárepleriniń hám maydanlarınıń qatnasların tabıń.

20.5. Gomotetiyada X noqatı X_1 noqatına, Y noqatı Y_1 noqatına ótedi. Eger X, X_1, Y, Y_1 noqatları bir tuwrı sızıqta jatpasa, bul gomotetiyanıń orayın tabıń.

20.6. Koefficienti 2 ge teń bolǵan gomotetiyada X noqatı X_1 noqatına ótetuǵını belgili. Bul gomotetiyanıń orayın jasań.

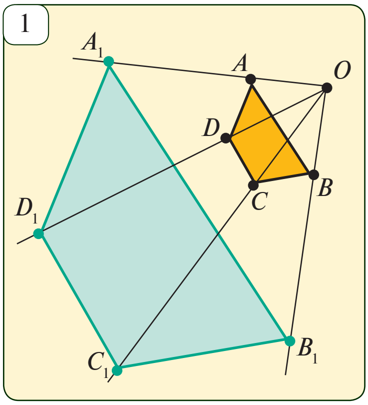
20.7. Sheńberge gomotetikalıq figura sheńber bolatuǵının dáliylleń.

20.8. Sheńber sızıń. Orayı sheńber orayında hám koefficienti a) $\frac{1}{2}$; b) 2; d)3; e)$\frac{1}{3}$ ge teń bolǵan gomotetiyada sızılǵan sheńberde gomotetikalıq bolǵan figuralardı jasań.

20.9. Múyesh hám onıń ishinde A noqatı berilgen. Múyesh táreplerine urınıwshı, A noqatınan ótiwshi sheńber jasań.

21 UQSAS KÓPMÚYESHLIKLERDI JASAW

1



Usı waqıtqa shekem teoremalardı dáliyllewde hám máselelerdi sheshiwde túrli uqsas úshmúyeshliklerdi jasap keldik. Uqsas kópmúyeshlikler qanday jasaladı? Tómende sonıń menen tanısamız.

Másele. Berilgen $ABCD$ tórtmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshligin jasań (*1-súwret*).

Jasalıwı. Tegislikte qálegen O noqatın alamız. Onnan hám tórtmúyeshliktiń tóbelerinen ótiwshi OA, OB, OC hám OD nurların júrgizemiz. Bul nurlarda O noqattan $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ hám $OD_1=3OD$ kesindilerin qoyamız. Payda bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshligi izlenip atırǵan tórtmúyeshlik boladı.

Tiykarlaw. $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$ ekenligin dálilleymiz.

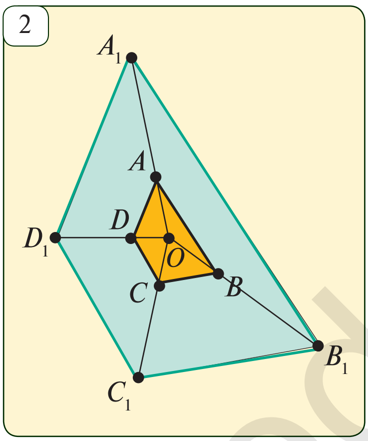
1. Sáykes tárepleriniń proportcionallıǵı.

a) $\Delta AOD \backsim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{O_1D_1}{OD} = \dfrac{OA_1}{OA} = 3$; (1)

b) $\Delta DOC \backsim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \dfrac{OD_1}{OD} = \dfrac{D_1C_1}{DC} = \dfrac{OC_1}{OC} = 3$. (2)

(1) hám (2) teńlikten $\dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{D_1C_1}{DC}$ ekenligi kelip shıǵaramız.

2



Dál usıǵan uqsas tórtmúyeshliklerdiń basqa sáykes tárepleriniń proporcionallıǵın dáliyllew múmkin.

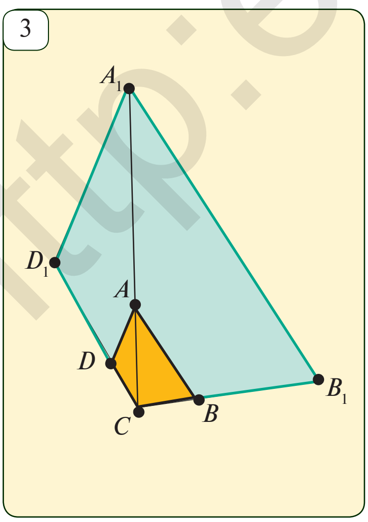
2. Sáykes múyeshlerdiń teńligi.

Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes múyeshleri teń bolǵanı ushın, $\angle A_1D_1O = \angle ADO$, $\angle C_1D_1O = \angle CDO$. Onda,

$$\angle A_1D_1C_1 = \angle A_1D_1O + \angle C_1D_1O =$$
$$= \angle ADO + \angle CDO = \angle ADC,$$

yaǵniy tórtmúyeshliklerdiń sáykes $A_1D_1C_1$ hám ADC múyeshleri óz ara teń.

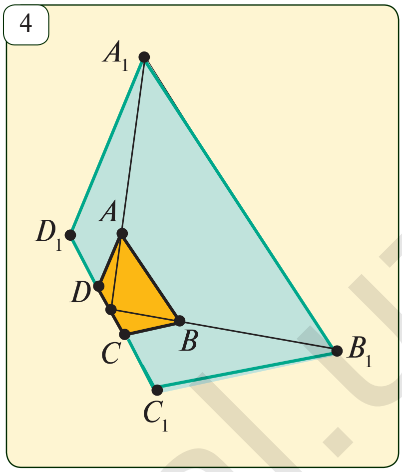
3



Dál usıǵan uqsas tórtmúyeshliklerdiń basqa sáykes múyeshleriniń teń ekenligi dáliyllenedi.

Demek, $ABCD$ hám $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshlikleri uqsas eken. Tárepleri qálegen sanda bolǵan kópmúyeshlikke uqsas kópmúyeshlikte dál usı sıyaqlı jasaladı.

Gomotetiya orayın bul máselede tórtmúyeshliktiń sırtınan tańlap aldıq. Ulıwma alǵanda gomotetiya orayın tórtmúyeshliktiń ishki oblastında (2, a -súwret), qaysı bir tóbesinde (3- súwret) yaki qaysı bir tárepinde (4- súwret) jatatuǵınday etip tańlap alıwımızǵa da bolatuǵın edi. Gomotetiya orayın qay jerden almayıq, berilgen ABCD tórtmúyeshlikke uqsas hám uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan tórtmúyeshlikler óz ara teń boladı.

4


Másele hám tapsırmalar

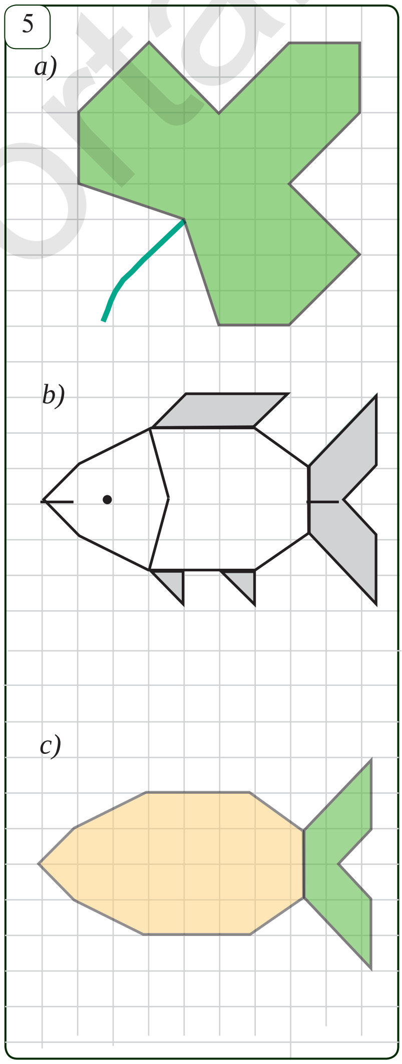
21.1. Berilgen kópmúyeshlikke uqsas kópmúyeshlikti jasaw izbe-izligin aytıp beriń.

21.2. Dápterińizge qanday da bir *ABCDE* besmúyeshligin siziń. Gomotetiya járdeminde bul becmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 0,5 ke teń bolǵan becmúyeshlik jasań. Gomotetiya orayı a) *C* noqatında; b) becmúyeshliktiń ishinde; d) *AB* tárepinde bolǵan jaǵdaylardı óz aldına kórip shıǵıń.

21.3. Keteklerdi esapqa alǵan halda 5-súwrette berilgen figuralardı dápterińizge sızıń: a) japıraqqa uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan japıraq; b) balıqshaǵa uqsaslıq koefficienti 0,8 ge teń bolǵan balıqshanı; c) geshirge uqsaslıq koefficienti 1,8 ge teń bolǵan geshirdi gomotetiya járdeminde sızıń.

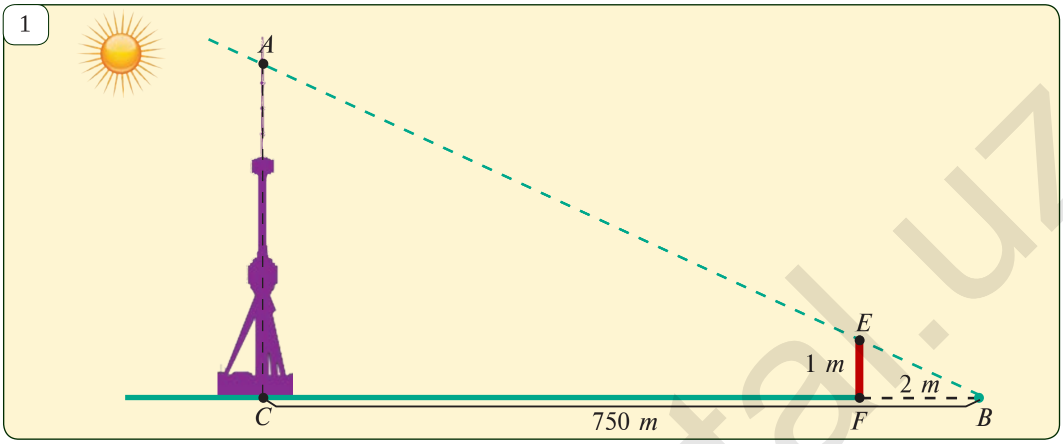
21.4. F_1 kópmúyeshligi F_2 kópmúyeshligine uqsas, k — uqsaslıq koefficienti. P_1, P_2, S_1, S_2 háripleri menen sáykes túrde bul kópmúyeshliklerdiń perimetrleri hám maydanları belgilengen. Tómendegi kesteni dápterińizge kóshiriń hám onı toltırıń.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
a)	84		100	25	
b)	14	28		48	
d)		150	200	100	
e)		30	24		3

5


ÁMELIY SHÍNÍĞÍW HÁM ONÍŃ QOLLANÍWLARÍ

1

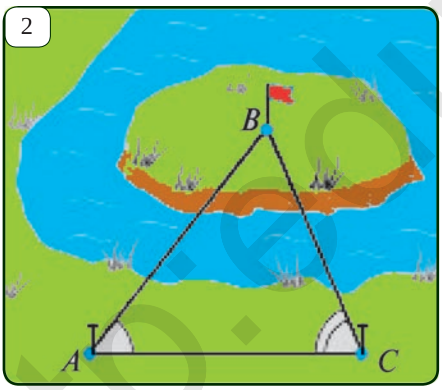


1. *Biyiklikti anıqlaw.*

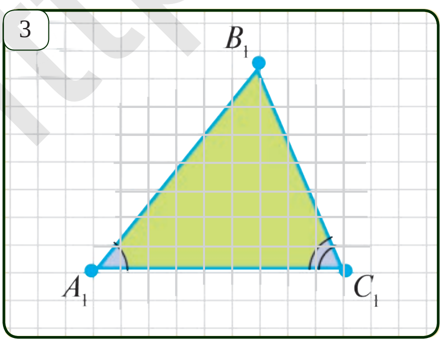
Jerde turıp, Tashkent teleminarasınıń biyikligin tabayıq. Minaranıń ushı—A noqatınıń sayası B noqatında bolsın. EF tayağın vertikal halında sonday etip jaylastıramız (1-súwret), bunda tayaqtıń E ushınıń sayası da B noqatında bolsın. A noqatınıń jerdegi proekciyasın C menen belgileymiz. Onda, tuwrı múyeshli ABC hám EBF úshmúyeshlikleri óz ara uqsas boladı. Sonıń ushın,

$$\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{BF} \quad \text{yaki} \quad AC = \frac{AC \cdot EF}{BF}$$

2



3



BC, BF aralıqların hám EF tayaqtıń uzınlığın ólshep, payda bolğan formuladan teleminara biyikligi —AC kesindisiniń uzınlığın tabamız. Mısalı, eger EF=1 m, BC= 750 m, FB =2 m bolsa, onda AC= 375 m boladı.

2. *Barıp bolmaytuğın jerge shekemgi bolğan aralıqtı ólshew.*

Aytayıq, A noqatınan barıw múmkin bolmağan B noqatına shekemgi bolğan aralıqtı anıqlaw kerek bolsın (2-súwret). A noqatınan barıwğa bolatuğın jerge C noqatın belgileymiz. Bunda C noqatınan qarağanda A hám B noqatları kórinip tursın jánede AC aralıqtı ólshep alıw múmkin bolsın.

Ásbaplar járdeminde BAC hám ACB múyeshlerin ólsheymiz. Aytayıq, $\angle BAC=\alpha$ hám $\angle ACB=\beta$ bolsın. Qağazğa $\angle A_1=\alpha$, $\angle C_1=\beta$ bolğan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligin jasaymız. Bunda

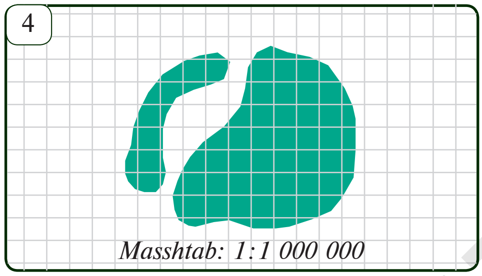
ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń eki múyeshi boyınsha uqsas boladı (2-hám 3-súwretler). Bunnan,

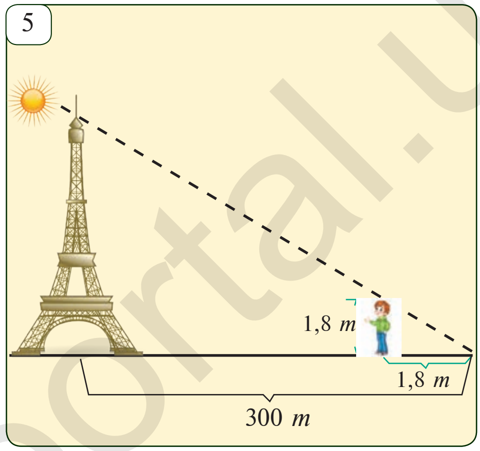
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{yaki } AB=\frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

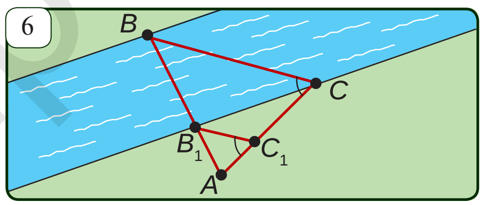
AC aralıǵın hám A_1B_1, A_1C_1 kesindilerin ólshep, nátiyjede payda bolǵan formula járdeminde AB kesindisi esaplanadı. Esaplaw jolların ańsatlastırıw ushın AC:A_1C_1 qatnasın 100:1, 1000:1 sıyaqlı qatnasta alıw múmkin. Máselen, AC=130 m, $\angle A=73°$, $\angle C=58°$ bolsa, qaǵazda $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligin $\angle A_1=73°$, $\angle C_1=58°$, A_1C_1=130 *mm* etip sızamız. A_1B_1 kesindisin ólshep, onı 153 *mm* ekenligin tabamız. Demek, izlenip atırǵan aralıq 153 *m* boladı.

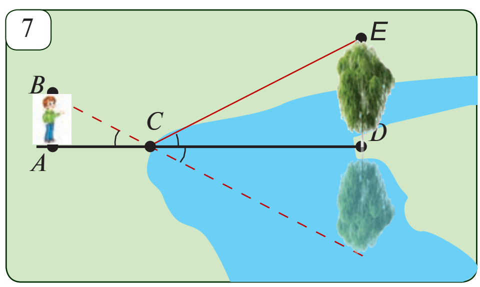
3. *Aral teńizi haqqında ámeliy jumıs.*

4-súwrette Aral teńiziniń kocmik kemesinen alınǵan súwreti kórsetilgen. Ol tiykarında ólshew hám esaplawlardı orınlap, suw saqlanıp qalǵan maydanınıń juwıq mánisin tabıń.









Másele hám tapsırmalar

22.1. Eger boyı 1,7 *m* bolǵan adam sayasınıń uzınlıǵı 2,5 *m* bolsa, sayasınıń uzınlıǵı 10,2 *m* bolǵan terektiń biyikligi qansha boladı?

22.2. 5-súwrette súwretlengen minaralardıń biyikligin anıqlań.

22.3. 6-súwrettegi eki uqsas $A_1B_1C_1$ hám ABC úshmúyeshliklerdiń járdeminde dáryanıń Masshtab: 1:1 000 000 keńligin (enin) anıqlaw kerek. Eger AC=100 *m*, AC_1=32 *m* hám AB_1=34 *m* bolsa, dáryanıń eni (BB_1) tabıń.

22.4. Jap jaǵasındaǵı DE tereginiń suwdaǵı sáwleleniwi A noqatındaǵı adamǵa kórinip tur. Eger AB=165 *cm*, AC=120 *cm*, CD=4,8 *m* bolsa, terektiń biyikligin tabıń (*7-súwret*).

22.5. Úyińizdiń janındaǵı bir terekti tańlań hám onıń biyikligin anıqlań. Bul jumıstı qalay orınlaǵanıńız haqqında esabat tayarlań.

MÁSELELERDI SHESHIW

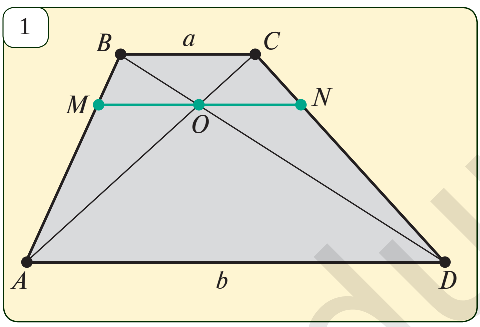
1-másele. *ABCD* trapeciyanıń *AB* hám *CD* qaptal táreplerinde *M* hám *N* noqatlar alınǵan. Bunda *MN* kesispe trapeciya ultanlarında parallel hám trapeciya diagonalları kesilisken *O* noqattan ótedi. Eger $BC=a$, $AD=b$ bolsa, a) *MO;* b) *ON;* d) *MN* kesilispeni tabıń (*1-súwret*).

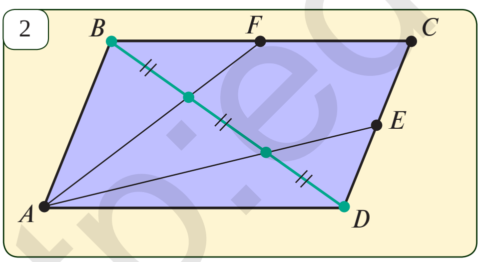
Sheshiliwi. 1) *AOD* hám *BOC* úshmúyeshlik *MM* qásiyeti boyınsha uqsas, sebebi $\angle BOC=\angle AOD$, $\angle OBC=\angle ADO$. Bunnan,

$$\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD} \quad \text{yaki} \quad \frac{OC}{OA}=\frac{a}{b} \qquad (1)$$

2) *ABC* hám *AOM* úshmúyeshlik hám BB alomatga boyınsha uqsas, sebebi $\angle AMO=\angle ABC$, $\angle ACB=\angle AOM$. Bunnan,

$$\frac{AC}{OA}=\frac{BC}{MO} \quad \text{yaki} \quad \frac{OA+OC}{OA}=\frac{a}{MO} \qquad \frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO}-1. \quad 1+\frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO}, \qquad (2)$$





3) (1) hám (2) teńliklerdiń oń bólimilerine teńlestirip,

$$\frac{a}{MO}-1=\frac{a}{b}$$

$$MO=\frac{ab}{a+b}$$

teńlikti hám onnan

$$ON=\frac{ab}{a+b} \qquad (3)$$

ekenligin tabamız. Joqarıdaǵıday jol tutıp

$$MN=\frac{2ab}{a+b} \qquad (4)$$

teńligin, keyin bolsa (3) hám (4) teńlikleriniń sáykes bólimlerin qosıp teńligin payda etemiz

teńligin payda qılamız.

Juwabı: a) $\frac{ab}{a+b}$; b) $\frac{ab}{a+b}$; d) $\frac{2ab}{a+b}$.

Esletpe. *Bul máseleniń sheshiminen MO= ON ekenligi kelip shiǵadi.*

Másele hám tapsırmalar

23.1. *ABC* úshmúyeshliginiń *AB* hám *BC* qaptal táreplerinde *D* hám *E* noqatlari belgilengen. Eger $AC||DE$, $AC=6$, $DB=3$ hám $DE=2$ bolsa, *AB* tárepin tabıń.

23.2. Eki uqsas kópmúyeshliktin maydanları 8 dm^2 hám 72 dm^2 teń, olardan biriniń perimetri ekinshisinen 26 *dm* ge kem. Úlken kópmúyeshliginiń perimetrin tabıń.

23.3. Perimetri 1 *m* bolǵan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligi $A_2B_2C_2$ úshmúyeshliginiń tárepleriniń ortaların, $A_2B_2C_2$ úshmúyeshlik $A_3B_3C_3$ úshmúyeshlik ortaların,

$A_3B_3C_3$ úshmúyeshligi bolsa, $A_4B_4C_4$ úshmúyeshliginiń tárepleriniń ortaların tutastırıwdan payda bolǵan bolsa, $A_4B_4C_4$ úshmúyeshliginiń perimetri qansha boladı?

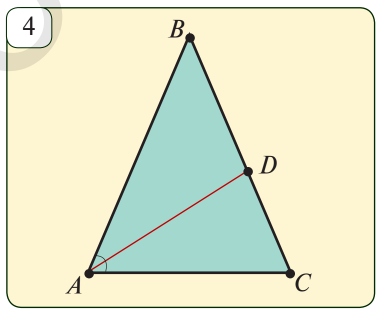
23.4. Eki uqsas úshmúyeshliktiń perimetrleri 18 *dm* hám 36 *dm* ge, maydanlarınıń qosındısı 30 dm^2 qa teń. Úlken úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

23.5. Rombınıń tárepleriniń ortaları tuwrımúyeshliktiń tóbeleri bolatuǵının dáliylleń.

23.6. *ABC* úshmúyeshligin jasań. Bul úshmúyeshlikke uqsas hám maydanı *ABC* úshmúyeshliginiń maydanınan 9 márte kishi bolǵan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti jasań.

23.7*. *E* hám *F* noqatlari sáykes túrde *ABCD* parallelogrammnıń *CD* hám *BC* tárepleriniń ortaları. *AF* hám *AE* tuwrı sızıqlar *BD* diagonalın teńdey úsh bólimge bóletuǵının dáliylleń (2-súwret).

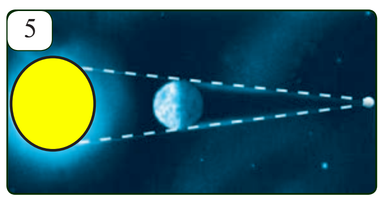
23.8. 3-súwrette Tashkent qalasındaǵı Xalıqlar doslıǵı sarayı aldında ornatılǵan eń úlken Ózbekstan bayraǵı súwretlengen. Bayraqtıń ólshemleri 20 *m* x 30 *m* ekeni málim bolsa, sızılmadan tiyisli kesispeler uzınlıǵını ólshep anıqlap, bayraq ústiniń haqıqıy biyikligin tabıń.



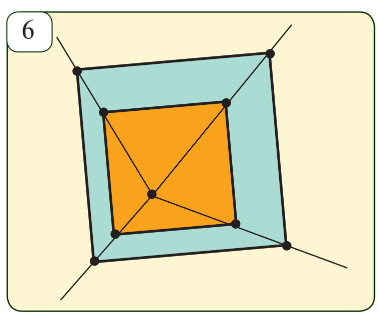
23.9. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń ultanındaǵi múyeshtiń bissektrisası bul úshmúyeshlikten ózine uqsas úshmúyeshlik ajıratadı. Úshmúyeshliktiń múyeshlerin anıqlań (*4-súwret, AB =BC*, $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$).

23.10. Sheńber jasań hám onnan *O* noqatın belgileń. Orayı *O* noqatında hám koefficienti 2 ge teń bolǵan gomotetiyada berilgen sheńberge gomotetikalıq bolǵan sheńber jasań.

23.11. Eki uqsas kópmúyeshliktiń perimetrleriniń qatnası 2:3 sıyaqlı bolsin. Úlken kópmúyeshliktiń maydanı 27, kishi kópmúyeshliktiń maydanın tabıń.

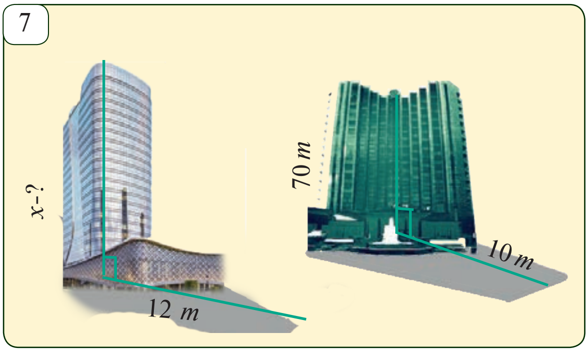


23.12. 5-súwrette Quyashtıń tolıq tutılǵan jaǵdayı súwretlengen. Eger Quyash radiusı 686 784 *km*, Ay radiusı 1760 *km* hám Jerden Ayǵa shekem bolǵan aralıq 384 400 *km* bolsa, Jerden Quyashqa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

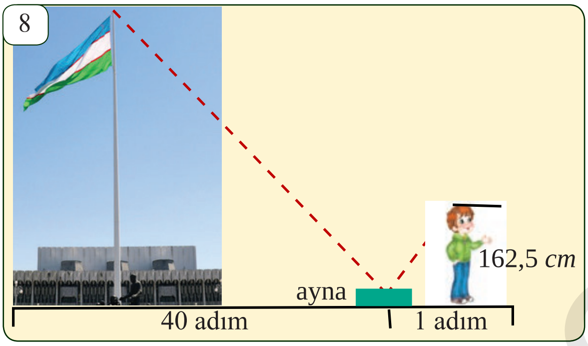


23.13. a) Bir sheńberge eki uqsas kópmúyeshlik ishley sızılǵan. Bul kópmúyeshlikler óz ara teń bolama?
b) Bir sheńberge eki uqsas kópmúyeshlik sırtlay sızılǵan. Bul kópmúyeshlikler óz ara teń bolama?

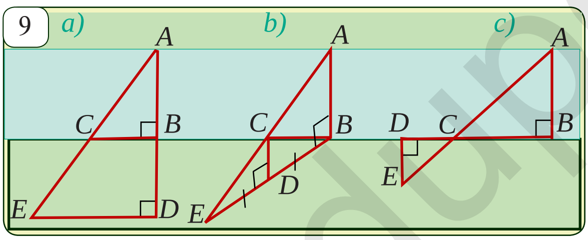
23.14*. Bir kvadrattıń tárepleri ekinshi kvadrattıń táreplerine parallel. Eger kvadratlar bir-birine teń bolmasa, onda olar gomotetikalıq bolatuǵının dáliylleń (*6-súwret*).



7



8



9

23.15. ABC úshmúyeshliginiń AB hám BC tárepleri tórt teńdey kesindilerge bólindi hám bóliniw noqatları AC tárepine parallel bolǵan kesindiler menen tutastırıldı. Eger AC=24 *cm* bolsa, payda bolǵan kesindilerdiń uzınlıqların tabıń.

23.16. Eger súwretler dál bir waqıttıń ózinde súwretke alınǵan bolsa, berilgen maǵlıwmatlar boyınsha ekinshi imarattıń biyikligin tabıń (7-*súwret*).

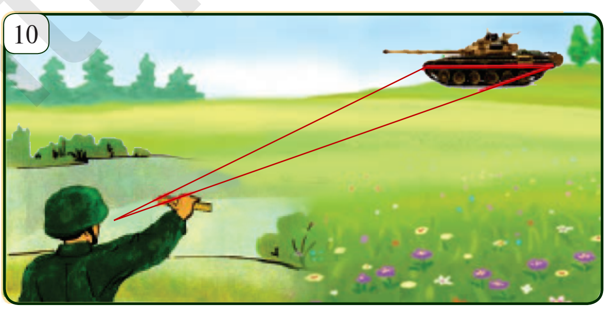
23.17. 8-súwrette berilgenlerden paydalanıp bir obyekt biyikligin tabıw jolın túsindiriń. "Xalıqlar doslıǵı" sarayı aldında kótarilgen watanımız bayraǵı ústiniń biyikligin tabıń.

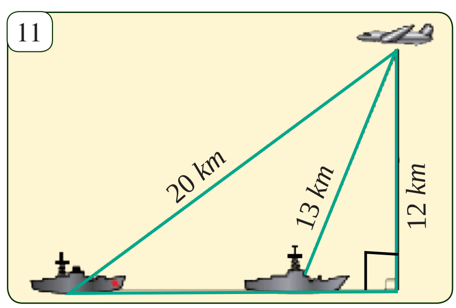
23.18. 9-súwrette berilgenlerden paydalanıp darya keńligini anıqlawnıń 3 túrli jolın túsindiriń. Olardan geometriyanıń qaysı teoremalarıda paydalanıp atırǵanı anıqlań. Úyrengen usıllarıńızdı ámelde basqa jaǵdaylarda qollanıp kóriń.

Geometriya hám áskeriy jumıs

1. Áskerler sızǵısh hám sozılǵısh qol járdeminde gózlengen aralıqtı anıqlay aladı. Eger 10-súwrettegı sızǵıshtıń tanktı qaplaytuǵın uzınlıǵı 5 *cm*, jelkeden sızǵıshqa shekemgi bolǵan aralıq 50 *cm* hám tanktıń uzınlıǵı 6,86 m bolsa, tankǵa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

2. 12 *km* biyiklikte ushıp baratırǵan samolyot ushıwshısı onnan 13 *km* uzaqlıqta júzip baratırǵan kemeni hám onnan 20 *km* uzaqlıqta júzip baratırǵan birinshi kemeni kórdı. (11-súwret). Bul kemeler arasındaǵı aralıqtı anıqlań.


10



11

24 BILIMIŃIZDI SÍNAP KÓRIŃ

I. Testlar

1. **Eki uqsas úshmúyeshlikler ushın nadurıs tastıyıqlawdı tabıń:**
   A. Maydanlarınıń qatnasınıń uqsaslıq koefficientine teń;
   B. Sáykes medianalarınıń qatnası uqsaslıq koefficientine teń;
   D. Sáykes bissektrisalarınıń qatnası uqsaslıq koefficientine teń;
   E. Sáykes biyiklikleriniń qatnası uqsaslıq koefficientine teń.
2. **Eki gomotetikalıq kópmúyeshlik ushın durıs tastıyıqlawdı tabıń:**
   A. Olar teń; B. Olar uqsas;
   D. Olar teń ólshemli; E. Duris juwap joq.
3. **Úshmúyeshliktiń medianaları ushın nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:**
   A. Bir noqatta kesilisedi; B. Kesilisiw noqatinda 2:1 qatnasta bólinedi;
   D. Bir-birine teń; E. Hár biri úshmúyeshlikti eki teńdey bólekke bóledi.
4. **Úshmúyeshliktiń bissektrisaları ushın nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:**
   A. Bir noqatta kesilisedi; B. Kesilisiw noqatinda 2:1 qatnasta bólinedi;
   D. Ózi túsken tárepti qalǵan eki tárepke proporcional kesindilerge ajıratadı;
   E. Ózi shıqqan tóbedegi múyeshti teń ekige bóledi.
5. **Eki uqsas kópmúyeshlik ushın nadurıs tastıyıqlawdı tabıń:**
   A. Olardıń tárepleriniń sanı teń; B. Olardıń múyeshleriniń sanı teń;
   D. Sáykes tárepleri proporcional; E. Maydanlarınıń qatnası uqsaslıq koefficientine teń.

II. Máseleler

24.1. Ultanları 6 *m* hám 12 *m* bolǵan trapeciyanıń diagonalları kesilisken noqattan ultanlarǵa parallel tuwri júrgizilgen. Tuwrınıń trapeciya ishindegi bóleginiń uzınlıǵın tabıń.

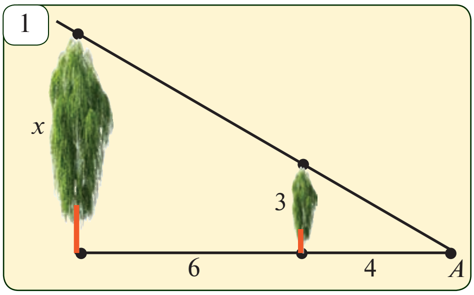
24.2. ABC úshmúyeshliginde $BC = BA = 10$, $AC = 8$. Eger AA_1 hám CC_1 úshmúyeshliktiń bissektrisaları bolsa, A_1C_1 kesindisin tabıń.

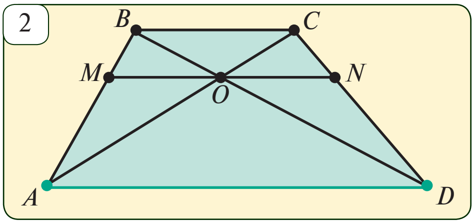
24.3. A noqatınan barıp bolmaytuǵin B noqatına shekemgi bolǵan aralıqtı anıqlaw ushın tegis jerde C noqatı tańlap alındı. Keyin AC aralıq, BAC hám ACB múyeshler ólshendi hám ABC úshmúyeshlikke uqsas $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikke uqsas $AC = 42$ *m*, $A_1C_1 = 6{,}3$ *cm*, $A_1B_1 = 7{,}2$ *cm* bolsa, AB aralıqtı tabıń.

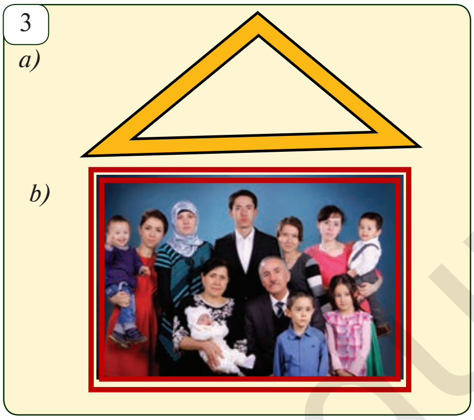
24.4. Koefficienti $k=3$ bolǵan gomotetiyada F kópmúyeshligi F_1 kópmúyeshligine túrlendiriledi. Eger F_1 kópmúyeshliginiń perimetri 12 *cm* hám maydanı 4,5 *cm*^{2} bolsa, F kópmúyeshliginiń perimetrin hám maydanın tabıń.

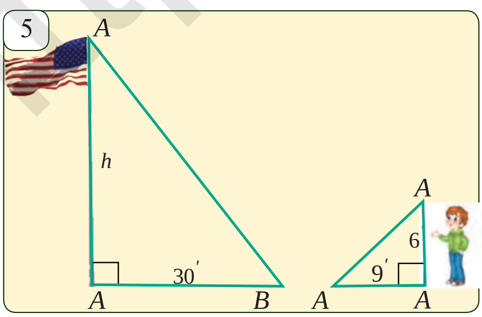
24.5. Boyı 180 *cm* bolǵan adam sayasınıń uzınlıǵı 2,4 *m* bolǵan waqıtta uzınlıǵı 4 *m* bolǵan sim aǵashtıń uzınlıǵı neshe metr boladi?

24.6. Kartada Tashkent hám Úrgenish qalalarınıń kórinisleri arasındaǵı aralıq 8,67 *cm*. Eger karta masshtabı 1:10 000 000 bolsa, Tashkent hám Úrganch qalaları arasıdaǵı aralıqtı tabıń.









III. Ózińizdi sınap kóriń (Baqlaw jumısı úlgisi)

24.7. 1-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında terektiń biyikligin tabıń.

24.8. ABC úshmúyeshliktiń tárepleri $AB = 5$ *cm*, $AC = 6$ *cm*, $BC = 7$ *cm*. Bul úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel tuwrı sızıq AB tárepin P noqatta, BC tárepin bolsa K noqatta kesip ótedi. Eger $PK = 2$ *cm* bolsa, PBK úshmúyeshlik perimetrin tabıń.

24.9. 2-súwrette $AD||BC||MN$. Eger $BC = 6$ *cm*, $AD = 10$ *cm* bolsa, MN kesindini tabıń.

24.10. *(Qosımsha).* Romb tárepleriniń ortaları tuwrı tórtmúyeshliktiń ushları bolıwın dáliylleń.

Qızıqlı máseleler

1. 4 márte úlkeytirilip kórsetilgen lupa menen qaralǵanda 2° lı múyesh úlkenligi qanshaǵa ózgeredi?

2. a) Úshmúyeshli sızǵısh súwrette kórsetilgendey ishki hám sırtqı úshmúyeshlikler uqsaspa (*3-a súwret*)?

b) 3-b súwrettegi rombnıń ishki hám sırtqı qırların jasawshı tórtmúyeshlikler uqsaspa?

3. Tómendegi shet tilinde berilgen máseleni sheship kóriń. Bunıń menen rus hám ingliz tilinen, hám geometriyadan óz bilimińizdiń qay dárejede ekenligin bilip alasız.

a) На 4-рисунке ижображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:

a) A и B; b) A и D; d) C и F; e) B и E.

b) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

c) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If XY =160 ft, YW=40 ft, TY= 120 ft, and WZ= 50 ft, find XT.

Geometriyalıq modellestiriw

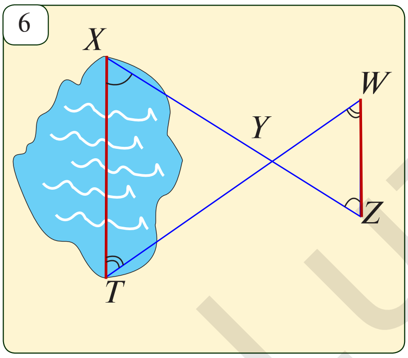
1. Qálegen tórtmúyeshlik sızıń hám qayshı menen qırqıp alıń.

2. Onıń qarama-qarsı tárepleri ortaların belgileń hám kesindiler menen tutastırıń (7-a súwret) hámde usı kesindiler boylap tórtmúyeshlikti kesiń (7-b súwret).

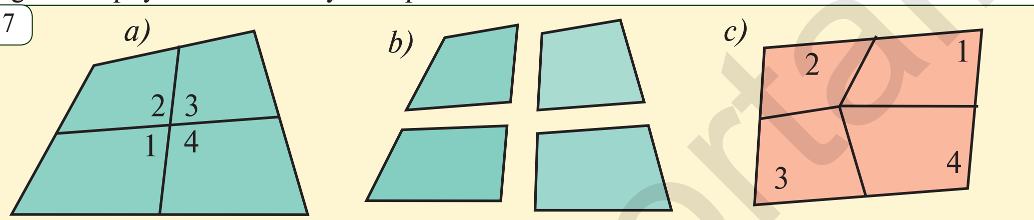
3. Payda bolǵan bóleklerden 7-c súwrette kórsetilgendey etip parallelogramm jasań.

4. Bul isti orınlaǵanda durısında da parallelogramm payda bolıwın tiykarlap beriń.

6



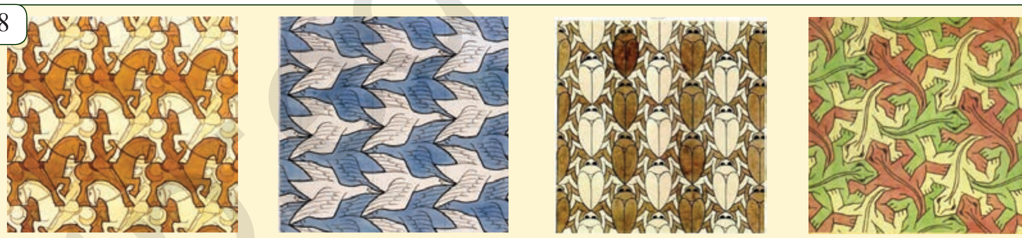
7



Naǵıslar, reshotkalar (bardyurlar) hám parketler

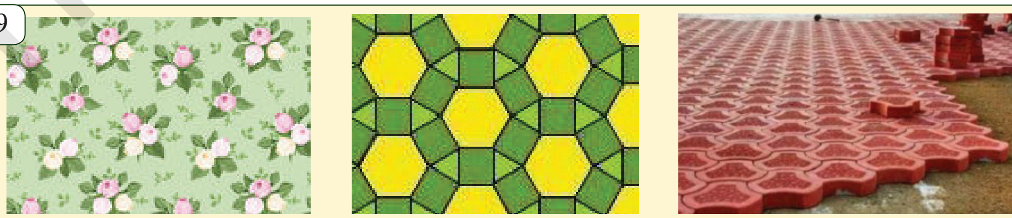
Úyimizdiń diywallarında gúlqaǵazlarǵa itibar berip qarasańız, olarda birdey kórinisler qayta-qayta tákirarlanıp pútin diywaldı toltırıp turǵanlıǵın kóriw múmkin. Birdey kórinis qayta-qayta tákirarlanıp pútin diywaldı toltırsa, bunday jıynalma kórinislerdi naǵıs deymiz. Belgili golland súwretshisi Moris Esher qálemine tiyisli támendegi ájayıp súwretler naǵıslarǵa mısal boladı (8-súwret). Bul naǵıslarda qaysı kórinis qaytalanıp atırǵanlıǵın anıqlań.

8

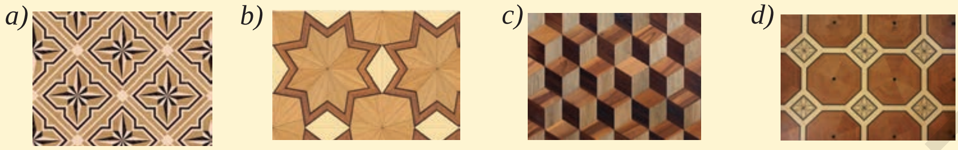


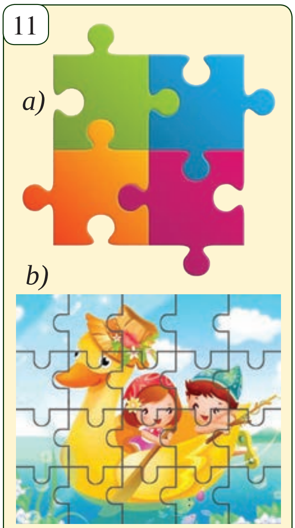
Eger birdey kórinis qayta-qayta tákirarlanıp eki parallel tuwrı sızıqlar arasında lentanı toltırsa, bunday jıynalma lenta kórinislerge reshotka yaki bardyur deymiz. Gúlqaǵaz oramı, súwret salınǵan gezlemeler hám parklerdegi reshotkalar shekli uzınlıqtaǵı bardyurlarǵa mısal boladı (9-súwret).

9



Durıs kópmúyeshlikler menen qaplanǵan naǵıslardı parket dep ataymız. Parketler menen úyimiz polları bezetiledi. Eń ápiwayı parketler 10-súwrette keltirilgan. Bizge belgili olar parallel kóshiriwde óz-ózine ótedi.

10


11


Geometriyalıq modellestiriw.
Pazl kórinisleri qanday dúzilgen?

Pazl oyınshıqların jaqsı bilesiz? (11-súwret) Keliń, olardı qanday jasaw múmkinligin kórip shıǵayıq.

1. Ólshemleri 5 *cm* x 5 *cm* bolǵan kvadrat sızıń.

2. Onıń tómengi ultanı ortasınan sheńber kórinisindegi bólektikesip alıń (12-a súwret).

3. Kesip alınǵan bólekti kvadrattıń joqarı ultanı ortasına birlestiriń (12-b súwret).

4. Endi kvadrattıń qaptal tárepi ortasınan jáne sonday úlkenliktegi sheńber kórinisindegi bólekti kesip alıń. (12-c súwret).

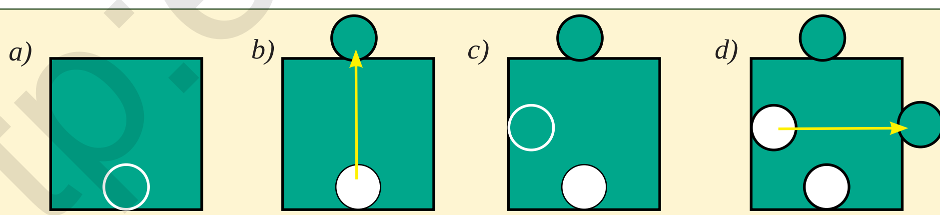
3. Kesip alınǵan bólekti kvadrattıń ekinshi qaptal tárepi ortasına birlestiriń. (12-d súwret).

4. Nátiyjede pazl oyınshıǵınıń bir danası tayar boladı.

5. Bulk pazl danaları menen tegislikti qaplaw múmkinligin tiykarlap beriń.

6. Kvadrat tárepleriņen sheńber kórinisinen basqa kórinistegi bóleklerdi qırqıp, birlestiriw arqalıbasqa kórinistegi pazl danaların dapayda etiw múmkin.

7. Keliń, bazı bir pazl danasınıń sızılmasın jaratıń. Bir neshe reńli pazl danashaların qırqıp alıp, olardan túrli naǵıslar dúziń.

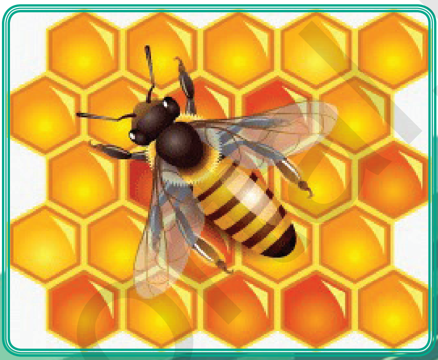
12


Geometriyalıq izertlew.

c) 73-bettegi "Geometriyalıq modellestiriw" temasında keltirilgen maǵlıwmatlar tiykarında qálegen dóńes kópmúyeshlik penen qaplaw múmkinligin dáliylleń.

II BOB

ÚSHMÚYESHLIK TÁREPLERI HÁM MÚYESHLERI ARASINDAĞI QATNASLAR



Bul baptı úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

Bilimler:

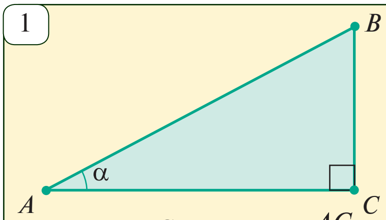
√ *qálegen múyeshtiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi táriyplerin biliw;*
√ *múyeshtiń radian ólshemin biliw;*
√ *tiykarğı trigonometriyalıq birdeyliklerdi biliw;*
√ *úshmıyeshliktiń maydanın múyesh sinusı járdeminde esaplaw formulasın biliw;*
√ *sinuslar hám kosinuslar teoremasın biliw.*

Ámeliy kónlikpeler:

√ *bazı múyeshlerdiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensin esaplay alıw;*
√ *tiykarğı trigonometriyalıq birdeyliklerdi mısallar sheshiwde qollay alıw;*
√ *úshmıyeshliktiń maydanın onıń eki tárepi hám olar arasındağı múyeshi boyınsha esaplay alıw;*
√ *sinuslar, kosinuslar teoremasınan paydalanıp esaplawğa hám dálillewge tiyisli máselelerdi sheshiw.*

25 0° DAN 180° ǴASHA SHEKEMGI BOLǴAN MÚYESHTIŃ SINUSI, KOSINUSI, TANGENSI HÁM KOTANGENSI

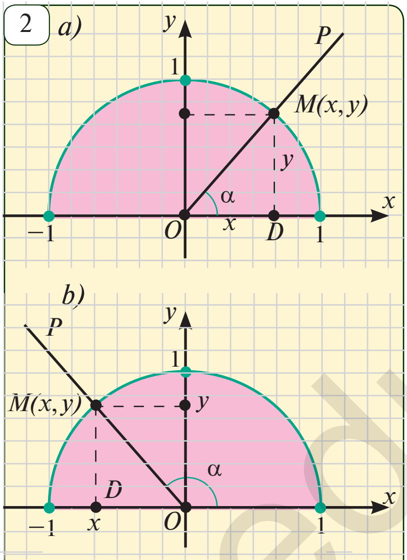
1



$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$;

2



Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90^\circ$ bolsın. Bizge belgili, onda A súyir múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi 1-súwrettegidey anıqlanar edi. Endi 0° dan 180° ǵa shekem bolǵan múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin anıqlaymız.

Radiusı birlik kesindige teń, orayı koordinatalar basında bolǵan yarım sheńberdi qaraymız (*2-súwret*). Sheńberdi $M(x;y)$ noqatında kesip ótiwshi OP nurın júrgizemiz. Bul nurdıń Ox nurı menen payda etken múyeshin α menen belgileymiz. OP nurınıń Ox nurı menen ústpe-úst túsken haldaǵı múyeshin 0° lı múyesh sıpatında qabıl etemiz.

Bizge belgili, α súyir múyesh bolǵanda (*2-a súwret*), bul múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi tuwrı múyeshli ODM úshmúyeshlikten

$\sin\alpha=\dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha=\dfrac{OD}{MO}$; $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{DM}{OD}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{OD}{DM}$.

teńlikler járdeminde anıqlanadı. Eger $MO=1$, $DM=y$, $OD=x$ ekenligin esapqa alsaq,

$$\boxed{\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x,\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}\qquad (1)}$$

teńliklerge iye bolamız.

Ulıwma jaǵdayda, 0° dan 180° ǵa shekemgi bolǵan barlıq mánisleriniń sinusı, tangensi hám kotangenslerin de (1) formula arqalı anıqlaymız (2-b súwret):

OMD úshmúyeshlik $OD^2+DM^2=MO^2$ yaki $x^2+y^2=1$. $\sin\alpha=y$ hám $\cos\alpha=x$ ekenligin esapqa alsaq, qálegen α $(0^\circ\le\alpha\le180^\circ)$ múyesh ushın

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad (2)}$$

tiykarǵı trigonometrikalıq birdeylikti payda etemiz.

Anıqlamaǵa kóre, $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$, $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$ bolǵanı ushın,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad (\alpha\ne90^\circ)}\qquad \boxed{\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\alpha\ne0,\ \alpha\ne180^\circ),}\qquad \boxed{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1\quad (\alpha\ne0,\ \alpha\ne90^\circ,\ \alpha\ne180^\circ)}$$

birdeylikleri orınlı boladı.

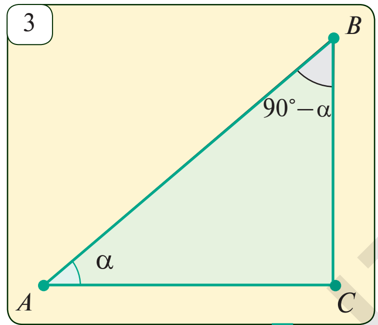
(2) teńliktiń eki tárepin aldın $\cos^2\alpha$ ǵa, keyin bolsa $\sin^2\alpha$ ǵa bólip,

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}(\alpha\ne90^\circ),}\qquad \boxed{1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad (\alpha\ne0,\ \alpha\ne180^\circ)}\qquad (3)$$

birdeyliklerdi payda etemiz.

Joqarıdaǵı (1) teńlikler tiykarında hár bir α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) múyeshke bul múyesh sinusınıń (cosinusı, tangensi, kotangensiniń) bir mánisi sáykes qoyılıp atır. Bul sáykeslik múyeshtiń "sinus", "kosinus", "tangens" hám "kotangens" dep atalıwshı funkciyaların anıqlaydı. Olar trigonometriyalıq funkciyalar dep ataladı.

"Trigonometriya" sózi — grekshe "úshmúyeshliklerdi sheshiw" degen mánisti ańlatadı.



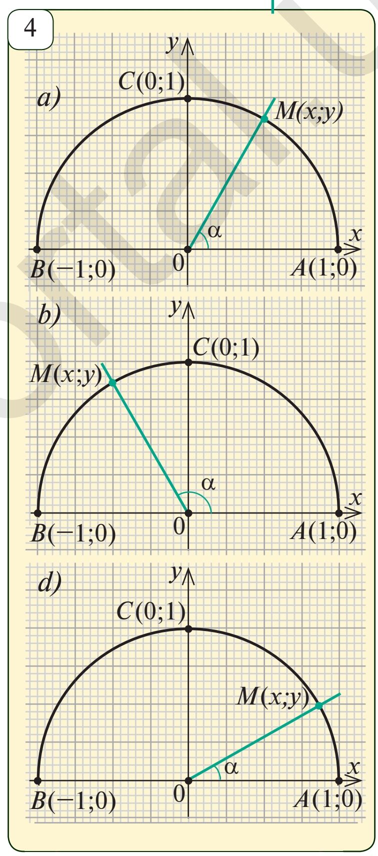
Hár qanday súyir α múyesh ushın:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha, \quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$ (2)

Hár qanday α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) múyesh ushın:

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ 3)

(2) hám (3) formulalarǵa *keltiriw formulaları* delinedi. Olar algebra kursında dáliyllenedi.



Másele hám tapsırmalar

25.1. Eger $90^\circ<\alpha<180^\circ$ bolsa, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ hám $\text{ctg}\alpha$ mánisleriniń belgilerin anıqlań.

25.2. 4-súwrette α múyeshin ólsheń hám onıń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin tiyisli ólshewler járdeminde anıqlań.

25.3. $\text{tg}(90^\circ-\alpha)=\text{ctg}\alpha$ ($\alpha\neq0^\circ$) hám $\text{ctg}(90^\circ-\alpha)=\text{tg}\alpha$ ($\alpha\neq0^\circ$) birdeyliklerin dáliyllen.

25.4. $\text{tg}(180^\circ-\alpha)=-\text{tg}\alpha$ ($\alpha\neq90^\circ$) hám $\text{ctg}(180^\circ-\alpha)= =-\text{ctg}\alpha$ ($\alpha\neq0^\circ$ hám $\alpha\neq180^\circ$) birdeyliklerin dáliyllen.

25.5. Ápiwayılastırıń:

a) $\cos^2(180^\circ-\alpha)+\cos^2(90^\circ-\alpha)$;

b) $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\alpha)$;

d) $\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}(90^\circ-\alpha)$; e) $\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}(90^\circ-\alpha)$.

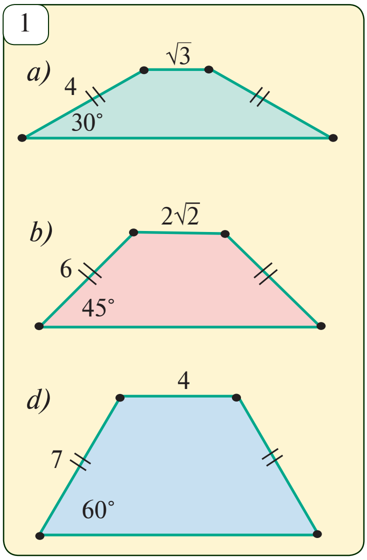
25.6. ABC úshmúyeshlikte $\angle A=150^\circ$ hám $AC=7$ *cm* bolsa, úshmúyeshliktiń C ushınan túsirilgen biyikligin tabıń.

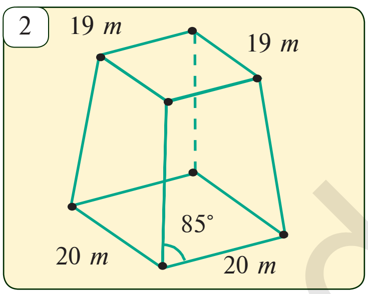
25.7. Eger a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; d) $\sin\alpha=1$ bo'lsa, $\cos\alpha$ nı tabıń.

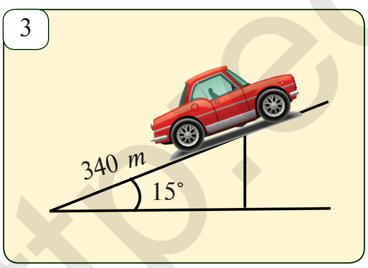
25.8*. Eger a) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; b) $\text{tg}\alpha=-1$; d) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, α nı tabıń.

25.9. Kesteni toltırıń.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\text{tg}\alpha$									
$\text{ctg}\alpha$									







26.1. Biyikligi 3 cm hám súyir múyeshi 30° bolǵan rombınıń perimetrin hám maydanın esaplań.

26.2. Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 12 cm. Onıń maydanın esaplań.

26.3. Biyikligi $4\sqrt{3}$ *cm* bolǵan teń tárepli úshmúyeshlik perimetrin tabıń.

26.4. 1-súwrette berilgenlerden paydalanıp teń qaptallı trepeciyalar maydanların tabıń.

26.5. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń súyir múyeshi 30° qa biyikligi 4 cm ge hám kishi ultanı 6 cm ge teń. Trapeciyanıń perimetri hám maydanın tabıń.

26.6. Sheńber xordası 120 graduslı doǵanı tartıp turadı. Eger sheńber radiusı 10 cm bolsa xorda uzınlıǵın tabıń.

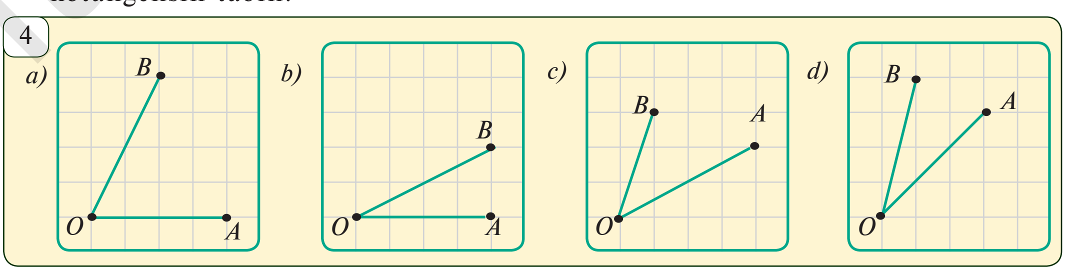
26.7*. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshi a) 120°; b) 90°; d) 60°. Úshmúyeshlik biyikliginiń ultanına qatnasın esaplań.

26.8*. 2-súwrette súwretlengen paxta qırmanınıń qaptal jaqları teń qaptallı trapeciya, ústi bolsa kvadrat kórinisinde. Súwrette berilgenlerden paydalanıp, qırmandı tolıq jabıw ushın qansha gezleme zárúrligin anıqlań.

26.9. Jeńil mashinaqıyalıqtıń joqarıǵa kóteriliw bóliminde 340 m jol bastı. Eger joldıń gorizontqa qarata kóteriliw múyeshi 15° bolsa jeńil mashina neshe metr biyiklikke kóterilgen (3-súwret)?

26.10. Shaxnazar úyinen shıǵıs tárepke qarap 800 m, soń arqa tárepke qarap 600 m jol júrdi. Ol úyinen neshe metr uzaqlıqqa keldi? Endi ol úyine tuwrı sızıq boylap jetip alıwı ushın batısqa qarata qanday múyesh astında júriw kerek?

26.11. 4-súwrette súwretlengen múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin tabıń.



26.12. Poyezd hár 30 *m* jol júrgende 1 m joqarıǵa kóteriledi. Temir joldıń gorizontqa qarata kóteriliw múyeshin tabıń.

26.13. Eger biyikligi 30 *m* bolǵan jaydıń sayasınıń uzınlıǵı 45 *m* bolsa quyash nurınıń usı jay jaylasqan maydanǵa túsiw múyeshin tabıń.

26.14. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir múyeshi 60° qa, úlken kateti olsa 6 ǵa teń. Onıń kishi kateti hám gipotenuzasın tabıń.

26.15. O orayǵa iye sheńberdiń A noqatınan ótkizilgen urınbada B noqat alınǵan. Eger $AB=9$ *cm*, $\angle ABO=30°$ bolsa, sheńber radiusın hám BO kesindisiniń uzınlıǵın tabıń.

26.16. m tuwrı sızıq hám onı kesip ótpeytuǵın AB kesindi berilgen. Bunda $AB=10$, AB hám m tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh 60°. AB kesindi ushlarınan m tuwrı sızıqqa AC hám BD perpendikulyarlar túsirilgen. CD kesindini tabıń.

26.17. Rombınıń súyir múyeshi 60° qa, biyikligi bolsa 6 ǵa teń. Rombınıń úlken diagonalı uzınlıǵın hám maydanın tabıń.

26.18. Radiusı 5 *cm* bolǵan sheńberge teńqaptallı trapeciya sırtlay sızılǵan. Eger trapeciyanıń súyir múyeshi 30° bolsa, onıń qaptal tárepin hám maydanın tabıń.

26.19. Eger $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikte $AB = 4$, $\angle CAD = 30°$ bolsa, oǵan sırtlay sızılǵan sheńber radiusın hám tuwrı tórtmúyeshlik maydanın esaplań.

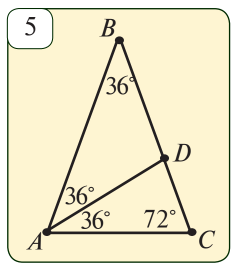
26.20. Tórtmúyeshliktiń tárepleri 3 *cm* hám $\sqrt{3}$ *cm*. Onıń bir diagonalı menen tárepleri payda etken múyeshlerin tabıń.

26,21. Eger a) $\sin A=\frac{4}{7}$; b) $\cos A=\frac{4}{7}$; d) $\cos A=-\frac{4}{7}$ bolsa, A múyeshti jasań.

26.22. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir múyeshi 30°, gipotenuzasına túsirilgen biyikligi 6 *cm*. Úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

26.23. Súyir múyeshi 30° qa, biyikligi bolsa 4 *cm* ge teń bolǵan Rombınıń maydanın esaplańg.

Tariyx betlerinen. "Altın" úshmúyeshlik

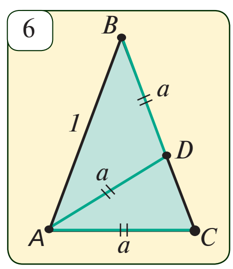


Áyyemgi grekler, múyeshleri 36°, 72° hám 72° bolǵan teń qaptallı úshmúyeshlikti — *"altın úshmúyeshlik"* dep ataǵan. Sebebi ol mınaday ájayıp qásiyetke iye eken: *ultanındaǵı múyesh bissektrisası AD onı eki teńqaptallı úshmúyeshlikke bóledı* (*5-súwret*).

Haqıyqattan da, AD bissektrisa bolǵanı ushın, BAD hám DAC múyeshleri de 36° tan. Demek, ABD úshmúyeshligi teńqaptallı. ADC úshmúyeshliginde ADC múyeshi $180°-36°-72°=72°$ bolıp, ACD múyeshine teń. Demek, ADC úshmúyeshligi de teńqaptallı.

Nátiyje. ABC úshmúyeshligi ACD úshmúyeshligine uqsas hám

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}. \qquad (1)$$



Eger ABC úshmúyeshliginiń qaptal tárepleri $AB=BC=1$ dep alsaq,onıń ultanı tómendegishe tabıladı(*6-súwret*): $AC=a$ bolsın.

Onda, 1. $AD=a$ boladı, sebebi ΔACD teń qaptallı.
2. $BD=a$ boladı, sebebi ΔABD teń qaptallı.
3. $CD=BC-BD=1-a$.

(1) teńlik boyınsha: $\dfrac{a}{1}=\dfrac{1-a}{a}$

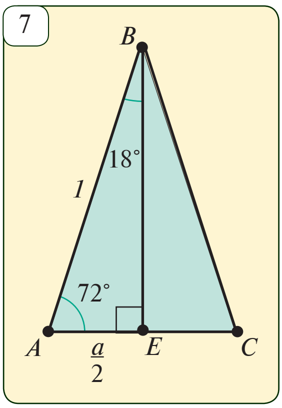
Bunnan $a^2+a-1=0$. Bul kvadrat teńlemeni sheship, $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ekenligin tabamız.

Másele. sin18°, cos18°, sin72°, cos72° mánislerin esaplań.

Sheshiliwi: Qaptal tárepi $AB=BC=1$ hám ultanı $AC=a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ge teń bolǵan. ABC "altın úshmúyeshlik"ti qaraymız (7-*súwret*). Onıń BE biyikligin júrgizemiz. Tuwrı múyeshli ABE úshmúyeshlikte:

$$\sin 18^\circ=\frac{AE}{AB}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

7



Bunnan paydalanıp, tabılıwı talap etilgen basqa mánislerdi esaplaymız:

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72^\circ=\sin(90^\circ-18^\circ)=\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Juwabı: $\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Tariyx betlerinen

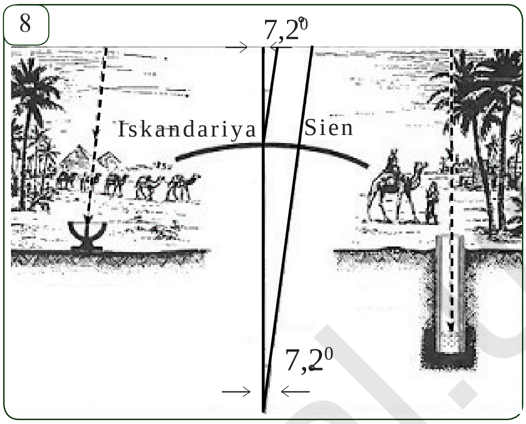
Mırza Ulıǵbek (1394—1449) — ullı ózbek alımı hám mámleket oyshılı. Negizgi atı Muxammed Taraǵay. Ol sahıbqıran Amir Temurdıń aqlıǵı. Ulıǵbektiń atası Shaxruxta mámleket oyshılı bolǵan. Ulıǵbek shama menen 1425—1428-jılları Samarqandtıń átirapındaǵı Obi Rahmat tóbeshiginde óziniń dúnyaǵa belgili observatoriyasın quradı. Observatoriyanıń imaratı úsh qabatlı bolıp, onıń tiykarǵı ásbabı — kvadrattıń biyikligi 50 metr edi. Ulıǵbektiń eń dúnyaǵa belgili miyneti "Zijiy kuragoniy" dep atalıwshı astronomiyalıq keste boladı. Ol 1018 juldızdı óz ishine alǵan.

Sonıń menen bir qatarda ulıǵbektiń trigonometriyalıq kesteleri de dıqqatqa ılayıqlı. Ulıǵbektiń trigonometriyalıq kesteleri 10 dana onlıq xana anıqlıǵında esaplanǵan. Esaplanǵan qurılmaları derlik bolmaǵan bir dáwirge bul islerdi orınlaw ushın tereń pikirlew tiykarlanǵan teoriyalıq bilim hám anıq formulalar hámde kópǵana esaplawlar talap etilgen bolsa kerek. Zijde Ulıǵbek 1 gradustıń sinusın esaplaw ushın óz aldına túsindirme jazǵanlıǵın jazıp qaldırǵan.

Geometriya hám astronomiyaǵa tiyisli joybar isi

Qádimgi grek alımı Eratosfen (eramızdan aldınǵı 276—194-jıllar) jer sheńberin birinshi bolıp ólshegen. Ol Sien (házirgi Assuan) qalasında eramızdan aldınǵı 240-jıl 19-iyun kúni, jazǵı teń kúnliktiń tús waqtında quyash tik (zenitte) bolıwı hám shuqır qudıqtıń túbin jarıtıwın baqlaǵan. Biraq, sonıń menen birge, ol jıldıń bul kúni hám waqtında Iskandariyada Quyash tik (zenitten) sheńber doǵasınıń 1/50 bólegine shekem qiyalawın da anıqlaǵan.

8



Bunnan Eratosfen qanday juwmaqqa kelgen? Onıń pikirin dawam ettiriń hám tómendegi 8-súwrette berilgenler tiykarında jer radius uzınlıǵın tabıń.

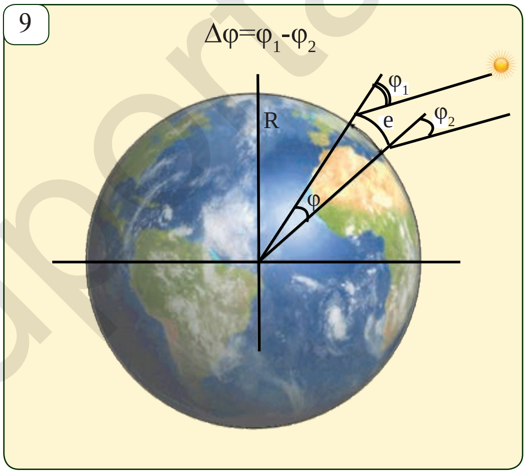
Zárúr bolıwı múmkin bolǵan bazı maǵlıwmatlar hám esaplawlar:

Sien hám Iskandariya qalaları arasındaǵı aralıq 787,5 km. Sheńber doǵasınıń 1/50 bólegi - $\alpha = 7{,}2^{\circ}$.

C - Jer sheńberiniń uzınlıǵı.

$$\frac{\alpha^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{787{,}5}{C}$$

9



Bunnan $C = 360 \cdot 787{,}5 : 7{,}2 = 39\ 375$ *km*.

Búgingi kúngi esaplawlarǵa qaraǵanda, jerdiń ekvator boylap alınǵan sheńberiniń uzınlıǵı 40 075,017 *km*, nolinshi metri boylap alınǵan sheńber uzınlıǵı bolsa - 40 007,86 *km* di quraydı. Kórip turǵanıńızday, qádimgi alım azǵana adasqan.

Tapsırma. 9-súwretten paydalanıp, jer sheńberiniń uzınlıǵın tabıwdıń qálegen waqıtta qollaw múmkin bolǵan ámeliy usılın islep shıǵıń hám tiykarlap beriń.

27 ÚSHMÚYESHLIKTIŃ MAYDANIN MÚYESHTIŃ SINUSI JÁRDEMINDE ESAPLAW

1-teorema. Úshmúyeshliktiń maydanı onıń eki tárepi hám usı eki múyeshtiń sinusınıń kóbeymesiniń yarımına teń.

$\Delta ABC,\ BC=a,\ AC=b,\ \angle C$ (1-súwret) $\Rightarrow$ $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

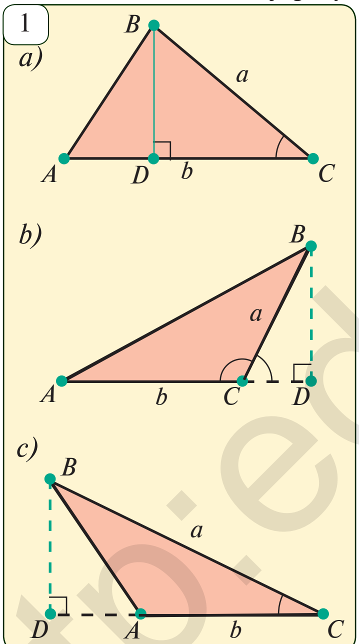
Dáliyllew. ABC úshmúyeshliginiń BD biyikligin túsiremiz. Onda 1-súwrette kórsetilgen úsh jağday bolıwı múmkin.

Birinshi jağdaydı qaraymız (1-a súwret). BCD úshmúyeshliginde $\sin C=\frac{BD}{BC}$. Bunnan $BD=BC\cdot\sin C=a\cdot\sin C$. Solay etip,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin C=\frac{1}{2}\,ab\sin C.$$

Ekinshi hám úshinshi jağdaylardın dáliyllewin ózbetińizshe orınlań. *Teorema dáliyllendi.*

1



1-teorema boyınsha, úshmúyeshliktiń maydanı ushın

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{hám} \quad S_{ABC}=\frac{1}{2}\,ac\sin B$$

formulaları da orınlı boladı.

1-másele. ABC úshmúyeshliginiń maydanı 24 cm^2. Eger $AC=8$ cm hám $\angle A=30°$ bolsa, AB tárepin tabıń.

Sheshiliwi. Úshmúyeshliktiń maydanın múyeshtiń sinusı arqalı tabıw formulası boyınsha,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$$

Bunnan,

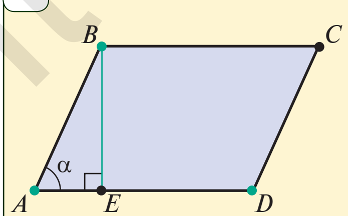
$$AB=\frac{2S_{ABC}}{AC\cdot\sin A}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot\sin 30°}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot 0{,}5}=12\ (cm).$$

Juwabı: 12 cm.

2-másele. Parallelogrammnıń maydanı onıń eki qońsılas tárepi hám bul tárepler arasındağı múyeshtiń sinusınıń kóbeymesine teń ekenligin dáliylleń.

ABCD parallelogramm, $AB=a,\ AD=b,\ \angle A=\alpha$ *(2-súwret)* $\Rightarrow$ $S_{ABCD}=ab\sin\alpha$

2

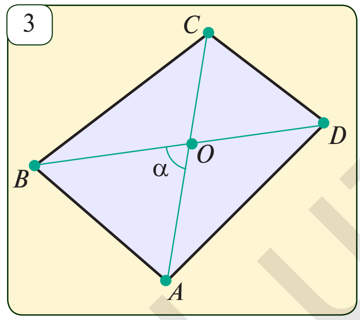


Sheshiliwi. BE biyikligin túsiremiz. ABE úshmúyeshlikte $\sin A=\frac{BE}{AB}$ yaki $BE=AB\sin A=a\sin\alpha$.

Onda, $S_{ABCD}=AD\cdot BE=ab\sin\alpha$.

2-teorema. Tórtmúyeshliktiń maydanı onıń diagonalları menen diagonalları arasındaģı múyeshtiń sinusı kóbeymesiniń yarımına teń.

Dáliyllew. Diagonallardıń kesilisiwinen payda bolģan múyeshlerdi qaraymız (*3-súwret*):



shárt boyınsha $\angle AOB=\alpha$

$\angle AOB$ ģa vertikal bolģanı ushın $\angle COD=\alpha$,

$\angle AOB$ ģa qońsılas bolģanı ushın $\angle BOC=180^\circ-\alpha$,

$\angle BOC$ ģa vertikal bolģanı ushın $\angle DOA=180^\circ-\alpha$

Úshmúyeshliktiń maydanın múyeshtiń sinusı járdeminde esaplaw formulası boyınsha:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha;$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin\alpha;$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}\ CO\cdot OD\sin\alpha; \qquad S_{DOA}=\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\ DO\cdot OA\sin\alpha.$$

Maydannıń qásiyeti boyınsha:

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=$$

$$=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha+\frac{1}{2}\ BO\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(AO\cdot OB+BO\cdot OC+CO\cdot OD+DO\cdot OA)\sin\alpha=\frac{1}{2}\{(OB\cdot(AO+OC)+$$

$$+OD\cdot(CO+OA)\}\sin\alpha=\frac{1}{2}\ (OB\cdot AC+OD\cdot AC)\sin\alpha=\frac{1}{2}\ AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Teorema dáliyllendi.

Másele hám tapsırmalar

27.1. 1-teoremanı 1-b hám 1-c súwrette súwretlengen jaģdayda dáliylleń.

27.2. Agar a) $AB=6\ cm$, $AC=4\ cm$, $\angle A=30^\circ$; b) $AC=14\ cm$, $BC=7\sqrt{3}\ cm$, $\angle C=60^\circ$; d) $BC=3\ cm$, $AB=4\sqrt{2}\ cm$, $\angle B=45^\circ$ bolsa, ABC úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.

27.3. Diagonalı 12 *cm* hám diagonalları arasındaģı múyeshi 30° bolģan tuwrımúyeshliktiń maydanın tabıń.

27.4. Tárepi $7\sqrt{2}$ *cm* hám doģal múyeshi 135° bolģan romb maydanın tabıń.

27.5. Rombınıń úlken diagonalı 18 cm hám doģal múyeshi 120°. Rombınıń maydanın tabıń.

27.6. Maydanı $6\sqrt{2}\ cm^2$ qa teń bolģan ABC úshmúyeshliginde $AB=9\ cm$, $\angle A=45^\circ$. Úshmúyeshliktiń AC tárepin hám usı tárepke túsirilgen biyikligin tabıń.

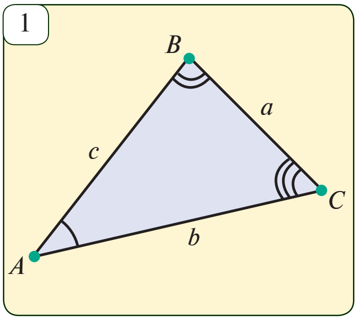
27.7*. ABC úshmúyeshliginde $\angle A=\alpha$, onıń B hám C tóbelerinen túsirilgen biyiklikleri bolsa sáykes túrde h_b hám h_c bolsa, úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

27.8*. ABC úshmúyeshliginde $AB=8\ cm$, $AC=12\ cm$ hám $\angle A=60^\circ$ bolsa, onıń AD bissektrisasın tabıń (*kórsetpe:* $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$).

SINUSLAR TEOREMASÍ

Teorema. (Sinuslar teoreması). ***Úshmúyeshliktiń tárepleri qarsısındağı múyeshlerdiń sinuslarına proporcional.***

ΔABC, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (*1-súwret*) $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



Dáliyllew. Úshmúyeshliktiń maydanın múyeshtiń sinusı arqalı tabıw formulası boyınsha,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B.\quad (❖)$$

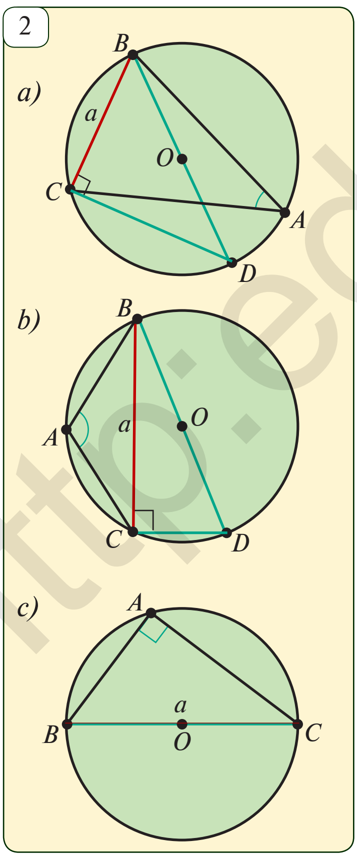
Bul teńliklerdiń birinshi ekewi boyınsha,

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A, \text{ demek } \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

Sonday-aq, (❖) teńlikleriniń birinshi hám úshinshisinen $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ teńligin payda etemiz.

Solay etip, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

Teorema dáliyllendi.



1-másele. ABC úshmúyeshliginde $AB=14$ *dm*, $\angle A=30°$, $\angle C=65°$ (*1-súwret*). BC tárepin tabıń.

Sheshiliwi: Sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$$

Onnan,

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{14\cdot\sin 30°}{\sin 65°}\approx\frac{14\cdot 0,5}{0,9}\approx 7,78\ (dm).$$

Eskertpe: Trigonometriyalıq funkciyalardiń mánisleri arnawlı kalkulyator yaki kesteler járdeminde tabıladı. Bul jerde $\sin 65°\approx 0,9$ ekenligin sabaqlıqtıń 153-betindegi kesteden anıqladıq.

Juwabı: 7,78 dm.

2-másele. Úshmúyeshliktiń tárepiniń usı táreptiń qarsısında ğı múyeshiniń sinusına qatnası, úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber diametrine yağnıy

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

ekenligin dáliylleń (*2-súwret*).

Sheshiliwi. Bizge belgili, sinuslar teoreması boyınsha, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ teńligin dáliyllew jetkilikli ekenligi kórinip tur. Bunda úsh jaǵday bolıwı múmkin:

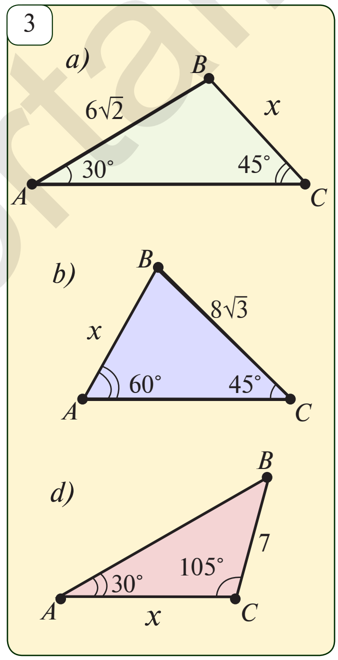
1-jaǵday: $\angle A$ — súyir múyesh (*2-a súwret*); 2-jaǵday: $\angle A$ — doǵal múyesh (*2-b súwret*); 3-jaǵday: $\angle A$ — tuwrı múyesh (*2-c súwret*).

1-jaǵdaydı qaraymız: C hám D noqatların tutastıramız. BCD— tuwrı múyeshli úshmúyeshlik, sebebi $\angle BCD$ múyeshi BD diametrine urınadı.

ΔBCD da: $BC=BD\cdot\sin D=2R\sin D$. Bıraq, $\angle D=\angle A$, sebebi olar bir BC doǵaǵa tirelgen ishley sızılǵan múyeshler. Onda,

$$BC=2R\sin A \quad \text{yaki} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Qalǵan jaǵdaylardı óz erkińizshe dáliylleń. (*kórsetpe:* 2-jaǵdayda $\angle D=180°-\angle A$ ekenliginen, 3-jaǵdayda $a=2R$ ekenliginen paydalanıń).



Másele hám tapsırmalar

28.1. Úshmúyeshliktiń bir qálegen tárepiniń usı táreptiń qarama-qarsısındaǵı múyeshtiń sinusına qatnası úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber diametrine teń ekenligin 2-máselede keltirilgen 2-hám 3-jaǵdaylar ushın dáliylleń.

28.2. 3-súwrette berilgenler boyınsha, soralǵan kesindilerdi tabıń.

28.3. Eger ABC úshmúyeshliginde:

a) $\sin A=0{,}4$; $BC=6$ *cm* hám $AB=5$ *cm* bolsa, $\sin C$ nı;

b) $\sin B=\frac{1}{2}$; $AC=8$ *dm* hám $BC=7$ *dm* bolsa, $\sin A$ ni;

dı $\sin C=\frac{1}{2}$; $AB=6$ *m* hám $AC=8$ *m* bolsa, $\sin B$ nı tabıń.

28.4. Úshmúyeshliktiń múyeshi 30° qa teń. Onıń qarama-qarsısında ǵı tárep 4,8 *dm*. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın esaplań.

28.5. Úshmúyeshliktiń bir tárepi úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusına teń. Úshmúyeshliktiń usı tárepiniń qarama-qarsısında ǵı múyeshin tabıń. Bunda eki jaǵdaydı qarawǵa tuwra keliwine itibar beriń.

28.6. ABC úshmúyeshligi ushın $AB:BC:CA=\sin C:\sin A:\sin B$ teńligi orınlı bolatuǵının tiykarlap beriń. $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ teńligi durıs bolıwı múmkin be?

28.7. Eger ABC úshmúyeshliginde $BC=20$ *m*, $AC=13$ *m* hám $\angle A=67°$ bolsa, úshmúyeshliktiń AB tárepin, B hám C múyeshlerin tabıń.

28.8*. Eger ABC úshmúyeshliginde $BC=18$ *dm*, $\angle A=42°$, $\angle B=62°$ bolsa, úshmúyeshliktiń C múyeshin, AB hám AC tárepler in tabıń.

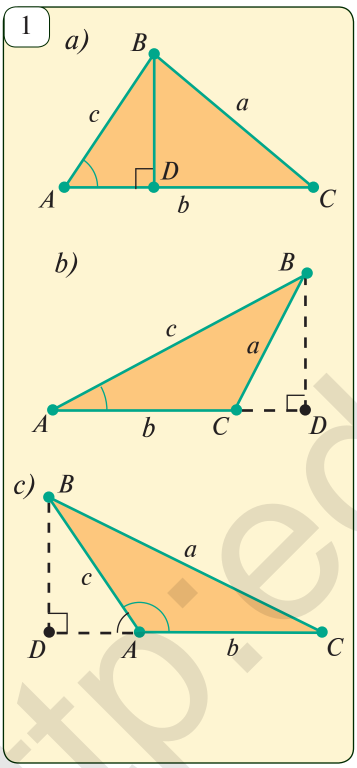
29 KOSINUSLAR TEOREMASI

Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte tuwrı múyeshtiń qarsısında ǵı tárep (gipotenuza)tiń kvadratı qalǵan tárepler (katet) diń kvadratlarınıń qosındısına teń.

Al, tuwrı bolmaǵan múyesh ushın-she? Tómendegi teorema usı tuwralı.

Teorema.(Kosinuslar teoreması). úshmúyeshliktiń qálegen tárepiniń kvadratı, qalǵan eki tárepiniń kvadratlarınıń qosındısı usı eki tárep penen olar arasındaǵı múyeshtiń kosinusı kóbeymesiniń eki eselengen ayırmasına teń.

ΔABC, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (*1-súwret*) $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$



Dáliyllew. ABC úshmúyeshliginiń BD biyikligin júrgizemiz. D noqatı AC tárepte (*1-a súwret*) yaki onıń dawamında (*1-b hám 1-d súwretler*) bolıwı múmkin. Birinshi jaǵdaydı qaraymız. Tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

$DC=AC-AD$ bolǵanı ushın:

$$BC^2=BD^2+(AC-AD)^2=BD^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AD+AD^2.$$

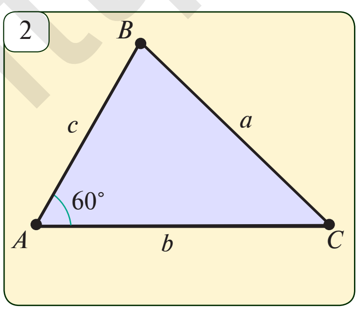
Tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshliginde $BD^2+AD^2=$ $=AB^2$ hám $AD=AB\cos A$ ekenligin esapqa alıp, keyingi teńlikten

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A,$$

yaǵnıy $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ teńligine iye bolamız.

Teorema dáliyllendi.

1-b súwrette súwretlengen jaǵdayda $DC=AD-AC$, 1-d súwrette súwretlengen jaǵdayda $DC=AD+AC$ hám $\cos(180°-A)=-\cos A$ teńliklerinen paydalanıp, kosinuslar teoremasın óz betińizshe dáliylleń.



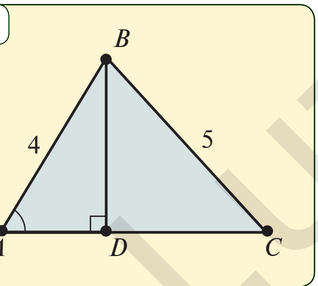
Esletpe. Kosinuslar teoreması Pifagor teoremasınıń ulıwmalasqan túri boladı. $\angle A=90°$ bolǵanda ($\cos 90°=0$ bolǵanı ushın) kosinuslar teoremasınan Pifagor teoreması kelip shıǵadı.

1-másele. ABC úshmúyeshliginde $AB=6$ *cm*, $AC=7$ *cm*, $\angle A=60°$ (*2-súwret*). BC tárepin tabıń.

Sheshiliwi. Kosinuslar teoreması boyınsha, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ yaki $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A$ bolǵanı ushın

$$BC^2=7^2+6^2-2\cdot7\cdot6\cdot\cos60°=49+36-84\cdot\frac{1}{2}=43,$$

yaǵnıy $BC=\sqrt{43}$ *cm*. *Juwabı:* $\sqrt{43}$ *cm*.



3

Kosinuslar teoremasınan paydalanıp, tárepleri belgili bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıw múmkin:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

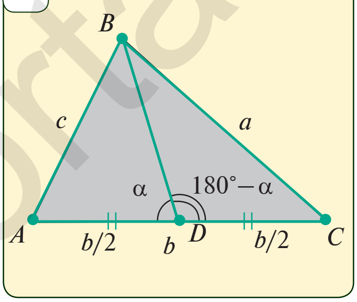
2-másele. ABC úshmúyeshliginiń tárepleri $a=5$ *m*, $b=6$ *m* hám $c=4$ *m*. Kishi táreptiń úlken táreptegi proekciyasın tabıń (*3-súwret*).

Sheshiliwi. (1) formula tiykarında $\cos A$ nı tabamız:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{9}{16}.$$

Tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshliginde $AD=AB\cdot\cos A$ bolǵani ushın $AD=4\cdot\frac{9}{16}=2{,}25$ (m).

Juwabı: 2,25 *m*.



4

Másele hám tapsırmalar

29.1. Kosinuslar teoremasın 1-*b* hám 1-*d* súwrette súwretlengen jaǵdaylarda dáliylleń.

29.2. ABC úshmúyeshliginde
   a) $AC=3$ *cm*, $BC=4$ *cm* hám $\angle C=60°$ bolsa, AB nı;
   b) $AB=4$ *m*, $BC=4\sqrt{2}$ *m* hám $\angle B=45°$ bolsa, AC nı;
   d) $AB=7$ *dm*, $AC=6\sqrt{3}$ *dm* hám $\angle A=150°$ bolsa, BC nı tabıń.

29.3. Tárepleri 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshleriniń kosinusların tabıń.

29.4. ABC úshmúyeshliginde $AB=10$ *cm*, $BC=12$ *m* hám $\sin B=0{,}6$ bolsa, AC tárepin tabıń.

29.5. Parallelogrammnıń diagonalları 10 *cm* hám 12 *cm*, hám olar arasındaǵı múyesh 60° qa teń. Parallelogrammnıń táreplerin tabıń.

29.6. Tárepleri 5 *cm* hám 7 *cm* bolǵan parallelogrammnıń bir múyeshi 120° qa teń. Onıń diagonalların tabıń.

29.7*. Tárepleri a, b, c bolǵan ABC úshmúyeshliginiń BD medianası $BD=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ formulası menen esaplanatuǵının dáliylleń (4-súwret).

29.8*. Tárepleri 6 *m*, 7 *m* hám 8 *m* bolǵan úshmúyeshliktiń medianaların tabıń.

29.9. Tárepleri 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolǵan úshmúyeshlik bissektrisaların tabıń.

29.10. Tárepleri 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolǵan úshmúyeshliktiń biyikliklerin tabıń.

30 SINUSLAR HÁM KOSINUSLAR TEOREMALARÍNÍŃ AYÍRÍM QOLLANÍWLARÍ

Aldıńǵı sabaqlarda dáliyllengen sinuslar hám kosinuslar teoremalarınan úshmúyeshliklerge tiyisli hár qıylı máselelerdi sheshiwde nátiyjeli paydalanıw múmkin. Bul sabaqta bul teoremalardıń ayırım qollanıwlarına toqtap ótemiz.

1. Kosinuslar teoreması úshmúyeshliktiń múyeshlerin tappastan, onıń múyeshleri boyınsha túrin (súyir, doǵal yaki tuwrı múyeshli ekenligin) anıqlawǵa imkaniyat beredi. Haqıyqattan da,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

formulada

1) eger $b^2+c^2>a^2$ bolsa, $\cos A>0$. Demek, A — súyir múyesh;;

2) aeger $b^2+c^2=a^2$ bolsa, $\cos A=0$. Demek, A — tuwrı múyesh;;

3) eger $b^2+c^2<a^2$ bolsa, $\cos A<0$. Demek, A — doǵal múyesh;.

$b^2+c^2=a^2$ teńligi yaki $b^2+c^2<a^2$ teńsizlik a — úshmúyeshliktiń eń úlken tárepi bolǵan jaǵdayda ǵana orınlanadı. Demek, úshmúyeshliktiń tuwrı yaki doǵal múyeshi onıń eń úlken tárepiniń qarama-qarsısında jatadı.

Úshmúyeshtiń eń úlken tárepiniń shamasına qarap, bul úshmúyeshliktiń qanday (súyir, doǵal, tuwrı múyeshli) úshmúyeshlik ekenligi haqqındaǵı juwmaqqa keliwi múmkin.

1-másele. Tárepleri 5 *m*, 6 *m* hám 7 *m* bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tappastan, onıń túrin aniqlań.

Sheshiliwi. Eń úlken múyesh qarsısında eń úlken tárep jatadı. Sonıń ushın, eger $a=7$, $b=6$, $c=5$ bolsa, $\angle A$ eń úlken múyesh boladı.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+25-49}{2\cdot 6\cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Demek, A — súyir múyesh, berilgen úshmúyeshlik bolsa súyir múyeshli boladı.

2. Úshmúyeshliktiń maydanın onıń eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi arqalı esaplaw formulası

$$S = \frac{1}{2} bc\sin A$$

hám $\sin A = \frac{a}{2R}$ formulalardan úshmúyeshlik maydanın esaplaw ushın

$$S = \frac{abc}{4R}$$

formulanı hám úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın esaplaw ushın

$$R = \frac{abc}{4S}$$

formulasın payda etemiz.

2-másele. Tárepleri $a=5$, $b=6$, $c=10$ bolǵan úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

Sheshiliwi. Geron formulasınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń maydanın tabamız:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+10}{2}=11,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}=\sqrt{11\cdot6\cdot4}=\sqrt{264}\approx16{,}3.$$

Onda, $R=\dfrac{abc}{4S}\approx\dfrac{5\cdot7\cdot10}{4\cdot16{,}3}\approx5{,}4.$ *Juwabı:* $\approx5{,}4$.

Másele hám tapsırmalar

30.1. Eger $AB=7$ *cm*, $BC=8$ *cm*, $CA=9$ *cm* bolsa, ABC úshmúyeshliginiń eń úlken hám eń kishi múyeshin tabıń.

30.2. Eger ABC úshmúyeshliginde $\angle A=47°$, $\angle B=58°$ bolsa, úshmúyeshliktiń eń úlken hám eń kishi tareplerin anıqlań.

30.3. Úshmúyeshliktiń úsh tárepi berilgen:
a) $a=5$, $b=4$, $c=4$; b) $a=17$, $b=8$, $c=15$; d) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Úshmúyeshliktiń súyir múyeshli, tuwrı múyeshli yaki doǵal múyeshli ekenligin anıqlań.

30.4. Tárepleri a) 13, 14, 15; b) 15, 13, 4; d) 35, 29, 8; e) 4, 5, 7 bolǵan úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın tabıń.

30.5. ABC úshmúyeshliginiń AB tárepinde D noqatı belgilengen. CD kesindi AC hám BC kesindileriniń keminde birewinen kishi ekenligin dáliylleń.

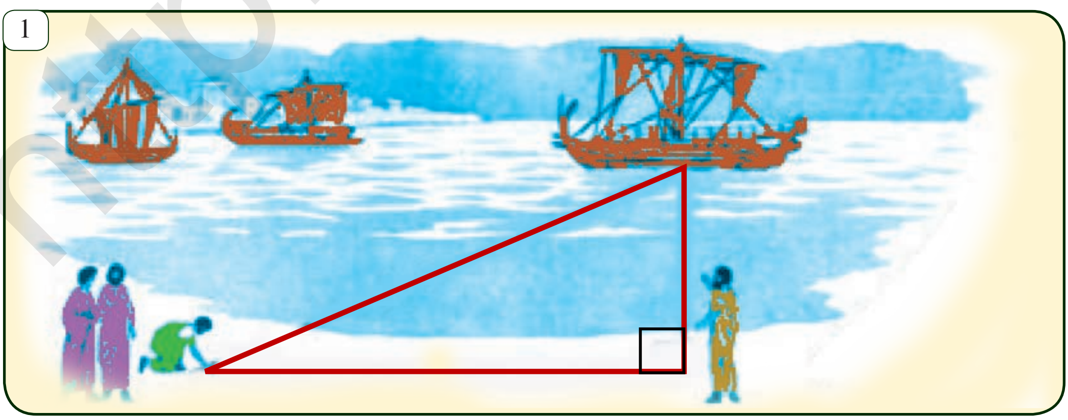
30.6. Úshmúyeshliktiń úlken múyeshi qarsısında úlken tárepi jatatuǵının dáliylleń.

30.7. Úshmúyeshliktiń úlken tárepi qarsısında úlken múyeshi jatatuǵının dálilleń.

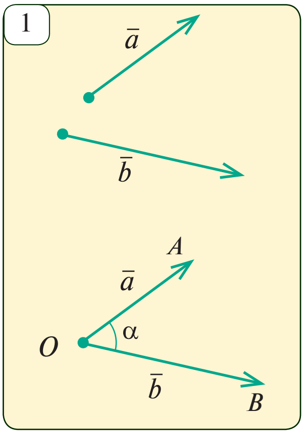
30.8*. ABC úshmúyeshliginiń CD medianası júrgizilgen. Eger $AC>BC$ bolsa, ACD múyeshi BCD múyeshinen kishi bolatuǵının dáliylleń.

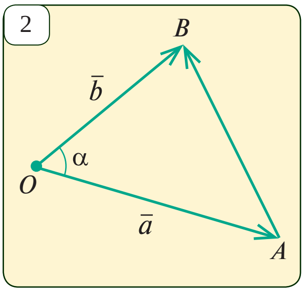
30.9*. 1-súwrette berilgenlerge tiykarlanıp, qádimgi grekler qurǵaqlıqtan kemege shekemgi bolǵan aralıqtı qanday ólshegenlerin anıqlań.

1



31 EKI VEKTOR ARASINDAǴI MÚYESH HÁM OLARDIŃ SKALYAR KÓBEYMESI





Nol vektordan ózgeshe $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ *vektorlar arasıdaǵı múyesh* dep O noqattan shıǵıwshı $\overline{OA}=\overline{a}$ hám $\overline{OB}=\overline{b}$ vektorlarınıń baǵıtlawshı kesindileri arasındaǵı AOB múyeshke aytıladı (*1-súwret*).

Bir qıylı baǵıtlanǵan vektorlar arasındaǵı múyesh 0° qa teń dep esaplanadı. Eger eki vektor arasındaǵı múyesh 90° qa teń bolsa, olar *perpendikulyar* delinedi.

$\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlardıń *skalyar kóbeymesi* bul vektor uzınlıqlarınıń olar arasındaǵı múyeshiniń kosinusına kóbeymesine aytıladı.

Eger vektorlardıń biri nol vektor bolsa, olardıń skalyar kóbeymesi nol boladı.

Skalyar kóbeyme $\overline{a}\,\overline{b}$ yaki $(\overline{a}, \overline{b})$ kóriniste belgilenedi. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Anıqlamadan belgili, $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlardıń skalyar kóbeymesi nolge teń bolsa, olar *perpendikulyar* boladı hám kerisinshe.

Fizikada deneni $\overline{F}$ kúsh tásirinde $\overline{s}$ aralıqqa jıljıtıwda orınlanǵan A jumıs $\overline{F}$ hám $\overline{s}$ vektorlardıń skalyar kóbeymesine teń boladı:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Qásiyetleri. $\overline{a}\,(a_1; a_2)$ hám $\overline{b}(b_1; b_2)$ vektorlar ushın $(\overline{a}; \overline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$.

Dáliyllew. $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlardı koordinatalar bası O noqatqa qoyamız (*2-súwret*). Onda $\overline{OA} = (a_1; a_2)$ hám $\overline{OB} = (b_1; b_2)$ boladı. Eger berilgen vektorlar kollinear bolmasa, ABO úshmúyeshlikten ibarat boladı hám onıń ushın kosinuslar teoreması orınlı boladı: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$.

Onda $OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$ boladı.

Bıraq, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2$, $OB^2 = b_1^2 + b_2^2$ hám $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

Demek, $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi = OA.OB.\cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) =$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Berilgen vektorlar kollinear bolǵan ($\varphi = 0^{\circ}$, $\varphi = 180^{\circ}$) jaǵdayda da bul teńlik orınlı bolıwın óz betińizshe islep kórsetiń. $\square$

Vektorlardıń skalyar kóbeymesiniń qásiyetleri

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ orın almastırıw qásiyeti.

2. $(\bar{a}+\bar{b})\ \ \bar{c}\ =\ \bar{a}\ \ \bar{c}\ +\ \bar{b}\ \ \bar{c}$ bólistiriw qásiyeti.

3. $\lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\cdot\bar{b})$ gruppalaw qásiyeti.

4. Eger *a* hám *b* vektorlar birdey bağıttağı kollinear vektorlar bolsa, $\bar{a}\ \bar{b}\ =|\bar{a}|\ \ |\bar{b}|$ boladı, sebebi cos 0° = 1.

5. Eger qarama-qarsı bağıtlanǵan bolsa, $\bar{a}\ \bar{b}\ =-|\bar{a}||\bar{b}|$, sebebi cos180° = −1.

6. $\bar{a}\ \ \bar{a}\ =|\bar{a}||\bar{a}|\cos0^\circ=|\bar{a}|^2\Rightarrow\bar{a}^{\,2}=|\bar{a}|^2$.

7. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar óz ara perpendikular bolsa, $\bar{a}\ \bar{b}\ =0$ boladı.

Nátijeler:

a) $\bar{a}\ =(a_1;a_2)$ vektordıń uzınlığı: $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}$; (1)

b) $\bar{a}=(a_1;a_2)$ hám $\bar{b}=(b_1;b_2)$ vektorlar arasındağı múyeshtiń kosinusı:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\qquad \text{yaki}\qquad \cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}$$

Másele. $\bar{a}(1;2)$ hám $\bar{b}(4;-2)$ vektorlar arasındağı múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen vektorlar arasındağı múyeshti α dep belgilesek, formulaǵa tiykarlanıp, $\cos\alpha=\dfrac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{4-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}=0.$ Demek, α=90°. *Juwabı:* 90°.

Másele hám tapsırmalar

31.1. Eger $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar ushın *a)* $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=5$, α=30°; *b)* $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=7$, α=45°; *d)* $|\bar{a}|=2.4$, $|\bar{b}|=10$, α=60°; *e)* $|\bar{a}|=0{,}8$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$, α=40° bolsa, bul vektorlardıń skalyar kóbeymesin tabıń (bul jerde $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar arasındağı múyeshi).

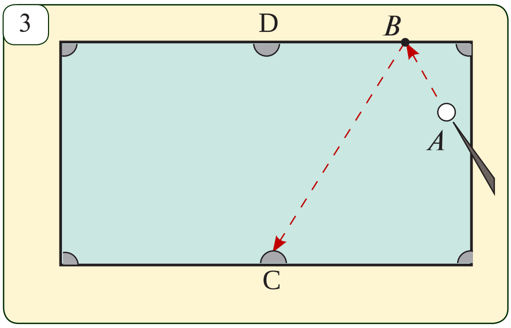
31.2. *a)* $\bar{a}(\frac{1}{2};-1)$ hám $\bar{b}(2;3)$; b) $\bar{a}(-5;6)$ hám $\bar{b}(6;5)$; d) $\bar{a}(1{,}5;2)$ hám $\bar{b}(4;-2)$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesin esaplań hám olar arasındağı múyeshti tabıń.

31.3. *ABCD* rombınıń diagonalları *O* noqatında kesilisedi hám bunda $\overline{BD}=\overline{AB}=4$ *cm*. a) $\overline{AB}$ hám $\overline{AD}$; b) $\overline{AB}$ hám $\overline{AC}$; d) $\overline{AD}$ hám $\overline{DC}$; e) $\overline{OC}$ hám $\overline{OD}$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesin hám bul vektorlardıń arasındağı múyeshti tabıń.

31.4. Nol vektordan ózgeshe $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorları berilgen bolsın. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ bolǵanda bul vektorlar perpendikulyar bolatuǵının hám kerisinshe, $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorları perpendikulyar bolsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ bolatuǵının dáliylleń.

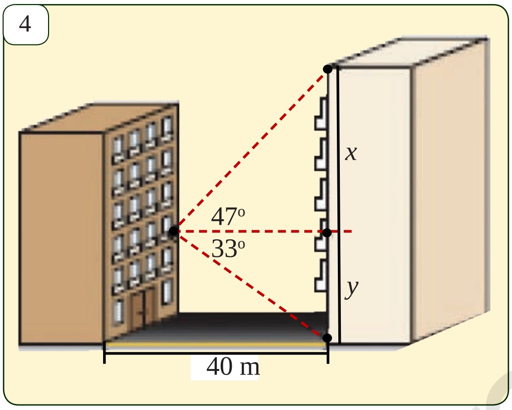
31.5*. *x* tiń qanday mánisinde a) $\bar{a}(4;5)$ hám $\bar{b}(x;6)$; b) $\bar{a}(x;1)$ hám $\bar{b}(3;2)$; d) $\bar{a}(0;-3)$ hám $\bar{b}(5;x)$ vektorları óz ara perpendikulyar boladı?

31.6. $\bar{a}(3;3)$, $\bar{b}(2;-2)$, $\bar{c}(-1;-4)$ hám $\bar{d}(-4;1)$ vektorları arasınan óz ara perpendikulyar juplıqların tabıń.



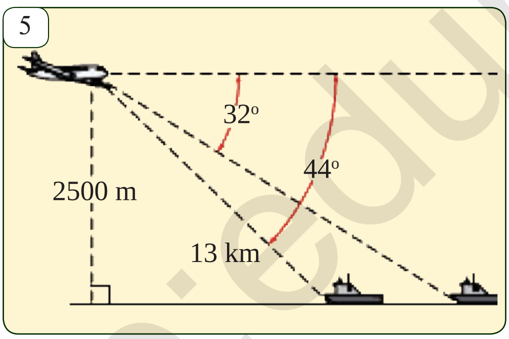
31.7*. Bilyard oyınında A noqatta turǵan shar soqqıdan keyin bilyard stolı jaqlawına B noqatta urıldı hám baǵdarın ózgertip C noqattaǵı sebetshege tústi (*3-súwret*).

Eger $AB=40$ cm, $BC=150$ cm hám $\angle ABD=120°$ bolsa, $AB \cdot BC$ skalyar kóbeymeni tabıń.



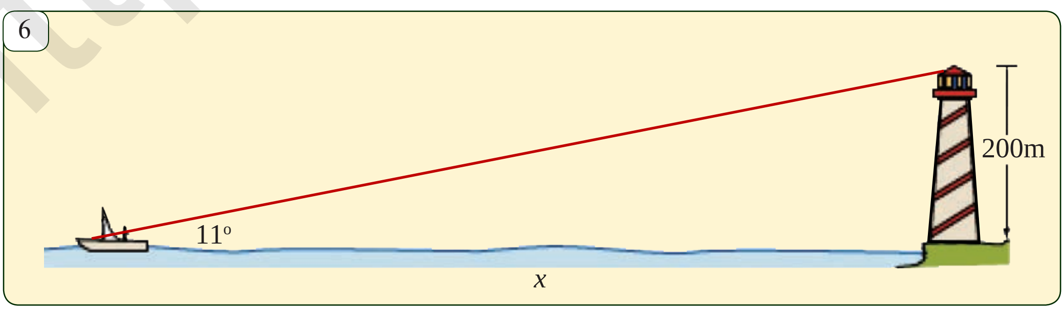
31.8. F(-3, 4) kúsh tásiri astında noqat A(5,-1) jaǵdaydan B(2,1) jaǵdayǵa ótti. Bunda qanday jumıs orınlandı?

31.9. Lala kóp qabatlı úydiń 3-qabatında jasaydı. Onıń aynasınan úyinen 40 m aralıqta turǵan basqa bir úy kórinip turadı (*4-súwret*). Eger qarsısındaǵı úydiń tóbesi Lalaǵa 47° múyesh astında, tómengi ultanı bolsa 33° múyesh astında kórinse, qarsısındaǵı úydiń biyikligin tabıń.



31.10. 2500 m biyiklikte ushıp baratırǵan samolyottan birinshi keme gorizontqa qarata 44° múyesh astında, ekinshi keme bolsa 32° múyesh astında kórinedi (*5-súwret*). Kemeler arasındaǵı aralıqtı tabıń.

31.11. Balıqshılar qayıǵınan biyikligi 200 m bolǵan eskertki 11° múyesh astında kórinedi (*6-súwret*). Qayıqtan qurǵaqlıqqa shekemgi aralıqtı tabıń.



Geometriya hám geografiyadan joybar isi

Geografiya páninen belgili, jer sharı sırtındaǵı orınlar geografiyalıq koordinatalar járdeminde anıqlanadı. 7-súwrette bul koordinatalar keltirilgen. Onda

1- nolinshi (Grinvich) meridianı;

2- nolinshi meridiannan ońda (shıǵısta) jaylasqan meridianlar;

3- ekvatordan tómende (qublada) joylashgan paralleler;

4 - ekvator.

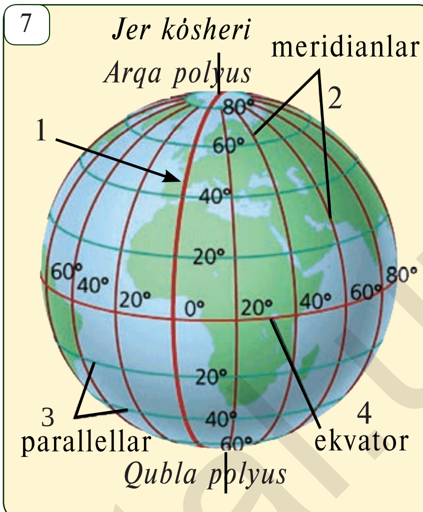
Nolinchi (Grinvich) meridianı (1) diń ekvator (4) penen kesilisiw noqatı geografiyalıq koordinatalardıń sanaq bası esaplanadı.

Ekvatordan arqaǵa qaray meridian boylap sherek sheńber doǵası 90° arqa keńlikti, ekvatordan qublaǵa qaray 90° qubla keńlikti óz ishine aladı.

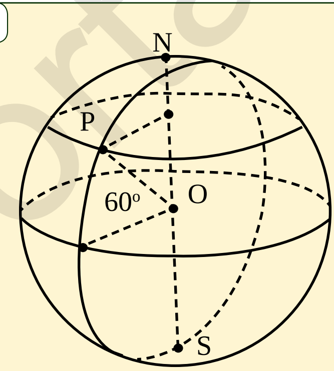
Nolinshi meridiannan shiǵisqa qaray ekvator boylap sherek sheńber doǵası 180° shıǵıs uzaqlıqtı, nolinshi meridiannan batısqa qaray 180° batıs uzaqlıqtı óz ishine aladı.

1. Tashkent qalasınıń geografiyalıq koordinataların tabıń.
2. Mámleketimiz paytaxtı menen jáne qaysı úlken qalalar shama menen birdey meridianda jaylasqan.
3. Tashkent qalasınan Tokio, Pekin, Seul, Vashington hám Nyu-York qalalarına shekem (meridian boylap) bolǵan aralıqlardı anıqlań (jetispey atırǵan maǵlıwmatlardı ózińiz qıdırıp tabıń).
4. Qala 60° arqa keńlikte jaylasqan. Eger jerdiń radiusı 6400 km bolsa, bul qala jaylasqan parallel radiusın tabıń.

7



8

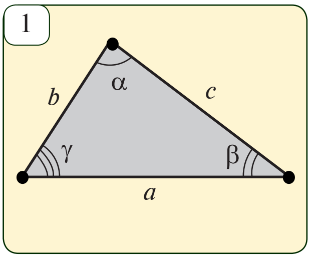


Qızıqarlı geometriya

Ańshı ańǵa shıqtı. Dáslep ol qublaǵa qaray 1 *km* júrdi. Soń shıǵısqa qaray 1 *km*, soń bolsa arqaǵa qaray 1 *km* jol júrdi hám baslanǵısh jaǵdayına kelip qaldı. Qarasa, ayıw turıptı. Onı attı.

1. Atılǵan ayıwdıń reńi qanday?
2. Jer sharınıń jáne qaysı orınlarınan shıǵıp, joqarıda kórsetilgendey 3 tárepke júrip jáne baslanǵısh noqatqa kelip qalıw múmkin? Ol jerlerde ayıw jasayma?

ÚSHMÚYESHLIKLERDI SHESHIW



Úshmúyeshliktiń táreplerin *a, b, c* menen, al bul táreplerdiń qarama-qarsısındaǵı múyeshlerdi sáykes túrde *a, b,* γ menen belgileymiz (*1-súwret*). Úshmúyeshliktiń táreplerin hám múyeshlerin bir atama menen onı *elementleri* dep ataladı.

Úshmúyeshlikti anıqlawshı berilgen elementı boyınsha, onıń qalǵan elementın tabıw *úshmúyeshlikti sheshiw* dep aytıladı.

1-másele. (*Úshmúyeshlikti berilgen bir tárepi hám oǵan irgeles jatqan múyeshleri boyınsha sheshiw*). Eger úshmúyeshlikte $a=6$, $\beta=60^\circ$ hám $\gamma=45^\circ$ bolsa, onıń úshinshi múyeshin hám qalǵan eki tárepin tabıń.

Sheshiliwi. 1. Úshmúyeshliktiń múyeshleriniń qosındısı 180° bolǵanı ushın

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ.$$

Sinuslar teoremasınan payadalanıp, qalǵan eki tárepin tabamız:

2. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ teńlikten $b=a\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}8660}{0{,}9659}\approx 5{,}3794\approx 5{,}4.$

(sin60° hám sin75° mánisleri mikrokalkulyatorda yaki sabaqlıqtıń 153-betindegi kesteden tawıp qoyıldı).

3. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ teńlikten $c=a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}7071}{0{,}9659}\approx 4{,}3924\approx 4{,}4.$

Juwabı: $\alpha=75^\circ$; $\beta\approx 5{,}4$; $c\approx 4{,}4$.

2-másele. (Úshmúyeshlikti berilgen eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi boyınsha sheshiw). Eger úshmúyeshlikte $a=6$, $b=4$ hám $\gamma=120^\circ$ bolsa, onıń úshinshi *c* tárepin hám qalǵan múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1. Kosinuslar teoremasınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń úshinshi *c* tárepin tabamiz.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-0{,}5)}=\sqrt{76}\approx 8{,}7.$$

2. Endi, úshmúyeshliktiń úsh tárepin bilgen halda, kosinuslar teoremasınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń qalǵan múyeshlerin tabamız:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+76-6^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{76}}\approx 0{,}8046.$$

$\cos\alpha\approx 0{,}8046$ teńligi tiykarında α múyeshiniń mánisin153-bettegi kesteden aniqlaymiz (α — súyir múyesh): $\alpha\approx 36^\circ$.

3. $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma\approx 180^\circ-(36^\circ+120^\circ)=24^\circ$. *Juwabı:* $c\approx 8{,}7$; $\alpha\approx 36^\circ$, $\beta\approx 24^\circ$.

3-másele.(*úshmúyeshlikti berilgen úsh tárepi boyınsha sheshiw*). Eger úshmúyeshlikte $a=10$, $b=6$ hám $c=13$ bolsa, onıń múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi: **1.** Úshmúyeshlik súyir múyeshli bolıwı yaki bolmaslıǵın úlken táreptín qarama-qarsısındaǵı múyeshtiń kosinusınıń belgisine qarap anıqlaymız:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{100+36-169}{2\cdot 10\cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0{,}275 < 0.$$

Demek, C — doǵal múyesh eken. Bunı 153-bettegi kesteden C múyeshiniń shamasın anıqlawda esapqa alamız. Kesteden kosinusı 0,275 ge teń múyesh $\angle C_1 = 74°$ ekenligin tabamız. Onda $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ formulası boyınsha,

$$\angle C = 180° - \angle C_1 = 180° - 74° = 106°.$$

2. Sinuslar teoreması boyınsha,

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$. Bunnan, $\sin A = \dfrac{a\cdot \sin C}{c} = \dfrac{10\cdot \sin 106°}{13} = \dfrac{10\cdot \sin 74°}{13} \approx \dfrac{10\cdot 0{,}9615}{13} \approx 0{,}7396.$

A — súyir múyesh bolǵanı ushın 153-bettegi kesteden $\angle A \approx 47°$ ekenligin anıqlaymız.

3. $\angle B \approx 180° - (106° + 47°) = 26°$. *Juwabı:* $\angle A \approx 47°$, $\angle B \approx 26°$, $\angle C \approx 106°$.

? *Másele hám tapsırmalar*

32.1. Úshmúyeshliktiń bir tárepi hám oǵan irgeles jatqan eki múyeshi berilgen:

a) $a = 5$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 45°$; b) $c = 20$ cm, $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$;

d) $a = 35$ cm, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$; e) $c = 12$ cm, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$.

Úshmúyeshliktiń tóbesiniń múyeshin hám qalǵan eki tárepin tabıń.

32.2. Úshmúyeshliktiń eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi berilgen:

a) $a = 6$, $b = 4$, $\gamma = 60°$; b) $a = 14$, $b = 43$, $\gamma = 130°$;

d) $b = 17$, $c = 9$, $\alpha = 85°$; e) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$.

Úshmúyeshliktiń qalǵan múyeshlerin hám úshinshi tárepin tabıńg.

32.3. Úshmúyeshliktiń úsh tárepi berilgen:

a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; b) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;

d) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$; e) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$.

Úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

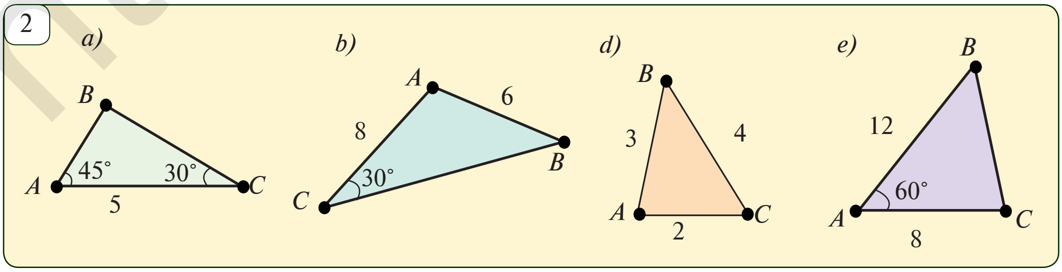
32.4. Úshmúyeshliktiń eki tárepi hám bul táreplerden biriniń qarama-qarsısındaǵı múyeshi berilgen. Úshmúyeshliktiń qalǵan tárepi hám múyeshlerin tabıń:

a) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$; b) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;

d) $b = 2$, $c = 2$, $\alpha = 60°$; e) $b = 6$, $c = 8$, $\alpha = 30°$.

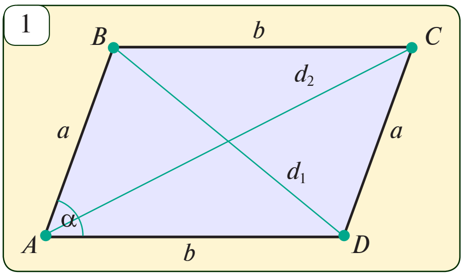
32.5. 2-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında úshmúyeshlikti sheshiń.

2



1-másele. Parallelogramm diagonallarınıń kvadratlarınıń qosındısı tárepleriniń kvadratlarınıń qosındısınıń teń ekenligin dáliylleń.

ABCD — parallelogramm, $AB=a$, $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (1-súwret). ⇨ $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$



Sheshiliwi. $ABCD$ parallelogrammnıń A múyeshi α ǵa teń bolsın. Onda $\angle B=180°-\alpha$. ABD hám ABC úshmúyeshliklerine kosinuslar teoremasın qollanamız (*1-súwret*):

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

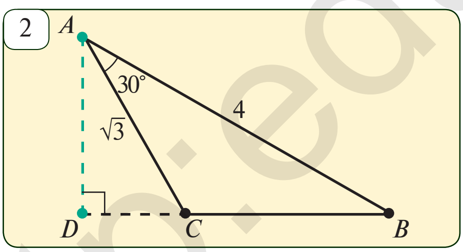
$$d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha).$$

$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ teńligin esapqa alsaq,

$$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

(1) hám (2) teńlikleriniń sáykes mánislerin qosıp, $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$ teńligin payda etemiz.

2-másele. ABC úshmúyeshliginde $\angle A=30°$, $AB=4$, $AC=\sqrt{3}$ bolsa, úshmúyeshliktiń A tóbesinen túsirilgen AD biyikligin tabıń (*2-súwret*).



Sheshiliwi. 1) Kosinuslar teoremasınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń BC tárepin tabamız:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=$$

$$=4^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30°=7, \qquad BC=\sqrt{7}.$$

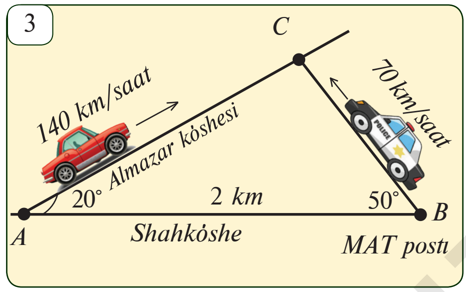
2) Endi úshmúyeshliktiń maydanın tabamız:

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot4\cdot\sin30°=\sqrt{3}.$$

3) Tabılǵanlardan paydalanıp, úshmúyeshliktiń AD biyikligin tabamız:

$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD$ formuladan $AD=\frac{2S}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. *Juwabı:* $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

3-másele. Aydawshı jol háreketi qaǵıydaların buzıp, saat 12^{00} de kósheniń A noqatınan Almazar kóshesine qarap burıldı hám 140 *km/saat* tezlikte háreketin dawam etti (*3-súwret*). Saat 12^{00} de MAI xızmetkeri B noqatınan taslaq jol boylap 70 *km/saat* tezlikte qaǵıyda buzǵan aydawshınıń jolın kesip shıǵıw ushın jolǵa shıqtı. MAI xızmetkeri kesilispede yağnıy C noqatında qağıyda buzıwshını toqtatıp qala ala ma?



Sheshiliwi: ABC úshmúyeshliginde
$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(20^\circ+50^\circ)=$
$=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

1. Almazar kóshesindegi joldıń AC bóliminiń uzınlığın tabamız: Sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}.\ \text{Bul teńlikten } AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin(90^\circ+20^\circ)}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\cos 20^\circ}\approx$$

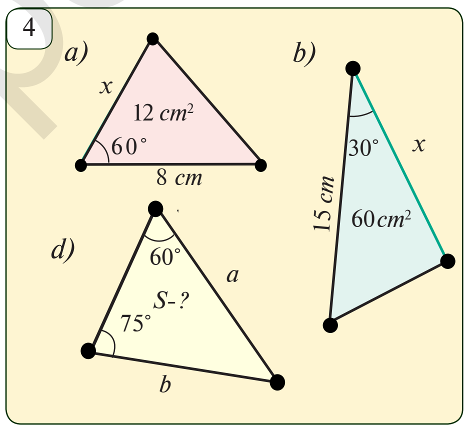
$\approx\dfrac{2\cdot 0{,}766}{0{,}940}=\dfrac{1{,}532}{0{,}94}\approx 1{,}630$ (km). Bul joldı qağıyda buzar aydawshı $\dfrac{1{,}630\ km}{140\ km/h}\approx$
$\approx 0{,}0116\ soat=0{,}012\cdot 3600\ sekund\approx 42\ sekund$da basıp ótedi.

2. Endi taslaq joldıń BC bólegi uzınlığın tabamız: sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}.\ \text{Bul teńlikten } BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{2\cdot\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}342}{0{,}766}\approx 0{,}893\ (km).$$

Bul joldı MAI xizmetkeri $\dfrac{0{,}893\ km}{70\ km/h}\approx 0{,}0128\ saat=0{,}0128\cdot 3600\ sekund\approx$
$\approx 46\ sekund$da basıp ótedi. Demek, C kesispesine MAI xızmetkeri aydawshıdan keshirek jetip keledi eken. *Juwabı:* Yaq.

Másele hám tapsırmalar



33.1. 4-súwrettegi mağlıwmatlar boyınsha x tiń mánisin tabıń.

33.2. ABC úshmúyeshliginiń CD biyikligi 4 m. Eger $\angle A=45^\circ$, $\angle B=30^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

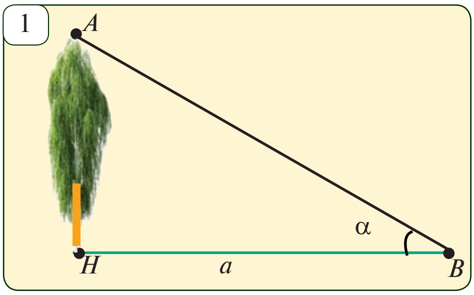
33.3. Bir noqatqa shaması birdey bolğan eki kúsh qoyılğan (*5-súwret*). Eger bul kúshlerdiń bağıtları arasındağı múyesh 60°, bul kúshlerdiń teń tásir etiwshisi 150 kg bolsa, bul kúshlerdiń shamasın tabıń.

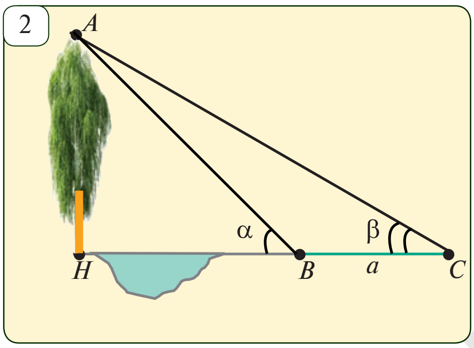
33.4. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 7 dm hám 11 dm, úshinshi tárepine túsirilgen medianası bolsa 6 dm. Úshmúyeshliktiń úshinshi tárepin tabıń.

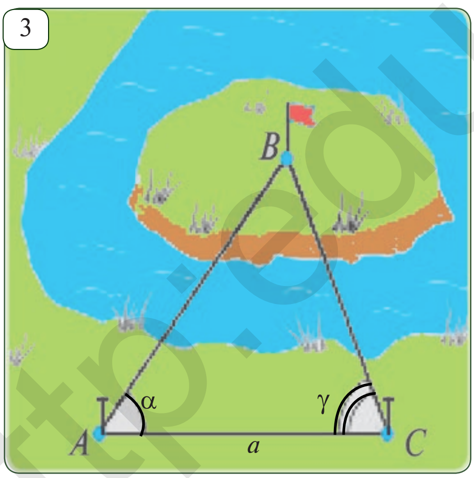
33.5. Tárepleri 6 cm hám 8 cm bolğan parallelogrammnıń bir diagonalı 12 cm bolsa, onıń ekinshi diagonalın tabıń.

33.6. Úshmúyeshliktiń 18 cm ge teń tárepi qarsısındağı múyeshi 60° qa teń. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńberdiń radiusın tabıń.

33.7. Teń qaptallı trapeciyanıń kishi ultanı qaptal tárepine teń, úlken ultanı bolsa 20 cm. Eger trapeciyanıń bir múyeshi 120° bolsa, onıń perimetrin tabıń.







1. *Biyiklikti ólshew.* Aytayıq, terektiń AH biyikligin ólshew zárur bolsın *(1-suwret)*.

a) Bunıń ushın B noqattı belgileymiz hám BH aralıq a nı hám HBA muyesh α nı ólsheymiz. Onda, tuwrı muyeshli ABH ushmuyeshlikte

$$AH = BH\,\mathrm{tg}\alpha = a\,\mathrm{tg}\alpha.$$

b) Eger biyikliktiń ultanı H noqat barıp bolmaytuǵın noqat bolsa (*2-suwret*), joqarıdaǵı usıl menen AH biyiklikti anıqlay almaymız. Onda tómendegishe jol tutamız:

1) H noqat penen bir tuwrı sızıqta jatqan B hám C noqatlardı belgileymiz;

2) BC aralıqtı ólshep a nı tabamız;

3) ABH hám ACH muyeshlerdi ólshep $\angle ABH = \alpha$ hám $\angle ACH = \beta$ lardı tabamız;

4) ABC ushmuyeshlikke sinuslar teoremasın qollasaq ($\angle BAC = \alpha - \beta$)

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}, \text{ yaki } AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)};$$

5) tuwrı muyeshli ABH ushmuyeshlikte AH biyiklikti tabamız:

$$AH = AB\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

2. *Barıp bolmaytuǵın noqatqa shekem bolǵan aralıqtı esaplaw.* Aytayıq, A noqattan barıp bolmaytuǵın B noqatqa shekem bolǵan aralıqtı esaplaw kerek (*3-súwret*). Bul máseleni ushmuyeshliklerdiń uqsaslıq belgilerinen paydalanıp juwabın tapqanımızdı esletip ótemiz.

Endi bul máseleni sinuslar teoremasınan paydalanıp sheshemiz.

1) A hám B noqatlardan kórinip turǵan tegis jayda C noqattı belgileymiz.

2) AC aralıqtı ólsheymiz: $AC = a$.

3) Ásbaplar járdeminde ACB hám BCA muyeshlerdi ólsheymiz: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$.

4) ABC ushmuyeshlikte $\angle B = 180° - \alpha - \gamma$ bolǵanı ushın,

$$\sin B = \sin(180° - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

Sinuslar teoreması boyınsha, $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$ yaki $AB = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Másele hám tapsırmalar

34.1. 1-suwrette $a=12$ *m*, $\alpha=42^\circ$ bolsa, terek biyikligin esaplań.

34.2. 2-suwrette $a=8$ *m*, $\alpha=43^\circ$, $\beta=32^\circ$ bolsa, terek biyikligin esaplań.

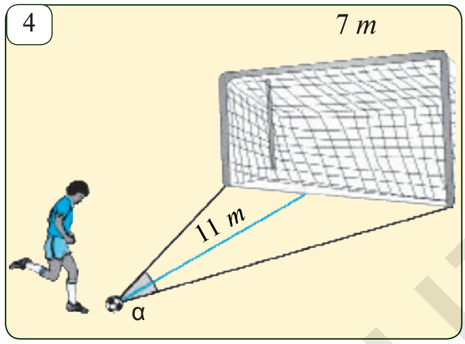
34.3. 3-suwrette $a=60$ *m*, $\alpha=62^\circ$, $\gamma=44^\circ$ bolsa, AB aralıqtı tabıń.

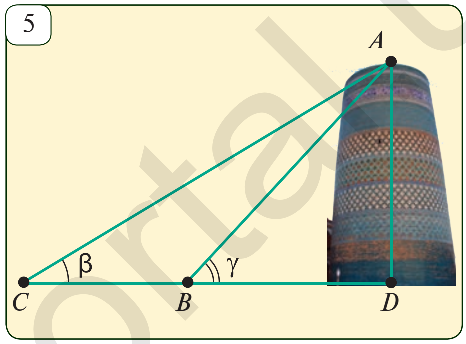
34.4. Futbol oyınında11 metrlik járiyma tobın dárwazaǵa baǵıtlaw muyeshi α nı tabıń (*4-suwret*). Dárwazanıń keńligi 7 *m*.

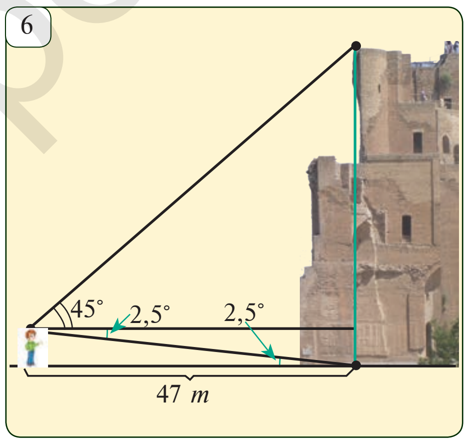
34.5. 5-suwrette Xiywa qalasındaǵı Kelteminar suwretlengen. Eger $\beta=30{,}7^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $BC=50$ *m* bolsa, Kelteminar biyikligin tabıń.

34.6. Sayaxatshı Shahrisabz qalasındaǵı Aq-saraydı onnan 47 *m* aralıqta tamasha qılıp atır (*6-suwret*). Eger ol Aq-saray ultanın gorizontqa salıstırǵanda $2{,}5^\circ$ ǵa teń múyesh astında, joqarı bólegin bolsa 45° ǵa teń múyesh astında kórip atırǵan bolsa, Aqsaray biyikligin tabıń.

34.7. Ush jol ABC úshmúyeshlikti quraydı. Bul úshmúyeshlikte $\angle A=20^\circ$, $\angle B=150^\circ$. A noqattan jolǵa shıqqan aydawshı C noqatqa imkan barınsha tezirek jetip barmaqshı. AC hám CB jollar taslı jol, AB asfalt jol bolıp, asphalt jolda taslı jolǵa qararaganda 2 márte tezirek háreketleniwi múmkin. Aydawshıǵa qaysı joldan juriwdi máslahat beresiz?







Qızıqarlı másele

Pifagor teoremasınıń jáne bir "dáliyli"

Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$. Bul eki teńlikti kvadratqa kóterip, aǵzama-aǵza qossaq hám $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ekenligin esapqa alsaq,

$$a^2+b^2=c^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha=c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=c^2.$$

Demek, $a^2+b^2=c^2$. Bul "dáliyllew" logikalıq jaqtan nadurıs ekenligin dálilleń.

BILIMINIZDI SÍNAP KÓRIN

I. Testler

1. Tárepleri a, b, c, sáykes múyeshleri α, β, γ, maydanı S bolǵan úshmúyeshlik ushın qaysı teńlik nadurıs?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; B. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;

D. $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$; E. $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

2. Nadurıs teńlikti tabıń:

A. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; B. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$;

D. $\cos(180°-\alpha)=\cos\alpha$; E. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$.

3. Úshmúyeshliktiń ush tárepi belgili bolsa, qaysı teoremadan paydalanıp onıń múyeshlerin tabıw múmkin?

A. Sinuslar teoreması; B. Kosinuslar teoreması;

D. Fales teoreması; E. Geron formulası.

4. Úshmúyeshliktiń bir múyeshi 137° ǵa, ekinshi múyeshi 15° ǵa teń. Eger bul úshmúyeshliktiń ulken tárepi 22 ge teń bolsa, onıń kishi tárepin tabıń.

A. 8,3; B. 9,3; D. 3,8; E. 6,5.

5. Úshmúyeshliktiń 14 hám 19 ǵa teń bolǵan tárepleri arasındaǵı múyeshi 26°. Sol úshmúyeshliktiń ushinshi tárepin tabıń.

A. 1,2; B. 5,4; D. 6,9; E. 19,7.

6. Eger eki vektordıń uzınlıqları $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=5$ hám olar arasındaǵı múyesh 45° bolsa, $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlardıń skalyar kóbeymesin tabıń.

A. 52; B. 32 D. 102; E. 2.

7. $\bar{a}(4; -1)$ hám $\bar{b}(2; 3)$ vektorlardıń skalyar kóbeymesin tabıń.

A. 5; B. 3; D. 4; E. 9.

8. $a(-\frac{1}{2}; \frac{3}{\sqrt{2}})$ hám $\bar{b}(\sqrt{3}; 1)$ vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

A. 30°; B. 60°; D. 90°; E. 45°.

9. Úshmúyeshlik múyeshleriniń qatnası 3:2:1 sıyaqlı bolsa, onıń tárepleri qatnasın tabıń.

A. 3:2:1; B. 1:2:3; D. $2:\sqrt{3}:1$; E. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

10. Tárepi 3 cm bolǵan durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusin tabıń.

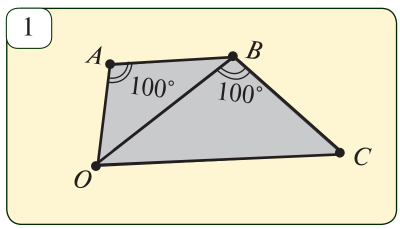
A. $\sqrt{3}$; B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$; E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

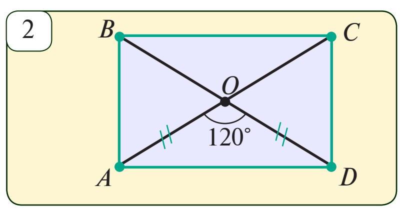
II. Máseleler

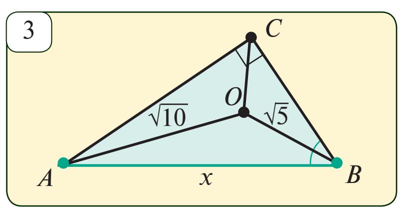
1. ABC úshmúyeshlikke $AB=6$ *cm*, $\angle A=60°$, $\angle B=75°$. BC tárepti hámde ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

2. Tárepleri 5 *cm*, 6 *cm* hám 10 *cm* bolǵan úshmúyeshlik múyeshleriniń kosinusların tabıń.

3. ABC úshmúyeshlite $\angle B=60^\circ$, $AB=6$ cm, $BC=4$ cm. AC tárepti hámde ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.
4. Tárepleri 51 cm, 52 cm hám 53 cm bolǵan úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.
5. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 14 cm hám 22 cm, ushinshi tárepine ótkerilgen medianası bolsa 12 cm. Úshmúyeshliktiń ushinshi tárepin tabıń.
6. Parallelogrammnıń diagonalları 4 cm, $4\sqrt{2}$ cm hám olar arasındaǵı múyesh 45°. Parallelogrammnıń a) maydanın; b) perimetrin; d) biyikliklerin tabıń.
7. Tárepleri 3 hám 5 bolǵan parallelogramnıń bir diagonalı 4 ke teń. Onıń ekinshi diagonalın tabıń.
8. Tárepleri a) 2, 2 hám 2,5; b) 24, 7 hám 25; d) 9, 5 hám 6 bolǵan úshmúyeshliktiń turin anıqlań.
9. Parallelogrammnıń tárepleri $7\sqrt{3}$ hám 6 cm. Eger onıń doǵal múyeshi 120° bolsa, onıń maydanın tabıń.
10. ABC úshmúyeshliktiń AB, BC táreplerinde N, K noqatlar alınǵan. Onda $BN=2AN$, $3BK=2KC$. Eger $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$ bolsa, NK kesindini tabıń.
11. ABC úshmúyeshlikte $\angle A=30^\circ$, $BC=7$ cm. úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.
12. ABC úshmúyeshliktiń BE bissektrisası ótkerilgen. E noqattan BC tárepke EF perpendikulyar tusirilgen. Eger $EF=3$, $\angle A=30^\circ$ bolsa, AE ni tabıń.
13. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik AD tárepiniń ortası N noqatta. Eger $AB=3$, $BC=6$ bolsa, $\overline{NB}\cdot\overline{NC}$ skalyar kóbeymeni tabıń.
14. $\bar{a}(2;x)$, $\bar{b}(-4;1)$ bolıp, $\bar{a}+\bar{b}$ hám $\bar{b}$ vektorlar perpendikulyar. x tı tabıń.
15. $\bar{m}(7;3)$ hám $\bar{n}(-2;-5)$ vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.
16. 1- súwrette berilgenlerden paydalanıp, súwrettegi eń ulken kesindini anıqlań.
17. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń diagonalları O noqatta kesilisedi (*2-súwret*). Eger $AO=12$ cm, $\angle AOD=120^\circ$ bolsa, tórtmúyeshlik perimetrin tabıń.
18. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlik bissektrisaları O nuqtada kesilisedi ($\angle C=90^\circ$). Eger $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$ bolsa, AB gipotenuzani tabıń (*3-suwret*).







III. Ózińizdi sınap kóriń (Ulgili qadaǵalaw jumısı)

1. Tárepleri $a=45$, $b=70$, $c=95$ bolǵan úshmúyeshliktiń eń ulken múyeshin tabıń.
2. Úshmúyeshlikte $b=5$, $\alpha=30°$, $\beta=50°$ bolsa, úshmúyeshlikti sheshiń.
3. PKH úshmúyeshlikte $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100°$. HF mediana uzınlıǵın hám PFH úshmúyeshliktin maydanın tabıń.
4. (*Qosımsha*). Úshmúyeshlikte $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135°$ bolsa, β múyeshti tabıń.

Tarıyxıy maǵlıwmatlar. Sinus haqqında

Sinus haqqındaǵı maǵlıwmat dáslep IV-V asirlerdegi hind astronomlarınıń shıǵarmalarında ushıraydı.

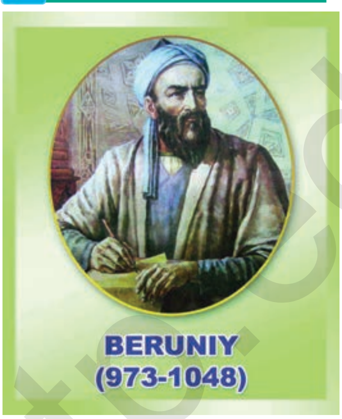
Orta Aziyalıq alımlar Al-Xorazmiy, Beruniy, Ibn Sino, Abdurahmon al-Haziniy (XII asir) sinus ushın *«al-jayb»* atamasın qollanǵan.

Házirgi sinus belgisin Simpson, Eyler, Dalamber, Lagranj (XVII asir) hám basqalar qollaǵan.

«Kosinus» ataması latınsha «komplimenti sinus» atamasınıń qısqartılǵanı, ol «qosımsha sinus», anıqıraǵı «qosımsha doǵanıń sinusi» demekdur.

Kosinuslar teoremasin grekler de bilgen, onıń dáliyli Evklidtiń "Negizler" shıǵarmasında keltirilgen. Sinuslar teoremasınıń ózine mas dáliylin Abu Rayhon Beruniy bayan etken.

Tarıyxıy maǵlıwmatlar. Beruniy (tolıq atı — Abu Rayhon Muhammad ibn Ahmad) (973—1048) — orta ásirdiń ullı alımı. Ol Xorezm úlkesiniń Qıyat qalasında tuwılǵan. Qıyat Amiwdaryanıń oń qırǵaǵı-hazirgi Beruniy qalasınıń ornında bolgan, ol jaqın waqitlarǵa shekem Shabbaz dep atalǵan. Berunıydıń matematika hám pánniń basqa tarawlarına qosqan ulesin jazıp qaldırǵan 150 den aslam shıǵarmalarınan kóriwge boladı. Olardan eń irileri — "Hindistan", "Estelikler", "Masud nızamları", "Geodeziya", "Mineralogiya" hám "Astronomiya".



Beruniydiń patsha shıǵarmasında "Masud nızamları", tiykarınan, astronomiyaǵa baylanıslı bolsa da, onıń matematikaǵa baylanıslı bir qansha oylap tabıwları sol shıǵarmada bayan etilgen.

Bul shıǵarmada Beruniy eki múyesh qosındısın hám ayırmasınıń sinusları, ekilengen hám yarım múyeshtiń sinusları haqqındaǵı teoremalar menen teń kushli bolǵan xordalar haqqındaǵı teoremalardı dáliylegen, eki graduslı doganıń xordaları esaplap tapqan, sinuslar hám tangensler kestesin duzgen, sinuslar teoremasın ózine sáykes usılda dáliyllegen.

III BAP

SHEŃBER UZÍNLÍĞÍ HÁM DÓŃGELEK MAYDANÍ

Bul baptı úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

***Bilimler*:**

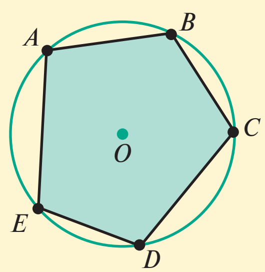
√ kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan hám ishley sızılğan sheńberlerdiń qásiyetlerin biliw;
√ durıs kópmúyeshliklerdiń qásiyetlerin biliw;
√ durıs kópmúyeshtiń maydanın esaplaw formulaların biliw;
√ sheńber hám onıń doğası uzınlığın esaplaw formulaların biliw;
√ dóńgelek hám onıń bólekleri maydanın tabıw formulaların biliw;
√ múyeshtiń radian ólshemin biliw.

Ámeliy kónlikpeler:

√ durıs kópmıyeshliklerdi súwretley alıw;
√ durıs kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan hám ishley sızılğan sheńberlerdiń radiusların taba alıw;
√ sheńber hám onıń doğası uzınlığın esaplay alıw;
√ dóńgelek hám onıń bólekleri maydanın esaplay alıw.

36 SHEŃBERGE ISHLEY SÍZÍLǴAN KÓPMÚYESHLIK

1



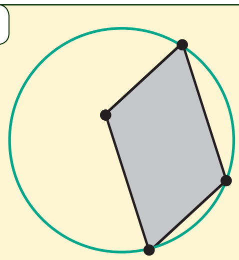
Sheńberge ishlay sızılǵan besmúyeshlik yaki besmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber.

Anıqlama. Eger kópmúyeshliktiń múyeshleri sheńberde jatsa, onda bul kópmúyeshlik sheńberge *ishley sızılǵan,* sheńber bolsa kópmúyeshlikke *sırtlay sızılǵan* delinedi (*1-súwret*).

Qálegen úshmúyeshlikke ishley sheńber sızıw múmkin ekenligi hám bul sheńberdiń orayı úshmúyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarları kesilisken noqatta jatatuǵının 8-klasta úyrengensiz.

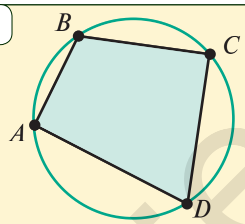
Eger kópmúyeshliktiń múyeshleriniń sanı úshewden artıq bolsa, kópmúyeshlikke hár qashan da sırtlay sheńber sızıwǵa bola bermeydi. Mısalı, tuwrı múyeshlikten ózgeshe parallelogramm ushın sırtlay sızılǵan sheńber bolıwı múmkin emes (*2-súwret*).

2



8-klastan málim bolǵanday, tórtmúyeshlikte qarama-qarsı múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń bolǵanda hám tek usınday jaǵdayda ǵana sırtlay sheńber sızıw múmkin (*3-súwret*).

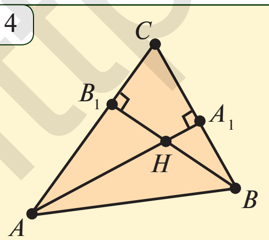
3



$\angle A+\angle C=180^\circ$
$\angle B+\angle D=180^\circ$

1-másele. Súyir múyeshli ABC úshmúyeshliktiń AA_1 hám BB_1 biyiklikleri H noqatında kesilisedi. A_1HB_1C tórtmúyeshligi sheńberge ishley sızılǵan ekenligin dáliyllen.

4



Sheshiliwi. $AA_1 \perp BC$ va $BB_1 \perp AC$ bolǵanı ushın (*4-súwret*)

$$\angle HB_1C=\angle HA_1C=90^\circ.$$

Onda $\angle HB_1C+\angle HA_1C=180^\circ$. Tórtmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı 360° bolǵanı ushın:

$$\angle B_1CA_1+\angle B_1HA_1=180^\circ.$$

Demek, A_1HB_1C tórtmúyeshlikke sırtlay sheńber sızıw múmkin.

Sheńberge ishley sızılǵan kópmúyeshliktiń tóbeleri sheńber orayınan teńdey qashıqlıqta jatqanı ushın sheńberdiń orayı kópmúyeshliktiń tárepleriniń orta perpendikulyarında jatadı (*5-súwret*). Demek, sheńberge ishley sızılǵan kópmúyeshliktiń tárepleriniń orta perpendikulyarları bir noqatta kesilisiwi shárt.

2-másele. Radiusı 10 *cm* bolǵan sheńberge ultanǵa túsirilgen biyikligi 16 *cm* bolǵan teń qaptallı súyir múyeshli úshmúyeshlik ishley sızılǵan. Úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

Sheshiliwi. ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń orayı O noqatta AC tárepiniń orta perpendikulyarı bolǵan BD biyiklikte jatadı (6-*súwret*). Onda,

$$OD=BD-OB=16-10=6\ (cm)$$

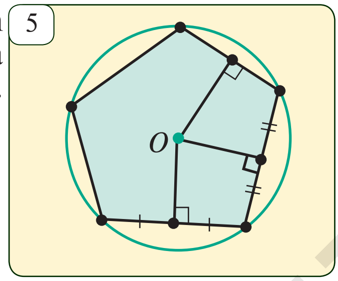
boladı hám Pifagor teoreması boyınsha,

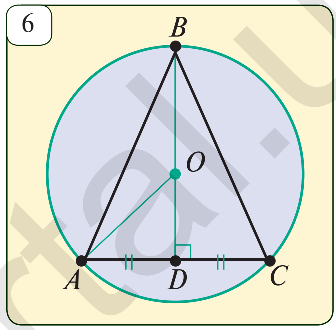
$$AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\ (cm),\ AC=2AD=16(cm).$$

Sonday-aq, tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshliginde

$$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}\ (cm).$$

Juwabı: $8\sqrt{5}$ *cm*, $8\sqrt{5}$ *cm*, 16 *cm*.





Másele hám tapsırmalar

36.1. Eger kópmúyeshlik sheńberge ishley sızılǵan bolsa, O nıń tárepleriniń orta perpendikulyarları bir noqatta kesilisetuǵının dáliylleń.

36.2. Qanday úshmúyeshlik sheńberge ishley sızılǵan bolıwı múmkin? Tórtmúyeshlik-she?

36.3. $ABCDE$ becmúyeshligi sheńberge ishley sızılǵan bolsa, $\angle ACB=\angle AEB$ bolatuǵının dáliylleń.

36.4. Katetleri 16 *cm* hám 12 *cm* bolǵan tuwrı múyeshli ushmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

36.5. Radiusı 25 *cm* bolǵan sheńberge bir tárepi 14 *cm* bolǵan tuwrı múyeshlik ishley sızılǵan. Tuwrı múyeshliktiń maydanın tabıń.

36.6. Radiusı 10 *cm* bolǵan sheńberge ishley sızılǵan a) teńtárepli úshmúyeshlik; b) kvadrat; c) teńqaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

36.7. Tárepleri 16 *cm*, 10 *cm* hám 10 *cm* bolǵan úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın tabıń.

36.8. Sheńberge ishley sızılǵan $ABCDEF$ altımúyeshlikte $\angle BAF+\angle AFB=90°$ bolsa, sheńber orayı AF tárepte jatatuǵının dáliylleń.

36.9. Qálegen teń qaptallı trapeciya sheńberge ishley sızılıwı múmkin ekenligin dáliylleń.

36.10. Teńqaptallı trapeciya sızıń. Oǵan sırtlay sızılǵan sheńber jasań.

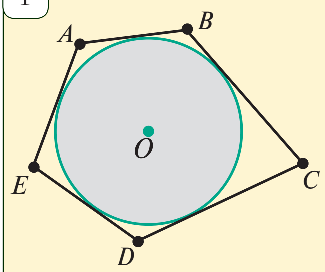
Qızıqarlı másele

On altı jaslı Galua (E.Galua—francuz matematigi, 1811—1832) kolledjde oqıp júrgen waqıtlarında, oǵan oqıtıwshısı bir saat ishinde úsh máseleni sheship beriwdi soraǵan. Ol sheshimi ańsat bolmaǵan bul máselelerdi 15 minutta sheship, hámmeni hayran qaldirǵan. Mine usi máselelerden biri. Onı siz de sheship kóriń!

Másele. Sheńberge ishley sızılǵan tórtmúyeshliktiń tórt tárepi *a, b, c* hám *d* ǵa teń. Onıń diagonalların tabıń.

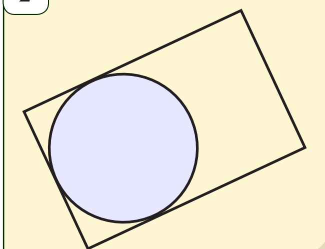
SHEŃBERGE SIRTLAY SIZILǴAN KÓPMÚYESHLIK

1

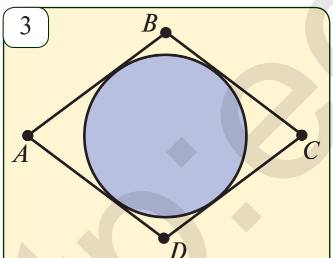


Sheńberge sırtlay sızılǵan ABCDE beshmúyeshlik yaki ABCDE beshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber.

2

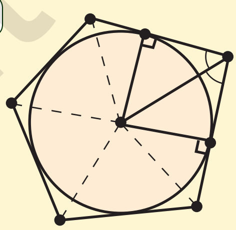


3



$AB + CD = AD + BC$

4



Anıqlama. Eger kópmúyeshliktiń barlıq tárepleri sheńberge urınba jasasa, onda ol kópmúyeshlik sheńberge *sırtlay sızılǵan,* sheńber bolsa kópmúyeshlikke *ishley sızılǵan* delinedi (*1-súwret*).

Qálegen úshmúyeshlikke sırtlay sheńber sızıw múmkin ekenligin hám bul sheńberdiń orayı úshmúyeshliktiń bissektrisaları kesilisken noqatında ekenligi menen 8-klasta tanısqansız.

Eger kópmúyeshliktiń múyeshleriniń sanı úshten artıq bolsa, bul kópmúyeshlikke hár qashan da ishley sheńber sızıw múmkin bola bermeydi. Mısalı, kvadrattan ózgeshe tuwrı múyeshlikke ishley sheńber sızıwǵa bolmaydı (*2-súwret*).

Jáne 8-klastan belgili, tórtmúyeshlikke tek ǵana qarama-qarsı tárepleriniń qosındısı teń bolǵanda ishley sheńber sızıw múmkin (*3-súwret*).

Sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshliktiń múyeshiniń tárepleri sheńberge urınǵani ushın sheńber orayı usı múyeshtiń bissektrisasında jatadı (*4-súwret*). Demek, sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshliktiń múyeshleriniń bissektrisaları bir noqatta kesilisedi.

Teorema. Eger r radiusli sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshliktiń maydanı S, yarım perimetri p bolsa, S = pr boladı.

Dáliyllew. Teorema dáliylin sheńberge sırtlay sızılǵan *ABCDEF* altımúyeshlik ushın keltiremiz. Sheńber orayı *O* noqatın kópmúyeshliktiń tóbeleri menen tutastırıp, kópmúyeshlikti úshmúyeshliklerge ajıratamiz. Bul úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri *r* ge teń (*5-súwret*). Onda,

$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+\ldots+S_{FOA}=$$
$$=\tfrac{1}{2}AB\cdot r+\tfrac{1}{2}BC\cdot r+\ldots+\tfrac{1}{2}FA\cdot r=$$
$$=\frac{AB+BC+\ldots+FA}{2}\cdot r=pr.$$

Teorema daliyllendi.

Másele. Sheńberge sırtlay sızılǵan tórtmúyeshliktiń maydanı 21 cm^2 qa, perimetri bolsa 7 cm ge teń. Sheńberdiń radiusın tabıń.

Sheshiliwi. $S=pr$ formulaǵa kóre,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{21}{3{,}5}=6\ (cm).$$ *Juwabı:* 6 cm.

Másele hám tapsırmalar

37.1. Tárepi 6 cm bolǵan a) teń tárepli úshmúyeshlikke; b) kvadratqa sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

37.2. Radiusı 5 cm bolǵan sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshliktiń maydanı 18 cm^2. Kópmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

37.3. 6-súwrettegi tórtmúyeshliklerdiń perimetrin tabıń.

37.4. 7-súwrettegi maǵlıwmatlar tiykarında soralǵan kesindini tabıń.

37.5. Sheńberge sırtlay sızılǵan parallelogramm romb bolatuǵının dáliylleń.

37.6. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńberdiń radiusı katetler qosındısı menen gipotenuza ayırmasınıń yarımına teń ekenligin dáliylleń.

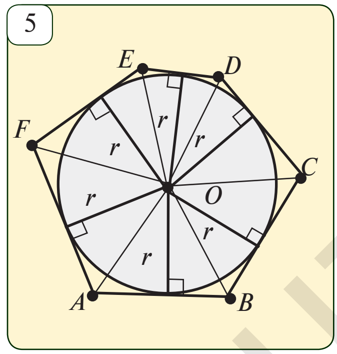
37.7. Sheńberge sırtlay sızılǵan teń qaptallı trapeciyanıń orta sızıǵı onıń qaptal tárepine teń ekenligin dáliylleń.

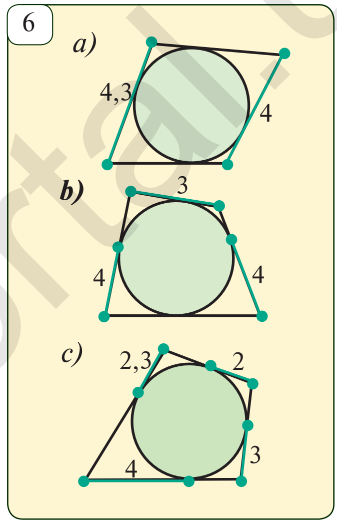
37.8. Ultanları 9 cm hám 16 cm bolǵan teń qaptallı trapeciya sheńberge sırtlay sızılǵan. Sheńberdiń radiusın tabıń.

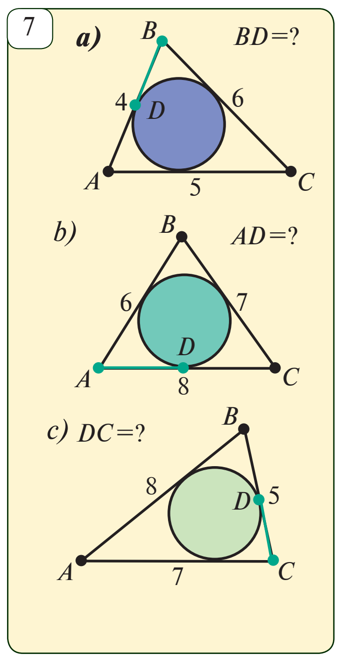
37.9*. $ABCD$ tórtmúyeshlik O orayına iye sheńberge sırtlay sızılǵan. AOB hám COD úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qosındısı tórtmúyeshliktiń maydanınıń yarımına teń ekenligin dáliylleń.

37.10*. Sheńberge sırtlay sızılǵan teń qaptallı trapeciyanıń ultanları a hám b bolsa, onıń biyikligi $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ ge teń ekenligin dáliylleń.

37.11*. Tóbeleri $ABCD$ tórtmúyeshliktiń bissektrisalarınıń kesilisiw noqatında bolǵan $EFPQ$ tórtmúyeshlikke sırtlay sheńber sızıw múmkin ekenligin dáliylleń.







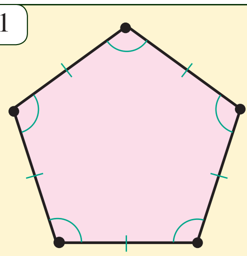
DURÍS KÓPMÚYESHLIKLER

Jedellestiriwshi shınıǵıw

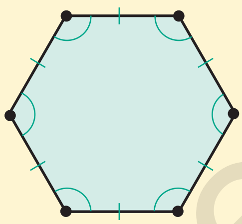
1. Qanday figuralar kópmúyeshlik delinedi?
2. Kópmúyeshliktiń múyeshleri, qońsılas tárepleri, diagonalları dep nege aytıladı?
3. Dóńes kópmúyeshlik dep qanday kópmúyeshlikke aytıladı?
4. Dóńes kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındaǵı teoremanı aytıń.

Anıqlama. Barlıq tárepleri teń hám barlıq múyeshleri teń bolǵan dóńes kópmúyeshlik *durıs kópmúyeshlik* delinedi.

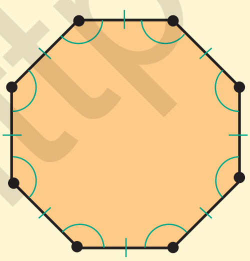
1



durıs becmúyeshlik



durıs altımúyeshlik



durıs segizmúyeshlik

Teń tárepli úshmúyeshlik, kvadrat durıs kópmúyeshlikke mısal boladı. 1-súwrette durıs beskópmúyeshlik, altımúyeshlik hám segizmúyeshlikler súwretlengen.

Teorema. Durıs n múyeshtiń hár bir múyeshi $\frac{n-2}{n}\ 180^o$ ǵa teń.

Dáliyllew. Durıs n múyeshtiń múyeshleriniń qosındısı $(n-2)\cdot180^\circ$ qa teń (8-klass). Demek, onıń hár bir múyeshi $\frac{n-2}{n}\cdot\ 180^\circ$ ǵa teń. *Teorema dáliyllendi.*

Másele. Durıs $A_1A_2A_3A_4A_5$ becmúyeshlikte A_1A_3 hám A_1A_4 diagonalları teń ekenligin kórsetiń (2-súwret).

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — *durıs becmúyeshlik* ⇨ $A_1A_3 = A_1A_4$

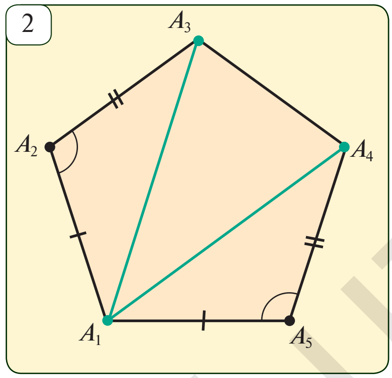
Sheshiliwi. Úshmúyeshliklerdiń teńliginiń TMT belgisi boyınsha, $A_1A_2A_3$ hám $A_1A_5A_4$ úshmúyeshlikleri óz ara teń. Haqıyqattan da, durıs kópmúyeshliktiń tárepleri teń hám múyeshleri teń bolǵanı ushın,

$A_1A_2= A_1A_5$, $A_2A_3= A_5A_4$ hám $\angle A_1A_2A_3=\angle A_1A_5A_4$.

Demek, $\Delta A_1A_2A_3=\Delta A_1A_5A_4$. Bunnan

$A_1A_3=A_1A_4$ ekenligi kelip shıǵadı.

Nátiyje. ***Durıs becmúyeshliktiń barlıq diagonalları óz ara teń.***



Másele hám tapsırmalar

38.1. Durıs bolmaǵan kópmúyeshliklerge mısallar aytıń hám ne ushın durıs emesligin túsindiriń.

38.2. Tómendegi tastıyıqlawlardan durısların tabıń:

a) barlıq tárepleri teń bolǵan úshmúyeshlik durıs boladı;

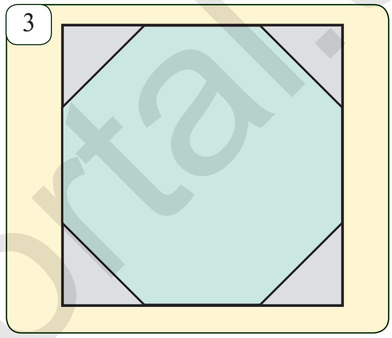
b) barlıq tárepleri teń tórtmúyeshlik durıs boladı;

d) barlıq múyeshleri teń tórtmúyeshlik durıs boladı;

e) barlıq múyeshleri teń romb durıs boladı;

f) barlıq tárepleri teń tuwrı múyeshlik durıs boladı.

38.3. Eger a) n=3; b) n=5; d) n=6; e) n=10; f) n=18 bolsa, durıs n- múyeshliktiń múyeshlerin tabıń.



38.4. Durıs n múyeshliktiń sırtqı múyeshi nege teń boladı? Eger a) n=3; b) n=5; d) n=6; e) n=10; f) n=12 bolsa, durıs n múyeshliktiń sırtqı múyeshin tabıń.

38.5. Durıs n múyeshliktiń hár tóbesinen birewden alınǵan sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń ekenligin dáliylleń.

38.6. Eger durıs kópmúyeshliktiń hár bir múyeshi a) 60°; b) 90°; d) 135°; e) 150° bolsa, bul kópmúyeshliktiń táreplериniń sanın tabıń.

38.7. Durıs $ABCDEF$ altı múyeshligi berilgen.

a) AC hám BD diagonallarınıń teńligin dáliylleń.

b) ACE — durıs úshmúyeshlik bolatuǵının dáliylleń.

d) AD, BE hám CF diagonallar óz ara teńligin dáliylleń.

38.8. Tárepi 10 cm bolǵan durıs a) becmúyeshliktiń; b) altımúyeshliktiń; d) segizmúyeshliktiń; e) On eki múyeshliktiń; f) On segiz múyeshliktiń kishi diagonalın esaplań.

38.9. Durıs tórtmúyeshliktiń kvadrat bolatuǵının dáliylleń.

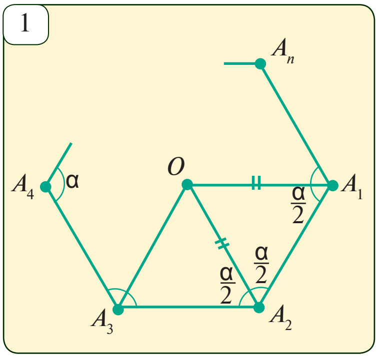
38.10*. Kvadrattıń tárepi a ǵa teń. Onıń táreplerine hár bir tóbesinen baslap diagonalınıń yarımına teń kesindiler qoyıldı. Nátiyjede 3-súwrette súwretlengen segizmúyeshlik payda boldı. Onıń túrin anıqlań hám maydanın tabıń.

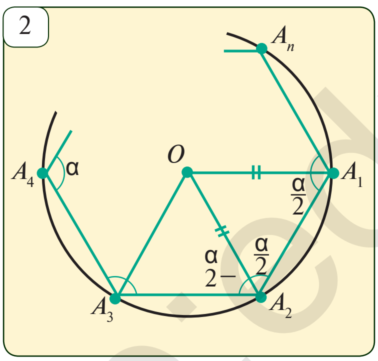
39 DURÍS KÓPMÚYESHLIKKE ISHLEY HÁM SÍRTLAY SÍZÍLǴAN SHEŃBERLER

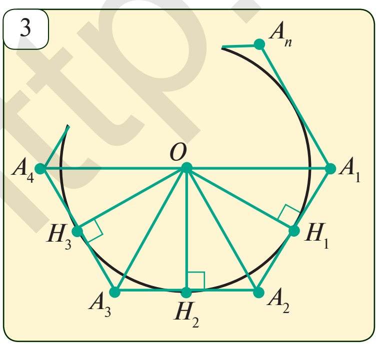
Jedellestiriwshi shınıǵıw

1. Sheńberge ishley sızılǵan kópmúyeshlik dep, qanday kópmúyeshlikke aytıladı?
2. Sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshlik dep, qanday kópmúyeshlikke aytıladı?
3. Qálegen kópmúyeshlik sheńberge ishley (sırtlay) sızılǵan bolıwı múmkin be?

Teorema.* *Hár qanday durıs kópmúyeshlikke ishley sheńber de, sırtlay sheńber de sızıw múmkin.







Dáliyllew. Aytayıq, $A_1A_2 \ldots A_n$ — durıs kópmúyeshlik, O — A_1 hám A_2 múyeshleri bissektrisalarınıń kesilisiw noqatı bolsın. Bul durıs kópmúyeshliktiń múyeshin a menen belgileyik.

1. $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ ekenligin dáliylleymiz (*1-súwret*). Múyeshtiń bissektrisasınıń táriyplemesi boyınsha,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Demek, A_1OA_2 — teń qaptallı úshmúyeshlik. Bunnan, $OA_1 = OA_2$ kelip shıǵadı. ΔA_1A_2O hám ΔA_3A_2O úshmúyeshliklerdiń teńliginiń TMT belgisi boyınsha teń, sebebi $A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — tárepi ulıwma hám de

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Sonıń ushın $OA_3 = OA_1$. Dál usınday jol tutıp, $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ hám t.b. teńlikleri orınlı bolatuǵını kórsetiledi.

Solay etip, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, orayı O hám radiusı OA_1 bolǵan sheńber kópmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberden ibarat boladı (2-súwret).

2. Joqarıda aytılǵanlar boyınsha teń qaptallı A_1OA_2, A_2OA_3, ... A_nOA_1 úshmúyeshlikleri teń. Sonıń ushın, bul úshmúyeshliklerdiń O tóbesinen túsirilgen biyiklikleri de teń boladı (3-súwret):

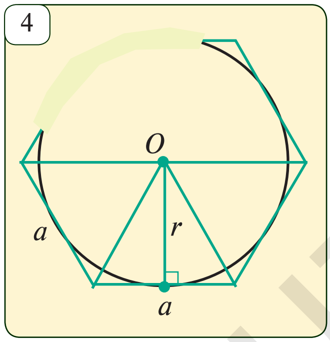
$$OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_n.$$

Demek, O orayına iye hám radiusı OH_1, kesindige teń bolǵan sheńber kópmúyeshliktiń barlıq táreplerine urınadı. Yaǵnıy, bul sheńber kópmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber boladı. *Teorema dáliyllendi.*

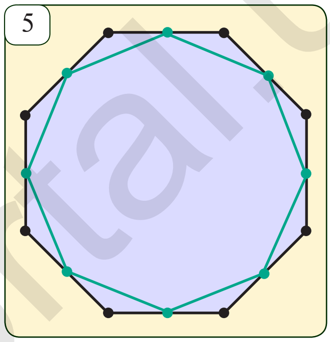
Nátiyje. Durıs kópmúyeshlikke ishley sızılǵan hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń orayları bir noqatta boladı.

Bul noqat durıs kópmúyeshliktiń *orayı* delinedi. Kópmúyeshliktiń orayı *n* onıń eki qońsılas tóbeleri menen tutastiriwshi nurlardan ibarat múyesh (1-súwrettegi A_1OA_2, A_2OA_3 ... múyeshler) onıń *oraylıq múyeshi* delinedi. Durıs kópmúyeshliktiń orayınan tárepine túsirilgen perpendikulyar (3-súwrettegi OH_1, OH_2, ... kesindiler) onıń *apofeması* delinedi.

4



5



Másele. Másele. Eger durıs *n* múyeshliktiń tárepi *a*, oǵan ishley sızılǵan sheńberdiń radiusı *r* bolsa, onıń *s* maydanı $S = \frac{1}{2}\,nar$ formulası menen esaplaw múmkin ekenligin dáliylleń.(4-súwret).

Sheshiliwi. Kópmúyeshliktiń yarım perimetri $p = \frac{1}{2}\,na$ bolǵanı ushın (sheńberge sırtlay sızılǵan kópmuyeshliktiń maydanın $S = pr$ formulası boyınsha, $S = \frac{1}{2}\,nar$ boladı.

Másele hám tapsırmalar

39.1. Maydanı 36 *cm* bolǵan kvadratqa ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların tabıń.

39.2. Perimetri 18 *cm* bolǵan durıs úshmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların esaplań.

39.3. Durıs altı múyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusı onıń tárepine teń bolatuǵının dáliylleń.

39.4. Durıs kópmúyeshliktiń tárepleriniń ortaları jáne durıs kópmúyeshlik payda etetuǵının dáliylleń (*5-súwret*).

39.5. Durıs kópmúyeshliktiń qálegen eki tárepiniń orta perpendikulyarları yaki bir noqatta kesilisiwi yaki bir tuwrıda jatatuǵının dáliylleń.

39.6*. Durıs kópmúyeshliktiń qálegen eki tárepiniń orta perpendikulyarları yaki bir noqatta kesilisiwi yaki bir tuwrıda jatatuǵının dáliylleń.

39.7. Sheńberge ishley sızılǵan durıs kópmúyeshliktińbir tárepi sheńberden a) 60°; b) 30°; d) 36°; e) 18°; f) 72° qa teń doǵa ajıratadı. Kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?

39.8. Qaǵazdan altı teńdey durıs úshmúyeshlik qırqıp alıń. Olardan paydalanıp, durıs altımúyeshlik jasań. Tárepleri teń bolǵan durıs altımúyeshliktiń hám úshmúyeshliktiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

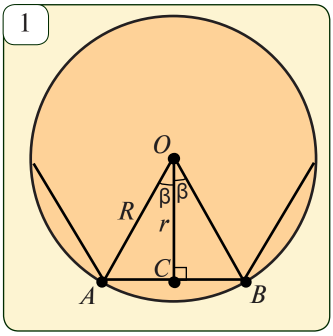
DURÍS KÓPMÚYESHLIKTIŃ TÁREPINEN SÍRTLAY HÁM ISHLEY SÍZÍLǴAN SHEŃBERLER RADIUSLARI ARASÍNDAǴÍ BAYLANÍS

Jedellestiriwshi shınıǵıw

Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshiniń a) sinusı; b) kosinusı; c) tangensi dep nege aytıladı?

Tárepi a_n ge teń bolǵan durıs n múyeshke sırtlay sızılǵan sheńberdiń R radiusı hám ishley sızılǵan sheńberdiń r radiusın esaplaw ushın tuwrı múyeshli ACO úshmúyeshliginen paydalanamız. Bul jerde O — ko'pmúyeshliktiń AB tárepiniń ortası (*1-súwret*). Onda,

1



$$\beta=\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n};$$

$$R=OA=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};\qquad r=OC=\frac{AC}{tg\beta}=\frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r=OC=OA\cdot\cos\beta=R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Bul formulalardan paydalanıp, ayırım durıs kóp-muyeshlikler tárepin, ishkihám sırtqı sızılǵan sheńberler radiusları arasındaǵı baylanıslardı tabamız.

1. Durıs úshmúyeshlik ushın (n=3):

$$\beta=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ;\quad R=\frac{a_3}{2\sin 60^\circ}=\frac{a_3}{\sqrt{3}};\quad r=\frac{a_3}{2tg\,60^\circ}=\frac{a_3}{2\sqrt{3}};\quad R=2r.$$

2. Kvadrat ushın (n=4):

$$\beta=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ;\quad R=\frac{a_4}{2\sin 45^\circ}=\frac{a_4}{\sqrt{2}};\quad r=\frac{a_4}{2tg\,45^\circ}=\frac{a_4}{2};\quad R=r\sqrt{2}.$$

3. Durıs altımúyeshlik ushın (n=6):

$$\beta=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ;\quad R=\frac{a_6}{2\sin 30^\circ}=a_6;\quad r=\frac{a_6}{2tg\,30^\circ}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2};\quad R=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Másele. Durıs n múyeshliktiń a_n tárepin usı kópmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń R radiusı hám ishley sızılǵan sheńberdiń r radiusı arqalı ańlatıń.

Sheshiliwi. $R=\dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ hám $r=\dfrac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ formulalardan $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ hám $a_n=2r\,tg\frac{180^\circ}{n}$ formulalardı payda qılamız. Dara jaǵdayda, $n=3$ bolsa, $a_3=R\sqrt{3}=2r\sqrt{3}$.

Másele hám tapsırmalar

40.1. Tárepi 15 cm bolǵan a) durıs úshmúyeshlikke; b) durıs tórtmúyeshlikke; d) durıs altımúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların esaplań.

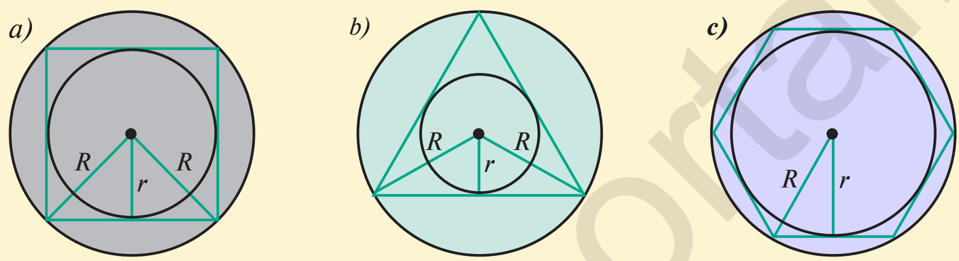
40.2. 2-súwrettiń oń tárepinde R radiusli sheńberge ishley sızılǵan kvadrat, durıs úshmúyeshlik hám durıs altımúyeshlik súwretlengen. Dápterińizge berilgen kestelerdi kóshirip, onıń bos keteklerin toltırıń (a_n — kópmúyeshliktiń tárepi, P — kópmúyeshliktiń perimetri, S — onıń maydanı, r — oǵan ishley sızılǵan sheńber radiusı).

40.3. Radiusı 8 *cm* bolǵan sheńberge ishley sızılǵan durıs on eki múyeshliktiń bir tóbesinen shıqqan diagonalların tabıń.

40.4. Sheńberge ishley sızılǵan durıs úshmúyeshliktiń perimetri 24 *cm*. Bul sheńberge ishley sızılǵan kvadrattıń tárepin tabıń.

40.5. Cilindr formasındaǵı aǵashtan ultanınıń tárepi 20 *cm* bolǵan: a) kvadrat; b) durıs altımúyeshlik bolǵan prizma túrindegi baǵana tayarlaw kerek. Aǵashtıń kese-kesiminiń diametri keminde qansha bolıwı zárúr?

2



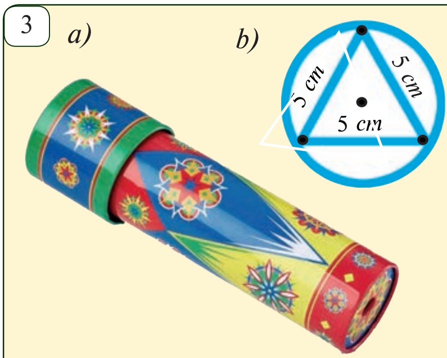
	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					$24\sqrt{3}$

40.6. 3 *a*-súwrette súwretlengen, túrlishe naǵısların tamasha qılsa bolatuǵın “Kaley-doskop” dep atalǵan oyınshıq sizge tanıs bolsa kerek. Oyınshıq truba hám ayna bóleklerinen ibarat. 3 *b*-súwrette onıń kese-kesimi súwretlengen hám ólshemleri berilgen. Kaleydoskoptıń kese-kesiminiń radiusın tabıń.

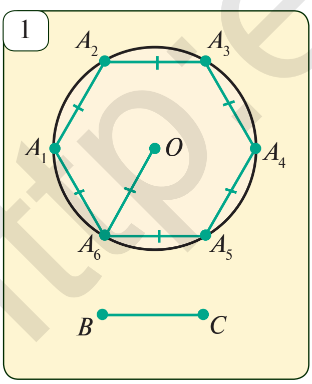
3



BILIMIŃIZDI SINAP KÓRIŃ

I. Testler

1. **Tómendegi kópmúyeshliklerdiń qaysı birinde ishley sızılǵan sheńber joq?**
   A) Úshmúyeshlikte; D) Kvadrattan ózgeshe rombda;
   B) Kvadratta; E) Rombdan parıqlı tuwrı tórtmúyeshlikte.
2. **Tómendegi kópmúyeshliklerdiń qaysı birinde sırtlay sızılǵan sheńber joq?**
   A) Úshmúyeshlikte; D) Kvadrattan ózgeshe rombda;
   B) Kvadratta; E) Rombdan parıqlı tuwrı tórtmúyeshlikte.
3. **Sheńberge ishley sızılǵan barlıq *ABCD* tórt múyeshlikler ushın nadurıs teńlikti tabıń**.
   A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; D) $AB+CD=BC+AD$;
   B) $\angle A+\angle C=180°$; E) $\angle B+\angle D=180°$.
4. **Sheńberge sırtlay sızılǵan barlıq *ABCD* tórt múyeshlikler ushın nadurıs teńlikti tabıń.**
   A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; D) $AB+CD=BC+AD$;
   B) $\angle A+\angle C=180°$; E) $AB-BC=AD-CD$.
5. **Tárepleri 5 *cm* hám 12 *cm* bolǵan tuwrı múyeshli tórtmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.**
   A) 6 *cm*; B) 6,5 *cm*; D) 7 *cm*; E) 7,5 *cm*.
6. **Durıs 24 múyeshliktiń ishki múyeshin tabıń.**
   A) 120°; B) 135°; D) 150°; E) 165°.
7. **Hár bir sırtqı muyeshi 60° bolǵan durıs kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısın tabıń.**
   A) 540°; B) 360°; D) 90°; E) 720°.



II. Jasawǵa tiysli máseleler.

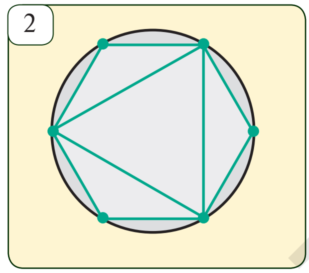
1. Tárepi berilgen kesindigeteń bolǵan durıs altımúyeshlik jasań. Bunda durıs altımúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusı altımúyeshliktiń tárepine teń ekenligінen hám 1-súwretten paydalanıń.

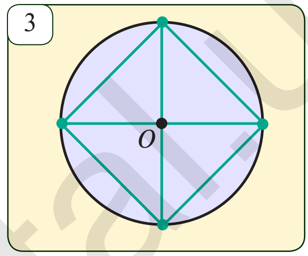
2. 2-4-súwretlerdegi maǵlıwmatlardan paydalanıp, berilgen sheńberge ishley sızılǵan a) durıs úshmúyeshlik b) kvadrat d) durıs segizmúyeshlik jasań.

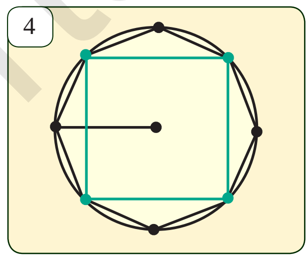
3. 5-súwretten paydalanıp, berilgen sheńberge sırtlay sızılǵan durıs altımúyeshlik jasań (5-súwrettegi sheńberge sırtlay sızılǵan altımúyeshlik tárepleri usı sheńberge ishki sızılǵan durıs altımúyeshlik ushlarına ótkizilgen urınbalarda jatadı).

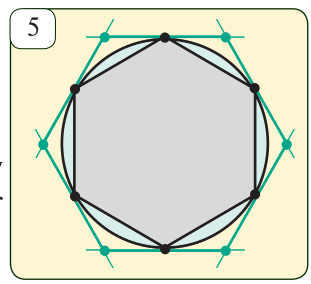
III. Esaplawǵa tiyisli máseleler.

1. Durıs úshmúyeshlik, kvadrat hám durıs altımúyeshliklerdiń tárepleri bir-birine teń. Ol ardiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.
2. Bir sheńberge ishley sızılǵan durıs altımúyeshlik hám sırtlay sızılǵan altımúyeshliktiń maydanlariniń qatnasın tabıń.
3. Durıs a) altımúyeshlik; b) segizmúyeshlik; c) On eki múyeshliktińparallel tárepleri arasindaǵı aralıq 10 *cm* ge teń. Kópmúyeshliktiń tárepin tabıń.
4. Radiusı R bolǵan sheńberge $A_1A_2 \ldots A_8$ durıs segizmúyeshlik ishley sızılǵan. $A_3A_4A_7A_8$ tórtmúyeshliginiń tuwrimúyeshlik ekenligin dáliyllеń hám onıń maydanın tabıń.
5. Sheńberge sırtlay sızılǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasi sol sheńberge urınıw noqatında 4 *cm* hám 6 *cm* uzınlıqtaǵı kesindilerge ajıraladı. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
6. Durıs onmúyeshliktiń bir tóbesinen shıqqan eń úlken hám eń kishi diagonalları arasındaǵı múyeshti tabıń.









IV. Ózińizdi sınap kóriń. (baqlaw jumısı úlgisi).

1. Katetleri 10 *cm* hám 24 *cm* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishley sızılǵan hám sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın tabıń.
2. Radiusı 5 *cm* bolǵan sheńberge sırtlay sızılǵan rombnıń bir múyeshi 150° qa teń. Rombniń a)perimetrin; b) diagonalların; d) maydanın tabıń.
3. Tárepleri 4 *cm* bolǵan durıs altımúyeshliktiń bir ushınan shıqqan diagonalların tabıń.
4. *(Qosımsha)*. Radiusı 3 *cm* bolǵan sheńberge ishley sızılǵan durıs altımúyeshlik hám durıs úshmúyeshlikler maydanlarınıń ayırmasın tabıń.

Tariyx betlerinen. Qalegen durıs kópmúyeshlikti de cirkul hám sızǵish járdeminde jasawǵa bola bermeydi eken. Bunı 1801-jılı nemis matematigi Karl Gauss (1777—1855) algebralıq usılda dáliyllegen. Ol eger n sanınıń $2^m p_1 p_2 \ldots p_n$ jayılmasında p_1, p_2, ... p_n túrli ápiwayı sanlar $2^{2^k}+1$ kórinisinde bolsa ǵana durıs n-múyeshti cirkul hám sızǵish járdeminde jasaw múmkin ekenligin dáliylledi. Buljerde m hám k teris bolmaǵan pútin sanlar.

SHEŃBERDIŃ UZÍNLÍĞÍ

1

Jedellestiriwshi shınıǵıw

1. Ádette truba bóleginiń kese-kesimi sheńberden ibarat boladı. Jińishke jipti bir ushınan baslap, trubaǵa bir márte orań. Bir márte orawǵa ketken jip bólegi trubanıń kese-kesimi, yaǵnıy sheńberdiń uzınlıǵı boladı. Onı súwrette kórsetilgendey etip sızǵısh járdeminde ólsheń.
2. Joqaridaǵı usıl menen trubanıń kese-kesiminiń diametrin anıqlań.
3. Anıqlanǵan sheńber uzınlıǵın onıń diametrine qatnasın esaplań.
4. Joqarida keltirilgen ólshew hám esaplaw jáne bir neshe túrli ólshemdegi truba bólekleri ushın daorinlap, sheńber uzınlıǵınıń onıń diametrine qatnasların tabıń.
5. Tájiriybe nátiyjesine kóre sheńber uzınlıǵınıń onıń diametrine qatnası haqqında qanday juwmaq shıǵarıw múmkin?

***Teorema.* Sheńber uzınlıǵınıń sheńber diametrine qatnası sheńberdiń radiusına baylanıslı emes, yaǵnıy hár qanday sheńber ushın bul qatnas bir qıylı san boladı.**

Dáliyllew. Qálegen eki sheńber alamiz. Olardıń radiusları R_1 hám R_2, uzınlıqları bolsa sáykes túrde C_1 hám C_2 bolsın. $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ teńligin dáliyllewimiz kerek. Hár eki sheńberge ishley durıs n-múyeshti sızamız. Olardıń perimetrlerin sáykes túrde P_1 hám P_2 dep belgileyik. Onda,

$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n \cdot 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}$ bolǵanı ushın $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$ (*) boladı.

Bul teńlik qálegen n ushın durıs boladı. n sanı úlkeyip barsa, berilgen sheńberge ishley sızılǵan n-múyeshliktiń perimetri P_1 usı sheńber uzınlıǵı C_1 ge jaqınlasıp baradı. Sol sıyaqlı P_2 hám C_2 ge jaqınlasıp baradı.

Sonıń ushın $\frac{P_1}{P_2}$ qatnası $\frac{C_1}{C_2}$ qatnasına teń boladı (bunıń tolıq dáliyli matematikanıń joqarı basqıshlarında úyreniledi). Solay etip, (*) teńliginen $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, bunnan bolsa $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ teńligi kelip shıǵadı. *Teorema dáliyllendi.*

Sheńber uzınlıǵın onıń diametrine qatnası grek álipbesiniń π háribi menen belgilew qabıl etilgen *("pi" dep oqıladı)*. Sheńber uzınlıǵın onıń diametrine qatnasın "π" háribi menen belgilewdi ullı matematik Leonard Eyler (1707—1783) ilimge kiritken. Grekshede "sheńber" sózi usı hárip penen baslanadı. π irrasional san bolıp, ámeliyatta onıń $\pi \approx 3{,}1416$ ǵa teń bolǵan juwıq mánisinen P aydalanıladı.

Solay etip, $\frac{C}{2R}=\pi$. Bul teńlikten radiusı R ge teń sheńberdiń uzınlıǵı ushın $C=2\pi R$ formulasın payda etemiz.

Másele. Tárepi 6 *cm* bolǵan durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın tabıw formulası $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$ boyınsha, $R=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ (*cm*). Endi, sheńber uzınlıǵın tabıw formulasınan

$$C=2\pi R=2\pi\cdot 2\sqrt{3}=4\pi\sqrt{3}\ (cm).$$

Juwabı: $4\pi\sqrt{3}$ *cm*.

Másele hám tapsırmalar

42.1. Qanday san π menen belgilenedi? Radiusı R ge teń sheńberdiń uzınlıǵın tabıw formulasınan paydalanıp kesteni toltırıń ($\pi \approx 3{,}14$ dep esaplań).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

42.2. Eger sheńber radiusı a) 3 márte artsa; b) 3 *cm* ge artsa; d) 3 márte kemise; e) 3 *cm* ge kemise, sheńber uzınlıǵı qanshaǵa ózgeredi?

42.3. Eger jer sharı ekvatorınıń 40 millionnan bir bólegi 1 *m* ge teń bolsa, Jer sharınıń radiusın tabıń.

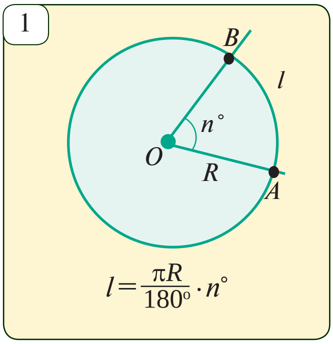
42.4. a) Tárepi *a* ǵa teń bolǵan durıs úshmúyeshlikke; b) katetleri a hám b bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke; c) ultanı a hám qaptal tárepi *b* bolǵan teńqaptallı úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń uzınlıǵın tabıń.

42.5. a) Tárepi *a* ǵa teń kvadratqa; b) gipotenuzası *c* ǵa teń bolǵan teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke; c) gipotenuzası *c*, súyir múyeshi α bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishle sızılǵan sheńberdiń uzınlıǵın tabıń.

42.6. Teplovoz 1413 *m* jol júrdi. Bunda onın dóńgelegi 300 márte aylandı. Teplovoz dóńgeleginiń diametrin tabıń.

42.7. Jeńil avtomobil dóńgelegi sheńberiniń radiusı 24 *cm* ge teń. Avtomobil 100 *km* jol júrse, onıń dóńgelegi neshe márte aylanadı (2-súwret)

43 SHEŃBER DOǴASINIŃ UZINLIǴI MÚYESHTIŃ RADIAN ÓLSHEMI



1. n^{o} li oraylıq múyesh keltirelgen doǵanıń uzınlıǵı.

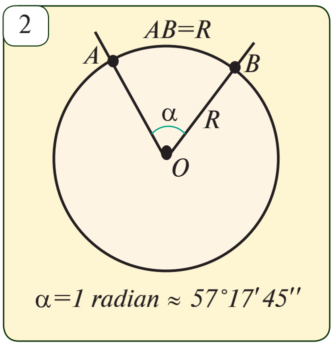
Aytayıq, radiusı R ge teń bolǵan sheńberde n^{o} li AOB oraylıq múyesh berilgen bolsın (1-súwret). Bunda sheńberdiń AOB oraylıq múyeshine tirelgen AB doǵasınıń gradus ólshemin n^{o} yaki n^{o} li doǵa dep júritiliwin esletip ótemiz.

Radiusı R ge teń bolǵan sheńber, yaǵnıy 360^{o} li doǵa uzınlıǵı $2\pi R$ ge teń bolǵanı ushın, 1^{o} li doǵa

uzınlıǵı $\frac{2\pi R}{360^{o}} = \frac{\pi R}{180^{o}}$ ǵa teń boladı.

Onda, n^{o} li doǵa uzınlıǵı $l = \frac{\pi R}{180^{o}} \cdot n^{o}$ formula

menen anıqlanadı (*1-súwret*).



2. Múyeshtiń radian ólshemi.

Múyeshtiń gradus ólshemi menen bir qatarda onıń radian ólshemi de qollanıladı.

Sheńber doǵası uzınlıǵı nıń radiusqa qatnasın joqarıdaǵı formulaǵa tiykarlanıp: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^{o}} \cdot n^{o}$ ga teń.

Demek, sheńber doǵası uzınlıǵınıń radiusına qatnası tek usı doǵaǵa tirelgen oraylıq múyeshtiń shamasina baylanıslı eken. Bul qásiyetten paydalanıp, múyeshtiń radian ólshemi sıpatında dál usı qatnastı alamız:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^{o}} \cdot n^{\circ}.$$

Ádette, radian sózi jazılmaydı. Máselen: 5 radian ornına 5 dep jazıladı. Bir radian $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ gradusqa teń: $1 \text{ radian} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}17'45''$.

Múyeshtiń gradus ólsheminen radian ólshemine ótiw ushın

$$\alpha = \frac{\pi}{180^{o}} \cdot n^{\circ}$$

formuladan paydalanıladı.

Solay etip, n^{o} lı múyeshtiń radian ólshemin tabıw ushın onıń gradus ólshemin $\frac{\pi}{180^{o}}$ qa kóbeytiw jetkilikli eken. Jeke halda, 180^{o} múyeshtiń radian ólshemi π ge teń, 90^{o} li, yaǵıny tuwrımúyeshtiń radian ólshemi $\frac{\pi}{2}$ ge teń boladı.

α radianǵa teń oraylıq múyeshke sáykes doǵasınıń uzınlıǵı $l = \alpha R$ formula menen esaplanadı.

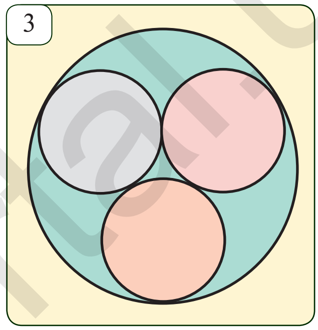
Másele. Eki múyeshke mas rawishte 30° hám 45° bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshleriniń radian ólshemlerin tabıń.

Sheshiliwi. Úshmúyeshliktiń 30° lı múyeshiniń radian ólshemi $30°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{6}$, 45° li múyeshtiń radian ólshemi $45°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}$. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı 180° ga, yaǵnıy π ga teń ekenligi haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp, úshmúyeshliktiń úshinshi múyeshiniń radian ólshemin tabamız.

$$\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Juwabı: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ hám $\frac{7\pi}{12}$.

Másele hám tapsırmalar

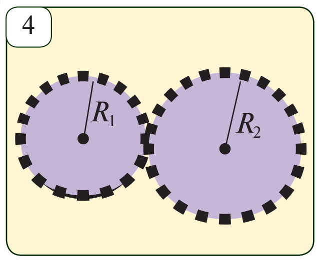


43.1. Radiusı 6 *cm* bolǵan sheńberdiń gradus ólshemi a) 30°; b) 45°; d) 90°; 120° bolǵan doǵa uzınlıǵın tabıń.

43.2. a) 40°; b) 60°; d) 75° qa teń múyeshtiń radian ólshemin tabıń.

43.3. a) 1,2; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$ radianǵa teń múyeshtiń gradus ólshemin tabıń.

43.4. Eger sheńberdiń radiusı 5 *cm* bolsa, Onıń a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{2\pi}{5}$; c) $\frac{3\pi}{4}$ radianǵa teń bolǵan doǵa uzınlıǵın tabıń.



43.5. Radiusı 12 *cm* bolǵan sheńberge *ABC* úshmúyeshligi ishley sızılǵan. Eger a) $\angle A=30°$; b) $\angle A=120°$ bolsa, *A* noqatın óz ishine almaǵan *BC* doǵa uzınlıǵın tabıń.

43.6. Sheńberdiń teń xordaları sheńberden teń doǵalar ajiratatuǵınının dáliylleń.

43.7*. Eki sheńber bir-biriniń orayınan ótedi. Bul sheńberlerdiń ulıwma xordası hár eki sheńberden ajıratqan doǵalar uzınlıqlarınıń qatnasın tabıń.

43.8*. Radiusları teń bolǵan úsh sheńberler bir-birine sırttan hám radiusı *R* ge teń bolǵan sheńberge ishley urınadı (3-súwret): a) sheńberlerdiń radiusın tabıń; b) boyalǵan figuranı shegaralawshı doǵalardıń uzınlıqlarınıń qosındısın tabıń.

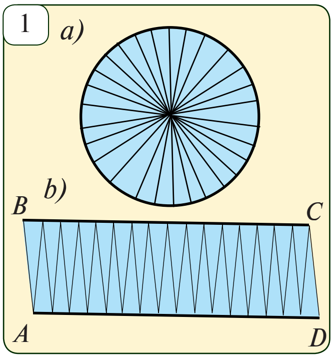
Qızıqarlı másele

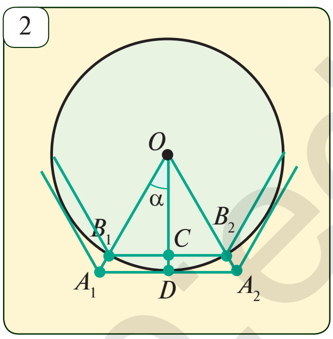
4-súwrette súwretlengen eki tisli dóńgelekler bir-birine "tisletilgen". Dóńgelekler radiusı R_1 hám R_2. Birinshi dóńgelek n márte aylanǵanda ekinshi dóńgelek neshe márte aylanadı?

DÓŃGELEKTIŃ MAYDANÍ

Anıqlama. Tegislikte berilgan O noqattınan berilgan R aralıqtan úlken bolmaǵan aralıqta jatıwshı bárshe noqatlardan payda bolǵan figura *dóńgelek* dep ataladı.

Orayı O noqatında hám radius R ge teń bolǵan dóńgelek tegisliktiń O noqatınan R den aspaytuǵın aralıqta jatqan barlıq noqatlardan quralǵan boladı.





Jedellestiriwshi shınıǵıw

Bir bet qaǵazǵa qalıń sızıq penen sheńber sızıń hám 1-*a* súwrette kórsetilgendey, onıń bir neshe diametrlerin júrgizip, dóńgeleklerdi teńdey bóleklerge bóliń. Soń bul bóleklerdi qıyıp alıń hám 1-*b* súwrette kórsetilgendey etip terip, F figurasın payda etiń. Eger dóńgelek qálegenshe kóp teńdey bóleklerge bólinip, bul bólekler súwrette kórsetilgen tártipte terilgende, nátiyjede tuwrı múyeshlikke júdá jaqın F figura payda boladı.

a) F figuranı tuwrı múyeshlik formasına júdá jaqın ekenligin esapqa alıp, onıń AB tárepi shama menen nege teń bolatuǵının tabıń. (kórsetpe: AB tárepin dóńgelek radiusı menen salıstırıń).

b) F figuranıń BC "tárepi" shama menen nege teń boladı? (Kórsetpe: BC hám AD tárepleri qalıń sızıq penen sızılǵanına, yaǵnıy sheńber doǵalarınan ibarat ekenligine itibar beriń)

d) F figuranıń $ABCD$ tuwrı múyeshlik formasına júdá jaqın ekenligin esapqa alıp, onıń maydanın juwıq esaplań. F figurasınıń maydanı dóńgelek maydanına júdá jaqın ekenligin názerde tutıp, dóńgelek maydanı haqqında juwmaq shıǵarıń.

Teorema. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelektiń maydanı πR^2 qa teń.

Dálillew. Radiusı R hám orayı O noqatta bolǵan sheńberdi qaraymız. Sheńberge sırtlay sızılǵan $A_1A_2 \ldots A_n$ hám ishley sızılǵan $B_1B_2 \ldots B_n$ durıs n múyeshlerdiń maydanları sáykes túrde a S'_n hám S''_n bolsın (2-*súwret*).

A_1OA_2 hám B_1OB_2 úshmúyeshliklerdiń maydanların tabamız:

$$S'_{A_1OA_2}=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OD=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot R;\quad S''_{B_1OB_2}=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OC=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OB_1\cos\alpha=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha.$$

Onda, $S''_n=n\cdot\frac{1}{2}AA_1\cdot R=\frac{1}{2}P_nR,\quad S'_n=n\cdot\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha=\frac{1}{2}P_nR''\cos\alpha$ (1)

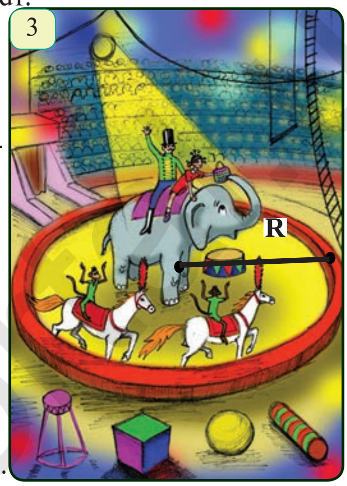
Bul jerde P'_n hám P''_n sáykes túrde $A_1A_2...A_n$ hám $B_1B_2...B_n$ kópmúyeshliklerdiń perimetrleri. $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$ bolǵanı ushın n niń jeterlishe úlken mánislerinde cosα nıń mánisi birden, P'_n hám P''_n lerdiń mánisleri sheńber uzınlıǵı yaǵnıy $2\pi R$ den qálegenshe kem parq qıladı. Onda (1) teńlikler boyınsha, n nıń jeterlishe úlken mánislerinde kópmúyeshliklerdiń maydanı πR^2 ǵa jaqınlasıp baradı. Bunnan, dóńgelektiń maydanı ushın $S=\pi R^2$ formula kelip shıǵadı.

Teorema dáliyllendi.

Másele. Cirk arenası sheńberiniń uzınlıǵı 41 *m*. Arena radiusın hám maydanın tabıń.

Sheshiliwi. 1) Sheńberdiń uzınlıǵın tabıw formulasınan radiusın tabamız (3-súwret):

$$R=\frac{C}{2\pi}\approx\frac{41}{2\cdot 3{,}14}\approx 6{,}53\ (m).$$



Dóńgelektiń maydanın esaplaw formulasınan arenanıń maydanın tabamız: $S=\pi R^2\approx 3{,}14\cdot 6{,}53^2\approx 133{,}84\ (m^2)$.

Juwabı: $R\approx 6{,}53\ m$; $S\approx 133{,}84\ m^2$.

Másele hám tapsırmalar

44.1. Dóńgelek maydanın esaplaw formulasın tiykarlań.

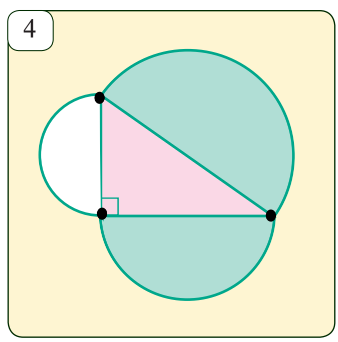
44.2. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelektiń S maydanın tabıw formulasınan paydalanıp, kesteni toltırıń ($\pi=3{,}14$ dep alıń).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

44.3. Eger dóńgelek radiusı a) k márte ósse; b) k márte kemise, dóńgelektiń maydanı qalay ózgeredi?

44.4. Tárepi 5 *cm* bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan hám sırtlay sızılǵan dóńgeleklerdiń maydanın tabıń.

44.5. Tárepi $3\sqrt{3}$ *cm* bolǵan durıs úshmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan dóńgelekleriniń maydanın tabıń.



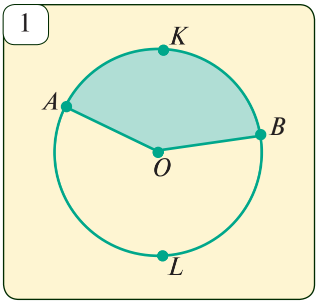
44.6. Radiusı R bolǵan dóńgelekten eń úlken kvadrat qırqıp alındı. Dóńgelektiń qalǵan bóliminiń maydanın tabıń.

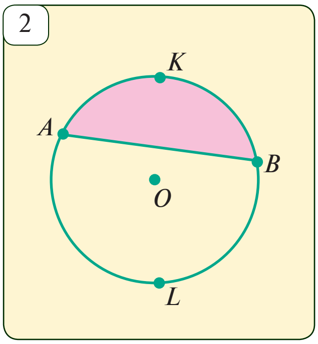
44.7. Tárepleri 6 *cm* hám 7 *cm* bolǵan tuwrı múyeshlikke sırtlay sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń.

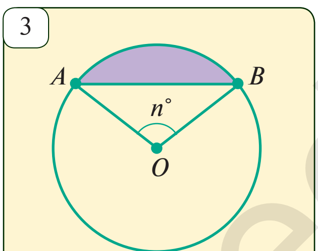
44.8. Tárepi 10 *cm* hám súyir múyeshi 60° bolǵan rombıǵa ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń.

44.9*. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń táreplerin diametr etip yarım dóńgelekler sızılǵan. Gipotenuzaǵa sızılǵan yarım dóńgelektiń maydanı katetlerge sızılǵan yarım dóńgeleklerdiń maydanlarınıń qosındısına teń bolatuǵının kórsetiń(4-súwret).

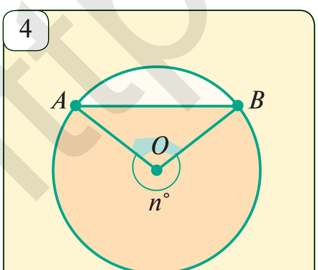
45 DÓŃGELEKTIŃ BÓLEKLERINIŃ MAYDANI







$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n-S_{AOB}$$



$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n+S_{AOB}$$

Anıqlama. Dóńgelektiń doǵası hám bul doǵa aqırların dóńgelek orayı menen tutastırıwshı eki radiusı menen shegaralanǵan bólimi *sektor* delinedi. Sektordıń shegarası bolǵan doǵa *sektor doǵası* delinedi.

1-súwrette AKB hám BLA doǵalı eki sektor súwretlengen (olardan birinshisi boyalǵan).

Radiusi R ge hám doǵanıń gradus ólshemi n° qa teń bolǵan sektordıń S maydanın tabıw ushın formula keltirip shıǵaramız. Doǵası 1° qa teń sektordıń maydanı dóńgelek (yaǵnıy doǵası 360° qa teń sektor) maydanınıń $\frac{1}{360}$ bólimine teń bolǵanı ushın, doǵası n° bolǵan sektordıń maydanı

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n \qquad \text{yaki} \qquad S=\frac{1}{2}\,R\cdot l$$

formula arqalı tabıladı. Bul jerda l — n° lı sektor doǵasınıń uzınlıǵı.

Anıqlama. Dóńgelektiń doǵası hám bul doǵa aqırların tutastırıwshı xordasi menen shegaralanǵan bólimi **segment** delinedi.

2-súwrette AKB hám BLA doǵalı eki segment súwretlengen (olardan birinshisi boyalǵan). Yarım dóńgelekten parqlı segmenttiń S maydanı

$$S=S_{sektor}\pm S_{\Delta}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n\pm S_{AOB}$$

boyınsha esaplanadı (3-hám 4-súwretlerge qarań).

Másele. Doǵanıń gradus ólshemi 72° bolǵan sektordıń maydanı 45π ge teń. Sektor radiusın tabıń.

Sheshiliwi. Sektor maydanın tabıw formulası boyınsha,

$$\frac{\pi R^2}{360}\cdot 72=45\pi.$$

Bunnan, $R^2=\frac{45\pi\cdot 360}{72\pi}=225$, demek, $R=15$.

Juwabı: 15.

Másele hám tapsırmalar

45.1. Sektor maydanın tabıw formulasın keltirip shığarıń.

45.2. Segment maydanın tabıw formulasın keltirip shığarıń.

45.3. Doğanıń gradus ólshewi a) 30°; b) 45°; d) 120°; e) 90° hám radiusı 7 *cm* bolğan sektor hám segment maydanların tabıń.

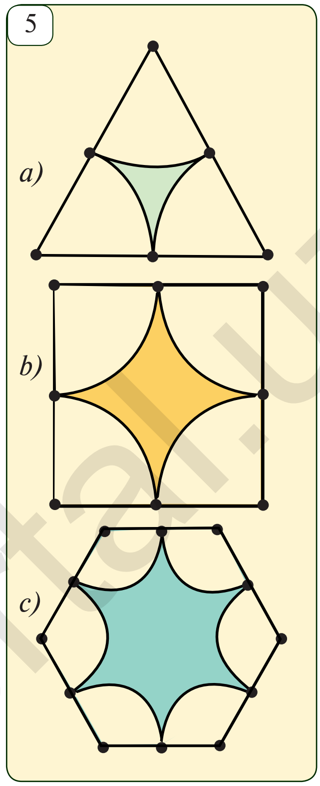
45.4. 5-súwrette tárepi a ğa teń bolğan durıs úshmúyeshlik, kvadrat hám durıs altımúyeshlik súwretlengen. Boyalğan figuralardıń maydanın tabıń. Bunda sektorlardıń radiusları kóp múyeshlik tárepiniń yarımına teń.

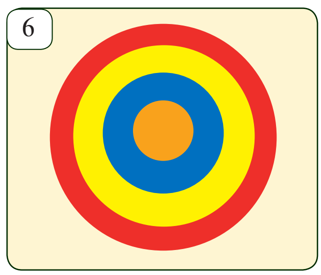
45.5. Nishanda radiusları 1, 2, 3, 4 ke teń bolğan tórt sheńber bar. Eń kishi dóńgelektiń maydanın hám hár bir jağdayda maydanın tabıń (*6-súwret*).

45.6. Radiusı 10 *cm* ge teń bolğan dóńgelekke radiusqa teń xorda júrgizilgen. Payda bolğan segmentlerdiń maydanın esaplań.

45.7. Radiusları 15 *cm* bolğan eki dóńgelektiń orayları arasındağı aralıq 15 *cm*. Dóńgeleklerdiń ulıwma bóliminiń maydanın tabıń.

45.8. Radiusı 10 *cm* bolğan dóńgelekke ishley hám sırtlay sızılğan durıs on eki múyeshliklerdiń maydanın esaplań. Nátiyjelerdi dóńgelektiń maydanı menen salıstırıń.



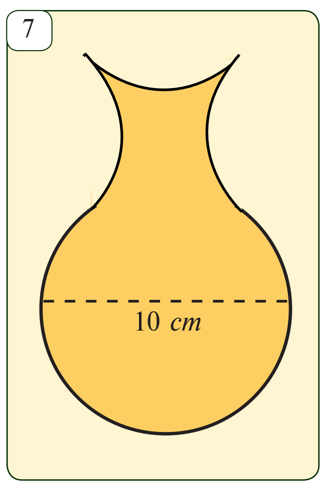


Qızıqarlı másele

7-súwrette súwretlengen gúl túbektiń súwretin úsh tuwrı sızıq penen:

a) sonday tórt bólekke bóliń, nátiyjede olardan tuwrı múyeshlik jıynaw múmkin bolsın;

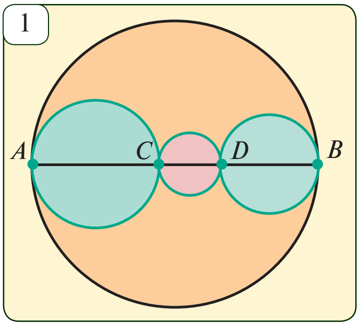
b) eki tuwrı sızıq penen sonday úsh bólimge bóliń, nátiyjede olardan kvadrat jasaw múmkin bolsın.



Tariyx betlerinen. Uzaq waqıtlar dawamında dúnyanıń kóplep matematikleri "dóńgelek kvadraturasi" dep atalğan tómendegi máseleni sheshiwge háreket etken: cirkul hám sızğısh járdeminde maydanı berilgen dóńgelek maydanına teń bolğan kvadrat jasaw. Tek XIX ásirdiń aqırında bul másele sheshimge iye emesligi dáliyllengen.

46 ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR HÁM OLARDÍŃ QOLLANÍWLARÍ

1-másele. C hám D noqatları sheńberdiń AB diametrin úsh AC, CD hám DB kesindilerge ajıratadı. AC, CD hám DB diametrli sheńberlerdiń uzınlıqlarınıń qosındısı AB diametrli sheńber uzınlıǵına teń ekenligin dáliylleń *(1-súwret).*



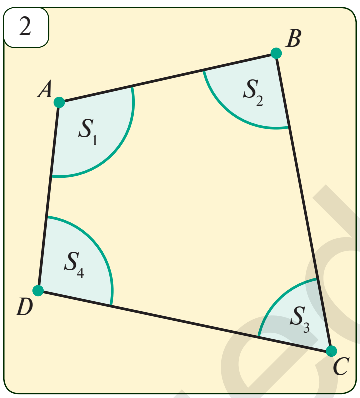
Sheshiliwi. Sheńber uzınlıǵın tabıw formulasınan paydalanıp, AC, CD hám DB diametrli sheńberlerdiń C_1, C_2, C_3 uzınlıqlarınıń qosındısın tabamız:
$C_1+C_2+C_3=AC\cdot\pi+CD\cdot\pi+DB\cdot\pi=\pi(AC+CD+DB)$.

$AC+CD+DB = AB$ hám AB diametrli sheńberdiń C uzınlıǵı $AB\cdot\pi$ ǵa teń bolǵanı ushın

$$C_1+C_2+C_3=C.$$

Usı teńlikti dáliyllew talap etilgen edi.

2-másele. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tóbelerin oray etip birdey radiuslı sektorlar jasalǵan (*2-súwret*). Bul sektorlardan qálegen ekewi ulıwma noqatqa iye emes hám barlıǵınıń radiusı 1 *cm*. Sektorlardıń maydanlariniń qosındısın tabıń.



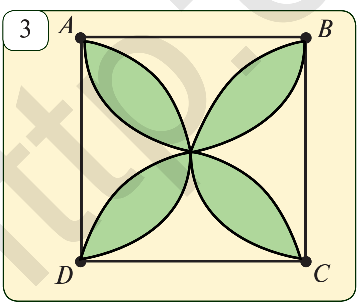
Sheshiliwi. 1) Tórtmúyeshliktiń A, B, C, D múyeshleri sáykes túrde α_1, α_2, α_3, α_4 bolsın. Onda, kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındaǵı teorema boyınsha,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360^\circ.$$

2) Sektor maydanın tabıw formulası (R=1 *cm*),

$$S_1=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_1,\quad S_2=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_2,\quad S_3=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_3,\quad S_4=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_4.\quad (1)$$

3) (1) teńliklerdiń sáykes bóleklerin qosamız. Onda,



$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{360^\circ}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot360^\circ=$$
$$=\pi\ (cm^2).$$

Juwabı: π cm^2.

Másele hám tasırmalar

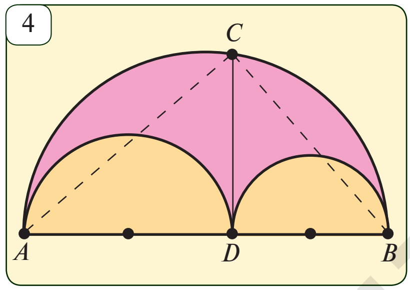
46.1. Perimetri 1 *m* bolǵan kvadrat hám uzınlıǵı 1 *m* bolǵan sheńber berilgen. Bul sheńber menen shegaralanǵan dóńgelektiń maydanı menen kvadrattıń maydanın salıstırıń.

46.2. Radiusı 8 *cm* bolǵan dóńgelekten 60° lı sektor qırqıp alınǵan. Dóńgelektiń qalǵan bóleginiń maydanın tabıń.

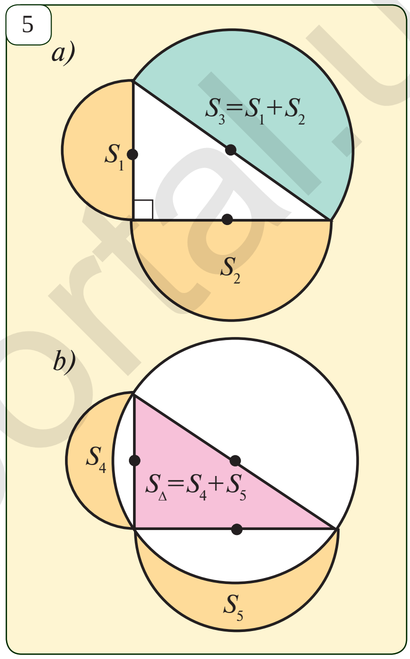
46.3. Diagonalları 6 *cm* hám 8 *cm* bolǵan rombıǵa ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanın esaplań.

46.4. 3-súwrette boyalıp kórsetilgen figura maydanın tabıń. Onda $ABCD$ —kvadrat, $AB=4$ cm.

46.5*. 4-súwrette "Arximed pıshaǵı" dep atalıwshı figura boyalıp kórsetilgen. Onıń maydanın $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ formula menen esaplawdı dáliylleń (bunda, $\angle ACB=90°$ hám $CD^2=AD \cdot DB$ ekenliginen paydalanıń).



46.6. Agar $AD=6$ cm, $BD=4$ cm bolsa, 4-súwrette boyalıp kórsetilgen figuranıń maydanın hám perimetri tabıń.

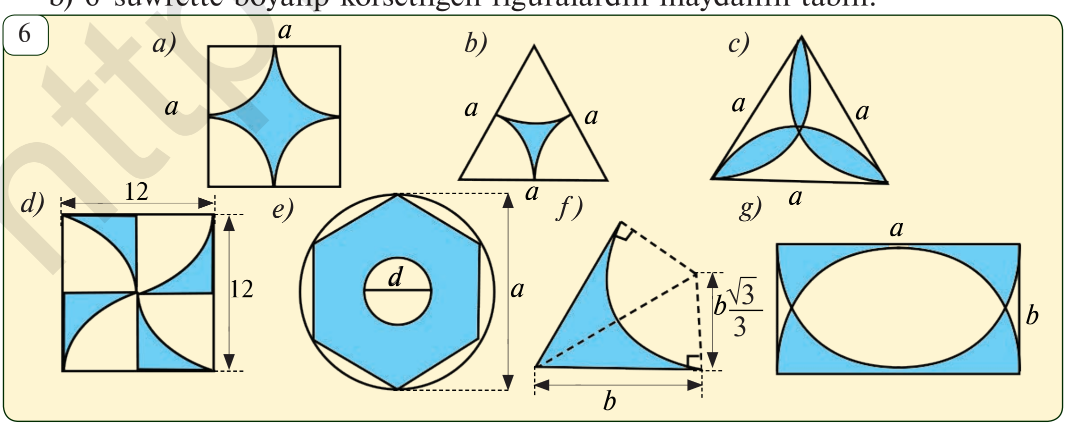


Tariyx betlerinen. Gippokrat ayshaları.

a) Gippokrat aylardıń — eki sheńber doǵalari menen shegaralanǵan hám tómendegi qásiyetke iye bolǵan figuralar boladi. Bul sheńberler (ayshalar) radiusları hám doǵalarınıń xordaları boyınsha ayshalarǵa teńdey kvadratlar jasaw múmkin.

Pifagor teoreması qollanılsa, 5-a súwretlengen gipotenuzaǵa jasalǵan yarım dóńgeleklerdiń maydanlarınıń qosındısına teń boladı (121-bet, 44.9-máselege qarań). Sonıń ushın 5.b-súwrettegi aylardıń maydanlarınıń qosındısı úshmúyeshliktiń maydanına teń (baqlap kóriń!). Eger súwrettegi úshmúyeshliktiń ornına teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlikti alsaq, payda bolǵan eki aydan hár biriniń maydanı úshmúyeshliktiń maydanınıń yarımına teń boladı. Dóńgelek kvadraturası haqqındaǵı máseleni sheshiwge urınıp, grek matematigi Gippokrat (b.e.sh. V ásir) kópmúyeshlik penen teńdey bir neshe túrli aylardı jasaǵan. Gippokrat aylardıń tolıq kestesi tek XIX-XX ásirlerde dúzilgen.

b) 6-súwrette boyalıp kórsetilgen figuralardıń maydanın tabıń.



47 BILIMIŃIZDI SINAP KÓRIŃ.

I. Testler

1. 45° graduslı múyeshtiń radian ólshemi nege teń?
   A. 1 ge teń; B. $\frac{\pi}{2}$ ǵa teń; D. $\frac{\pi}{4}$ ǵa teń; E. $\sqrt{2}$ ǵa teń.
2. Radiusı 3 *cm* bolǵan sheńberdiń gradus ólshemi 150° gradus bolǵan oraylıq múyeshke tirelgen doǵa uzınlıǵın tabıń.
   A. $\frac{5\pi}{2}$ *cm*; B. $\frac{5\pi}{3}$ *cm*; D. $\frac{10\pi}{3}$ *cm*; E. $\frac{5\pi}{4}$ *cm*.
3. Radiusı 6 *cm* bolǵan sheńberde $\frac{5\pi}{4}$ radianǵa teń oraylıq múyesh tirelgen doǵanıń uzınlıǵın tabıń.
   A. $\frac{15\pi}{2}$ *cm*; B. $\frac{5\pi}{6}$ *cm*; D. $\frac{4\pi}{3}$ *cm*; E. $\frac{5\pi}{2}$ *cm*.
4. Tárepi 5 *cm* ge teń bolǵan kvadratqa sırtlay sızılǵan sheńberdiń maydanın tabıń.
   A. $5\sqrt{2}\pi$; B. $\sqrt{2}\pi$; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 5π.
5. Diametri 6 ǵa teń dóńgelektiń maydanın tabıń.
   A. 9π; B. 6π; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 12π.
6. Doǵanıń gradus ólshemi 150°, radiusı 6 *cm* bolǵan dógelek sektordıń maydanın tabıń.
   A. 15π cm²; B. 6π cm²; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm²; E. 24π cm².
7. Doǵanıń uzınlıǵı 12 *cm* hám radiusı 6 *cm* bolǵan dóńgelek sektordıń maydanın tabıń.
   A. 15π cm²; B. 6π cm²; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm²; E. 24π cm².
8. Doǵanıń gradus ólshemi 120°, radiusı 3 ke teń bolǵan dóńgelek segmenttiń maydanin tabıń.
   A. $6\pi - 4\sqrt{3}$; B. $6\pi + 4\sqrt{3}$; D. $3\pi - 4\sqrt{3}$; E. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Máseleler

1. *ABCDEFKL* durıs segizmúyeshliktiń tárepi 6 *cm*. Onıń *AC* diagonalın tabıń.

2. Kvadrat radiusı 4 *dm* bolǵan sheńberge ishley sızılǵan. Kvadrattıń qońsılas tárepleriniń ortalarınan ótiwshi xordanıń sheńberden ajiratqan doǵalarınıń uzınlıǵın tabıń.

3. Sheńberdiń 90° li doǵasınıń uzınlıǵı 15 *cm*. Sheńberdiń radiusın tabıń.

4. Radiusi 20 ǵa teń sheńberden uzınlıǵı 10 π ge teń doǵa ajıratıladı. Bul doǵaǵa sáykes oraylıq múyeshti tabıń.

5. Eki doǵanıń ulıwma xordası bul dóńgeleklerdi shegaralawshı sheńberlerden 60° lı hám 120° lı doǵalar ajıratadı. Dóńgeleklerdiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

6. Tárepleri 3, 4, 5 bolǵan úshmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan dóńgeleklerdiń maydanlarin tabıń.

7. Dóńgelek xordası 60° lı doǵanı kerip turadı. Bul xorda ajıratqan segmentlerdiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

8. Durıs altımúyeshliktiń maydanınıń oǵan ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanına qatnasın tabıń.

9. Tárepi a ǵa teń bolǵan $ABCDEF$ durıs altımúyeshlik berilgen. Orayı A noqatı hám radiusı bolǵan sheńber usı altımúyeshlikti eki bólekke ajıratadı. Hár bir bólektiń maydanın tabıń.

10. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle A=72°$, $\angle C=90°$, $BC=15$ cm. BC diametrli sheńberdiń ABC úshmúyeshlik ishinde jatqan doǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

11. Dóńgelekke ishley sızılǵan durıs segizmúyeshlik berilgen. Oniń eki qońsılas tóbelerine júrgizilgen radiuslar dóńgelekti eki sektorǵa ajıratadı. Bul sektorlardıń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

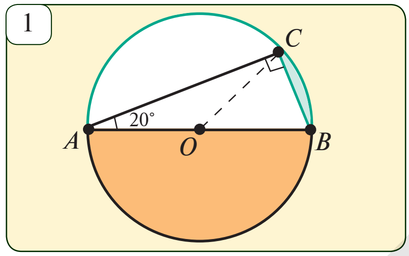
12. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle A=20°$, $\angle C=90°$, $AB=18$ cm. BC kesindisi úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan dóńgelekti eki segmentke ajıratadı. Boyap kórsetilgen segment maydanın tabıń (*1-súwret*).

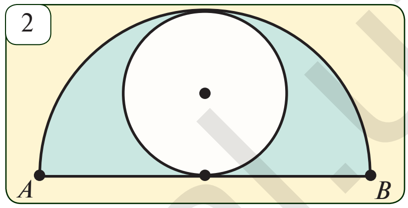
13. Kishi sheńber úlken sheńberge hám de onıń AB diametrine urınadi. Eger diametrge urınıw noqatı sheńber orayı hám $AB=4$ bolsa, súwrette boyalǵan figuranıń maydanın tabıń (*2-súwret*).

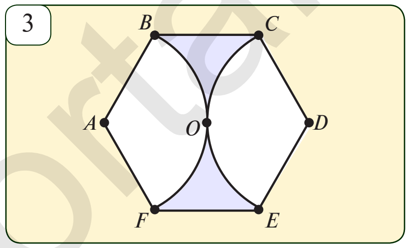
14. Durıs $ABCDEF$ altımúyeshliktiń tárepi 6 ǵa teń hám orayı O noqatında. Orayları A hám D noqatında hám radiusları teń bolǵan sheńberler O noqatinda urınadi. Boyalǵan oblast maydanın tabıń (*3-súwret*).

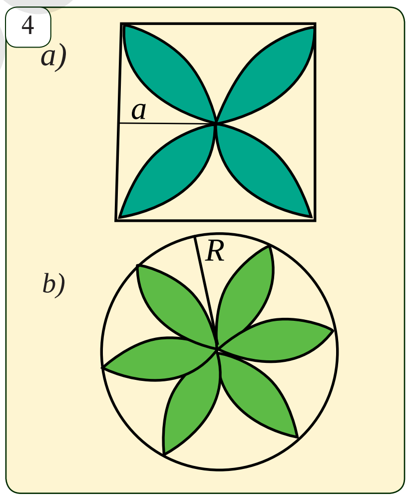
15. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, $AC=4$, $CB=2$. Orayı gipotenuzada bolǵan sheńber úshmúyeshlik katetlerine urınadı. Usı sheńberdiń uzınlıǵın tabıń.

16. 4-súwrette boyap korsetilgen figuralardıń maydanın tabıń. Olar qanday sızılǵanlıǵın anıqlań.









III. Ózińizdi sınap kóriń (úlgi ushın baqlaw jumısı)

1. Tárepleri 6 cm bolǵan kvadratqa sırtlay sızılǵan sheńber uzınlıǵı hám ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń.

2. Tárepi 24 cm bolǵan durıs kópmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber radiusı $4\sqrt{3}$ cm ge teń bolsa, oǵan sırtlay sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

3. 240° lı sheńber doǵasınıń uzınlıǵı 24 cm bolsa,
a) sheńber radiusın; b) doǵası 240° bolǵan sektordıń maydanın;
d) doǵası 240° bolǵan segmenttiń maydanın tabıń.

Qızıqarlı másele

In va Yan

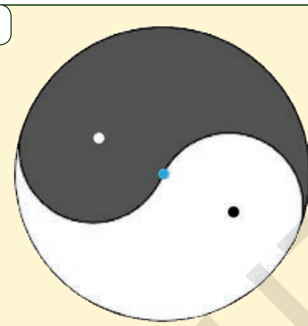
5-súwrette tábiyattaǵı qarama-qarsılıqlardı sáwlelendiriwshi “In hám Yan” dep atalǵan Qıtay belgisi (tamǵasi) súwretlengen.

a) In hám Yan belgileri maydanlarınıń teńligin kórsetiń;

b) bir tuwrı sızıq penen bul belgilerdiń hár birin maydanları teń bólgan eki bólekke ajıratıń.

d) In hám Yan nıshanları perimetrlarin (olardi qorshap turǵan doǵalar uzınlıqlarının qosındısın) tabıń.

1



Tariyx betlerinen. Sheńber uzınlıǵın esaplaw júdá ayyemnen keń kólemdegi mashqala bolǵan. Sheńber uzınlıǵın oǵan ishley sızılǵan kópmúyeshlik perimetrine almastırıw usılı keń tarqalǵan.

Orta Aziyalı matematikler de dóńgelekke ishley sızılǵan durıs kópmúyeshliklerdi jasaw, olardıń tárepleriń dóńgelektiń radiusı arqalı ańlatıw máseleleri menen shuǵıllanǵan. Abu Rayxan Beruniy “Qonuniy Masudiy” miynetinde dóńgelekke ishley sızılǵan kópmúyeshliklerdiń tárepin anıqlaw menen shuǵıllanıp, ishley sızılǵan becmúyeshlik, altımúyeshlik, jetimúyeshlik, ..., onmúyeshliktiń tárepleriń anıqlaw usılın kórsetedi. Bul esaplaw nátiyjesinde ol $\pi \approx 3{,}14$ mánisine iye boladı.

Áyyemgi Grek hám Mısır qoljazbaları hám basılımlarda π di úshke teń dep alǵan. Bul sol dáwirdiń anıqlıq talabı ushın jeterli bolǵan. Keyinshelik rimliler π ushın 3,12 ni paydalanǵan. π sanı ushın Arximed bergen mánis 3,14 bolıp, bul a’meliy máselelerdi sheshiwde júdá qolaylı.

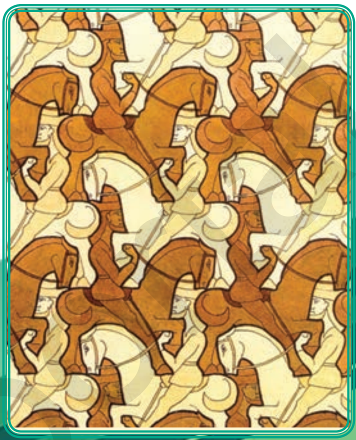
Qıtay matematiklerinde $\pi \approx 3{,}155$ ... hám 22/7. Hindlerdiń “Sulva Sutra” (“Arqan qaǵıydası”) miynetinde π ushın 3,008 hám 3,1416 ... hám $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ ... mánisleri ushıraydı.

Mırza Uluǵbektiń “Astronomiya mektebi” talabalarınıń biri Jamshid Giyasiddin al-Koshiy 1424-jılı jazǵan “Sheńber uzınlıǵı haqqında kitap” atamasındaǵı traktatında sheńberge ishley hám sırtlay sızılǵan durıs kópmúyeshlik tárepleri sanın eki eseletiw jolı menen $3 \cdot 2^{28} = 800\ 335\ 168$ tárepli durıs kópmúyeshliklerdiń perimetrlerin esaplap, π ushın $\pi = 3{,}1\ 415\ 826\ 535\ 897\ 932$ mánisin payda etken. Bul 16 onlıq sanǵa shekem anıq boladi.

Biraq al-Koshiydiń miyneti uzaq waqıtqa shekem Evropada belgisiz bolǵan. Evropalılardan Belgiyali Van Romen 1597-jılı 2^{30} tárepli durıs kópmúyeshlikke Arximed usılın qollanıp, π ushın 17 onliq sanları anıq bolǵan mánisti tapqan. Gollandiyalı Rudolf Van Seylon (1540—1610) bul anıqlıqtı 35 onlıq sanlarǵa shekem alıp barǵan. Házirgi da’wirde elektron esaplaw mashinalari járdeminde π ushın millionnan artıq onlıq sanları anıq bolǵan mánisleri tabılǵan. Kúndelik esaplawlar ushın 3,14 mánisi, matematikalıq esaplawlar ushın 3,1416 mánisi, ha’tte astronomiya hám kocmonavtika ushın 3,1415826 mánisi jetkilikli boladı.

IV BOB

ÚSHMÚYESHLIK HÁM SHEŃBERDEGI METRIKALÍQ QATNASLAR



Usı baptı úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

Bilimler:

√ *proporsional kesilispelerdiń qásiyetlerin biliw;*

√ *tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte gipotenuzaǵa túsirilgen biyikliktiń qásiyetlerin biliw;*

√ *óz ara kesilisiwshi xordalar kesilispeleri haqqındaǵı hám sheńberdi kesip ótiwshi tuwri sızıq kesispesi haqqındaǵı qásiyetlerdi biliw.*

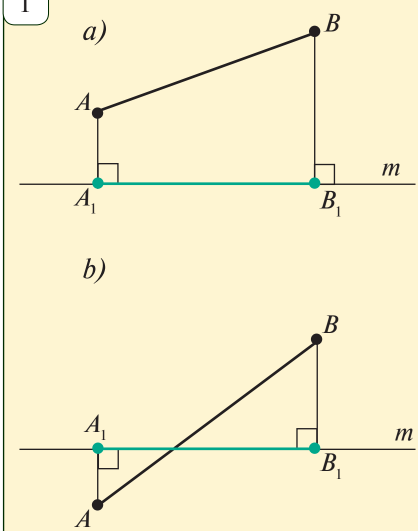
Kónlikpeler:

√ *kesindilerdiń qatnası hám proporsional kesilispege baylanıslı máselelerdı sheshıw;*

√ *tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte gipotenuzaǵa túsirilgen biyikliktiń qásiyetlerinen paydalanıp, máseleler sheshe alıw;*

√ *kesindi xordalar kesindilerin hám kesiwshi tuwri sızıq kesindileriniń qásiyetlerinen paydalanıp, máseleler sheshiw.*

KESINDILER PROEKCIYASÍ HÁM PROPORCIONALLÍQ



A_1 — A noqattıńıń,
B_1 — B noqattıńıń,,
A_1B_1 — AB kesindinıń ***m* tuwrı sızıqtağı proekciyaları**

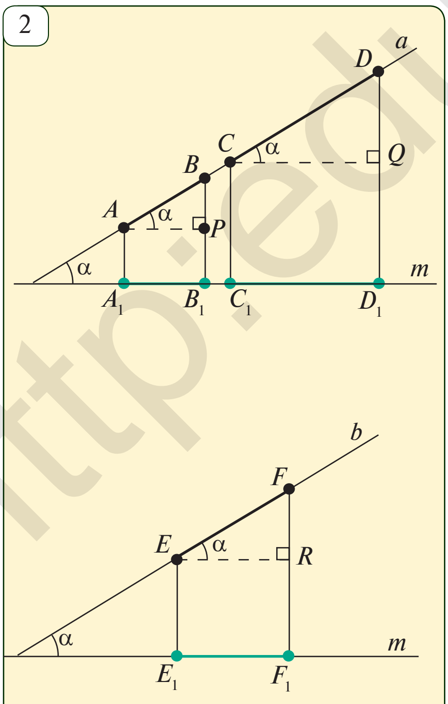
Jedellestiriwshi shınıǵıwlar

1. Kesindiler qatnasıı neni ańlatadı?
2. Qanday kesindiler proporcional delinedi?
3. Fales teoremasın aytıń.

Tegislikte m tuwrı sızıq hám AB kesindi berilgen bolsın. A hám B noqatlardan m tuwrı sızıqqa AA_1 hám BB_1 perpendikularlar tusiremiz (1-suwret). A_1B_1 kesindi AB kesindiniń m tuwrı sızıqtaǵı *proekciyası (sayası)* delinedi.

AB kesindiniń m tuwrı sızıqtaǵı A_1B_1 proekciyasın qurıw ámeli AB kesindini m tuwrı sızıqqa *proekciyalaw* delinedi.

***Teorema.* Bir tuwrı sızıqta yáki parallel tuwrı sızıqta jatatuǵın kesindiler berilgen bolsın. Olardıń tap bir tuwrı sızıqqa proekciyaları berilgen kesindilerge proporcional boladı.**



$a||b$,
A_1B_1 — AB nıń,
C_1D_1 — CD nıń,
E_1F_1 — EF nıń
m tuwrı sızıqtaǵı proekciyaları (2-súwret)

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Dáliyllew. a) Eger a hám b tuwrı sızıqqa parallel bolsa, $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, $EF = E_1F$ boladı hámde (1) teńlikler orınlı ekenligi anıq.

b) Eger de a hám b tuwrı sızıqlar m tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, A_1 hám B_1, C_1 hám D_1, E_1 hám F_1 noqatlar ustpe-ust tusedi. Sonıń ushın A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 kesindilerdi uzınlıǵı nólge teń boladı hám (1) teńlikler orınlanadı.

d) Endi basqa jaǵdaydı qaraymız. 2-suwrette suwretlengenindey, tuwrı múyeshli ABP, CDQ, EFR úshmúyeshliklerin jasaymız. Onda $a||b$ bolǵanı ushın, $\angle BAP=\angle DCQ=\angle FER$. Demek, *ABP, CDQ* hám *EFR* tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler uqsas.

Bunnan $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF}$ teńliklerin payda etemiz.

Teorema dáliyllendi.

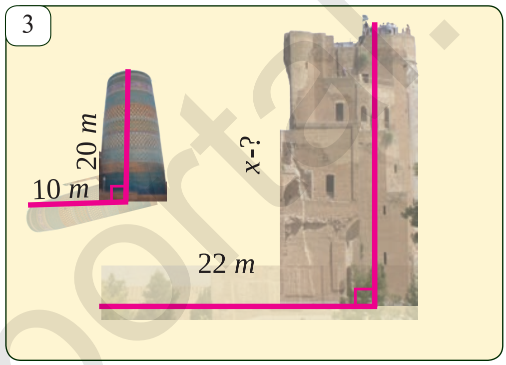
Másele. *AB* hám *CD* kesindiler parallel tuwrı sızıqlarda jatadı. Eger $AB=12$ *cm*, $CD=15$ *cm* hám *AB* kesindiniń bazı bir *m* tuwrı sızıqtağı proyekciyası 8 *cm* bolsa, *CD* kesindiniń sol *m* tuwrı sızıqtağı proekciyasın tabıń.

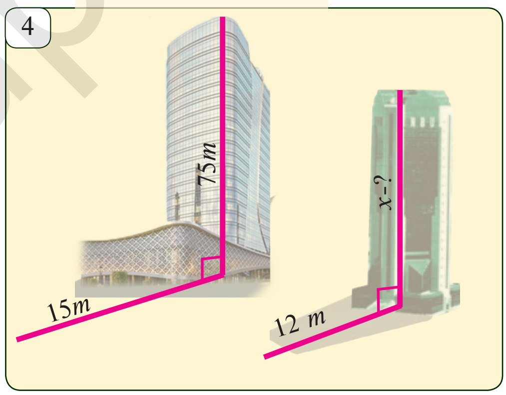
Sheshiw. *CD* kesindiniń *m* tuwrı sızıqtağı proekciyası *x* bolsın. Onda, dáliyllengen teorema hám másele shártinen paydalanıp proporciya dúzemiz:

$$\frac{x}{15}=\frac{8}{12}.$$

Bu teńlikten $x = 10$ bolıwın tabamız.

Juwabı: 10 *cm*.





Másele hám tapsırmalar

48.1. Kesindiniń berilgen tuwrı sızıqtağı proekciyası degen ne?

48.2. Bir tuwrı sızıqta yáki parallel tuwrı sızıqta jatqan kesindilerdiń dál basqa bir tuwrı sızıqqa proekciyaları berilgen kesindilerge proporcional ekenligin dáliylleń.

48.3. *a* hám b tuwrı sızıqlar arasındağı muyesh 45° ğa teń. *a* tuwrı sızıqta uzınlığı 10 *cm* bolgan *AB* kesindi alınğan. *AB* kesindiniń *b* tuwrı sızıqtağı proekciyasın tabıń.

48.4. *AB* kesindiniń ushları *l* tuwrı sızıqtan 9 *cm* hám 14 *cm* uzaqlıqta jatadı. Eger *AB* kesindi *l* tuwrı sızıqtı kesip ótpese hám $AB=13$ *cm* bolsa, AB kesindiniń *l* tuwrı sızıqtağı proekciyasın tabıń.

48.5. 3- hám 4-suwretlerdegi mağlıwmatlar tiykarında imaratlardıń biyikliklerin tabıń.

48.6. Tuwrı sızıq hám oğan parallel bolmağan kesindi sızıń. Kesindiniń tuwrı sızıqtağı proekciyasın jasań.

48.7. Koordinatalar tegisliginde *A*(2;3) hám *B*(3;-4) noqatlar belgilengen. *AB* kesindiniń koordinata kósherlerindegi proekciyalarınıń uzınlıqların tabıń.

48.8. *a* hám *b* tuwrı sızıqlar arasındağı muyesh α ekenligi malim. *a* tuwrı sızıqta *AB* kesindi alıngan. *AB* kesindiniń *b* tuwrı sızıqtağı proekciyasın tabıń.

48.9*. *AB* hám *CD* kesindilerdiń l tuwrı sızıqtağı proekciyaları óz ara teń. *AB* hám *CD* kesindilerdiń uzınlıqları haqqında ne aytıw mumkin. Mısallar keltiriń.

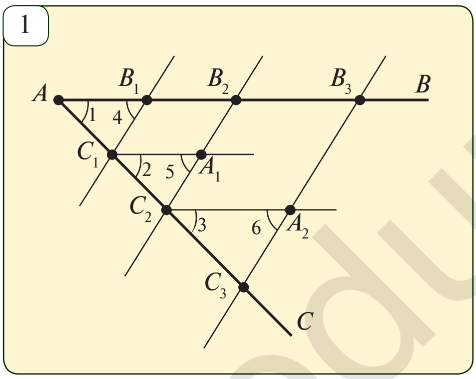
49 PROPORCIONAL KESINDILERDIN QÁSIYETLERI

Fales teoremasınıń ulıwmalastırılǵanınan ibarat bolǵan áhmiyetli qásiyettin dáliylleymiz.

Teorema. ***Múyeshtiń hár eki tárepin kesip ótken parallel tuwrı sızıqlar onıń táreplerinen proporcional kesindiler ajıratadı.***

$\angle BAC,\ B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ (*1-súwret*) $\Rightarrow \dfrac{AB_1}{AC_1}=\dfrac{B_1B_2}{C_1C_2}=\dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Dáliyl. C_1 hám C_2 noqatlardan AB ǵa parallel C_1A_1 hám C_2A_2 tuwrı sızıqlardı ótkeremiz. Ol jaúdayda birinshiden, $\angle 1=\angle 2=\angle 3$ boladı, sebebi olar óz-ara parallel bolǵan AB, C_1A_1 hám C_2A_2 tuwrı sızıqlardı AC tuwrı sızıq keskende payda bolǵan sáykes muyesh boladı. Ekinshiden, $\angle 4=\angle 5=\angle 6$, sebebi olar tárepleri parallel bolǵan muyeshler boladı.



Demek, ushmuyeshlikler uqsaslıǵınıń MM belgisine kóre, $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta C_1A_1C_2 \backsim \Delta C_2A_2C_3$ boladı.

Ol halda, $$\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{C_1A_1}{C_1C_2}=\frac{C_2A_2}{C_2C_3} \qquad (1)$$

teńliklerdi payda etemiz.

Bunnan tısqarı, $B_1C_1A_1B_2$ hám $B_2C_2A_2B_3$ tórtmuyeshlikler parallelogramm, sebebi

$B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ — shártke kóre;

$AB \| C_1A_1 \| C_2A_2$ — jasawǵa kóre.

Sonıń ushın, bul paralleogrammlardıń qarama-qarsı tárepleri óz-ara teń boladı:

$$C_1A_1=B_1B_2 \quad \text{hám} \quad C_2A_2=B_2B_3. \qquad (2)$$

(1) hám (2) tenliklerden $\dfrac{AB_1}{AC_1}=\dfrac{B_1B_2}{C_1C_2}=\dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$ bolıwı kelip shıǵadı.

Teorema dáliylendi.

Ámeliy shınıǵıw. Kesindini berilgen qatnasta bólıw.

Berilgen a kesindiniń tórt bólekke sonday bóliń, bóleklerdiń óz ara qatnası $m{:}n{:}l{:}k$ sıyaqlı bolsın.

Bunıń ushın tómendegilerdi qádembe-qádem orınlaymız:

1-qádem. Qálegen súyir múyesh sızıp, onıń bir tárepine uzınlıqları $OA=m$, $AB=n$, $BC=l$ hám $CD=k$ ǵa teń bolǵan kesindilerdi 2-súwrette kórsetilgenindey qılıp, izbe-iz qoyıp shıǵamız.

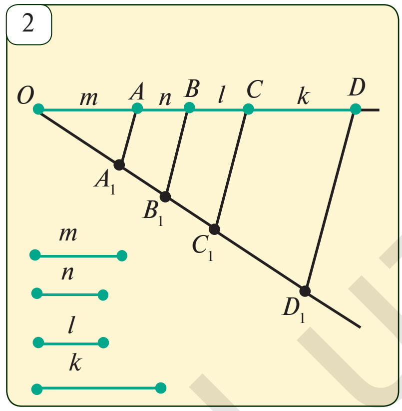
2-qádem. Muyeshtiń ekinshi tárepine berilgen a kesindige teń OD_1 kesindini qoyamız.

3-qádem. D hám D_1 noqatlardı tutastıramız.

4-qádem. A, B, C noqatlar arqalı DD_1 ge parallel AA_1, BB_1 hám CC_1 kesindilerdi ótkeremiz.

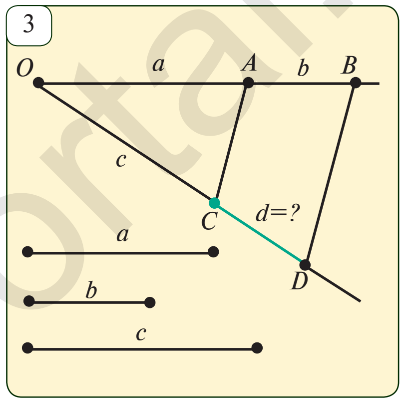
Joqarıdaǵı teoremaǵa kóre, berilgen A_1, B_1, C_1 hám D_1 noqatlar menen $m{:}n{:}l{:}k$ qatnasta bólingen boladı.

Tapsırma: Bul tastıyıqlawdı óz betińizshe dáliylleń.



Ámeliy tapsırma. Tórtinshi proporcional kesindini jasań.

a, b hám *c* kesindiler berilgen. *a* hám *b* kesindiler *c* hám *d* kesindilerge proporcional, yaǵnıy $a{:}b=c{:}d$ ekenligi málim. d kesindini jasań. (*3-súwret).*



1-qádem. Qálegen súyir múyesh sızıp, onıń bir tárepine $OA=a$ hám $AB=b$ kesindilerdi 3-súwrette kórsetilgenindey qoyamız.

2-qádem. Ekinshi tarepine bolsa $OC=c$ kesindini qoyamız.

3-qádem. A hám C noqatlardı tutastıramız.

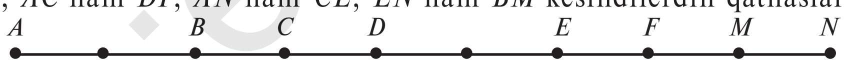
4-qádem. B noqattan AC ǵa parallel BD tuwrı sızıq ótkeremiz.

Tapsırma: CD izlenip atırǵan d kesindi bolıwın tiykarlań.

Másele hám tapsırmalar

49.1. Uzınlıǵı 42 *cm* bolǵan kesindi berilgen. Onı a) 5:2; b) 3:4:7; d) 1:5:1:7 qatnastaǵı bólekshelerge bóliń.

49.2. Súwrette hár bir bólek birlik kesindiden ibarat bolsa, AB hám CD, EF hám MN, AC hám DF, AN hám CE, EN hám BM kesindilerdiń qatnasların tabıń.



49.3. *m, n* kesindiler *l* hám *k* kesindilerge proporsional. Eger a) $m=4$ *cm*, $n=3$ *cm* hám $l=8$ *cm*; b) $m=2$ *cm*, $n=3$ *cm* hám $l=7$ *cm* bolsa, *k* — tórtinshi kesindini jasań hám uzınlıǵın tabıń.

49.4. Tórtmuyeshliktiń perimetri 54 *cm* hám tárepleri 3:4:5:6 sıyaqlı qatnasta bolsa, onıń hár bir tárepin anıqlań.

49.5. Tórtmuyeshliktiń múyeshleri óz ara 3:4:5:6 sıyaqlı qatnasta bolsa, onıń kishi múyeshi nege teńligin tabıń.

49.6. Uzınlıǵı 4, 5 hám 6 bolǵan kesindiler berilgen. Uzınlıǵı 4,8 ge teń kesindi jasań.

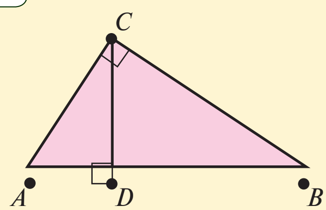
49.7*. Perimetri 60 *cm* bolǵan tórtmuyeshliktiń bir tárepi 15 *cm*, qalǵan tárepleri bolsa 2:3:4 qatnasta ekenligi málim. Onıń ulken tárepin tabıń.

50 TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKTEGI PROPORSIONAL KESINDILER

Qásiyet. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshi ushınan tusirilgen biyikligi onı ózine uqsas eki úshmúyeshlikke ajıratadı.

ΔABC, $\angle C=90°$, CD — *biyiklik (1-súwret)* ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$

1



Dáliyllew. ABC hám ACD úshmúyeshlikler tuwrı múyeshli bolıp, A múyesh bolsa olar ushın ulıwma. Demek, $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Sonday-aq, ΔABC hám ΔCBD tuwrı muyeshli bolıp, olar ushın $\angle B$ ulıwma. Demek, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$.

1-suwrette súwretlengen AD hám DC kesindiler mas ráwishte AC hám BC katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları dep júritiledi.

Anıqlama. Eger a, b hám c kesindiler ushın $a:b=b:c$ bolsa, b kesindi a hám c kesindiler arasındağı *orta proporcional kesindi* dep ataladı.

Orta proporcionallıq shártin $b^2=ac$ yaki $b=\sqrt{ac}$ kórinisinde jazıw múmkin.

Joqarıda dáliyllengen qásiyetke tiykarlanatuğın bolsaq, orta proporcional kesindiler haqqındağı tómendegi teoremalar ańsat dáliyllenedi:

1-teorema. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshi ushınan tusirilgen biyiklik katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları arasında orta proporcional boladı.

Haqıyqattan da, dáliyllengen qásiyetke kóre, $\Delta ACD \backsim \Delta CBD$. Bunnan,

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2=AD\cdot BD \Rightarrow CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

2-teorema. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshi ushınan tusirilgen biyiklik katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları arasında orta proporcional boladı.

Haqıyqattan da, dáliyllengen qásiyetke kóre, $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Bunnan,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AC=\sqrt{AB\cdot AD}.$$

Tap usıǵan uqsas $BC=\sqrt{BD\cdot AB}$ ekenligin dáliyllew múmkin.

Másele. Katetleri 15 cm hám 20 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń kishi katetiniń gipotenuzadağı proekciyasın tabıń.

ΔABC, $\angle C=90°$, CD — *biyiklik*, $AC=15$ cm, $BC=20$ cm (*1-súwret*) ⇒ $AD=?$

Sheshiw. 1) Pifagor teoremasınan paydalanıp, úshmúyeshlik gipotenuzasın tabamız: $AB^2=AC^2+BC^2=15^2+20^2=625$, yaǵnıy $AB=25$ *cm*.

2) Ekinshi teoremadan paydalanıp, AD nı tabamız:

$$AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{15^2}{25}=9\ (cm).$$

Juwabı: 9 *cm*.

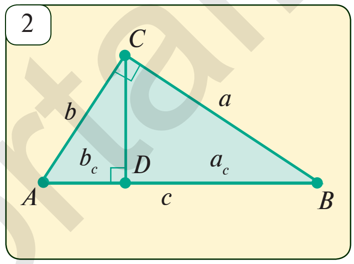
Ekinshi teoremadan nátiyje sıpatında Pifagor teoremasınıń Pifagor ózi jazıp qaldırǵan dáliyllew kelip shıǵadı. (1-súwret). 2-teoremaga kóre,

$$\left.\begin{aligned} AC^2&=AD\cdot AB\\ BC^2&=BD\cdot AB\end{aligned}\right\}\Rightarrow AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=AB\cdot(\underbrace{AD+BD}_{AB})=AB\cdot AB=AB^2.$$

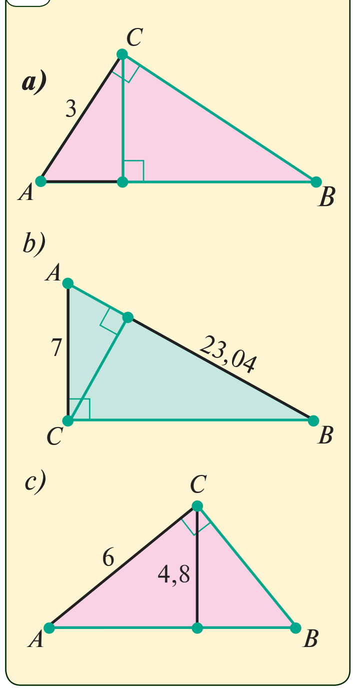
Sonday etip, $AC^2+BC^2=AB^2$.

Másele hám tapsırmalar

2



3



50.1. Dáliyllen (*2-súwret*):

a) $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$;

b) $b^2=b_c\cdot c$, $a^2=a_c\cdot c$; d) $h_c^2=a_c\cdot b_c$.

50.2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına tusirilgen biyikligi gipotenuzanı 9 *cm* hám 16 *cm* ge teń kesindilerge bóledi. Úshmúyeshlik tárеplerin tabıń.

50.3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 15 *cm* ge, bir kateti bolsa 9 *cm* ge teń. Ekinshi katettiń gipotenuzadaǵı proekciyasın tabıń.

50.4. 3-súwrettegi maǵlıwmatlar tiykarında ABC úshmúyeshlik táreplerin tabıń.

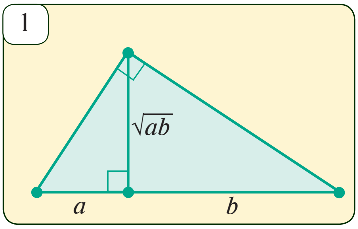
50.5*. Katetlerdiń qatnası 4:5 sıyaqlı bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik katetleriniń gipotenuzadaǵı proekciyaları qatnasın tabıń.

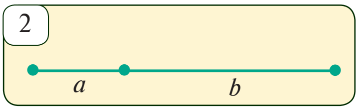
50.6*. Katetlerdiń qatnası 3:2 sıyaqlı bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik berilgen. Katetlerdiń gipotenuzadaǵı proekciyalarınan biri ekinshisinen 6 *cm* ge uzın. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

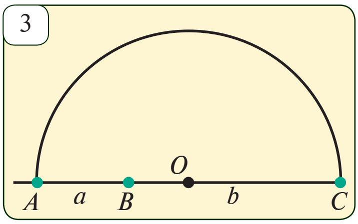
50.7. Katetlerdiń gipotenuzadaǵı proekciyaları 2 *cm* hám 18 *cm* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

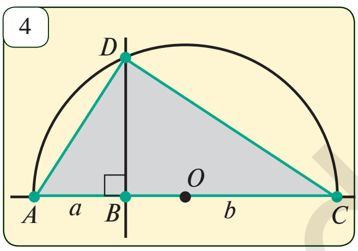
50.8*. ABC úshmúyeshlikte $\angle C=90°$, CD — biyiklik, CE — bissektrisa hám $AE:EB=2:3$. a) $AC:BC$; b) $S_{ACE}:S_{BCE}$; d) $AD:BD$ qatnasın tabıń.

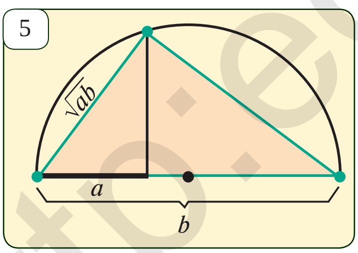
51 BERILGEN EKI KESINDIGE ORTA PROPORCIONAL KESINDINI JASAW











Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshinen tusirilgen biyikligi gipotenuzanı a hám b kesindilerge bólse, biyiklik $\sqrt{ab}$ ga teń bolıwın kórgen edik (*1-súwret*).

Demek, berilgen eki kesindige orta proportsional kesindini jasaw ushın:

1) gipotenuzasınıń uzınlıǵı $a+b$ ǵa teń (*2-súwret*);

2) tuwrı múyeshinen tusirilgen biyikligi sol gipotenuzanı a hám b bóleklerge bóletuǵın tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasaw jetkilikli.

Bunıń ushın tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayı gipotenuzanıń ortasında jaylasaqanlıǵınan paydalanamız (*3-súwret*).

Jasaw:

1) Tuwrı sızıq sızamız hám onda $AB=a$ hám $BC=b$ bolatuǵın etip A, B hám C noqatlardı belgileymiz (*3-súwret*).

2) AC kesindiniń ortası — O noqattı tabamız. Orayı O noqatta bolǵan AC diametrli yarım sheńber jasaymız (*3-súwret*).

3) B noqattan AC tuwrı sızıq perpendikulyar tuwrı sızıq ótkeremiz (*4-súwret*). Bul tuwrı sızıq yarım sheńberdi D noqatta kesip ótken bolsın. Onda ΔADC — tuwrı múyeshli úshmúyeshlik, $BD=\sqrt{ab}$ — biz jasawımız zárur bolǵan kesindi boladı.

Jasaw orınlandı.

Orta proporsional kesindi jasawda tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń kateti gipotenuza menen sol katettiń gipotenuzadaǵı proekciyası arasında orta proporcional ekenliginen paydalanıw da mumkin (*5-súwret*).

Másele hám tapsırmalar

51.1. Uzınlıǵı a hám b bolǵan kesindiler berilgen. Uzınlıǵı $\sqrt{ab}$ bolǵan kesindini jasań.

51.2. Uzınlıǵı a hám b ǵa teń kesindiler berilgen. Pifagor teoremasınan paydalanıp, a) $\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\sqrt{a^2-b^2}$ bolǵan kesindini jasań.

51.3. Uzınlıǵı 1 ge ten kesindi berilgen. Uzınlıǵı a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{6}$; f) $\sqrt{18}$; g) $\sqrt{30}$ bolǵan kesindilerdi jasań.

51.4. 6-súwrettegi maǵlıwmatlar tiykarında ABC úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

51.5. Sheńberdegi C noqattan AB diametrge CD perpendikulyar tusirilgen. Eger $CD=12$ cm, $AD=24$ cm bolsa, dóńgelek maydanın tabıń.

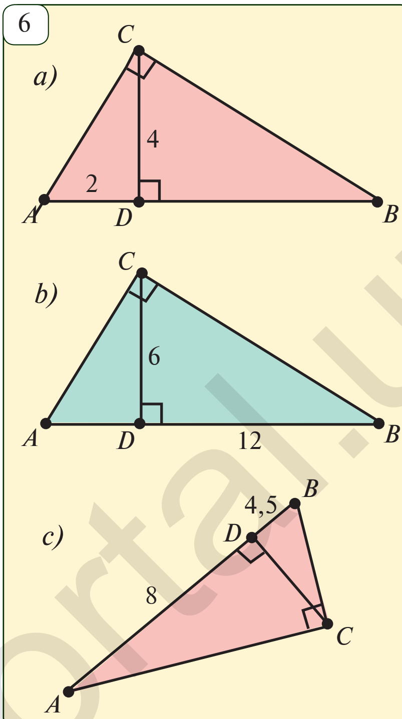
51.6. Aldıńǵı máseledegi ABC úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

51.7. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshiniń bissektrisası gipotenuzanı 5:3 qatnasta bóledi. Tuwrı múyesh ushınan tusirilgen biyikliktiń gipotenuzadan ajıratqan kesindileri qatnasın tabıń.

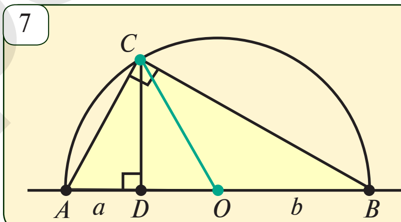
51.8. Radiusı 8 cm ge teń dóńgelekke bir múyeshi $30°$ bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ishley sızılǵan. Dóńgelektiń úshmúyeshlikten sırtındaǵı bólegi 3 segmentten ibarat. Áne sol segmentler maydanların tabıń.

51.9*. 7-súwrette $AD=a$, $DB=b$, demek, $OC=\frac{a+b}{2}$ = (O— sheńber orayı). Súwretten paydalanıp $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ teńsizlikti dáliylleń.

6



7

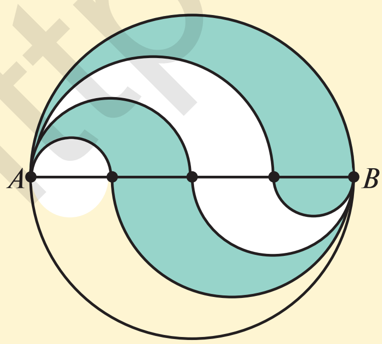


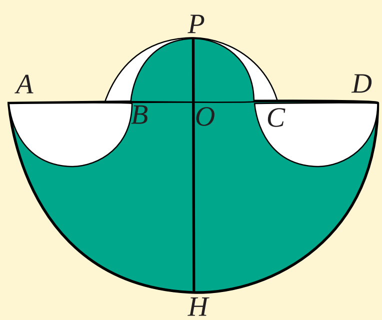
Qızıqlı máseleler

1. Sheńberdiń AB diametri tort teń bólekke bólindi hám 8-súwrette kórsetilgenindey yarım sheńberler jasaldı. Eger $AB=d$ bolsa, súwrette boyap kórsetilgen hár bir figura maydanın esaplań.

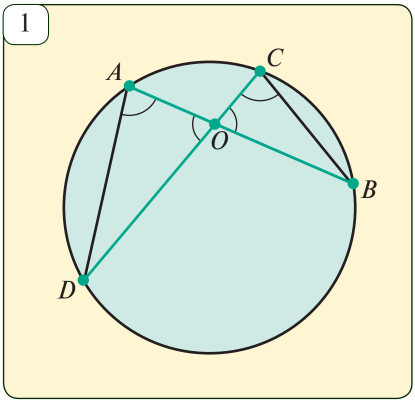
2. 9-súwrette AB hám CD kesindiler teń. O noqat AD kesindiniń ortası. AB, CD, AD hám BC kesindiler yarım dóńgeleklerdin diametri. Bul yarım dóńgelekler menen shegaralangan figuranıń maydanı diametri PH ga teń dóńgelek maydanına tenligin dáliylleń. Bul jerde PH kesindi AD kesindiniń ortası O noqatqa ótkizilgen perpendikulyar.

8





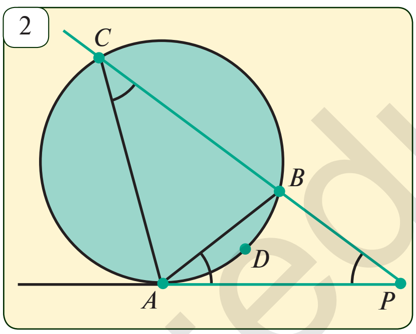
1-teorema. ***Sheńberdiń AB hám CD xordaları O noqatta kesilisse, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ teńlik orınlı boladı.***



Dáliyllew. AB hám CD xordalar (*1-súwret*) kórsetilgen tártipte jaylasqan bolsın. Ushların AD hám BC xordalar menen tutastıramız. Sonda BAD hám BCD múyeshler bir doǵaga tireledi, demek, $\angle BAD = \angle BCD$. Bizge belgili, $\angle AOD = \angle BOC$. Bul eki teńlikten, MM belgige kóre AOD hám COB úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı kelip shıǵadı. Uqsas úshmúyeshlikler sáykes tárepleri bolsa proporcional: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$ yaki $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Teorema dáliyllendi.

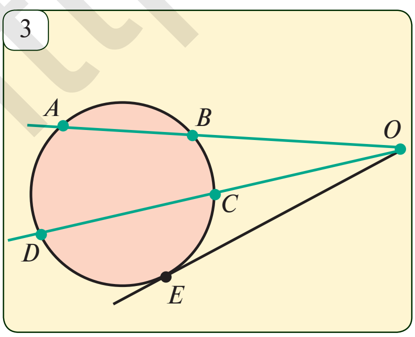
2-teorema. ***Sheńber sırtındaǵı P noqattan sheńberge PA urınba (A − urınıw noqatı) hám sheńberdi B hám C noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı sızıq ótkizilgen bolsa, $PA^2 = PB \cdot PC$ boladı.***



Dáliyllew. ABP hám CPA úshmúyeshliklerdi qaraymız (*2-súwret*). Onda, $\angle C = \frac{ADB}{2} = \angle BAP$ hámde $\angle P$ — bul úshmúyeshlikler ushın ulıwma múyesh. Demek, ABP hám CPA úshmúyeshlikler eki múyeshi boyınsha uqsas. Bundan, $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$ yaki $PA^2 = PB \cdot PC$.

Teorema dáliyllendi.

Másele. A, B, C hám D noqatlar sheńberdi AB, BC, CD hám AD doǵalarga ajıratadı. Eger AB hám DC nurlar O noqatta kesilisse, ol jaǵdayda $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ teńlik orınlı bolıwın dáliylleń.



Sheshiwi. Másele shártine sáykes sızılma sızamız (*3-súwret*) hám O noqattan OE urınba ótkeremiz. Onda, 2-teoremaga kóre,

$$\left.\begin{array}{l} OB \cdot OA = OE^2 \\ OC \cdot OD = OE^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Másele hám tapsırmalar

52.1. 4-súwrette x penen belgilengen belgisiz kesindini tabıń.

52.2. A noqattan sheńberge AB urınba (B — urınıw noqatı) hám sheńberdi C hám D noqatlarda kesetuǵın kesiwshi ótkerilgen. Eger
a) $AB=4$ cm, $AC=2$ cm bolsa, AD kesindini;
b) $AB=5$ cm, $AD=10$ cm bolsa, AC kesindini;
d) $AC=3$ cm, $AD=2{,}7$ cm bolsa, AB kesindini tabıń.

52.3. Shenberge $ABCD$ tórtmúyeshlik ishley sızılǵan. AB hám DC nurlar O noqatta kesisedi. Eger
a) $AO=10$ dm, $BO=6$ dm, $DO=15$ dm bolsa, OC kesindini;
b) $CD=10$ dm, $OD=8$ dm, $AB=4$ dm bolsa, OB kesindini tabıń.

52.4. Sheńberdiń AB diametri hám bul diametrge perpendikular CD xordası E noqatta kesilisedi. Eger $AE=2$ cm, $EB=8$ cm bolsa, CD xordanı tabıń.

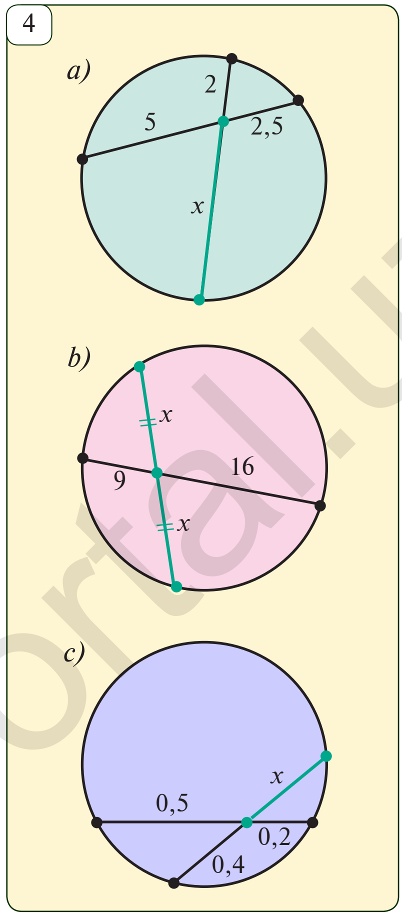
52.5. AB hám CD kesindiler O noqatta kesilisedi. Eger $AO{\cdot}OB=BO{\cdot}OD$ bolsa, A, B, C hám D noqatlardıń bir sheńberde jatıwın dáliylleń.

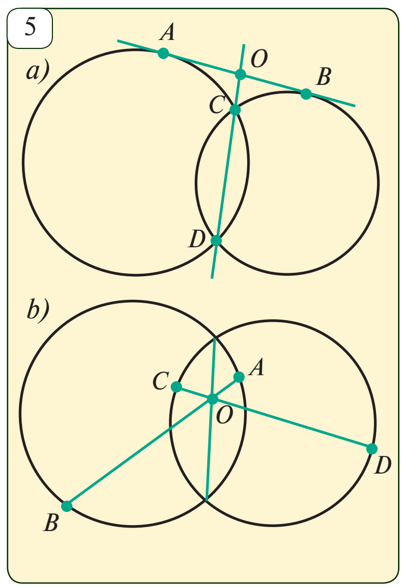
52.6. Radiusı 13 dm bolǵan sheńber orayınan 5 dm uzaqlıqta P noqat alınǵan. P noqattan uzınlıǵı 25 dm bolǵan AB xorda ótkerilgen. AP hám PB kesindilerdi tabıń.

52.7. 3-súwrette $AO{\cdot}OB=CO{\cdot}OD$ teńlikti AOD hám BOC úshmúyeshliklerdiń uqsas ekenliginen paydalanıp dáliyllen.

52.8*. 5-súwrette maǵlıwmatlar tiykarında $AO{\cdot}OB=CO{\cdot}OD$ teńlikti dáliylleń.

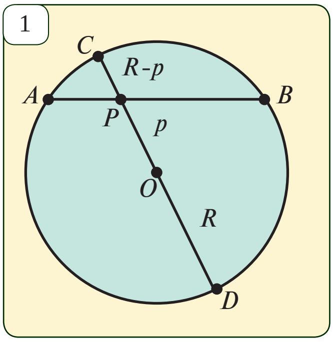
52.9*. Eki sheńber C noqatta urınadı. AB tuwrı sızıq birinshi sheńberge A noqatta, ekinshi sheńberge bolsa B noqatta urınadı. $\angle ACB=90°$ ekanligini isbotlang.





53 ÁMELIY TAPSÍRMA HÁM MÁSELELER SHESHIW

Aldıńġı sabaqta sheńber kesilisiwshileri hám xordalarınıń qásiyetlerin dálillegen edik. Endi bul qásiyetlerdiń ayırım jaġdaylari menen tanısamız.



1-másele. P noqatı R radiuslı sheńberdiń ishki oblastında hám orayınán p aralıqtá jaylasqan bolsın. Onda P noqatınan ótiwshi qálegen AB xorda ushın

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \tag{1}$$

teńligi orınlı bolatuġınlıġın dálilleń.

Dálillew. P noqáti arqalı sheńberdiń CD diámetrin júrgizemiz. Onda, $PC=R-p$, $PD=R+p$ (1-súwret). Kesip ótiwshi xordalar haqqındaġı teorema boyınshá,

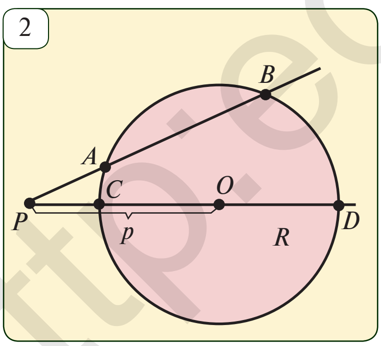
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R-p)(R+p) = R^2 - p^2.$$

(1) teńlik dáliyllendi.

2-másele. Radiusı 6 *cm* bolġan sheńberdiń O orayınan 4 *cm* qáshiqliqtá P noqatı alındı. P noqati arqalı AB xorda júrgiziledi. Eger AP =2 *cm* bolsa, PB kesindisin tabıń.

Sheshiliwi. Másele shárti boyınsha, $R=6$ *cm*, $d=4$ *cm*, $AP=2$ *cm*. Óul jaġdayda (1) teńlik boyınsha, $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Bunnan, PB =10 *cm*.

Juwabı: PB =10 *cm*.



3-másele. R radiuslı sheńberdiń sırtqı oblastındaġı P noqat sheńber orayınan p aralıġındá jaylasqan bolsın. Onda P noqat arqalı ótiwshi hám sheńberdi A hám B noqatlarda kesip ótiwshi qálegen tuwrı sızıq ushın

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \tag{2}$$

teńligi orınlı bolıwın dáliylleń.

Dálillew. Sheńberdiń O orayı arqalı ótiwshi PO tuwrısı sheńber menen C hám D noqatlarda kesilissin (2-súwret). Onda, shárt boyınsha, $PC=p-R$, $PD=p+R$. Sheńberdiń sırtqı oblastındaġı noqattan júrgizilgen kesiwshiler haqqındaġı teorema boyınsha,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p-R)(p+R) = p^2 - R^2.$$

Solay etip (2) teńlik dáliyllendi.

4-másele. Radiusi 7 *cm* bolǵan sheńberdiń orayınan 13 *cm* qashıqlıqtaǵı P noqatınan ótiwshi tuwrı sheńberdi A hám B noqatlarda kesip ótedi. Eger $PA=10$ *cm* bolsa, AB xordanın tabıń.

Sheshiliwi. Shárt boyınsha, $R=7$ *cm*, $p=13$ *cm*. Onda, (2) formulaǵa kóre,

$$PA\cdot PB=p^2-R^2=13^2-7^2=169-49=120.$$

Bunnan, $PB=\dfrac{120}{PA}=\dfrac{120}{10}=12$ (*cm*). Demek,

$AB=PB-PA=12-10=2$ (*cm*). *Juwabı:* 2 *cm*.

Másele hám tapsırmalar

53.1. Radiusi 5 *cm* bolǵan sheńber orayınan 3 *cm* qashıqlıqta P noqatı alınǵan. AB xorda P noqatı arqalı ótedi. Eger $PA=2$ *cm* bolsa, AB xorda uzınlıǵın tabıń.

53.2. Radiusı 5 *m* bolǵan sheńber orayınan 7 *m* qashıqlıqta P noqatı alınǵan. P noqatı arqalı ótiwshi tuwrı sheńberdi A hám B noqatında kesip ótedi. Eger $PA=4$ *m* bolsa, AB xorda uzınlıǵın tabıń.

53.3. 3-súwrettegi maǵlıwmatlar tıykarında x penen belgilengen kesindini tabıń (O—sheńber orayı).

53.4. 4-súwretten paydalanıp, máseleni sheshiń.Onda,

a) $PC=5$ *dm*, $OD=7$ *dm*, $AB=2$ *dm*, $PA=?$

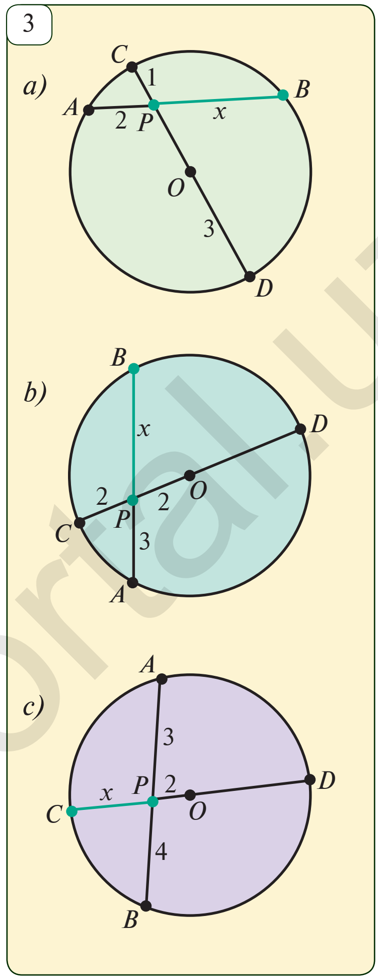
b) $PA=5$ *dm*, $AB=4$ *dm*, $PC=3$ *dm*, $OD=?$

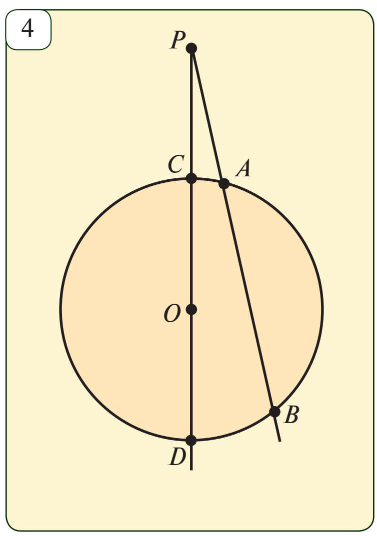
53.5. Sheńberdiń AB =7 *cm* hám CD =5 *cm* xordaları P noqatında kesilisedi. Eger $CP:PD=2:3$ bolsa, P noqatı AB xordasın qanday qatnasta bóledi?

53.6. Sheńberdiń C noqatınan AB diametrge CD perpendikulyarı túsirilgen. Eger $AD=2$ *cm*, $DB=18$ *cm* bolsa, CD kesindisin tabıń.

53.7*. Sheńberge ishley sızılǵan $ABCD$ tórtmúyeshliktiń diagonallari K noqatında kesilisedi. Eger $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ hám $CK:KA=1:2$ bolsa, AD kesindisin tabıń.

53.8*. Sheńberge ishley sızılǵan $ABCD$ tórtmúyeshlikte $AB:DC=1:2$ hám $BD:AC=2:3$ bolsa, $DA:BC$ qatnasin tabıń.





I. Testler

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına túsirilgen biyikligi haqqında nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:
A. Katetlerinen kishi;
B. Úshmúyeshlikti eki uqsas úshmúyeshliklerge ajıratadı;
D. Katetleriniń gipotenuzadağı proekciyaları arasında orta proporcional;
E. Gipotenuzanıń yarımına teń.

2. AB hám CD xordalar O noqatında kesilisedi. Nadurıs tastıyıqlawdı tabıń:
A. $\angle DAB = \angle DCB$; B. AOD hám COB úshmúyeshlikler uqsas;
D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AO = CO$.

3. Durıs tastıyıqlawdı tabıń:
A. Teń kesindilerdiń proekciyalari da teń boladı;
B. Úlken kesindiniń proekciyası úlken boladı;
D. Bir tuwrı sızıqtağı teń kesindilerdiń proektciyalari teń boladı;
E. Proektciya uzınlığı proekciyalanıwshı kesindi uzınlığına teń boladı.

4. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına túsirilgen biyiklik onı eki úshmúyeshlikke bóledi. Bul úshmúyeshlikler:
A. Teń; B. Teńles; D. Uqsas; E. Teń qaptallı.

5. Uzınlığı *a* hám *b* bolğan kesindilerdiń orta proportcionalı nege teń?
A. $a+b$; B. $\sqrt{ab}$; D. $\frac{a+b}{2}$; E. $a:b$.

6. ABCD tórtmúyeshligi O oráylı sheńberge ishley sızılğan. Nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:
A. $\Delta AOB \backsim \Delta COD$; B. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

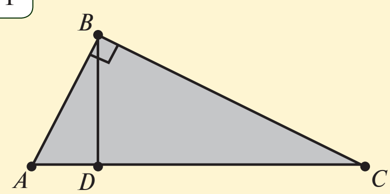
II. Máseleler.

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik katetleriniń qatnası 3:4 ke teń. Bul úshmúyeshliktiń gipotenuzası 50 *cm*. Úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshi tóbesinen túsirilgen biyikligi gipotenuzadan qanday uzınlıqtağı kesindiler ajıratadı?
2. Sheńberdiń AB hám CD xordalarıta E noqatında kesilisedi. Eger $AE=5$ *cm*, $BE=2$ *cm* hám $EC=2{,}5$ *cm* bolsa, ED nı tabıń.
3. Radiusı 6 *m* bolğan sheńberdiń orayınan 10 *m* qashıqlıqta K noqatı alındı hám K noqatınan sheńberge urınba júrgizildi. Urınbanıń urınıw noqatı P menen K noqatı arasındağı aralıqtı tabıń.
4. ABC úshmúyeshliginde $\angle C=90^\circ$ hám CD biyikligi 4,8 *dm*. Eger $AD=3{,}6$ *dm* bolsa, AB tárepin tabıń.
5. Sheńberdiń AB hám CD xordaları O noqatta kesilisedi. Eger $AO=6$, $OB=4$ ham $CO=3$ bolsa, OD kesindisin tabıń.

6. Sheńberde *A, B, C, D* noqatları belgilengen, *BA* hám *CD* nurları O noqatında kesilisedi. Eger OA=5, AB =4, OD =6 bolsa, *DC* xordasın tabıń..
7. Sheńberge B noqatında urınıwshı tuwrısınıń ústinen A noqatı belgilendi. Eger AB = 12 hám A noqatınan sheńberge shekem eń qısqa aralıq 8 bolsa, sheńber radiusın tabıń.
8. Yarım sheńberdegi C noqatınan AB diametrge túsirilgen CD perpendikulyar AB kesindide 4 hám 9 ǵa teń kesindilerdi ajıratadi. CD kesindisin tabıń.
9. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń biyikligi gipotenuzanı 3 dm hám 12 dm ge teń kesindilerge bóledi. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
10. Radiusı 5 cm bolǵan O orayına iye sheńberdiń AB xordasında D noqatı alınǵan. Eger AD =2 cm, DB =4,5 cm bolsa, OD kesindisin tabıń.
11. Radiusı 5 cm bolǵan O orayına iye sheńberdi A hám B noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı sızıqta P noqatı alınd. Eger *PA*=5 *m*, *AB* =2,8 m bolsa, *OP* aralıǵın tabıń.
12. Tórt parallel tuwrı berilgen. Olar múyeshtiń tareplerin *A* hám A_1, *B* hám B_1, *C* hám C_1 hám de *D* hám D_1 noqatlarında kesip ótedi. Bunda A,B,C,D noqatlar múyeshtiń bir tárepinde jatsa. Eger *AB* =8, *CD* =12 hám C_1D_1=9 bolsa, A_1B_1 kesindisin tabıń.
13. Sheńber múyeshke ishley sızılǵan. Eger múyesh ushınan sheńberge shekem bolǵan aralıq radiusqa teń bolsa, múyeshtiń shamasın tabıń.
14. Sheńberge *AB* diametriniń *B* ushınan *BC* urınba hám *AC* kesiwshi júrgizilgen. *AC* kesiwshisi sheńber menen *D* noqatında kesilisedi. Eger *AD* = *DC* bolsa, *CBD* múyeshin tabıń.
15. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleriniń qatnası 2:3 túrinde. Úshmúyeshliktiń gipotenuzaǵa túsirilgen biyiklik onı eki ushmúyeshlikke bóledi. Olardıń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

III. Ózińizdi sınap kóriń (úlgi ushın baqlaw jumısı)

1. Sheńber sırtındaǵı noqattan sheńberge urınba ótkizilgen. Bul noqattan sheńberge shekem bolǵan eń qısqa aralıq 2 cm ge, urınıw noqatına shekem bolǵan aralıq bolsa 6 cm ge teń. Sheńberdiń radiusın tabıń.
2. ΔABC tuwrı múyeshli, $AD = 9\ dm,\ BD = 16\ dm$ bolsá, usı úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber rádiusın esaplań (*1-súwret*).
3. Noqattan tuwrıǵı eki qıya júrgizilgen. Eger qiyalar 1:2 qatnasta bolıp, olardıń proektciyalari 1 m hám 7 m bolsa, qıyalardıń uzınlıqların tabıń.
4.* (Qosımsha másele). PQ hám onnan uzın ET kesindileri berilgen. Sonday ABCD tórtmúyeshligin jasań, nátiyjede AB =BC=PQ;

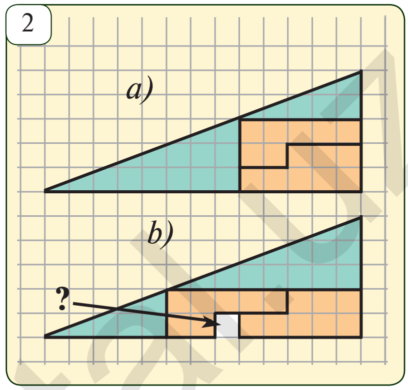
1


BD = ET bolıp, diagonalları kesilisetuǵın O noqatı ushın AO·OC =BO·OD teńligi orınlı bolsın.

Qızıqlı másele

Úshmúyeshlik 2-a súwrette kórsetilgenindey etip, tórt bólekke bólingen hám 2-b súwrette kórsetilgendey etip qayta jıynalǵan. Artıq kvadrat qalay payda bolǵanın aytıp beriń?

2

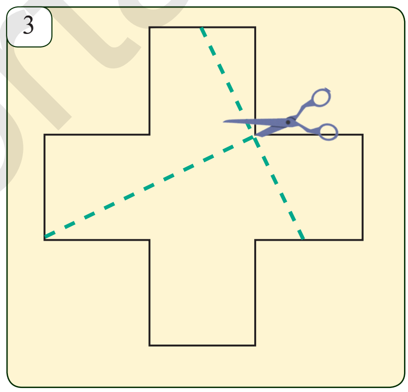


(Yunon) Grek

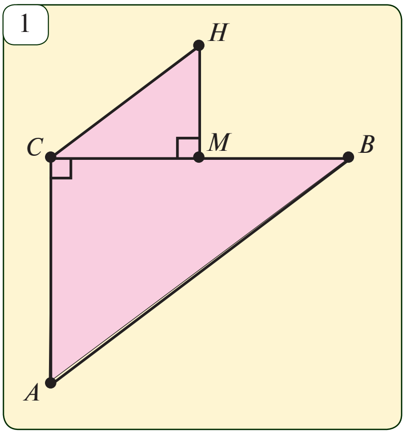
Eramızdan aldıńǵı 500-jıllarda payda bolǵan bul forma (*3-súwret*). Ómirdiń belgisi sıpatında nan ústinde sızılǵan.

Bul formanı qalıń qaǵazǵa sızıp alıp onı súwrette kórsetilgen sızıqlar boylap qırqıń. Payda bolǵan bóleklerden kvadrat jasaw múmkinshiligine isenim payda etiń.

3



JUWMAQLAWSHI BAQLAW JUMISI



I. Úlgi shın baqlaw jumısı

1. $ABCD$ parallelogrammda $\angle A=45°$, $AD=4$. Parallelogrammniń AB tárepiniń dawamına $\angle PDA=90°$ qa teń bolatuǵın BP kesindi qoyıldı. BC hám PD kesindiler T noqatında kesilisedi, bunda $PT:TD=3:1$.

a) $\Delta BPT \backsim \Delta CDT$ ekenligin dálilleń, bul úshmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

b) $ABCD$ parallelogrammnıń maydanın tabıń.

d) AB hám TD kesindileriniń ortaların tutastırıwshı kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

e) $\overline{AB}$ vektorni $\overline{CA}$ hám $\overline{TB}$ vektorları arqalı ańlatıń.

f) CAD múyeshtiń sinusin tabıń.

2. (*Qosımsha*) 1-súwrette $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC=BC$, $MH=0{,}5AC$ bolsa, $AB \| CH$ ekenligin dáliylleń.

II. Baqlaw jumısı ushın kórsetpeli testler

1. Eger tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń biyikligi gipotenuzasın 6 *cm* hám 54 *cm* kesindilerge ajıratsa, bul úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
   A) 648 cm^2; B) 324 cm^2; D) 1080 cm^2; E) 540 cm^2.

2. C noqatınan ótkerilgen bir kesiwshi sheńberdi A hám B, ekinshisi bolsa D *hám* E noqatlarında kesip ótedi. Eger $CD=18$ *cm*, $CB=8$ *cm*, $CD=8$ *cm* bolsa, DE kesindisiniń uzınlıǵın tabıń:
   A) 17 *cm*; B) 1 *cm*; D) 9 *cm*; E) durıs juwap kórsetilmegen.

3. Eger $A(-5;2\sqrt{3})$, $B(-4;2)$, $C(-2;\sqrt{3})$, $D(0;2)$ bolsa, $ABCD$ tórtmúyeshliginiń diagonalları arasındaǵı múyeshti tabıń:
   A) 30°; B) 60°; D) 90°; E) durıs juwap kórsetilmegen.

4. Eger parallelogrammnıń diagonalları 10 *cm* hám $8\sqrt{2}$ *cm* ge teń hám olar arasındaǵı múyesh 45° bolsa, parallelogrammnıń táreplerin tabıń:
   A) $\sqrt{17}$ *cm* hám $\sqrt{97}$ *cm*; B) 5 *cm* hám 6 *cm*;
   D) $\sqrt{34}$ *cm* hám $\sqrt{63}$ *cm*; E) durıs juwap kórsetilmegen.

5. Radiusi 8 cm bolǵan sheńberge ishley sızılǵan durıs altımúyeshtiń maydanın tabıń:
   A) $48\sqrt{3}$ cm^2; B) $192\sqrt{3}$ cm^2; D) $96\sqrt{2}$; E) durıs juwap joq.

6. Oraylıq múyeshi 140°, maydanı $31{,}5\pi$ cm^2 bolǵan sektordıń radiusın anıqlań:
   A) 9 *cm*; B) 18 *cm*; D) 9π *cm*; E) durıs juwap kórsetilmegen.

7. Ultaniniń uzınlıǵı 15 *cm* bolǵan úshmúyeshliktiń ultanina parallel kesindi júrgizilgen. Eger payda bolǵan trapetciyaniń maydanı úshmúyeshliktiń maydanınıń $\frac{3}{4}$ bólegin quraytuǵınlıǵı belgili bolsa, kesindiniń uzınlıǵın tabıń:
A) 6,5; B) 7; D) 7,5; E) 5.

8. Qaptal tárepi $2\sqrt{39}$ *cm* bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliktiń biyikliginiń ultanına qatnası 3:4 ke teń bolsa, úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
A) 260; B) 245; D) 310; E) 72.

9. $\bar{a}(4;4\sqrt{3})$ hám $\bar{b}(8\sqrt{3};8)$ vektorları arasındaǵı múyeshti tabıń:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.

10. Teń qaptallı trapetciyanıń ultanları 10 *cm* hám 16 *cm*, qaptal tárepi bolsa 5 *cm*. Trapeciyaniń maydanın tabıń:
A) 45; B) 50; D) 48; E) 52.

11. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 13 *cm* bolıp, katetlerınen biri ekinshisinen 7 *cm* úlken. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
A) 30 cm^2; B) 25 cm^2; D) 45 cm^2; E) 40 cm^2.

12. Tárepi 5 *cm* bolǵan rombinıń bir diagonali 6 *cm* ge teń. Rombınıń maydanın tabıń:
A) 24 cm^2; B) 30 cm^2; D) 29 cm^2; E) 40 cm^2.

13. Diagonalı $6\sqrt{2}$ bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan sheńberdiń uzınlıǵın tabıń:
A) 10π; B) 8π; D) 9π; E) 6π.

14. Tárepi $6\sqrt{2}$ *cm* bolǵan kvadratqa sırtlay sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń:
A) 9π; B) 12π; D) 15π; E) 18π.

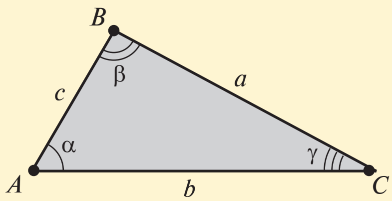
15. Biyiklikleri 4 *cm* hám 6 *cm* bolǵan parallelogrammnıń maydanı 36 cm^2 ge teń. Onıń perimetrin tabıń:
A) 26 *cm*; B) 30 *cm*; D) 29 *cm*; E) 36 *cm*.

16. Perimetri 30 *cm* bolǵan parallelogrammnıń tárepleri 2:3. Eger parallelogrammnıń súyir múyeshi 30° bolsa, onıń maydanın tabıń:
A) 26 cm^2; B) 27 cm^2; D) 29 cm^2; E) 30 cm^2.

17. Eger ABC úshmúyeshliginde $AB=6\sqrt{3}$ *cm*, $BC=12$ *cm* ham $\angle C=60°$ bolsa, úshmúyeshliktiń A múyeshin tabıń:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.

PLANIMETRIYAGA BAYLANÍSLÍ TIYKARǴÍ TÚSINIK HÁM MAǴLÍWMATLAR

1 ÚSHMÚYESHLIKLER



1°. Tiykarǵı tusinikler

Tegislikte bir tuwrı sızıqta jatpaǵan ush noqat berilgen bolsın. Sol noqatlardıń hár ekewin kesindiler menen tutastıramız. Payda bolǵan figura úshmúyeshlik delinedi. Noqatlar úshmúyeshliktiń ushları, kesindiler bolsa tárepleri delinedi. Belgileniwi: A, B, C - ushları, a, b, c - tárepleri (*1-suwret*).

Úshmúyeshlik úsh ishki múyeshke iye: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Belgileniwi: α, β, γ.

Mediana — úshmúyeshlik ushın onıń qarsısındaǵı tárep ortası menen tutastırıwshı kesindi. Úshmúyeshlikte 3 mediana bolıp, olar m_a, m_b, m_c kibi belgilenedi.

Bissektrisa — úshmúyeshlik ushın onıń qarsısındaǵı tarep penen tutastırıwshı hám sol ushtaǵı múyesh bissektrisasında jatıwshı kesindi. Úshmúyeshlikte 3 bissektrisa bolıp olar l_a, l_b, l_c kibi belgilenedi.

Biyiklik — úshmúyeshlik ushınan onıń qarsısındaǵı tárep jatqan tuwrı sızıqqa tusirilgen perpendikulyar.

Úshmúyeshlikte 3 biyiklik bolıp, olar h_a, h_b, h_c kibi belgilenedi.

Orta sızıq — eki tárep ortaların tutastırıwshı kesindi.

Orta sızıqlar sanı da 3 dana.

Perimetr — ush tárep uzınlıqları qosındısı. Belgileniwi: P.

Úshmúyeshlik táreplerine qarap ush turge ajıratıladı:

a) teń tárepli ($a=b=c$); b) teń qaptallı (a, b, c lardıń qálegen ekewi teń);

d) qálegen tárepli (a, b, c lardıń hesh qaysı ekewi teń emes).

Úshmúyeshliktiń ush tárepine urınıp ótiwshı sheńber oǵan ishki sızılǵan *sheńber* delinedi (bunday sheńber bar hám jalǵız). Ishki sızılǵan sheńber radiusı r arqalı belgilenedi.

Úshmúyeshliktiń barlıq ushınan ótiwshi sheńber oǵan *sırtlay sızılǵan sheńber* delinedi hám onıń radiusı R arqalı belgilenedi (bunday sheńber bar hám jalǵız).

2°. Tiykarǵı tusinikler

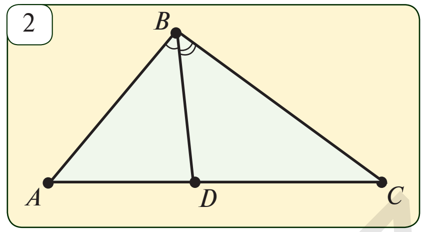
1) $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Úshmúyeshlik ishki múyeshleri qosındısı 180° ǵa teń.

2) Ush mediana bir noqatta kesilisedi. Bul noqat mediananı 2:1 qatnasta bóledi. Mediana úshmúyeshlikti eki maydanları teń úshmúyeshliklerge ajıratadı. Medianalar uzınlıqları $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ formulalardan tabıladı.

3) Ush bissektrisa bir noqatta kesilisedi. Bul noqat ishki sızılǵan sheńber orayı boladı. Bissektrisa ózi tusirilgen tárepti qalgan qalgan táreplerge proporcional bóleklerge ajıratadı (*2-súwret*).

BD bissektrisa bolsa, $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DC}$.

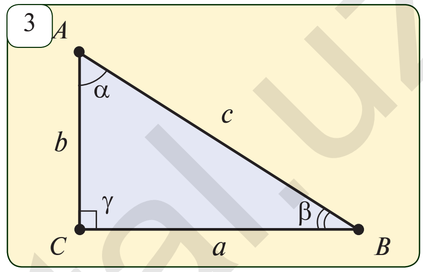
$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\quad l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$
$$l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\quad p=(a+b+c)$$



Bissektrisa uzınlıqların usı formulalardan tabıw múmkin.

4) Úshmúyeshlik biyiklikleri yáki olardıń dawamları bir noqatta kesilisedi.

Biyiklik uzınlıqların



$$h_a=\frac{2S}{a};\qquad h_b=\frac{2S}{b};\qquad h_c=\frac{2S}{c}$$

formulalardan tabıw múmkin. Bul jerde

S — úshmúyeshlik maydanı.

5) Úshmúyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarı bir noqatta kesilisedi. Bul noqat úshmúyeshlikke *sırtlay sızılǵan sheńber orayı* boladı.

6) Úshmúyeshliktiń *orta sızıǵı* úshinshi tárepke parallel hám onıń yarımına teń.

7) Sinuslar teoreması:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Kosinuslar teoreması:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

9. Úshmúyeshlik maydanın esaplaw formulası:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

10. Geron formulası:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad p=\frac{a+b+c}{2};\qquad S=\frac{abc}{4R},\qquad S=pr.$$

3°. Áhmiyetli jeke jaǵdaylar

a) *Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik* (*3-súwret*).

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC hám BC — katetler, AB— gipotenuza. Pifagor teoreması: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b+c}{2};$$

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha.$$

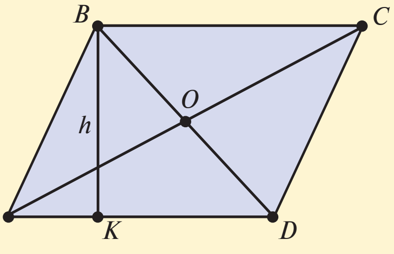
$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,\alpha;\qquad \frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\,\beta;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\,\alpha;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\,\beta.$$

b) *Teń tárepli úshmúyeshlik*

$$\alpha=\beta=\gamma=60°,\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

TÓRTMÚYESHLIKLER

1



1°. Parallelogramm

Qarama-qarsı tárepleri parallel bolǵan tórtmúyeshlik *parallelogramm* delinedi (*1-suwret*).

Qońsı bolmaǵan ushlardı tutastırıwshı kesindi diagonal delinedi.

AB hám CD; AD hám BC parallel tárepler;
BD hám AC diagonallar.

Tiykarǵı qásiyetler hám qatnasıqlar

1) Diagonallar kesilisiw noqatı parallelogramnıń simmetriya orayı boladı.
2) Qarama-qarsı tareplerdin uzınlıqları óz-ara teń:

$$AB=CD \text{ hám } AD=BC.$$

3) Parallelogrammnıń qarama-qarsı múyeshleri óz ara teń:

$$\angle BAD=\angle BCD \text{ hám } \angle ABC=\angle ADC.$$

4) Qońsı múyeshler qosındısı 180° ǵa teń.
5) Diagonallar kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi: $BO=OD$ hám $AO=OC$
6) Tárepleri kvadratlarınıń qosındısı diagonalları kvadratlarınıń qosındısına teń:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2 \text{ yaki } 2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2.$$

7) Parallelogramm maydanı: a) $S=ah_a$, bul jerde: $a=AD$ tárep, $h_a=BK$— biyiklik; b) $S=ab\sin\alpha$, bul jerde: $b=AB$ — tárep, $\alpha=\angle BAD$ — AB hám AD tárepler arasındaǵı múyesh.

2°. Romb

Barlıq tárepleri óz-ara teń bolǵan parallelogramm *romb* delinedi.

Paralelogramm ushın orınlı bolǵan barlıq qasiyetler romb ushın da orınlı.

Rombnıń qosımsha qásiyetleri.

1) Romb diagonalları óz ara perpendikulyar.
2) Romb diagonalları ishki múyeshlerdiń bissektrisaları boladı.
3) Romb maydanı $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, bul jerde: d_1, d_2 — romb diagonalları.

3°. Tuwrı tórtmúyeshlik

Barlıq múyeshleri 90° ǵa teń bolǵan parallelogram *tuwrı tórtmúyeshlik* delinedi.

1) Tuwrı tórtmúyeshlik diagonalları óz ara teń.
2) Tuwrı tórtmúyeshlik maydanı S=ab, bul jerde: a hám b — tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsı tárepleri.

4°. Kvadrat

Barlıq tárepleri óz ara ten bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik *kvadrat* delinedi.

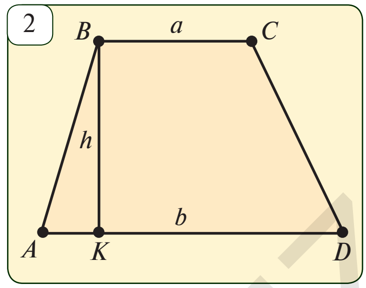
Romb hám tuwrı tórtmúyeshlikler ushın orınlı bolǵan barlıq qasiyetler kvadrat ushında orınlı.

Eger a-kvadrat tárepi, d bolsa diagonalı bolsa: $S=a^2$; $S=\frac{d^2}{2}$; $d=a\sqrt{2}$.

5°. Trapeciya

Ultanlar dep atalıwshı eki tárep óz ara parallel hám qaptal tárepler dep atalıwshı qalgan eki tárepi bolsa parallel bolmaǵan tórtmúyeshlik *trapeciya* delinedi.

Qaptal tárepleri ortaların tutastırıwshı kesindi trapetciyanıń *orta sızıǵı* delinedi.

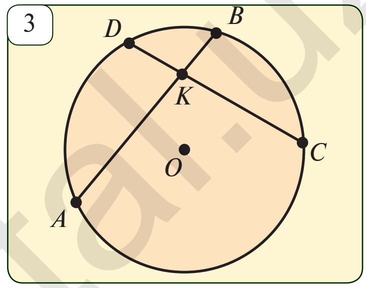


Tiykarǵı qásiyetler

1) Trapetciya orta sızıǵı ultanlarına parallel hám ultanları qosındısınıń yarımına teń boladı.

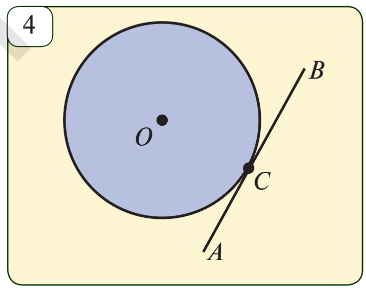
2) Trapetciya maydanı $S=\frac{a+b}{2}h$, bul jerde a hám b -ultanları, h bolsa biyiklik (*2-súwret*).

SHEŃBER, DÓNGELEK



1°. Oń san R hám tegislikte O noqat berilgen bolsın. O noqattan R aralıqta jaylasqan noqatlardan quralǵan *figura sheńber* delinedi. O noqat *sheńber orayı*, oray menen sheńberdegi noqattı tutastırıwshı kesindi *radius*, R san bolsa *radius uzınlıǵı* delinedi. Sheńberdegi eki noqattı tutastırıwshı kesindi *xorda*, oraydan ótiwshi xorda bolsa *diametr* delinedii.

Tegisliktiń sheńber menen shegaralanǵan shekli bólimi *dóngelek* dep ataladı.



Tiykarǵı munasibetler

1) $D=2R$, bul jerde: D — diametr uzınlıǵı.
2) $l=2\pi R$ — sheńber uzınlıǵı.
3) $S=\pi R^2$ — dóngelek maydanı.
4) AB hám CD xordalar K noqatta kesilisse (*3-súwret*), $AK \cdot KB=CK \cdot KD$ munasibet orınlanadı.
5) Xordanı teń ekige bóliwshi diametr sol xordaǵa perpendikulyar.
6) Teń xordalar oraydan teń aralıqlarda jaylasqan hám kerisinshe, oraydan ten aralıqta jaylasqan xordalar óz ara teń.

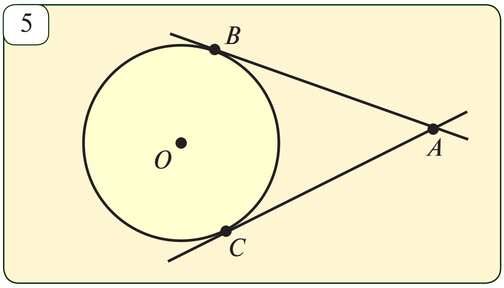
2°. Urınba

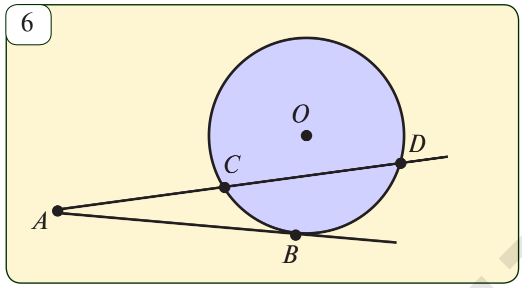
Shenber (*yaki dóngelek*) menen jalǵız ulıwma noqatqa iye bolgan tuwrı sızıq urınba delinedi. Noqat bolsa urınıw noqatı delinedi (*4-súwret*).

Shenber menen 2 ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıq *kesiwshi* dep ataladı.

Urınbanıń qásiyetleri

1) Urınıw noqatına ótkizilgen radius urınbaǵa perpendikulyar.
2) Dóńgelek sırtındaǵı noqattan sol dóńgelekke eki urınba ótkiziw múmkin. Bul urınbalardıń kesindileri óz ara teń (*5-súwret*): $AB=AC$.
3) Eger AC kesiwshi bolıp, sheńberdi C hám D noqatlarda kesip ótse, AB bolsa urınba bolsa, $AB^2=AD \cdot AC$ teńlik orınlı (*6-súwret*).





3°. Oraylıq hám ishley sızılǵan múyeshler

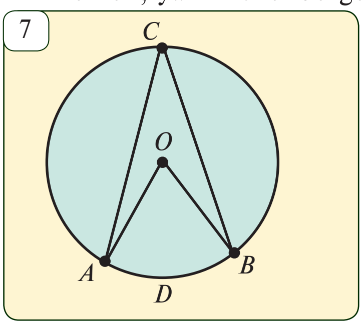
Sheńberdegi eki noqat járdeminde sheńber eki bólekke ajıraladı. Bul bólekler *doǵalar* dep ataladı. Belgileniwi: ADB; ACB.

AOB múyesh ADB dogaǵa tirelgen oraylıq múyesh (*7-súwret*), ACB múyesh bolsa ADB doǵaǵa tirelgen hám *ishki sızılǵan múyesh* delinedi. Bul múyeshler arasında

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

qatnas orınlı.

Demek, yarım sheńberge tirelgen ishki múyesh tuwrı múyesh boladı (*8-súwret*).



Bir doǵaǵa tirelgen ishki sızılǵan múyeshler óz ara teń boladı.

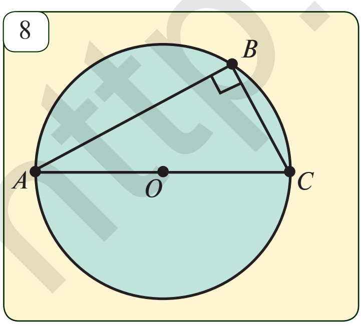
4°. Sektor hám segment

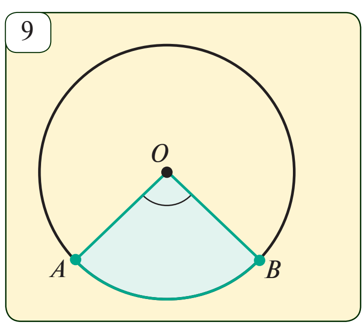
Dóńgelektiń eki radius penen shegaralanǵan bólegi sector delinedi (*9-súwret*). Sektor doǵasınıń uzınlıǵı:

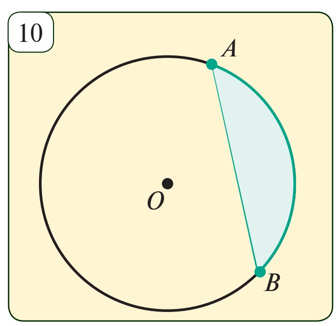
$l=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, bul jerde α — oraylıq múyeshtiń gradus ólshemi.

Sektor maydanı: $S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$; $S=\frac{1}{2}Rl$.

Segment — dóńgelektiń xorda hám sol xorda tirelgen doǵa menen shegaralanǵan bólegi (*10-súwret*).







Segment maydanı: $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha \pm \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$

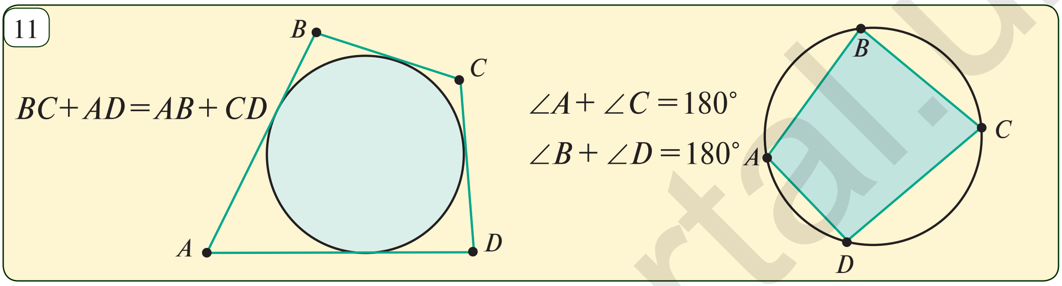
DURÍS KÓPMÚYESHLIKLER

Durıs n múyeshtiń tárepi a_n, perimetri P_n, maydanı S_n, ishley sızılǵan sheńber radiusı r_n, sırtlay sızılǵan sheńber radiusı R_n, ishki múyeshi α_n bolsa,

$$P_n=na_n, \qquad S_n=\frac{1}{2}P_n r_n=\frac{1}{2}na_n r_n, \qquad \alpha_n=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r_n=\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Sheńberge sırtlay hám ishley sızılǵan tórtmúyeshlikler (*11-súwret*).



10 nan 99 ǵa shekem bolǵan natural sanlardıń kvadratlarınıń kestesi

onlıq / birlik	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Ayırım shamalardıń kestesi

$\pi\cong3{,}1416$	$\sqrt{8}\cong2{,}8284$
$\sqrt{2}\cong1{,}4142$	$\sqrt{10}\cong3{,}1623$
$\sqrt{3}\cong1{,}7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cong0{,}7071$
$\sqrt{5}\cong2{,}2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cong0{,}5774$
$\sqrt{6}\cong2{,}4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cong0{,}3183$
$\sqrt{7}\cong2{,}6457$	

Trigonometriyaliq funkciyalardiń mánisleriniń kestesi

α°	sinα	cosα	tgα	ctgα	α°	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	**46**	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	**47**	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	**48**	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	**49**	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	**50**	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	**51**	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	**52**	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	**53**	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	**54**	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	**55**	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	**56**	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	**57**	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	**58**	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	**59**	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	**60**	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	**61**	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	**62**	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	**63**	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0326	0,946	0,344	2,904	**64**	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	**65**	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	**66**	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	**67**	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	**68**	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	**69**	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	**70**	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	**71**	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	**72**	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	**73**	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	**74**	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	**75**	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	**76**	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	**77**	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	**78**	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	**79**	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	**80**	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	**81**	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	**82**	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	**83**	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**84**	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**85**	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**86**	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**87**	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**88**	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**89**	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**90**	1,000	0,0000	-	0,0000

1-tema. **5.** 50°; 130°; 133°; 97°. **6.** 65°; 70°; 45°. **7.** 105°; 130°; 125°. **8.** 35°; 35°; 110°. **9.** 94°; 56°; 30°. **10.** 110°; 130°; 120°. **11.** *Kórsetpe:* tórtúshmúyeshliktiń hár biriniń tárepleri dáslepki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleriniń yarmına teń. **12.** *Kórsetpe: DF* kesindi *ABH* úshmúyeshliktińde hám *CEB* úshmúyeshliktińde orta sızıǵı boladı. **13.** *Kórsetpe: ANC* hám *CKA* úshmúyeshliklerdiń hámde ishki almasıwshı múyeshlerdiń teńliginen paydalanıń.

2-tema. **2.** a) $\sqrt{34}$ yaki ≈ 5,8 *cm*; b)14 $\sqrt{2}$ *m*; c) ≈ 21,5 *cm; d)* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *cm; e)* $\sqrt{2}$ *cm; f)* $\sqrt{13}$ *cm*. **4.** a) $\sqrt{21}$ *cm*, $\sqrt{5}$ *cm;* b) $\sqrt{21}$ *cm*, $\sqrt{22}$ *cm;* c) $\sqrt{2}$ *cm*, $\sqrt{3}$ *cm*. **5.** 12 *cm*. **6.** a) $\sqrt{10}$ *cm;* b) $2\sqrt{5}$ *cm*; c) $\sqrt{33}$ *m*. **8.** b), *e) hám.* f) **9.** hámmesi. **10.** 225. **11.** 5 *cm*. **12.** $\sqrt{27}$ *m*. **14.** b) ≈ 4,3 *m;* c). ≈ 2,23. **15.** a) 8,62 *m*; b) ≈ 5,97 *m*. **16.** ≈ 1,84 m^2. **17.** ≈ 105,6 *m*. **18.** ≈ 102,5 km. **19.** ≈ 48,4 km.

3-tema. **1.** a) 11,7 *m*; b) 35 *mm*; c) 6,2 *km*; d) 172 *cm*; e) $4(x-1)$ *cm*; f) $(4x+2)$ *m*; g) $(13x+2)$ *km*; h) $(6y-8)$ *cm*; *i)* $8x$ *km* . **2.** a). ≈ 7,967 *cm*; b) ≈ 44,329 *m*; c) ≈ 409,86 *mm*. **3.** a) Awa; b) Joq; c) Awa; d) Awa. **4.** 0,8 *m*; 24,64 m^2; 21,12 m^2. **5.** ≈ 50 márta. **7.** 17,5 *cm*; 10,5 *cm*; 38,1 *cm*; 59,1 *cm*. **8.** 91,5 *m*.

4-tema. **1.** *c*. **2.** a)*C*; b) *A* ; **3.** 8 ge, 2,4 m. **5.** ≈ 53,4 *m*. **6.** ≈ 19,25 m^2. **9.** 12 ta **10.** Birinshisinde. **11.** 80 ta. **12.** 7 dm^2. **14.** a)180 dm^3; b)105 cm^3 c)1364 cm^3. **15.** 1,8 m^3. **16.** a) 22 *cm;* b) 20 *cm hám 24* cm^2; c) 96 cm^3. **20.** a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{21}$; c) h= $2\sqrt{7}$. **21.** a) $(384+80\sqrt{5})$ cm^2, 640 cm^3; b) 84 cm^2, 36 cm^3. c) $(12\sqrt{34}+156)m^2$, *180* m^3. d) $36564+306\sqrt{97}$ cm^2, 404838 cm^3.

6-tema. **2.** Úshmúyeshlikler uqsas. **4.** 5; 8; $\frac{1}{2}$. **5.** 72; 162; 90.

7-tema. **3.** 12 *m*. **4.** 7,5 *cm*; 12,5 *cm*; 15 *cm*. **6.** 73,5 m^2; 37,5 m^2. **7.** Úshmúyeshlikler uqsas.

8-tema. **3.** a) 4,5; b) 10,5; c) 4,5. **4.** a) 10; b) 6; c) 4,5. **5.** a) 5 *cm*, 3,5 *cm*; b) $5\frac{5}{7}$ *cm*, $2\frac{2}{7}$ *cm*. **6.** a) 8; b) 3,5; c) 12,5. **8.** 12 *cm*.

9-tema. **3.** a) awa; b) joq; c) joq. **4.** $2\frac{1}{3}$ *cm*, 9. **5.** a) 15 *cm*; 20 *cm*; b) 24 *cm*; 18 *cm*; c) 144 cm^2; 256 cm^2.

10-tema. **2.** hám. **3.** a) hám c); d) hám e). **4.** 108 cm^2. **5.** 4 *cm*; 6 *cm*. **7.** 4,8 *cm*. **9.** 12.

11-tema. **1.** a) hám d); b) hám e); g) hám f). **2.** 36 *m* yaki 20,25 *m*. **3.** 12 *cm*; 14 *cm*. **5.** $5\frac{5}{11}$ *cm*. **7.** 4 *m*. **8.** 16 *m*. **9.** 8,4 *m*.

12-tema. **3.** a) 15; b) $3\frac{2}{11}$; c) $3\frac{5}{17}$. **4.** 18 *cm*; 6 *cm*. **5.** 29 dm^2. **6.** 6 *dm*. **7.** *m*:*n*. **10.** Awa.

13-tema. **1.** $3\frac{3}{17}$ *m*; 13,6 *cm*. **7.** *n*:*m*. **8.** a) *S*: 4; b) *S*: 2; c) *S*: 4. **9.** 30. **10.** 57,75.

14-tema. **II. 1.** 12 cm^2. **2.** 8,4. **3.** 2,4. **4.** 24. **5.** 8. **6.** 1,6. **7.** 18 *mm*. **8.** a)4; b)10; c)32. **9.** Awa. Úshmúyeshlikler uqsaslıǵınıń 2-belgisi. **10.** 16. **11.** Awa, $k=2$. **12.** 24 *mm*. **13.** a) 36 cm^2; b) 54 mm^2. **14.** a) ; b) . **15.** a) 7; b) 7. **16.** 6 *m*. **17.** 12 *m*.

15-tema. **1.** a) (1;-1); b) (-2;3); c) (0;-4). **2.** (-1;5). **4.**(0;-3). **5.** (-1;-8). **6.** Awa. **7.** Joq. **8.** BB_1 ǵa.

16-tema. **1.** a) *Ox* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı: (1;-2), (0;-2), (2;-2). b) *Oy* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı: (-1;2), (0;2), (-2;2). **2.** *Ox* kósherine salıstırǵanda. **4.** Sáykes túrde: 2 ta, 4 ta, 2 ta, 1 ta, 1 ta. **8.** BOB, MUM

17-tema. **1.** (8;3). **3.** (2;-5), (-2;-2), (6;-12). **6.** Tuwrı tórtmúyeshlik, kvadrat, parallelogrammnıń simmetriya orayı — diagonalları kesiliisiw noqatında, tuwrı sızıqtıń simmetriya orayı — onıń qálegen noqatında.

12. a) kósherge salıstırǵanda simmetriyalı (birew).
b) oraylıq simmetriya, kósherge salıstırǵanda simmetriyalı (4 de).
c) oraylıq simmetriya.
d) kósherge salıstırǵanda simmetriyalı (5).
e) oraylıq simmetriya, kósherge salıstırǵanda simmetriyalı (6)

13. a) kósherge salıstırǵanda simmetriyalı:
M, X, V, T, Y, V, W, D, B, H, K, C, I, E, A. b) oraylıq simmetriya: N, S, Z, X, H, I.

14. a) 180° ǵa; b) Joq; c) Joq; d) 90° ǵa; e) Joq; f) 120° ǵa.

15. a) $\frac{360^\circ}{7}$; b) 60°; c) 360°. **17.** 15

18-tema. **5.** 1 *km* 750 *m*. **8.** 7,2 *cm*. **9.** $k=\frac{1}{2}$ yaki k=2.

19-tema. **4.** k=2. **5.** 6 cm^2; 24 cm^2. **6.** 104 cm^2. **7.** Hár eki jaǵdayda k=1. **8.** 1,2 m^2. **9.** 16 *cm*, 32 *cm*.

20-tema. **4.** $\frac{2}{3};\frac{4}{9}$. **5.** X_1X hám Y_1Y nurlardıń kesilisiw noqatı gomotetiya orayı. **6.** $OX_1=2\cdot OX$. **7.** *Kórsetpe:* Temada sheshilgan máseleden paydalanıń.

21-tema. **4.** a) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; b) $S_1=12$, $k=2$; d) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; e) $P_1=10$, $S_2=216$.

22-tema. **1.** ≈6,94 *m*. **2.** 300 *m*. **3.** ≈72 *m*. **4.** 6,6 *m*.

23-tema. **1.** 9. **2.** $P_2=39$ *dm*. **3.** 8 *m*. **4.** 24 dm^2. **6.** *Kórsetpe: ABC* úshmúyeshlik sızıń, kópmúyeshlikler jasaw temasındaǵı 1-máseleden paydalanıp, sızılǵan úshmúyeshlik tárepleriinen ush márte kishi úshmúyeshlik jasań.

9. 72°; 72°; 36°. **11.** 12 cm^2. **12.** 150 000 000 *km*. **13.** a) Awa; b) Awa. **15.** 6 *cm*, 12 *cm*, 18 *cm*. **16.** 84 *m*.

24-tema. **II. 1.** 8 *cm*. **2.** $4\frac{4}{9}$*cm*. **3.** 48 *m*. **4.** 4 *cm*; 0,5 cm^2. **5.** $5\frac{1}{3}$*m*. **6.** 867 *km*. **III. 7.** 7,5 *m*. **8.** 6 *cm*. **9.** a) 7,5 *cm*; b) 6 *cm*; d) 16,2 *cm*. *Qızıqarlı máseleler:* **1.** Ózgermeydi. **2.** a) Awa; b) Joq. **3.** *Kórsetpe:* Sızǵısh penen hár bir quwırshaqtıń uzınlıǵın ólsheń hám olardıń qatnasıń tabıń.

25-tema. **1.** $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$. **5.** a) 1; b) 1; d) 1. **6.** 3,5 *cm*. **7.** a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; b) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; d) 0. **8*.** a) 30°; b) 135°; d) 150°.

26-tema. **2.** 36 cm^2. **3.** 24 *cm*. **4.** a) $6\sqrt{3}$; b) 30; d) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. **5.** $(24+4\sqrt{3})$ *cm*; $(24+8\sqrt{3})$ cm^2.

6. $10\sqrt{3}$ *cm*. **7.** a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** ≈807 m^2. **9.** ≈88 *m*.
10. 1000, 37°. **12.** 2°. **13.** 34°. **14.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **15.** R = $3\sqrt{3}$ *cm; BO* = $6\sqrt{3}$.
16. 5 *cm*. **17.** 12, $24\sqrt{3}$. **18.** 20 *cm,* 200 cm^2. **19.** 4, $16\sqrt{3}$. **20.** 30°; 60°. **22.** 12 *cm*; $4\sqrt{3}$ *cm*; $8\sqrt{3}$ *cm*. **23.** 32 cm^2.

27-tema. **2.** a) 6 cm^2; b) 73,5 cm^2; d) 6 cm^2. **3.** 36 cm^2. **4.** $49\sqrt{2}$ cm^2. **5.** $54\sqrt{3}$ cm^2.
6. $2\frac{2}{3}$ *cm*; $4{,}5\sqrt{2}$ *cm*. **7.** $S = \frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$ **8.** $4{,}8\sqrt{3}$ *cm*.

28-tema. **2.** a) $BC=6$; b) $AB=8\sqrt{2}$; d) $AC=7\sqrt{2}$. **3.** a) $\sin C=\frac{1}{3}$; b) $\sin A=\frac{7}{16}$; d) $\sin B=\frac{2}{3}$.
4. 4,8 *dm*. **5.** 30° yaki 150°. **6.** Múmkin. **7.** $AB\approx21{,}1$ *m*; $\angle B\approx37°$, $\angle C\approx76°$.
8. 76°; 26,1 *cm*; 23,8 *cm*.

29-tema. **2.** a) $\sqrt{13}$ *cm*; b) 4 *m*; d) $\sqrt{283}$ *dm*. **3.** $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13}$ *cm* yaki $2\sqrt{109}$ *cm*.
5. $\sqrt{31}$ *cm*, $\sqrt{91}$ *cm*. **6.** $\sqrt{109}$ *cm*, $\sqrt{39}$ *cm*.
7. *Kórsetpe: ADB* hám *BDC* úshmúyeshliklerge kosinuslar teoremasın qollap, a^2 hám c^2 ni tabıń, sońınan bul teńliklerdi aǵzama aǵza qosıń. **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ *cm*; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ *cm*; $\frac{\sqrt{190}}{2}$ *cm*.

30-tema. **1.** $\angle B$ va $\angle C$. **2.** *AB* hám *BC*. **3.** a) súyir muyeshli; b) tuwrı múyeshli;
d) doǵal múyeshli. **4.** a) $8\frac{1}{8}$; b) $8\frac{1}{8}$; d) $24\frac{1}{6}$; e) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6.** *Kórsetpe:* Sinuslar teoremesınan paydalanıń. **7.** *Kórsetpe:* 6-máselege uqsas sheshiledi.
8. *Kórsetpe:* Sinuslar teoremesınan paydalanıń.

31-tema. **1.** a) $10\sqrt{3}$; b) $28\sqrt{2}$; d) 12; e) ≈0,3064. **2.** a) —2; b) 0; d) 2. **3.** a) 8; b) 24; d) 8; e) 0. **5.** a) —7,5; d) 0. **6.** $a\perp b$, $c\perp d$.

32-tema. **1.** a) $\alpha=90°$, $c=5\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\gamma\approx45°$; $a\approx27{,}3$, $b\approx24{,}5$; d) $\alpha=20°$; $b\approx65.8$; $c\approx88{,}6$; e) $\gamma=119°$; $a\approx8{,}1$; $b\approx5{,}8$. **2.** a) $c\approx5{,}29$; $\alpha\approx79°6'$; $\beta\approx138°21'$; b) $c\approx53{,}09$; $\alpha\approx11°39'$; $\beta\approx38°21'$; d) $a\approx19{,}9$; $\beta\approx58°19'$; $\gamma\approx936°41'$; e) $a\approx22{,}9$; $\beta\approx21°$; $\gamma\approx15°$. **3.** a) $\alpha\approx29°$; $\beta\approx47°$; $\gamma\approx104°$; b) $\alpha\approx54°$; $\beta\approx13°$; $\gamma\approx113°$; d) $\alpha\approx34°$; $\beta\approx44°$; $\gamma\approx102°$; e) $\alpha\approx39°$; $\beta\approx93°$; $\gamma\approx48°$.

33-tema. **1.** a) $2\sqrt{3}$ *cm*; b) 16 *cm*; d) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **2.** $4\sqrt{2}$ *m*; 8 *m* va $4+4\sqrt{3}$ *m*. **3.** $50\sqrt{3}$ *kg*.
4. 14 *cm*. **5.** $2\sqrt{14}$ *cm*. **6.** $6\sqrt{3}$ *cm*. **7.** 50 *cm*.

34-tema. **1.** ≈10,8 *m*. **2.** ≈15 *m*. **3.** ≈43,4 *m*. **4.** ≈35°. **5.** ≈73,2 *m*. **6.** ≈49 *m*. **7.** Asfalt jayılǵan.

35-tema. **II. 1.** $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}$; 0,89; —0,65. **3.** $2\sqrt{7}$ *cm*; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ *cm*. **4.** $30\frac{1}{30}$ *cm*. **5.** 28 *cm*.
6. 8 cm^2; $(4+4\sqrt{5})$ *cm*; $h_a=4$ *cm*, $h_b=0{,}8\sqrt{5}$ *cm*. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** a) súyir múyeshli; b) tuwrı múyeshli, d) doǵal múyeshli. **9.** 63 cm^2. **10.** ≈3,7 *cm*. **11.** 7 *cm*. **12.** 6. **13.** 0. **14.** —9. **15.** 135°. **16.** $OC\approx9{,}6$. **17.** $(24+24\sqrt{3})$ *cm*. **18.** 5. **III. 1.** ≈109°.
2. $\gamma=100°$, $a\approx3{,}25$; $c\approx6{,}43$. **3.** 6,25; 14,76.

36-tema. **2.** a) Hár qanday úshmúyeshlik sheńberge ishley sızılıwı múmkin. b) Qarama-qarsı múyeshlirinin qosındısı 180° bolǵan tórtmúyeshlikler. **3.** Bir doǵaǵa urınǵan múyeshleri teń. **4.** 10 *cm*. **5.** 672 cm^2. **6.** a) $10\sqrt{3}$ *cm*; b) $10\sqrt{2}$ *cm*; d) $10\sqrt{2}$ *cm*; $10\sqrt{2}$ *cm*; 20 *cm*. **7.** 8 *cm*. **8.** ΔABF da, $\angle BAF+\angle AFB=90°$, $\angle ABF=90°$. Demek, *AF* – diametr. **9.** $\frac{1}{3}$ Qarama-qarsı múyeshleriniń qosındısı

180°, yaǵnıy sheńberge ishley sızıw múmkin. **10.** *Kórsetpe:* Bir últan hám bir qaptal táreptiń orta perpendekulyar kesisken noqat sheńber orayı boladı.

37-tema. **2.** 7,2 *cm*. **3.** a) 16,6; b) 22; d) 22,6. **4.** a) 2,5; b) 3,5; d) 2. **8.** 6 *cm*.

38-tema. **3.** a) 60°; b) 108°; d) 120°; e) 144°; f) 160°. **4.** a) 120°; b) 72°; d) 120°; e) 36°; f) 30°. **5.** a) 3; b) 4; d) 8; e) 12.

39-tema. **1.** 3 *cm* hám $3\sqrt{2}$ *cm*. **2.** $\sqrt{3}$ hám $2\sqrt{3}$. **7.** a) 6; b) 12; d) 10; e) 20; f) 5.

40-tema. **3.** 8 *cm*; $8\sqrt{2}$ *cm*; $8\sqrt{3}$ *cm*; $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *cm*; 16 *cm*.
4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ *cm*; **5.** a) $20\sqrt{2}$ *cm*; b) 40 *cm*. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *cm*.

41-tema. **I.** **1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** E; **7.** E. **III.** **1.** $\sqrt{3:4}$: $6\sqrt{3}$. **2.** 3:4. **3.** a) ≈5,780 *cm*; b) ≈4,142 *cm*; d) ≈2,679 *cm*. **4.** $S=\sqrt{2R^2}$. **5.** 24 cm^2. **IV.** **1.** 4 *cm*; 13 *cm*. **2.** a) 80 *cm*; b) $20\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *cm*; $40\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *cm*; d) 200 cm^2. **3.** $4\sqrt{3}$ *cm*; 8 *cm*. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

42-tema. **2.** a) 3 márte artadı; b) 6π *cm* ge artadı; d) 3 márte kemeyedi; e) 6π *cm* ge kemeyedi. **3.** 6369 *km*. **4.** a) $\frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}$; b) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; d) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** a) πa; b) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; d) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. **6.** 1,5 *m*. **7.** 66348 márte.

43-tema. **1.** a) π *cm*; b) $1{,}5\pi$ *cm*; d) 3π *cm*; e) 4π *cm*. **2.** a) $\frac{2\pi}{9}$; b) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** a) ≈69°; b) 120°; d) 150°. **4.** a) $\frac{5\pi}{8}$ *cm*; b) 2π *cm;* d) $\frac{15\pi}{4}$ *cm*; **5.** a) 4π; b) 16π. **7.** 2.

44-tema. **3.** k^2 márte artadı; b) k^2 márte kemeyedi. **4.** $6{,}25\pi$ cm^2; $12{,}5\pi$ cm^2. **5.** $2{,}25\pi$ cm^2; 9π cm^2. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** $21{,}25\,\pi$ cm^2. **8.** 18,75 cm^2.

45-tema. **3.** a) $\frac{49}{12}\pi$ cm^2; $\frac{49(\pi-3)}{12}$ cm^2; b) $6{,}125\pi$ cm^2; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ cm^2; d) $\frac{49\pi}{3}$ cm^2; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ cm^2; e) $\frac{49\pi}{4}$ cm^2; $\frac{49(\pi-2)}{4}$ cm^2. **4.** a) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; b) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}a^2$; **5.** π cm^2; 3π cm^2; 5π cm^2; 7π cm^2. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ cm^2; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3}$ cm^2; **7.** $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$. cm^2. **8.** $S_1<S<S_2$; 300 cm^2 < 314cm^2 < 321,48 cm^2.

46-tema. **1.** Sheńberdiń úlken. **2.** $\frac{160}{3}\pi$ cm^2. **3.** $5{,}76\pi$ cm^2. **4.** $8.(\pi-2)$ cm^2. **6.** 6π cm^2; 10π *cm*.

47-tema. **II.** **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}$ *dm*. **3.** 30 *cm*. **4.** 90°. **5.** 3. **6.** π va $6{,}25\pi$. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{3\pi}{8}$ **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}a^2$. **10.** $1{,}5\pi$. **11.** 7. **12.** ≈$9\pi-26{,}04$. **13.** π. **14.** $54\sqrt{3}-24\pi$. **15.** $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. **III.** **2.** $8\sqrt{3}$ *cm*. **3.** a) $\frac{18}{\pi}$ *cm*; b) $\frac{216}{\pi}$ cm^2; d) $\frac{216\pi+81\sqrt{3})}{\pi^2}$ cm^2.

48-tema. **3.** $5\sqrt{2}$ *cm*. **4.** 12 *cm*. **5.** 44 *m*, 60 *m*. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

49-tema **1.** a) 30 *cm*, 12 *cm*; b) 9 *cm*, 12 *cm*, 21 *cm*; d) 3 *cm*, 15 *cm*, 3 *cm*, 21 *cm*. **3.** 6 *cm*; 10,5 *cm*. **4.** 9 *cm*, 12 *cm*, 15 *cm*, 18 *cm*. **5.** 60°. **6.** 21 *cm*. **7.** 20 *cm*.

50-tema. **1.** *Kórsetpe:* $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$. **2.** 25 *cm*, 15 *cm*, 20 *cm*. **3.** $9\frac{3}{5}$*cm*. **4.** a) 5, 4; b) 24, 25; d) 8,10. **5.** 16:25. **6.** 56,16 cm^2. **7.** 60 cm^2. **8.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$.

51-tema. **2.** *Kórsetpe:* a) katetleri *a* hám *b* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań; b) gipotenuzası *a*, bir kateti *b* bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań.

3. *Kórsetpe:* Katetleri $AB=BC=1$ bolǵan $DABC$ jasań. Sońǵı kateti $CC_1=1$ hám $\angle C_1=90^\circ$ bolǵan $DBCC_1$ jasań hám t.b. **4.** a) 20; b) 45; d) 37,5. **5.** 225π *cm*². **6.** 180 *cm*². **7.** 25:9. **9.** $OC \geq OD$ bolǵanı ushın teńsizlik hár qashan tuwrı.

52-tema. **1.** a) 6,25; b) 12; d) 0,25. **2.** a) 8 *cm*; b) 2,5 *cm;* d) 0,9 *cm*. **3.** a) 4 *dm*; b) 4 *dm*. **4.** 8 *cm*. **6.** 9 *dm*; 16 *dm*.

53-tema. **1.** 10 *cm*. **2.** 2 *cm*. **3.** a) 2,5; b) 4; d) 2. **4.** a) $4\sqrt{6}-1$ *cm*; b) 6 *cm*. **5.** 1:6. **6.** 6 *cm*. **7.** 3. **8.** 1:4.

54-tema. **II. 1.** 18 *cm*; 32 *cm*. **2.** 4 *cm*; **3.** 8 *cm*; **4.** 6,4 *dm*. **5.** 8 *cm*. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 *dm*². **10.** 4 *cm*. **11.** 8 *cm*. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9.
III. 1. 8 *cm*. **2.** 5 *dm*. **3.** 4 *cm*; 8 *cm*.

55-tema. **1.** a) 9; b) 4 *cm*²; d) 3,5 *cm*; e) $\frac{1}{2}TB-CA$; f) 0,2. **2.** $\Delta CmH \backsim \Delta BCA$.

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılǵan hám qosımsha úyreniwge usınıs etilip atırǵan oqıw ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A’zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Александров А.Д. "Геометрия -9", учебник, Москва. Просвешение", 2013.
3. Атанасян С. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. Просвешение", 2002.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Вежа", 2007
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9" учебник, Киев, Освита, 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9" учебник, Харьков, Гимназия, 2008.
8. Перельман Я.И. Қизиқарли геометрия, Тошкент. Ўқитувчи, 1981.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. Просвешение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. Наука, 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. http://www.uzedu.uz - Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
15. http://www.eduportal.uz - Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
16. http://www.matematika.uz - Masofadan turib o‘qitish sayti (uzbek tilida).
17. http://www.problems.ru/ Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. http://www.ixl.com - Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
19. http://www.mathkang.ru - "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
20. http://www.khanakademy.org -"Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida)
21. http://www.brilliant.org – Matematikadan asofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
22. http://www.markaz.tdi.uz - Ta'lim sifatini baholash bo‘yicha xalqaro tadqiqotlarni amalga oshirish milliy markazi sayti.
23. http://www.occd.org/pisa - Iqtisodiy hamkorlik va taraqqiyot tashkiloti sayti, PISA – tadqiqotlarning ochiq materiallari.

Xaydarov Boxodir Qayumovich
Geometriya: 9-klass ushın sabaqlıq/B.Q.Xaydarov, E.S.Sariqov, A.Sh.Qo‘chqorov. — T.:, 2019.—160 b.

Q.Xaydarov, Boxodir.
ISBN 978-9943-5875-1-9

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ya7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo‘chqorov

GEOMETRIYA

9-klass ushın sabaqlıq

Tórtinshi basılım
(Qaraqalpaq tilinde)

"Huquq va Jamiyat" nashriyoti, 2019
Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko‘chasi.

Original-maket "Huquq va Jamiyat" nashriyoti tomonidan tayyorlandi.

Muharrir	*G.Uzaqbaeva*
Badiiy muharrir	*A.Umarova*
Bosh dizayner	*H&J dizayn jamoasi*
Sahifalovchi	*Q.Atabaev*

Litsenziya AI №022, 27.10.2018 yil.

Basıwǵa ruqsat etildi waqtı 20.08.2019. Kólemi 70x100$^1/_{16}$. Tayms garniturası. Kegli 10. Ofset usılında basıldı. Shartli baspa tabaǵı 11,7. Esap baspa tabaǵı 11,83. Nusqası 11 915. 19-17 sanlı buyırtpa.

"Huquq va Jamiyat" nashriyotining matbaa bo‘limi
Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko‘chasi.
Guvohnoma №10-2750, 13.06.2017 yil

Ijaraǵa berilgen sabaqlıq jaǵdayın kórsetiwshı keste

T/r	Oqıwshınıń atı hám familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alınǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshı-sınıń qolı	Sabaqlıqtıń tapsırıl-ǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshı-sınıń qolı
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Sabaqlıq ijaraǵa berilip, oqıw jılı aqırında qaytarıp alınǵanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegi bahalaw ólshemlerine tiykarlanıp toltırıladı.

Taza	Sabaqlıqtı birinshi ret paydalanıwıǵa berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Muqaba pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar. Jırtılmaǵan, betleri almastırılmaǵan, betlerinde jazıw hám sızıqlar joq.
Qanaatlandırarlı	Muqaba jelngen, biraz sızılıp, shetleri qaytılǵan, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen alınıp qalıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qannatlanarlı qálpıne keltirilgen. Alınǵan betleri qayta islengen, ayrım betleri sızılǵan.
Qanaatlandırarsız	Muqabaǵa sızılǵan, jıltılǵan, tiykarǵı bóliminen ajıralǵan yamasa pútinley joq, qanaatlandırarsız islengen. Betleri jırtılǵan, betleri tolıq emes, sızıp, boyap taslanǵan. Sabaqlıqtı qayta tiklewge bolmaydı.