

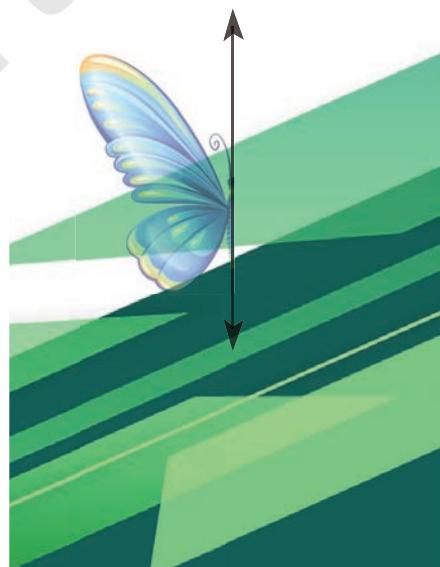
B. Haýdarow, E. Sarikow, A. Koçkarow

GEOMETRIÝA 9

*Umumy orta bilim berýän mekdepleriň
9-njy synpy üçin derslik*

*Özbekistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi
tarapyndan neşire hödürlenen*

Doldurylan we gaytadan işlenen dördünji neşir



Daşkent — 2019

UDK 514.1(075)
BBK 22.151əa7
X-18

Syn ýazanlar:

Özbekistan Respublikasynyň Ylymlar akademýasynyň hakyky agzasy, fizika-matematika ylymlarynyň doktory, professor A. Azamowyň redaksiýasy bilen.

9- njy synpda geometriýanyň planimetriýa bölümünü – tekiz geometrik figuralaryň häsiyetlerini öwrenmek dowam etdirilýär. Onda siz geometrik öz-özüne öwrülmeler, figuralaryň meňzeşligi, üçburçlugsyň tarapalarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar, tòweregijň uzynlygy we tegelegiň meydany, üçburçlukdaky we tòwerekdäki metrik gatnaşyklar bilen tanyşarsyňyz.

Şu dersligiň mazmuny berk aksiomatik ulgam esasynda gurlandyr. Ondaky nazary materiallar mümkingadar sada we düşnükli dilde beýan edilendir. Ähli temalar we düşünjeler durmuşdan alınan dürlüce mysallar arkaly açyp görkezilen. Her bir temadan soň berlen soraglar, subut etmäge, hasaplamağa we gurmaga degişli mesele we mysallar okuwcyny döredijilikli pikirlenmäge ündeyär, oňa özleşdirilen bilimleri çuňlaşdyrmaga we berkitmäge kömek edýär. Derslik özünüň özboluşly dizaýny we sapak materialynyň gökezmeliliği bilen hem tapawutlanýar. Onda getirilýän surat we çyzgylar sapagyň materialyny has gowy özleşdirmäge hyzmat edýär.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan kärende üçin çap edildi.

© «Huquq va Jamiyat» JCJ şeklindäki
neşirýat, 2014, 2019.

© B. K. Haýdarow, E. S. Sarikow

ISBN 978-9943-5875-9-5

M A Z M U N Y

Gaýtalamak

1.	Üçburçluklar we dörtburçluklar.....	6
2.	Pifagoryň teoremasы we onuň ulanylyşy	9
3.	Geometrik figuralaryň perimetriini we meýdanyny hasaplamaǵa degişli meseleler.....	13
4.	3D-geometriýa - giňşilikdäki jisimlerde planimetriýa meseleleri	18
5.	Taslama işini ýerine ýetirmek boýunça görkezmeler	26

I bap. Geometrik öz-özüne öwrülmeler we meňzeşlik

6.	Köpburçluklaryň meňzeşligi	28
7.	Meňzeş üçburçluklar we olaryň häsiýetleri	30
8.	Üçburçluklaryň meňzeşliginiň birinji nyşany	32
9.	Üçburçluklaryň meňzeşliginiň ikinji nyşany	34
10.	Üçburçluklaryň meňzeşliginiň üçünji nyşany	36
11.	Gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary	38
12.	Meňzeşlik nyşanlarynyň subut etmäge degişli meselelerde ulanylyşy	40
13.	Amaly gönükmeme we onuň ulanylyşy	42
14.	Bilimiňizi synaň	44
15.	Tekizlikde geometrik öz-özüne öwrülmeler. Hereket we parallel geçirme ..	48
16.	Oka görä simmetriýa	50
17.	Merkezi simmetriýa we öwrülmeye	52
18.	Geometrik figuralaryň meňzeşligi	58
19.	Meňzeş köpburçluklaryň häsiýetleri	60
20.	Gomotetiýa we meňzeşlik	62
21.	Meňzeş köpburçluklary gurmak	64
22.	Amaly gönükmeme we onuň ulanylyşy	66
23.	Meseleler çözme	68
24.	Bilimiňizi synaň	71

II bap. Üçburçluguň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar

25.	0°-dan 180°-a çenli bolan burcuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi	76
26.	Meseleler çözme	78
27.	Üçburçluguň meýdanyny burcuň sinusynyň kömeginde hasaplamaǵak	82
28.	Sinuslar teoremasы	84
29.	Kosinuslar teoremasы	86
30.	Sinuslar we kosinuslar teoremlarynyň käbir ulanylyşy	88
31.	Iki wektoryň arasyndaky burçlar we olaryň skalýar köpeltmek hasyly	90
32.	Üçburçluklary çözme	94
33.	Meseleler çözme	96
34.	Amaly gönükmeme we onuň ulanylyşy	98
35.	Bilimiňizi synaň	100

III bap. Töweregiň uzynlygy we tegelegiň meýdany

36. Töweregiň içinden çyzylan köpburçluk	104
37. Töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk	106
38. Dogry köpburçluklar	108
39. Dogry köpburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekler	110
40. Dogry köpburçlugyň tarapy bilen daşyndan we içinden çyzylan töwereklerleriň radiuslarynyň arasyndaky baglanyşyk	112
41. Bilimiňizi synaň.....	114
42. Töweregiň uzynlygy	116
43. Töweregiň dugasynyň uzynlygy. Burcuň radian ölçegi	118
44. Tegelegiň meýdany	120
45. Tegelegiň bölekleriniň meýdany.....	122
46. Amaly gönükmeme we onuň ulanylyşy.....	124
47. Bilimiňizi synaň.....	126

IV bap. Üçburçlukdaky we töwerekdäki metrik gatnaşyklar

48. Kesimleriň proýeksiýasy we proporsionallyk	130
49. Proporsional kesimleriň häsiyetleri.....	132
50. Gönüburçly üçburçlukdaky proporsional kesimler	134
51. Berlen iki kesime orta proporsional kesimi gurmak	136
52. Töwerekdäki proporsional kesimler.....	138
53. Amaly gönükmeme we onuň ulanylyşy.....	140
54. Bilimiňizi synaň.....	142
55. Jemleýji barlag işi	145

Planimetriýa degişli esasy düşunjeler we maglumatlar 147

Jogaplar we görkezmeler 154

5-8-NJI SYNPLARDА GEÇILENLERİ GAÝTALAMAK



Şu bölümdeki meseleler 5-8-nji synplarda öwrenilen geometrik figuralar we olaryň häsiýetlerini ýada salmak üçin berilýär.

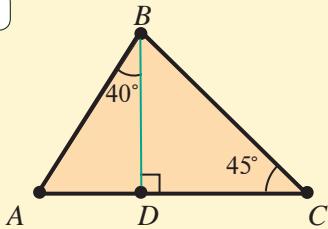
Bölümde PISA we TIMSS - okuwçylaryň bilimini bahalamagyň halkara maksatnamalarynyň meselelerinden hem getirilýär.

Bu bölümdeki materiallary öwrenmek netijesinde aşakdaky bilimleri we endikleri täzelemek mümkünçiligine eýe bolarsyňyz:

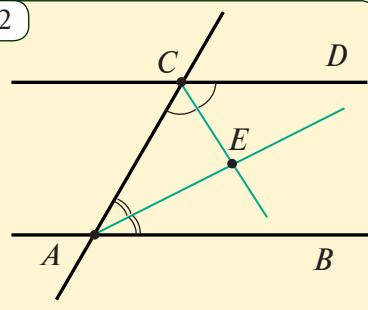
- ✓ *5-8-nji synplarda geometriýadan geçen temalary gaýtalap, alan bilimleriňizi ýada salarsyňyz we alan endikleriňizi berkidersiňiz.*
- ✓ *PISA we TIMSS - okuwçylaryň bilimini bahalamagyň halkara maksatnamalary meseleleri bilen tanyşarsyňyz;*
- ✓ *Bu size 9-njy synpda geometriýany öwrenmeli üstünlilikli dowam etdirmegiňize esas döreder.*

Şu bölümdäki meseleleri çözmek üçin dersligiň ahyrynda getirilen esasy geometrik figuralara degişli maglumatlar hem-de olaryň häsiýetlerini aňladýan formulalardan peýdalanyп bilersiňiz.

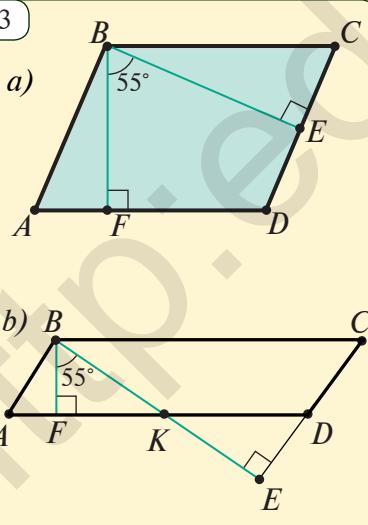
1



2



3



1.1. $\triangle ABC$ üçburçluguň BD beýikligi geçirilen (1-nji surat). Eger $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ bolsa, üçburçluguň A we B depesindäki burçlaryny tapyň.

Cözülişı. 1) Gönüburçly ABD üçburçlukda $\angle ABD = 40^\circ$ we üçburçluguň içki burçlarynyň jemi 180° -a deň bolany üçin

$$\angle A = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ.$$

2) Gönüburçly BCD üçburçlukda $\angle BCD = 45^\circ$ bolany üçin

$$\angle DBC = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ.$$

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \text{ bolany üçin}$$

$$\angle B = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ.$$

Jogaby: $50^\circ, 85^\circ$.

1.2. İki parallel göni çyzygy kesiji bilen kesende emele gelen içki bir taraply burçlaryň bissektrisalarynyň arasyndaky burçy tapyň.

Cözülişı. AC göni çyzyk AB we CD – parallel göni çyzyklary 2-nji suratda görkezilişi ýaly kesip geçen bolsun. İçki bir taraply BAC we ACD burçlaryň bissektrisalary E noktadá kesişen bolup, $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ bolsun. Onda, burcuň bissektrisalarynyň kesgitlemesine görä

$$\angle BAC = x + x = 2x, \angle ACD = y + y = 2y.$$

$AB // CD$ bolany üçin içki bir taraply burçlaryň häsiýetine görä,

$$2x + 2y = 180^\circ, \quad x + y = 90^\circ.$$

$\triangle ACE$ üçburçluguň içki burçlarynyň jemi 180° -a deň bolany üçin

$$\angle AEC = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Jogaby: 90° .

1.3. Eger parallelogramyň kütek burçunyň depesinden onuň iki tarapyna geçirilen beýiklikleriniň arasyndaky burç 55° -a deň bolsa, parallelogramyň burçlaryny tapyň.

Çözülişi. Parallelogramyň BF we BE beýiklikleriniň arasyndaky burç 55° bolsun (3 -nji surat).

Suratda görkezilen iki ýagdaý: a) BE beýiklik CD tarapa; b) BE beýiklik CD tarapyň dowamyna düşen bolmagy mümkün.

a) ýagdaýda $BEDF$ dörтburçluguň burçlarynyň jemi 360° bolany üçin,

$$55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ. \quad \text{Mundan, } \angle D = 125^\circ.$$

b) ýagdaýda BE beýiklik AD tarap bilen kesişen nokat K bolsun. Onda,

$$\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Üçburçluguň daşky burçunyň häsiýetine görä,

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ.$$

Diýmek, iki ýagdaýda-da $\angle D = 125^\circ$.

Onda, $\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle D = 55^\circ$, $\angle B = \angle D = 125^\circ$. *Jogaby:* $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$.

1.4. Dörтburçluguň taraplarynyň ortalarynyň parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. $ABCD$ dörтburçluguň AB, BC, CD we DA taraplarynyň ortalary degişlilikde E, F, K we L nokatlars bolsun. AC diagonaly geçirýäris (4 -nji surat). $EFKL$ – parallelogramdygyny görkezýäris.

EF kesim ABC üçburçluguň, KL kesim bolsa ACD üçburçluguň orta çyzygy bolýar. Onda, üçburçluguň orta çyzygynyň häsiýetlerine görä,

$$EF \parallel AC, KL \parallel AC, EF = \frac{1}{2} AC, KL = \frac{1}{2} AC.$$

Mundan $EF \parallel KL$ we $EF = KL$. Şonuň üçin, parallelogram nyşanyna görä, $EFKL$ – parallelogram.

1.5. ABC üçburçlukda $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$ bolsa, üçburçluguň üçünji içki burçuny we daşky burçlaryny tapyň.

1.6. ABC üçburçluguň AC tarapyna parallel gönü çyzyk AB we BC taraplary degişlilikde E we F nokatlarda kesip geçýär. Eger $\angle BEF = 65^\circ$ we $\angle EFC = 135^\circ$ bolsa, ABC üçburçluk burçlaryny tapyň.

1.7. ABC üçburçluguň bissektrisalary I nokatda kesişyär. Eger $\angle A = 80^\circ$ we $\angle B = 70^\circ$ bolsa, AIB, BIC we CIA burçlary tapyň.

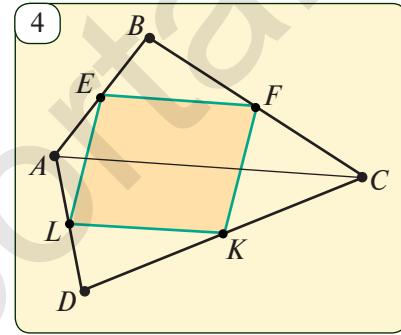
1.8. Deňyanly üçburçluguň bir daşky burçy 70° -a deň. Üçburçluguň burçlaryny tapyň.

1.9. ABC üçburçluguň AK bissektrisasy geçirilen. Eger $\angle BAK = 47^\circ$ we $\angle AKC = 103^\circ$ bolsa, üçburçluguň burçlaryny tapyň.

1.10*. ABC üçburçluguň beýiklikleri H nokatda kesişyär. Eger $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ bolsa, AHB, BHC we CHA burçlary tapyň.

1.11. Üçburçluguň orta çyzyklary ony dört deň üçburçluklara bölýändigini subut ediň.

1.12*. ABC üçburçlukda CD mediananyň dowamyna bu mediana deň DE kesim goýlan. AF mediananyň dowamyga AF mediana deň FH kesim goýlan. B, H, E nokatlaryň bir gönü çyzykda ýatýandygyny subut ediň.



1.13. *ABC* deňyanly üçburçlukda ($AB=BC$) AN we CK bissektrisalar geçirilen.

a) KN kesim AC tarapa paralleldigini görkeziň.

b) $AK=KN=NC$ deňligiň dogry bolýandygyny subut ediň.

1.14. *ABCD* gönüburçlugyň A we D burçlarynyň bissektrisalary BC tarapda

kesisyär. Eger $AB = 4 \text{ cm}$ bolsa, bu gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

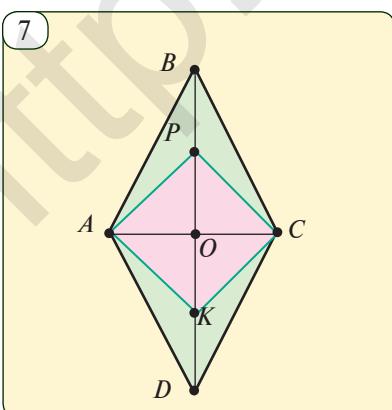
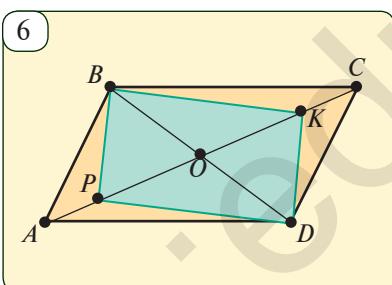
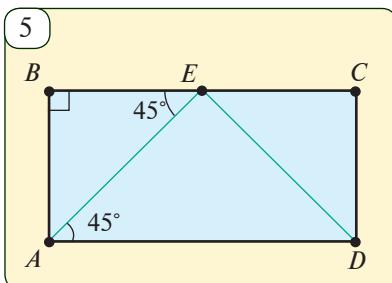
Cözülişi. Gönüburçlugyň A we D burçlarynyň bissektrisalary kesişen nokat E bolsun (5-nji surat). $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAE = 45^\circ$ bolany üçin $\angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Yagny, ABE — deňyanly üçburçluk.

Onda, $AB = BE = 4 \text{ (cm)}$. Edil şuňa meňzeş $EC = CD = 4 \text{ (cm)}$ we bolýandygyny görkezmek mümkün. Mundan $BC = BE + EC = 8 \text{ (cm)}$ we

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Jogaby: 32 cm^2 .

1.15. Dörtburçlugyň üç burçy 47° , 83° we 120° -a deňligi mälim. Onuň dördünji burçuny tapyň.



1.16. Parallelogramyň iki burçunyň jemi 156° -a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

1.17. Gönüburçlugyň diagonallarynyň arasyndaky burç 74° . Onuň bir diagonaly bilen taraplarynyň arasyndaky burçlary tapyň.

1.18. Deňyanly trapesiyanyň iki burçunyň tapawudy 40° -a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

1.19. Rombuň burçlaryndan biri ikinjisinden üç esesuly. Rombuň burçlaryny tapyň.

1.20. *ABCD* gönüburçlugyň A burçunyň bissektrisasy BC tarapyny 2 cm we 6 cm -e deň kesimlere bölyär. Gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

1.21. Taraplary 3 cm we 6 cm , uly taraplarynyň arasyndaky aralyk bolsa 2 cm bolan parallelogram guruň.

1.22. *ABCD* parallelogramyň AC diagonalynda P we K nokatlar saýlanan (6-nji surat). Eger $OP = OB = OK$ bolsa, $BKDP$ gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

1.23*. *ABCD* rombuň BD uly diagonalynda P we K nokatlar saýlanan (7-nji surat). Eger $OA = OP = OK$ bolsa, $APCK$ dörtburçlugyň kwadratdygyny subut ediň.

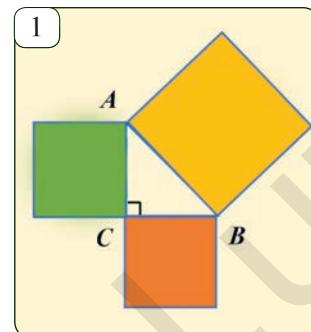
1.24*. *ABCD* parallelogramyň BD diagonalynda P we K nokatlar saýlanan. Eger $BP = KD$ bolsa, $APCK$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

Bu meşhur teoremanyň 3 hili aňlatmasyny getirip, ony ýada salýarys.

a) tekstli aňlatmasy: Gönüburçly üçburçlugsyň gipotenuzasynyň kwadratry katetleriniň kwadratlarynyň jemine deň.

b) matematiki aňlatmasy: ABC üçburçlukda: $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bolsa, $c^2 = a^2 + b^2$ bolýar.

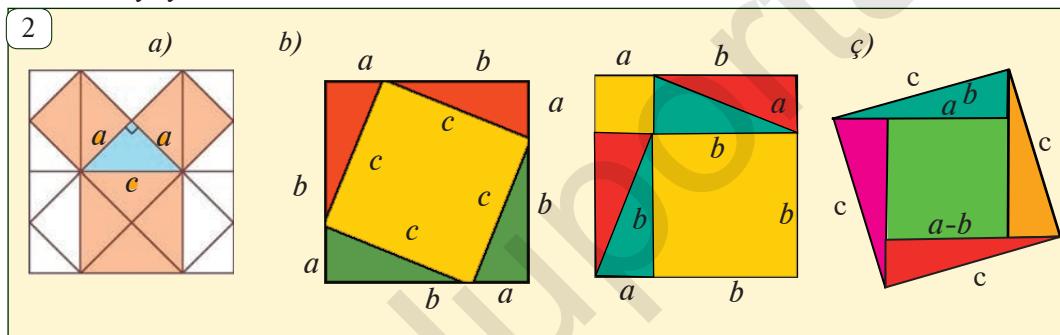
ç) şekilli aňlatmasy: (1-nji surat).



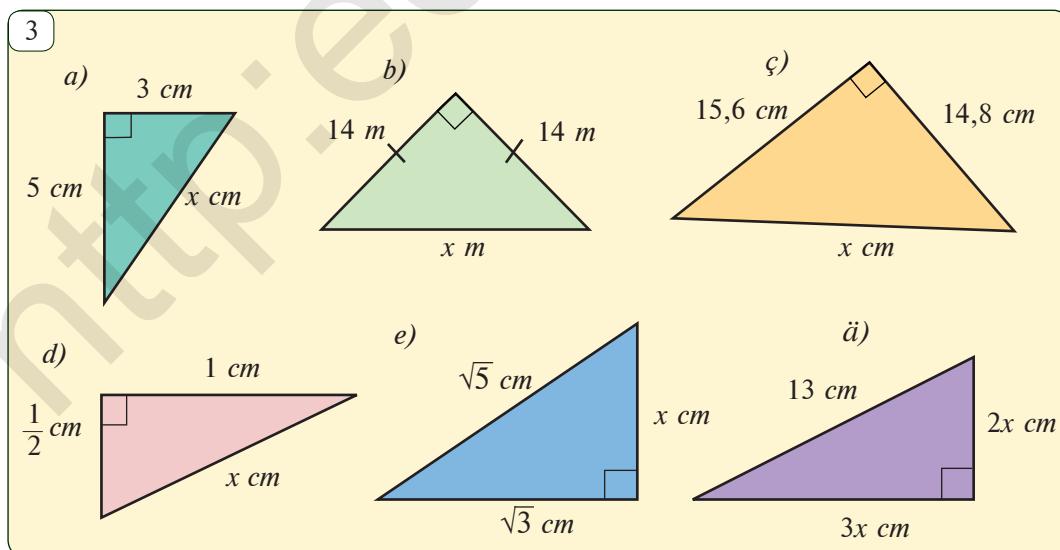
?

Meseleler we ýumuşlar

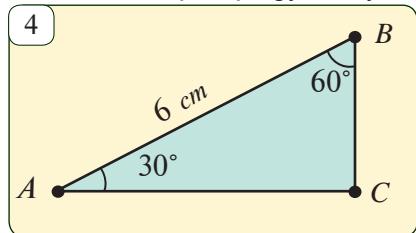
2.1.2-nji suratda getirilen suratlar esasynda Pifagoryň teoremasynyň birnäçe subudyny dikeldiň.



2.2. 3-nji suratda berlenlere görä näbellini tapyň.



2.3. ABC üçburçluguň AB tarapы 6 cm , A we B burclary, degişlilikde, 30° we 60° bolsa, ABC üçburçluguň meýdanyny tapyň.



BC=3 cm (4-nji surat).

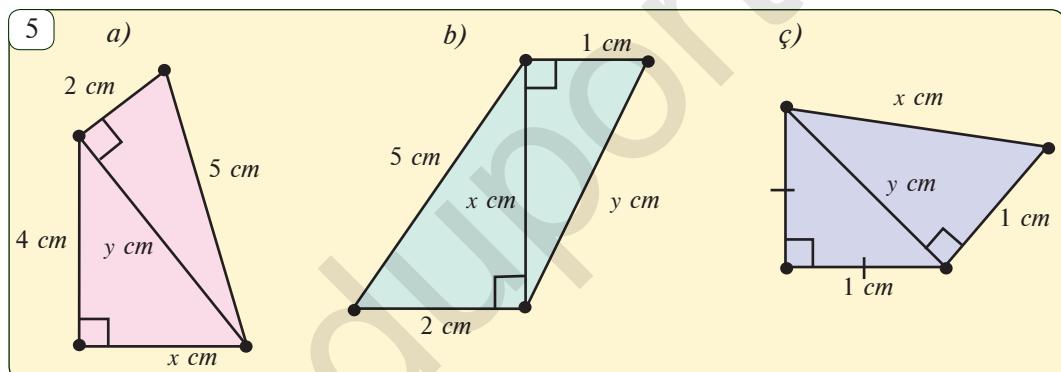
Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyп AC kateti tapýarys:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27 = 3\sqrt{3}, \quad AC = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Endi üçburçluguň meýdanyny tapyýarys:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2).$$

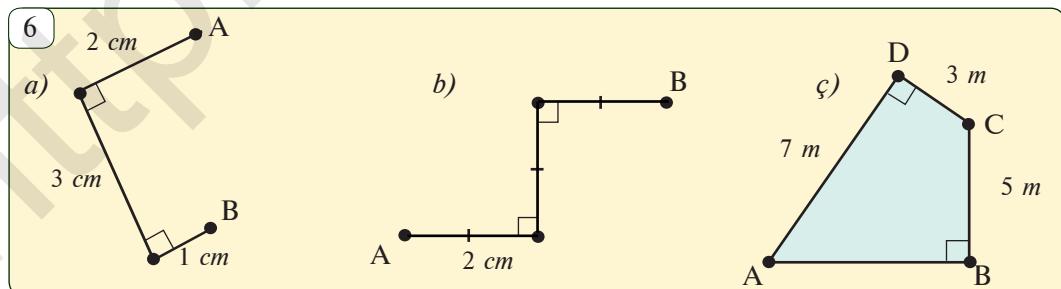
Jogaby: $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.



2.4. 5-nji suratda berlenlere görä näbellileri tapyň.

2.5. Katetleri 15 cm we 20 cm bolan gönüburçly üçburçluguň gipotenuzasyna geçirilen beýikligini tapyň.

2.6 6-njy suratda degişli kesimi(leri) gurup, näbelli AB kesimiň uzynlygyny tapyň.



2.7. 7-nji suratda berlenlerden peýdalanyп gönüburçluguň meýdanyny tapyň.

Çözülişı. Gönüburçluguň kiçi tarapyny x bilen belgilesek, onda Pifagoryň teoremasyna görä: $x^2 + 12^2 = 13^2$;

$$x^2 + 144 = 169; \quad x^2 = 169 - 144 = 25; \quad x = \pm 5.$$

Uzynlyk položitel ululyk bolany üçin $x = 5 \text{ cm}$.

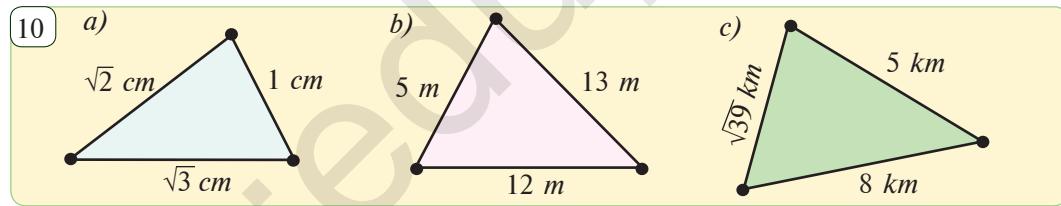
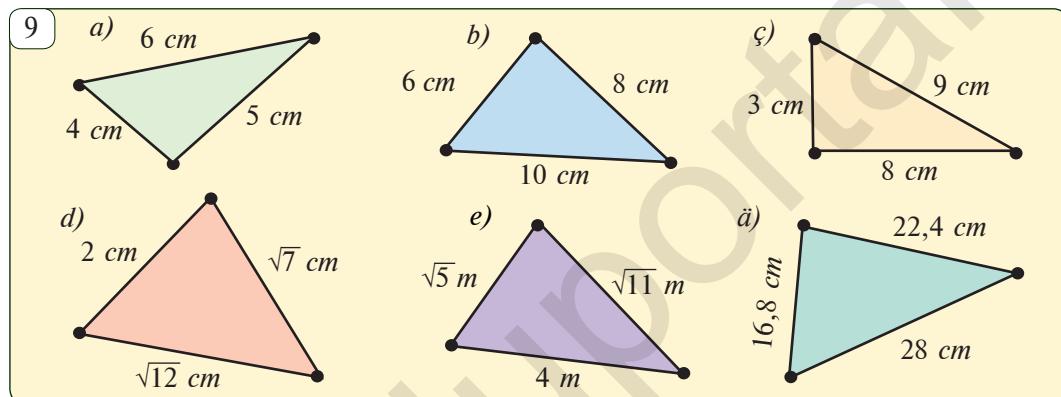
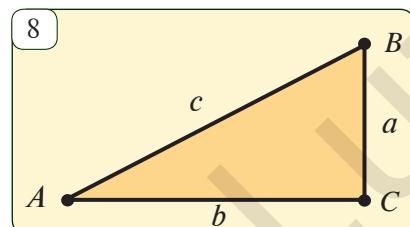
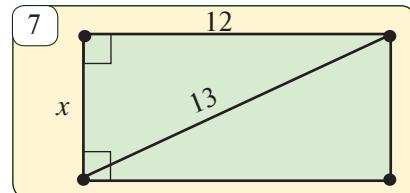
Onda gönüburçluguň meýdany

$$S = a \cdot b = 5 \cdot 12 = 60 (\text{cm}^2). \quad \text{Jogaby: } 60 \text{ cm}^2.$$

H Teorema. Eger taraplary a, b we c olan üçburçlukda $c^2 = a^2 + b^2$ bolsa, bu üçburçluk gönüburçly bolýar (8-nji surat).

2.8. 9-njy suratdaky üçburçluklar näanygrak görkezilen. Olaryň haýsysy gönüburçly?

2.9. 10-njy suratdaky üçburçluklar näanygrak görkezilen. Olaryň haýsysy gönüburçly?



2.10. 11-nji suratda görkezilen näbelli meýdany tapyň.

2.11. 12-njy suratdaky rombuň diagonallary 6 cm we 8 cm bolsa, onuň tarapyny tapyň.

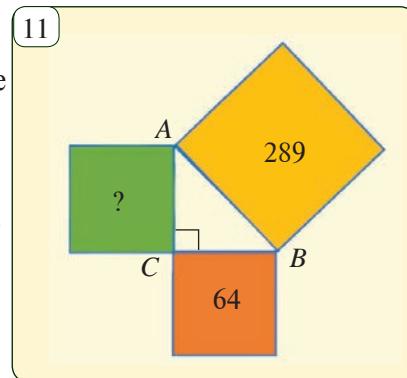
2.12. 13-nji suratdaky deň taraply üçburçluguň tarapy 6 m bolsa, onuň beýikligini tapyň.

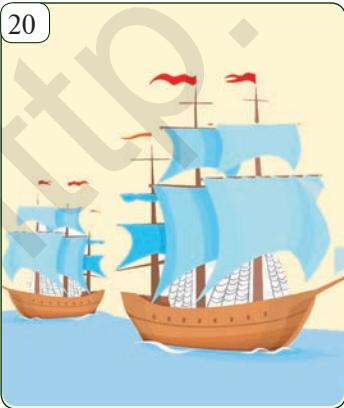
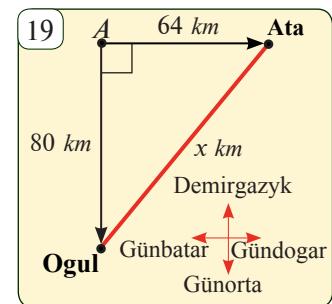
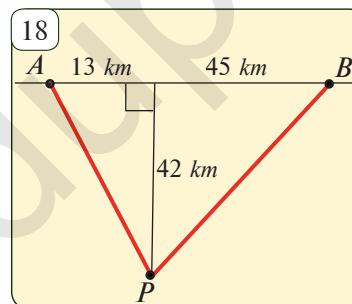
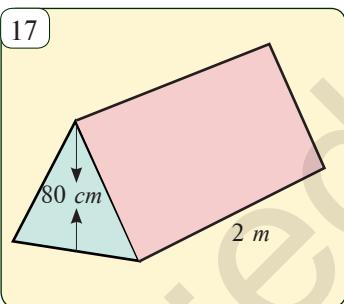
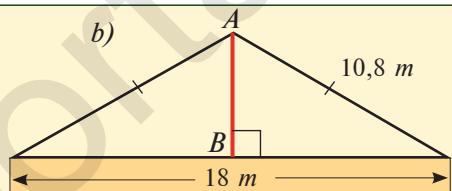
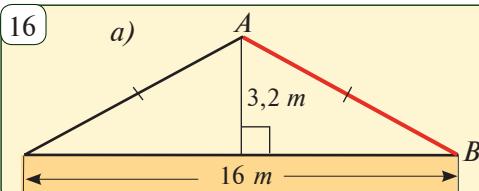
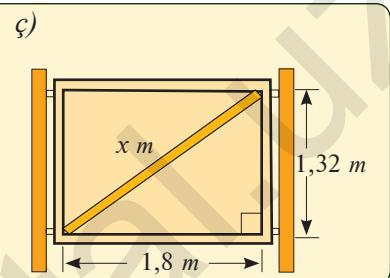
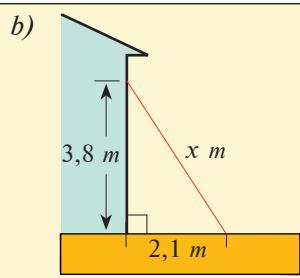
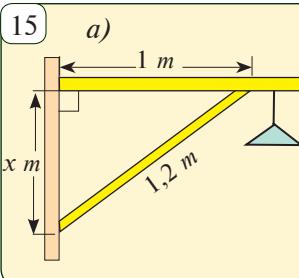
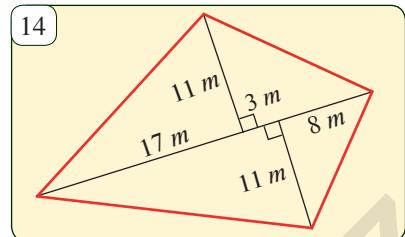
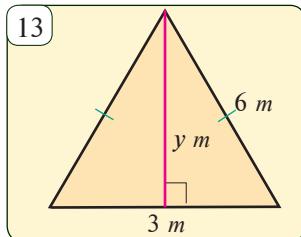
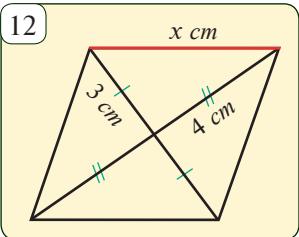
2.13. 14-nji suratda görkezilen şekiliň perimetrinini tapyň.

2.14. 15-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, nämälim uzynlygy tapyň.

2.15. 16-njy suratda berlenlerden peýdalanyп, AB kesim uzynlygyny tapyň.

2.16. 17-nji suratda görkezilen çadyryň öň tarapy deň taraply üçburçluk şeklärinde. Berlenlerden peýdalanyп çadyryň esasyňyň meýdanyny tapyň.





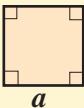
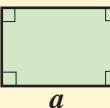
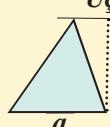
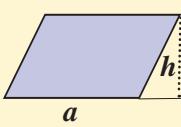
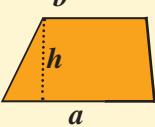
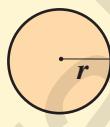
2.17. 18-nji suratda P elektrostansiýadan A we B şäherlere sim çekilmekçi. Munuň üçin näçe sim gerek bolar?

2.18. A nokatdan ata 16 km/h tizlik bilen gündogara, ogly bolsa 20 km/h tizlik bilen welosipedde günorta tarap hereketlenýär (19-nji surat). 4 sagatdan soň olaryň arasyndaky aralyk näçe bolýar?

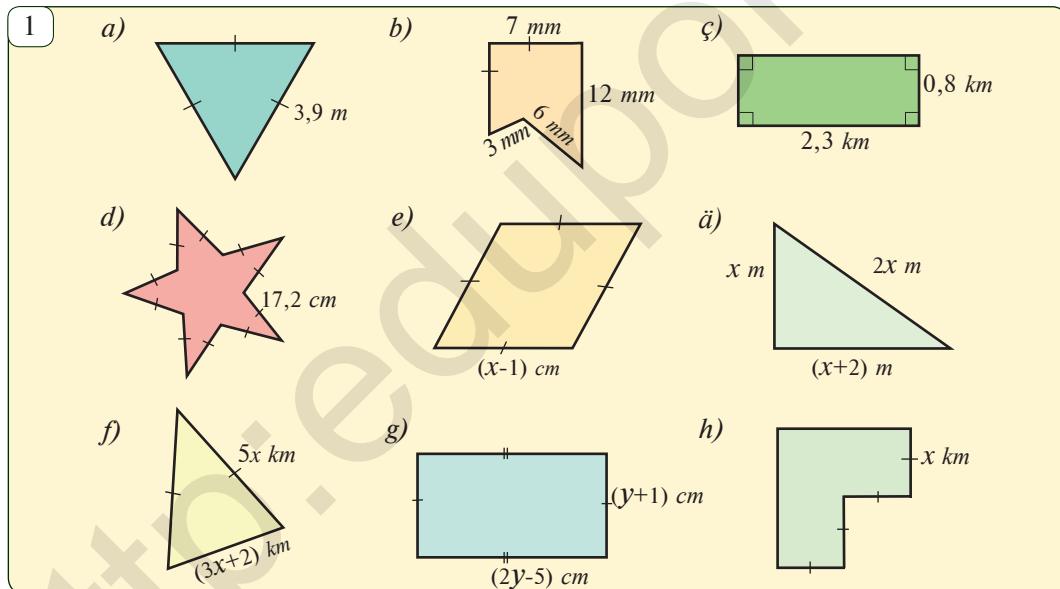
2.19. Iki kapitan Jek we Huk Jumabaý adasyndan öz gämilerinde sapara çykdylar (20-nji surat). Birinjisi 15 km/h tizlik bilen demirgazyga, ikinjisi bolsa 19 km/h tizlik bilen günbatara tarap ýüzüp gitdiler. 2 sagatdan soň olaryň arasyndaky aralyk näçe bolar?

GEOMETRIK FIGURALARYŇ PERIMETRINI WE MEÝDANYNY HASAPLAMAGA DEGIŞLİ MESELELER

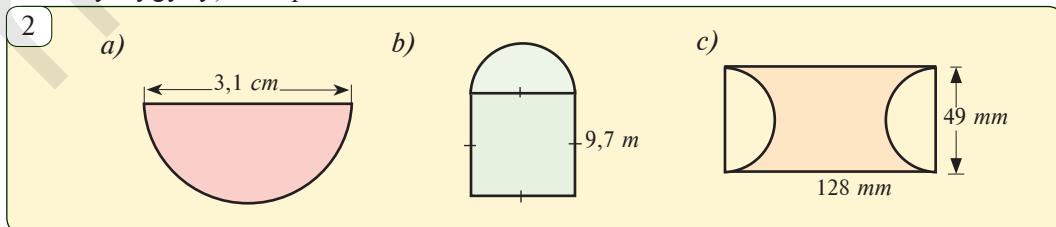
Aşakda tekiz geometrik figuralaryň perimetreni we meýdanyny hasaplamaga degişli dürlü meselelere garaýarys.

Kwadrat  $P = 4a$ $S = a^2$	Gönüburçluk  $P = 2(a+b)$ $S = ab$	Üçburçluk  $S = \frac{1}{2}ah$
Paralelogram  $S = ah$	Trapesiýa  $S = \frac{a+b}{2}h$	Tegelek  $l = 2\pi r$ $S = \pi r^2$

3.1. 1-nji suratda görkezilen köpburçluklaryň perimetreni hasaplaň.



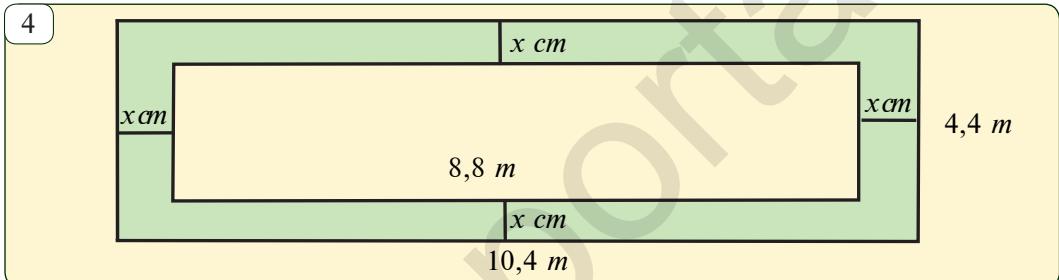
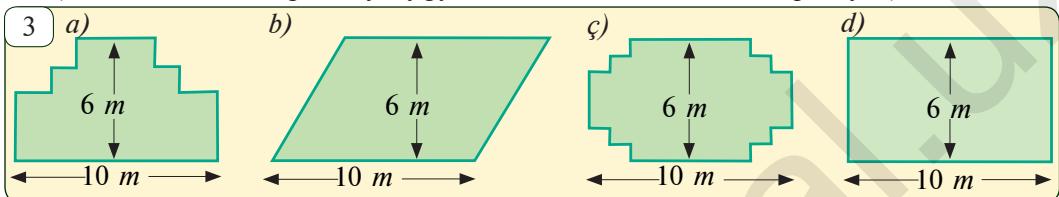
3.2.2-nji suratda görkezilen geometrik figuralaryň perimetreni (araçäginiň uzynlygyny) hasaplaň.



3.3. 3-nji suratda görkezilen gülzarlary 32 m sim bilen gurşamak bolarmy?

3.4. 4-nji suratda otagyň petigi görkezilen. Petigiň içki bölegini ak, daşky bölegini bolsa ýaşyl reňk bilen boýamaly. 1. Suratda belgilenen näbelli kesimiň uzynlygyny tapyň. 2. Ýaşyl reňke boýalan petigiň böleginiň meýdanyny tapyň. 3. Ak reňke boýalan petigiň böleginiň meýdanyny tapyň.

3.5. Welosipediň tigiriniň diametri 64 cm .(5-nji surat) Aşyr welosipedde 100 m aralygy geçdi. Munda welosipediň her bir tigiri näçe gezek doly aýlandy? (Ýatlatma: tòweregىň uzynlygy $C=2\pi r$ formula bilen hasaplanýar).



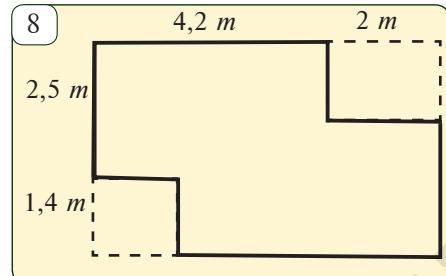
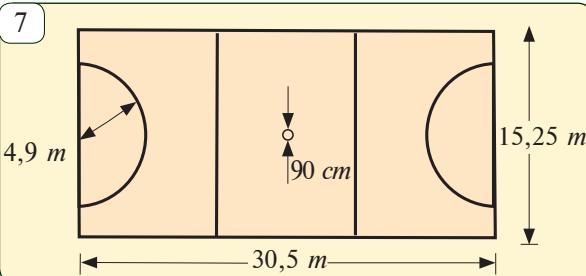
3.7. Awtomobiliň şinasynyň üstündäki ýazuw mälim ölçegleri aňladýar (6-njy a surat). Meselem, $195/55 R16$ ýazuwda 195 sany şinanyň giňligini mm-lerde aňladýar (6-njy b surat). Ikinji saň 55 - şinanyň profiliniň beýikliginiň şinanyň giňligine görä göterimini görkezýär. Biziň ýagdaýda şinanyň profiliniň beýikligi $195 \cdot 55\% = 107\text{ mm} = 10,7\text{ cm}$. $R16$ ýazuw bolsa şinanyň içki diametriniň dýuýmlardaky aňlatmasy. 1 dýuým takmynan $2,54\text{ cm}$ bolýandygyny hasaba alsak, biziň şinanyň içki diametri $16 \cdot 2,54 = 40,64\text{ cm}$ -e deň bolýar.

Ravon kysymly Neksiýa awtomobiliniň şinasыnda $175/60 R15$ ýazuw bar. Bu awtomobiliň şinasynyň giňligini, profiliniň beýikligini, içki diametrini we tigiriň beýikligini ýagny daşky diametrini santimetrlerde anyklaň.

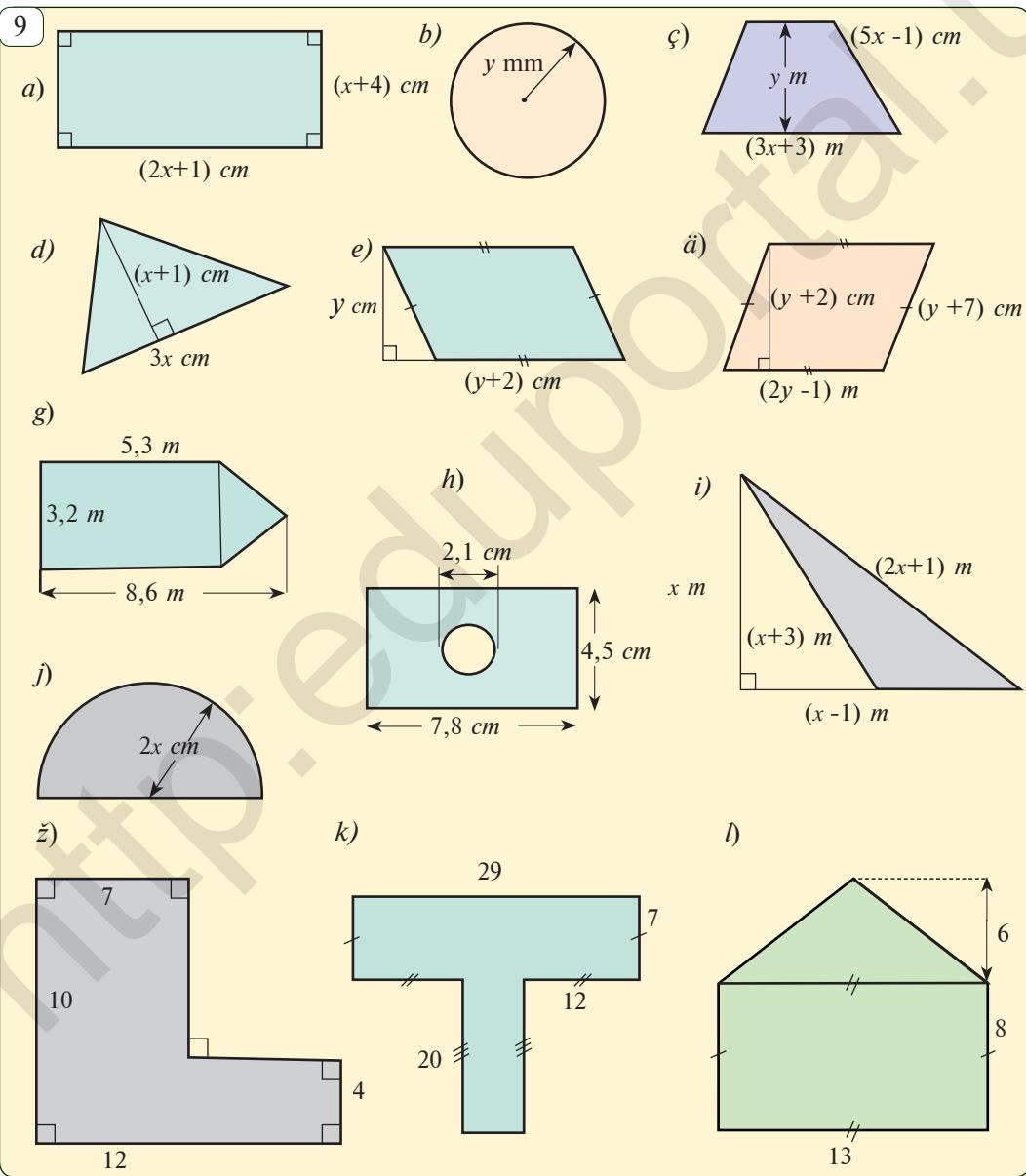


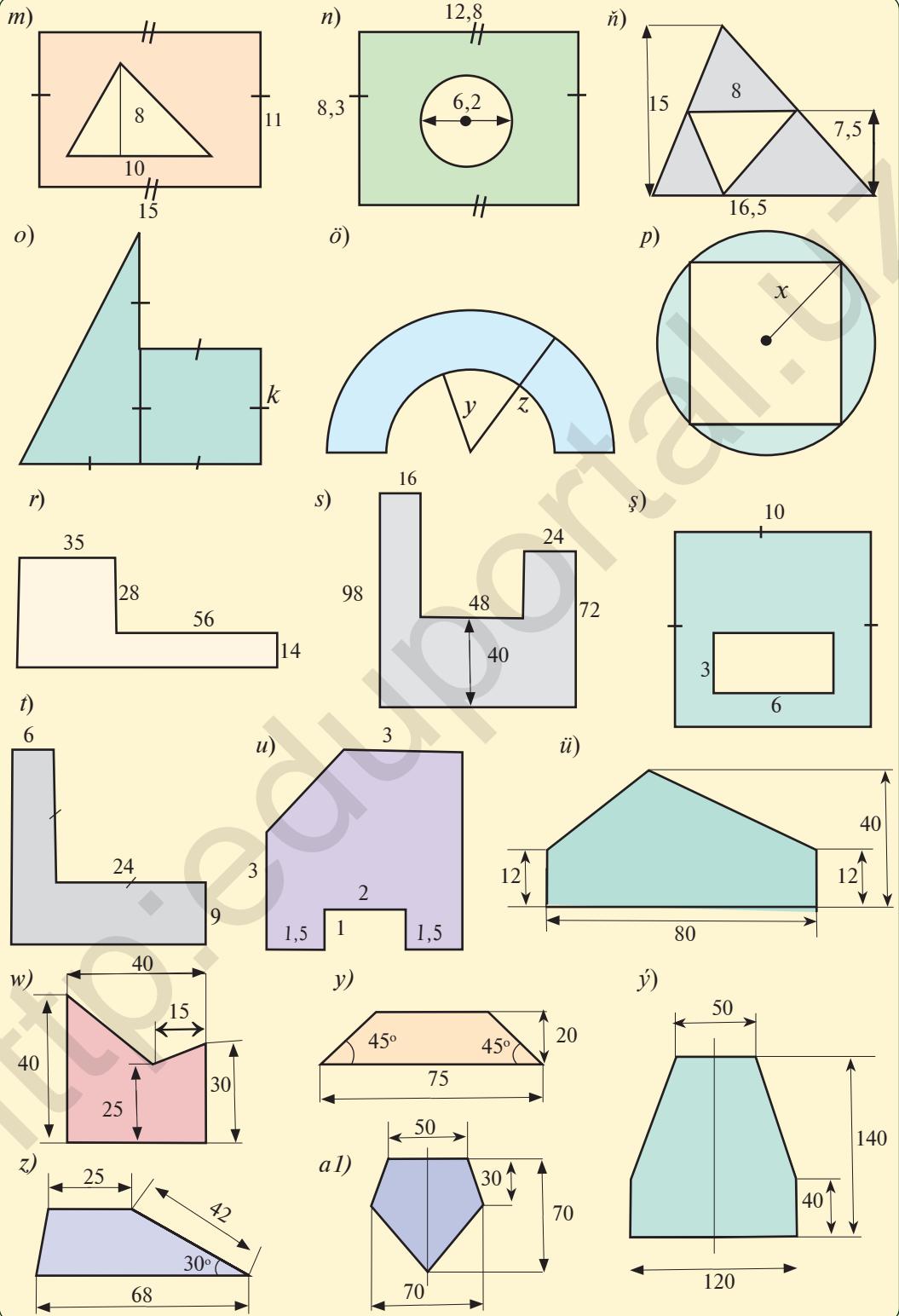
3.8. 7-nji suratda berlen amerikança futbol stadionynyň perimetrini hasaplaň. Bu stadionyň meýdanyny belgilemek üçin çyzylýan çyzyklaryň jemi uzynlygyny tapyň.

3.9. 8-nji suratda görkezilen ýer uçastogunyň perimetrini tapyň.

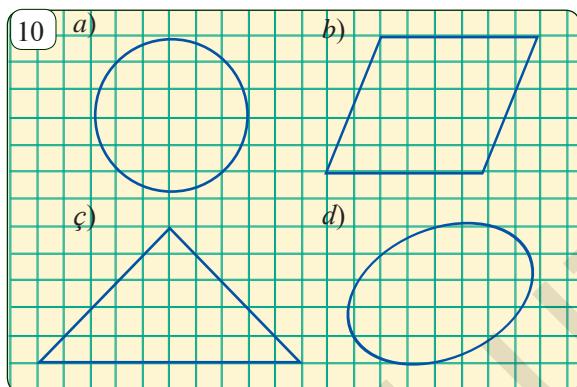


3.10. 9-njy suratda görkezilen dürli şekildäki uçastoklaryň meýdanyny tapyň.

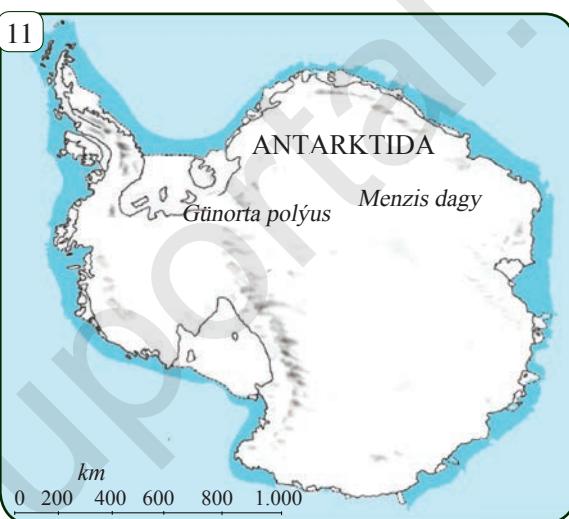




3.11. Amaly ýumuş. 10-njy suratda getirilen şekilleri gözenekli depderiňize çyzyň. Olaryň meýdanyny tapmak üçin nähili usullaryny teklip edýärsiňiz? Depderiňiziň gözeneklerinden peýdalanyп olaryň meýdanyny takmynan nädip anyklamak bolar?



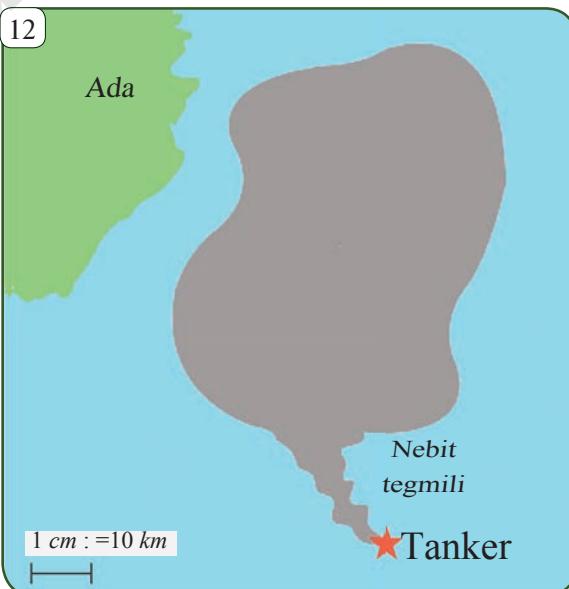
3.12. 11-nji suratda Antraktida kontinentiniň kartasy getirilen. Berlen masstabdan peýdalanyп we degişli kömekçi gurmalary ýerine ýetirip, kontinentiň meýdanyny takmynan anyklaň.



3.13. 12-nji suratda nebit daşaýan tanker heläkçilige duçar bolup, deňziň üstünde uly nebit tegmili peýda bolupdyr. Berlen masstabdan we degişli ölçeg işlerini ýerine ýetirip, nebit tegmiliniň meýdanyny tapyň.

3.14. Mellek perimetri 48 m bolan kwadrat şeklärde. Ol 8 deň gönüburçluk şeklärindäki uçastoklara bölünen. Emele gelen gönüburçly uçastoklaryň a) taraplaryny; b) meýdanyny anyklaň. Uçastoklaryň meýdany mellegiň meýdanyndan näçe gösterim kiçi?

3.15. Perimetri 20 m , uzynlygy ininden $1,5$ esse uzyn bolan gönüburçluk şeklärindäki mellek kiçi uçastoklara bölünen. Eger uçastoklar a) kwadrat; b) gönüburçluk şeklärde bolsa, olaryň arasynda meýdany iň uly bolanynyň ölçeglerini anyklaň.

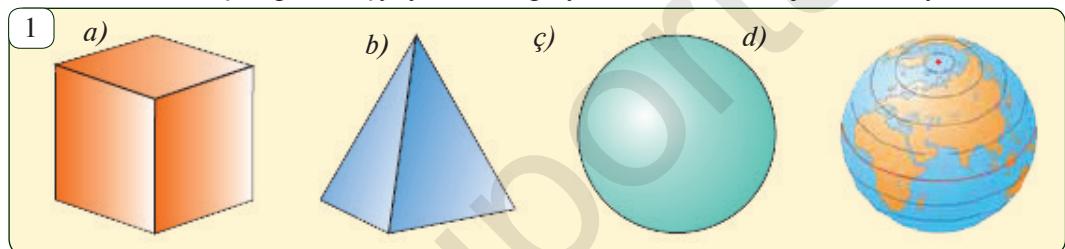


Mälim bolşy ýaly, tekiz şekilleri geometriýanyň planimetriýa bölümü, giňişlikdäki jisimleri stereometriýa bölümü öwrenýär. Meselem, gönüburçluk - tekiz şekil bolup, onuň uzynlygy we ini, ýagny ikiölçegi bar. Parallelepiped bolsa giňişlikdäki şekil bolup, onuň uzynlygy, ini we beýikligi, ýagny üçölçegi bar.

Giňişlikdäki jisimler barada öňki synplarda düşünjä eýe bolansyňyz. Olary 10-11-nji synplarda stereometriýa kursunda giňişleýin, ulgamly ýagdaýda öwrenersiňiz. Şeýle bolsa-da, stereometriýanyň ençeme meseleleri bar bolup, olary diňe planimetriýanyň kömeginde-de çözmez mümkin. Aşakda planimetriýa degişli şeýle 3D (3 demention - 3 ölçegli) geometrik meseleleri getirýäris. Giňişlikdäki jisimler baradaky esasy düşünjeleri gysgaça ýatladyp geçmegi makul bildik.

Giňişligiň çäklenen bölegi *giňişlikdäki jisim* diýlip atlandyrlyýar. Giňişlikdäki jisimiň araçägine (gabygyna) onuň *üsti* diýilýär. Meselem, giňişlikdäki şekil - kubuň üsti 6 ta kwadratdan, şaryň üsti sferadan ybarat bolýar.

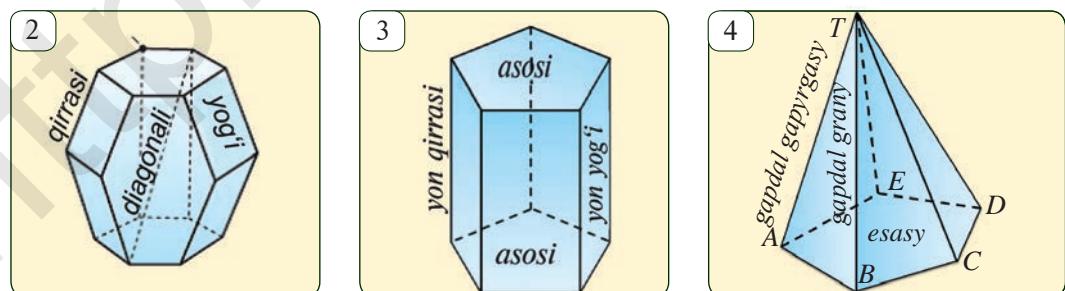
Iki üstün kesişmeginden çzyyk emele gelýär. Meselem, 1-nji suratdaky kubuň we



piramidanyň gapyrgalary şeýle tekizlikleriň kesişmeginden emele gelen. Sferanyň we tekizligiň kesişmeginden bolsa töwerek emele gelýär.

Iki çyzygyň kesişmeginden nokat emele gelýär. Meselem, 1-nji suratdaky kubuň we piramidanyň gapyrgalarynyň kesişmeginden nokatlar, ýagny olaryň depeleri emele gelýär.

Köpgranlyk diýip tekiz köpburçluklar bilen çäklenen jisime aýdylýar. Tekiz köpburçluklara bu *köpgranlygyň granlary*, köpburçluklaryň depelerine *köpgranlygyň depeleri*, taraplarya bolsa *köpgranlygyň gapyrgalary* diýilýär. Bir grana degişli bolmadyk depeleri birleşdirýän kesime *köpgranlygyň diagonalı* diýilýär (2-nji surat).



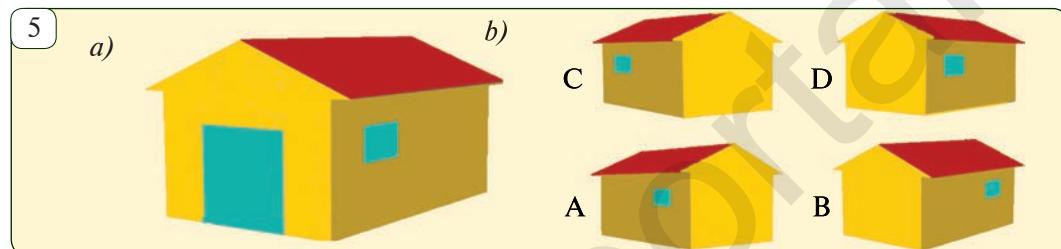
Prizma diýip iki deň köpburçlukdan, galan granlary bolsa parallelogramlardan ybarat köpgranlyga aýdylýär (3-nji surat). Deň granlar prizmanyň *esaslary*, parallelogramlara bolsa onuň *gapdal granlary* diýilýär. Esasynyň

taraplarynyň sanyна garap prizmalar *içburçly, dörtburçly we başga n-burçly prizmalar* diýilýär.

Piramida diýip bir grany köpburçlukdan, galan granlary bolsa bir depä eýe üçburçluklardan ybarat köpgranlyga aýdylýar. Köpburçluk piramidanyň *esasy*, üçburçluklar bolsa onuň *gapdal granlary* diýlip atlandyrylyar. 4-nji suratda *TABCDE* başburçly piramida görkezilen. *ABCDE* başburçly piramidanyň esasy, *ATB, BTC, CTD, DTE* we *ETA* üçburçluklar - onuň gapdal granlary, T - bolsa onuň depesi.

4.1 5-nji a suratda garaž görkezilen. 5-nji b suratda bolsa onuň dürli ýerden görnüşleri berlen. Olardan diňe biri ýokardaky garaža degişli. Bu görnüş haýsy?

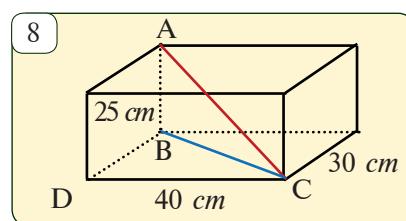
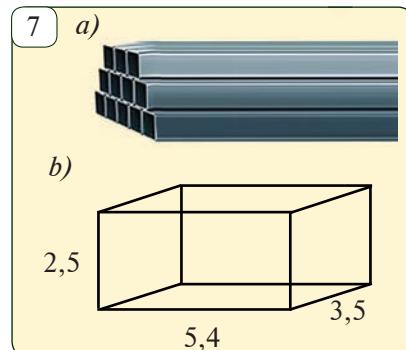
4.2. 6-njy a we 6-njy b suratda binanyň gapdal tarapyndan garanda görnen şekilleri getirilen. 6-njy ç suratda bolsa binanyň depesinden görnüşi we oňa garalan dört nokatlaryň orny belgilenen. Haýsy nokatdan bina garanda 1) 6-njy a suratdaky; 2) 6-njy b suratdaky şekilleri görmek mümkün?



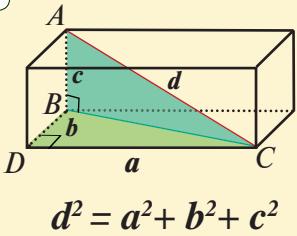
4.3. 12 sany 6 metrlik turbalar bar (7-nji a surat). Olardan ini 3,5 m, uzynlygy 5,4 m we beýikligi 2,5 m bolan gönüburçly parallelepiped şeklärindäki garažyň karkasyny taýýarlamaly (7-nji b surat). Turbalar gerekli uzynlykdaky bölekliere kesilip, soň kebşirlenýär.

Iň tygşytly wariantda kesende bu karkas üçin näçe turba harçlanar? Şeýle kesende näçe turba çykynda çykar?

4.4. Käbir howa ýollary kompaniyalarynyň samolýotlaryna alyp münülýän ýolagçylaryň çemodanynyň diagonalynyň uzynlygy 56 cm-dan uly bolmaly däl. 8-nji suratda görkezilen gönüburçly parallelepiped şeklärindäki, ölçegleri 40 cm × 30 cm × 25 cm bolan çemodany samolýota alyp münmek mümkünmi?



9



Çözülişi: Ilki çemodanyň esasyndaky BC kesimiň uzynlygyny tapýarys. Pifagoryň teoremasyna görä: $BC^2 = 40^2 + 30^2$.

ABC üçburçluk gönüburçly üçburçluk. Yene Pifagoryň teoremasындан peýdalanylар, çemodanyň diagonalyny tapýarys:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

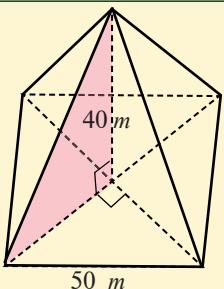
$$AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125. AC = 55,9 \text{ cm}.$$

Jogaby: Mümkin, çünkü $AC < 56 \text{ cm}$.

Ýokardaky meseläniň çözüwinden umumy ýagdaýda aşakdaky ajaýyp häsiyet gelip çykýar. Ony Pifagoryň teoremasыныň giňişlikdäki analogy (meňzeşi) hem diýýärler. Bu häsiyeti özbaşdak subut etjek boluň (9-njy surat).

Teorema. Gönüburçly parallelepipediň diagonalynyň kwadraty onuň üçölçegleriniň (uzynlygy, ini we beýikligi) kwadratlarynyň jemine deň.

10



4.5.10-njy suratda görkezilen dogry piramidanýň beýikligi 40 m -e deň, esasy bolsa tarapy

50 m bolan kwadratdan ybarat. Piramidaňy gapdal gapyrgasyny tapyň.

4.6.11-nji suratda görkezilen prizma şeklindäki çadyry dikmek üçin näçe material gerek bolar?

4.7. Tarapy 8 cm -e deň bolan kwadrat şeklindäki listi 12-nji suratda görkezilişi ýaly edip epläp piramida alyndy.

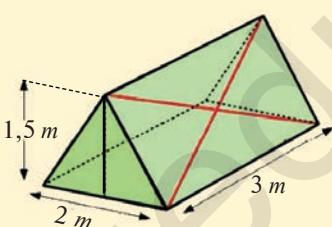
Piramidanýň göwrümini tapyň.

4.8. Gönüburçly parallelepiped şeklindäki gaby hiç hili ölçeg esbaplaryndan peýdalamanmazdan, hiç hili hasaplamlary ýerine ýetirmezden nähili edip ýarysyna çenli suw bilen doldurmak mümkin? Eger ebyň uzynlygy 4 cm , ini bolsa beýikliginden $0,5 \text{ cm}$ uzyn, beýikligi bolsa uzynlygynyň $37,7\%$ -ni tutsa, gapdaky suwuň göwrümini hasaplaň.

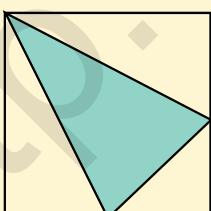
4.9. Birmeňzeş ölçegdäki kitaplary sandyjak salmaly (13-nji surat). Bu sandyjak näçe kitap sygar?

4.10. İki akvariuma ýokarky gyrasyndan 10 cm pes edip suw guýuldy (14-nji surat). Haýsy akvariumda suw köp?

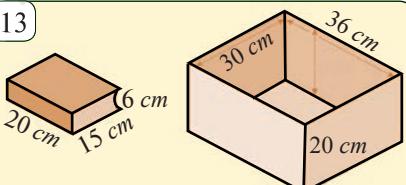
11



12



13



14

50 cm
30 cm
40 cm

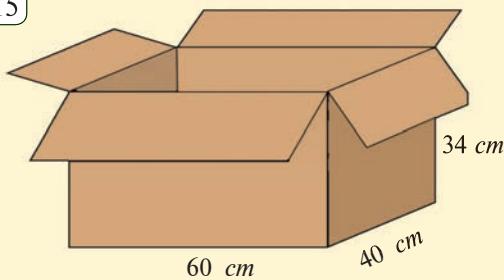
b)

40 cm
30 cm
50 cm

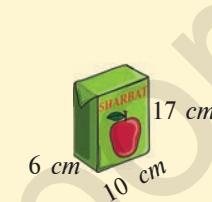
4.11. Guta näçe paket miwe şerbeti sygar (15-nji surat)?

4.12. 1 litrlik miwe şerbetiniň paketi gönüburçly parallelepiped şeklärinde (16-njy surat). Bir gap üçin näçe material gerek bolar?

15

34 cm
60 cm
40 cm

16

17 cm
8 cm
10 cm

4.13. 17-nji a suratda görkezilen öýüň üçegi piramida şeklärinde. Aşakda okuwçylar tarapyndan bu öýüň çyzgysy (matematiki modeli) çyzylan (17-nji b surat) we käbir kesimleriň uzynlygy görkezilen. Çyzga görä üçegiň esasy $ABCD$ kwadrat şeklärinde. Üçegiň gapyrgalary $EFGHKLMN$ gönüburçly parallelepiped şeklärindäki beton bloga direlen: E - AT gapyrganyň, F - BT gapyrganyň, G - CT gapyrganyň we H - DT gapyrganyň ortasy. Piramidanyň ähli gapyrgalarynyň uzynlygy 12 m .

1. Üçegiň esasy $ABCD$ kwadratyň meýdanyny tapyň.

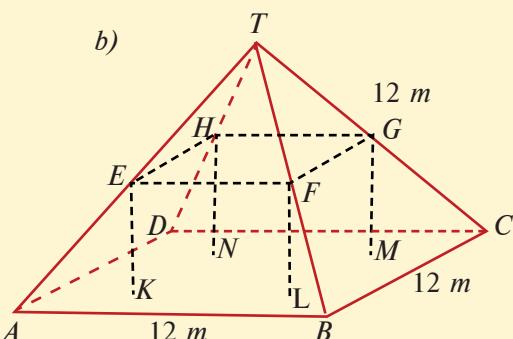
2. Beton bloguň tarapy - EF kesimiň uzynlygyny tapyň.

17

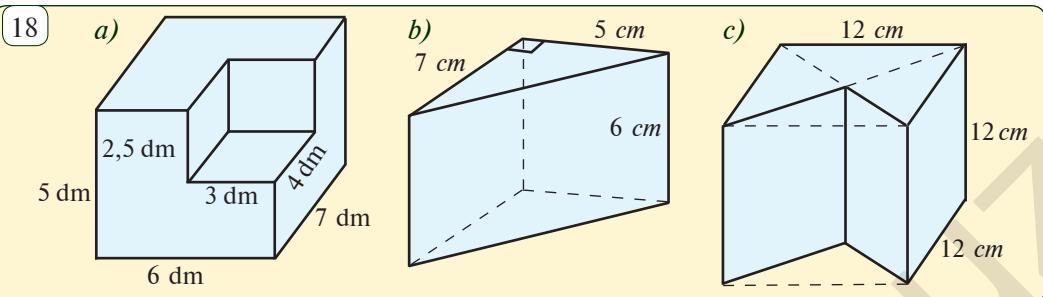
a)



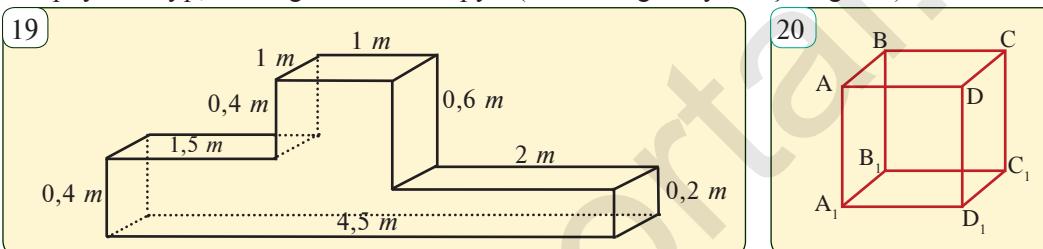
b)



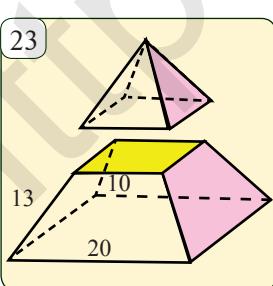
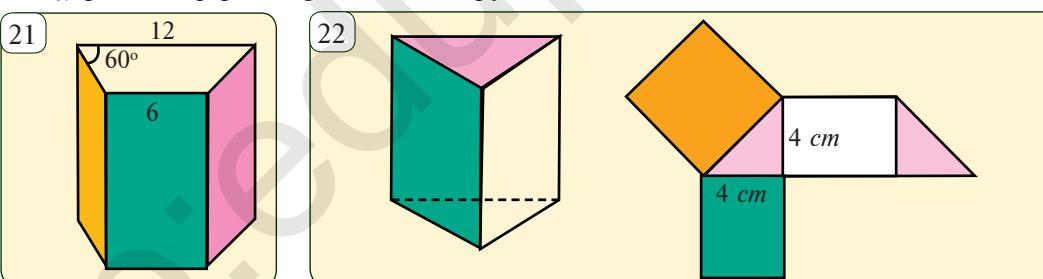
4.14*. 18-nji suratda görkezilen ağaç bölekleriniň göwrümini hasaplaň.



4.15. 19-njy suratda sport arenasyndaky ýeňijilik sypasy görkezilen. Berlenlerden peýdalanyп, onuň göwrümini tapyň (ähli iki granly burçlar goni.)



4.16. 20-nji suratda gönüburçly parallelepipediň AA_1D_1D granynyň perimetri 20 cm , $ABCD$ grany - perimetri 16 cm bolan kwadratdan ybarat. a) $ABCC_1D_1A_1$, döwük çyzygyň uzynlygyny; b) DD_1C_1C granyň perimetreni we meýdanyny; ç) parallelepipediň göwrümini tapyň.

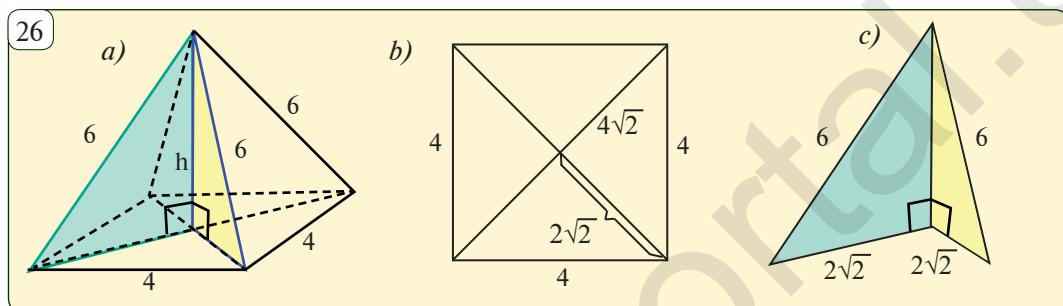
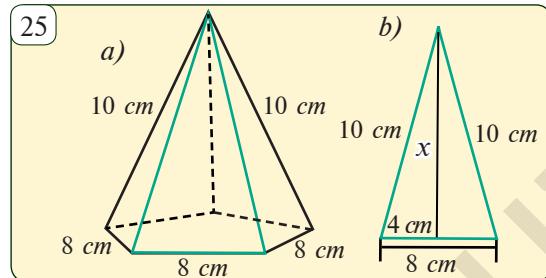
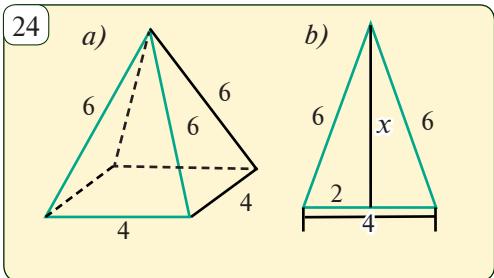


4.17. 21-nji suratda görkezilen dogry prizmanyň esasy deňyanly trapesiyadan ybarat. Trapesiyanyň esaslary 12 cm we 6 cm , esasyndaky ýiti burçlaryndan biri 60° -a deň. Eger prizmanyň uly grany kwadratdan ybarat bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

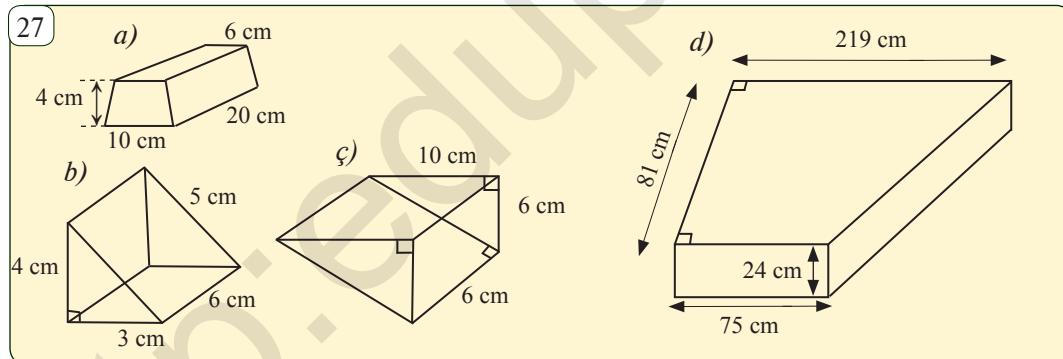
4.18. 22-nji suratda prizma we onuň ýaýylmasы görkezilen. Eger prizmanyň uly grany kwadratdan ybarat bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

4.19. 23-nji suratdaky gönüburçly piramidanыň esasyна parallel болан tekizlik bilen kesilende, kesilen piramida emele geldi. Kesilen piramidanыň esasalarynyň tarapy 20 cm we 10 cm , gapdal gapyrgasy 13 cm bolsa, onuň doly üstüni tapyň.

4.20. 24-26-njy suratlarda berlen maglumatlar we kömekaçlı çyzgylar esasynda näbelli ululyklary tapyň.



4.21. 27-nji suratda berlen maglumatlar esasynda köpgranlyklaryň doly üstüni we göwrümini tapyň.

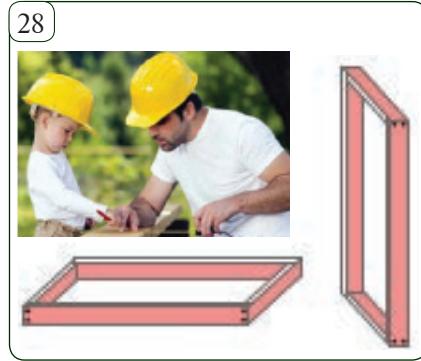


Geometriýa we neçjarlyk

Uzynlygy 2 m 20 cm, ini 12 cm we galyňlygy 2 cm bolan reýkalardan atasy we ogly ini 1 m uzynlygy 1 m 80 cm bolan çarçuwa ýasamakçy.

1. Bu çarçuwany ýasamagyň planyny düzüň.
2. Ýasalan çarçuwanyň gönüburçluk şeklinde bolýandygyny a) burçly çyzgyjyň; b) ruletkanyň kömeginde nähili barlamak mümkün?

3. 4 sany çarçuwa ýasamak üçin näçe sany reýka talap edilýär? (28-nji surat).

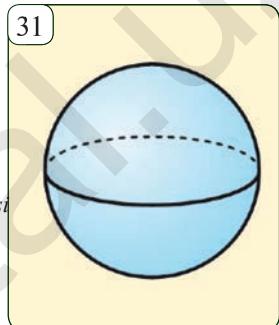
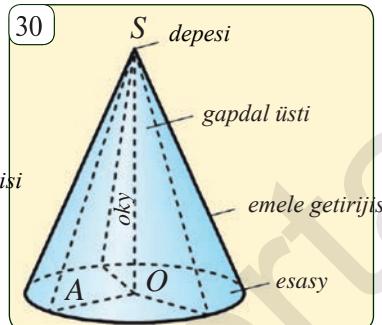
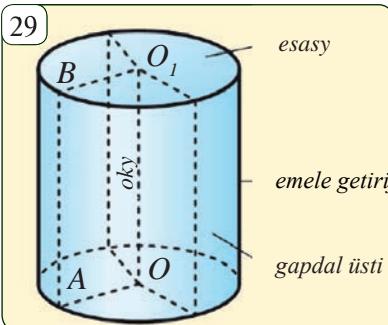


Giňişlikdäki figuralaryň ýene möhüm synplaryndan biri - bu aýlanma jisimleridir. Olara silindr, konus we şar giryär.

Gönüburçlugu bir tarapynyň daşyndan aýlamakdan emele gelen jisime ***silindr*** diýilýär. 29-njy suratda silindriň elementleri: esaslary, emele getirijisi, oky, we gapdal üsti görkezilen.

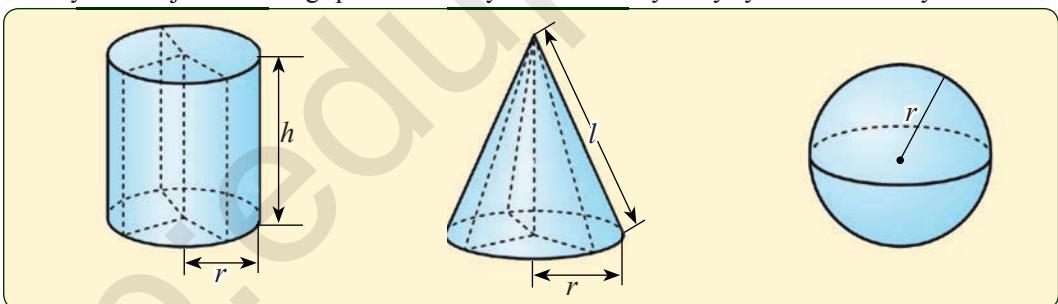
Gönüburçlugu üçburçlugu bir katetiniň daşyndan aýlamakdan emele gelen jisime ***konus*** diýilýär. 30-njy suratda konusyň depesi, gapdal üsti, emele getirijisi we esasy görkezilen.

Tegelegiň öz diametriniň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisime ***şar***



diýilýär (31-nji surat). Munda tòwerek emele getiren üst ***sfera*** diýlip atlandyrylýar. Görnüşi ýaly, şaryň üstü sferadan ybarat bolýar. Sferanyň merkezinden onuň islendik nokadyna çenli bolan aralyk onuň radiusyny kesgitleýär.

Aýlanma jisimleriň gapdal we doly üstüniň meýdanynyň formulalary:



$$\begin{aligned} \text{Silindr} \\ S_{\text{gapd}} &= 2\pi rh \\ S_{\text{doly}} &= 2S_{\text{esas}} + S_{\text{gapd}} = \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Konus} \\ S_{\text{gapd}} &= \pi rl \\ S_{\text{doly}} &= S_{\text{esas}} + S_{\text{gapd}} = \\ &= \pi r^2 + \pi rl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Şar} \\ S &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1-nji mesele} \\ h = 5 \text{ cm}, r = 6 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S_{\text{gapd}} &= 2\pi r h \approx \\ &\approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 6 = 565 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2-nji mesele} \\ r = 5 \text{ cm}, l = 12 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S_{\text{doly}} &= \pi r^2 + \pi rl \approx \\ &\approx 3,14 \cdot 5^2 + 3,14 \cdot 5 \cdot 12 = \\ &= 267 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3-nji mesele} \\ r = 8 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S &= 4\pi r^2 \approx \\ &\approx 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = \\ &= 803,84 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

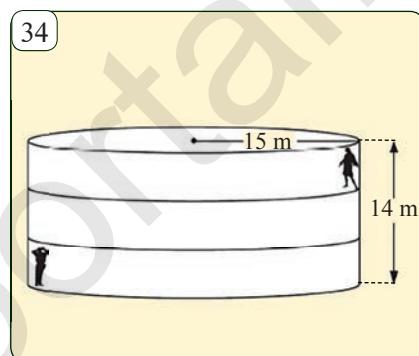
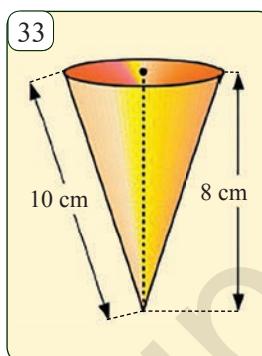
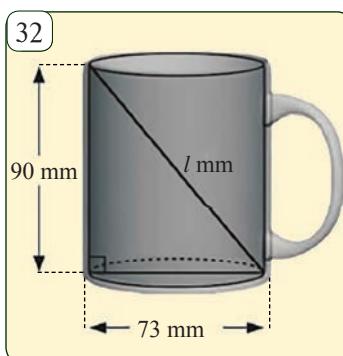
Aşakda planimetriýanyň kömeginde çözülýän aýlanma jisimlere degişli meselelere garap geçyäris.

4.22. Şaryň merkezinden onuň üstünde ýatýan 4 sany nokada çenli bolan aralyklaryň jemi 24 cm^2 -deň. Şaryň diametрini tapyň.

4.23. Aşrafyň finjonynyň (kofe içýän gaby) beýikligi 90 mm , esasynyň diametri 73 mm -e deň (32-nji surat). Kofe salnan şeker ýa-da süýdi garyşdyran wagtynda Aşrafyň eli bişmez ýaly çemçäniň uzynlygy azyndan näçe bolmaly?

Çözülişi: Çemçäniň uzynlygyny 32 -nji suratdaky ýaly l diýip alsak, onda Pifagoryň teoremasyna görä: $l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$ -a eýé bolarys. Mundan $l = 115,9 \text{ mm}$.

Jogaby: Çemçäniň uzynlygy 116 mm -den kem bolmaly däl.

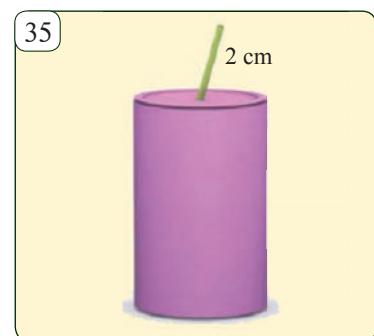


4.24. 33-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, konus şeklindäki doñdurmanyň esasynyň radiusyny tapyň. Onuň sygymyny tapyň.

4.25. 34-nji suratda görkezilen London şäherindäki Şekspir Globus teatry silindr şeklärinde. Suratda berlenlerden peýdalanyп, teatryň aşaky burçundaky aktýoryň sesi ýokarda duran tomaşaça ýetip barmagy üçin näçe aralygy geçyändigini anyklaň?

4.26. 35-nji suratda görkezilen silindr şeklindäki gabyň beýikligi 12 cm , giňligi bolsa 8 cm . Depe esasynyň edil ortasynda deşik bar. Bu gapdan içgi içmek üçin niyetlenen turbajygyň uzynlygy näçe bolmaly? Turabajygyň görnüp duran böleginiň uzynlygy 2 cm .

4.27. Misden ýasalan beýikligi 30 cm bolan konus eredilip, ondan silindr ýasaldy. Eger konusyň we silindriň esaslary deň töwereklerden ybarat bolsa, emele gelen silindriň beýikligini tapyň.



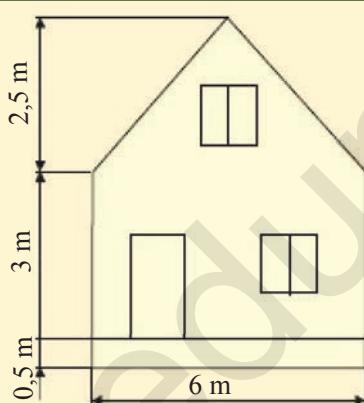
TASLAMA İŞINI YERİNE YETİRMEK BOÝUNÇA GÖRKEZMELER

Taslama işi temasyň üstünde okuwçylar aýry-aýry ýa-da 3-4 adamlyk topar bolup işläp bilerler. Taslama işi okuw ýylynyň ahyrynda geçirilýän gorag (kiçi konferensiýa) bilen tamamlanýar. Taslama işiniň üstünde işlemek aşakdaky okuw işlerini öz içine almagy mümkün: gözleg işlerini planlaşdyrmak, wezipeleri özara paýlaşmak, okuw maksatlaryny goýmak, gerekli maglumatlary gözläp tapmak, tema degişli meseleleri ýagdaýyň çözüwlerini gözlemek, olardan iň makulyny saylamak we ony esaslandyrmak, zerur ýagdaýlarda soraglar ýa-da tejribeler geçirmek, taslama işi netijeleri boýunça hasabat taýýarlamak, öz işlerini derňemek we bahalamak, taslama işiniň goragy üçin tanyşdyrylyş taýýarlamak we ony goramak. Okuwçylar taslama işi boýunça gözleglerini ýylyň dowamynda adatda dersden daşary özbaşdak işlerde alyp barýarlar.

Taslama işiniň temalary amaly, nazary we barlag häsiýetli bolmagy mümkün. Amaly işde geometriýadan özleşdirilen bilimler we endikler gündelik ýagdaýlardaky meseleleri (keýsleri) çözende ulanylýar. Nazary taslama işlerinde bolsa geometriýanyň

36

a)



b)



käbir temasy çuňrak öwrenilýär. Barlag işlerinde bolsa käbir standart däl geometrik mesele ýa-da durmuşdan mesele çözmegiň üstünde kiçi ylmy gözleg alnyp barylýar.

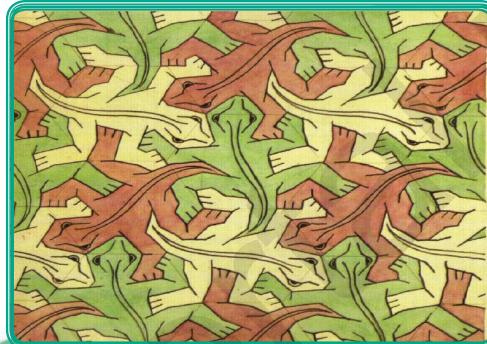
Amaly taslama işiniň nusgasý

Taslama ýumşy. 36-njy suratda görkezilen daçadaky öýüň diwarlaryny boýamaly. Jaý gurmagyň plany (ýumşa goşmaça edilýär) esasynda bu işi ýerine yetirmek üçin iň tygşytly (arzan) taslamany işläp taýýarlaň.

Taslama işini ýerine yetirende okuwçylar öýüň planyny özbaşdak öwrenip çykýarlar. Wezipeleri anyklap, plan düzmeke we işleri özara paýlaşýarlar. Ilki, boýalýan meýdany anyklap alýarlar. Boýamak üçin näçe boýag gerekdigini sorap anyklaýarlar. Birnäçe boýag görünüşleri boýunça hasap-hesip işlerini geçirýärler. Haýsy boýag ulanylrsa, maksada laýyk bolýandygyny anyklap esaslandyrýarlar. Saýlanan boýag boýunça ähli hasap-hesip işlerini ýetirýärler we taslama işini hem-de ol boýunça tanyşdyrylyş taýýarlaýarlar. *Düşündiriş: Suratda öýüň planynyň hemmesi getirilmédik.*



GEOMETRİK ÖZ-ÖZÜNE ÖWRÜLMELER WE MEŃZEŞLIK



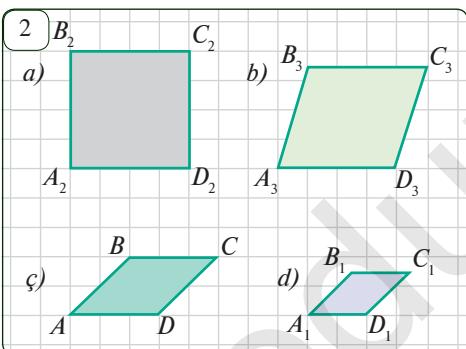
Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňyz:

Bilimler:

- ✓ meňzeş figuralaryň kesgitlemesini we belgilenişini bilmek;
- ✓ üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryny bilmek;
- ✓ gomotetiýa düşünjesini bilmek.

Amaly endikler:

- ✓ iki meňzeş üçburçluklardan laýyk elementleri tapyp bilmek;
- ✓ üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryny subut etmäge we hasaplamaga degişli meseleleri çözende ulanyp bilmek;
- ✓ gomotetiýadan peýdalanyп, meňzeş köpburçluklary gurup bilmek.



2. $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ romblarda $\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 135^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 45^\circ$, $\angle D = \angle D_1 = 135^\circ$. Bonda romblaryň degişli burqlary özara deň diýilýär.

Şeýlelikde, bu romblaryň bir-birine meńzeşliginiň sebäbi — degişli taraplarynyň proporsionalligy we degişli burqlarynyň deňligi, diýip bileris. Islendik köpburçluklaryň meńzeşligi düşünjesi hem şuňa meńzeş girizilýär.

Iki köpburçluk (başburçluk) $ABCDE$ we $A_1B_1C_1D_1E_1$ ýaly belgilenen bolup, degişlilikde $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ ýagny degişli burqlary özara deň bolsun. Onda AB we A_1B_1 , BC we B_1C_1 , CD we C_1D_1 , DE we D_1E_1 , EA we E_1A_1 taraplara köpburçlugyň *degişli taraplary* diýilýär.

Kesgitleme. Iki köpburçluguň burqlary degişlilikde özara deň, ähli degişli taraplary bolsa özara proporsional bolsa, şeýle köpburçluklar *meńzeş köpburçluklar* diýilip atlandyrlyýar (3-nji surat).

Gündelik durmuşda deň şekillerden daşary şekili (görnüşi) birmeńzeş, ýöne ölçegleri dürlüce bolan şekillere köp duşyarys. Taryh we geografiýa ylymlarynda dürli masstabda işlenen kartalardan peýdalanansyňyz. Synp doskasyna asylýan we dersliklerde görkezilen respublikamyzyň kartalary dürli ölçegde, ýöne olar birmeńzeş şekilde (görnüşde). Şonuň ýaly-da, bir fotolentadan dürli ölçegdäki fotosuratlar taýýarlanýar. Bu suratlaryň ölçegleri dürlüce bolsa-da, birmeńzeş görnüşde, ýagny olar bir-birine meńzeýär (1-nji surat).

Gönükmek. 2-nji suratda dört romb şekillendirilen. Olardan diňe $c)$ we $d)$ romblar birmeńzeş görnüşe eýe. Bu romblar nămesi bilen başga romblardan tapawutlanyp dur?

Geliň, muny bilelikde anyklalyň.

1. Suratdan görnüşi ýaly, $AD = 3$, $A_1D_1 = 2$. Rombuň taraplary deň bolany üçin,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

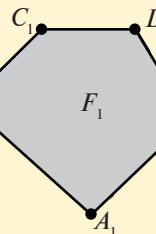
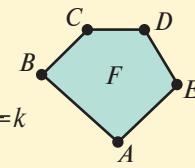
deňligi alarys. Bonda romblaryň degişli taraplary proporsional diýilýär.

Köpburçluklar meňzeşligi \Leftrightarrow belgisi bilen görkezilýär.

3

Degişli burçlar deň

$$F \sim F_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \\ \angle D = \angle D_1, \angle E = \angle E_1 \\ \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{C_1 D_1}{CD} = \frac{D_1 E_1}{DE} = \frac{E_1 A_1}{EA} = k \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Degişli taraplar proporsional} \\ \text{Deň} \end{array}$$



Meňzeş köpburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşyggyna deň bolan k sana bu köpburçluklaryň **meňzeşlik koeffisiýenti** diýilýär.

1-nji mesele. 4-nji suratdaky köpburçluklaryň meňzeşligi mälim bolsa, näbelli uzynlygy tapyň.

Cözülişi: Bu köpburçluklaryň meňzeşliginden olaryň degişli taraplarynyň proporsionaldygy gelip çykýar.

Diýmek, $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$. Mundan $x = 6 : 3 = 2$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby. $x = 2$.

2-nji mesele. 5-nji suratda görkezilen dörtburçluklar meňzeşmi? Nämé üçin?

Cözülişi: Ýok. Çünkü, olaryň degişli burçlary deň (90°) bolsa-da, degişli taraplary proporsional däl:

$$\frac{AB}{PQ} = 1 \neq \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$$

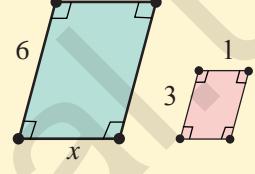
?

Meseleler we ýumuşlar

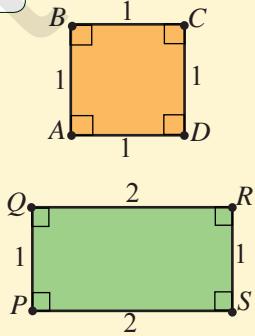
6.1. Meňzeşlik koeffisiýenti nämé we ol nähili anykylanýar?

6.2. Eger ABC we DEF üçburçluklarda $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle E = 105^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4,4 \text{ cm}$, $AB = 5,2 \text{ cm}$, $BC = 7,6 \text{ cm}$, $DE = 15,6 \text{ cm}$, $DF = 22,8 \text{ cm}$, $EF = 13,2 \text{ cm}$ bolsa, olar meňzeş bolarmy?

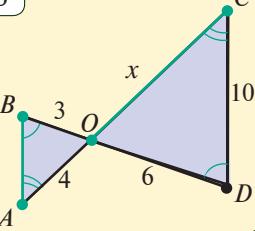
4



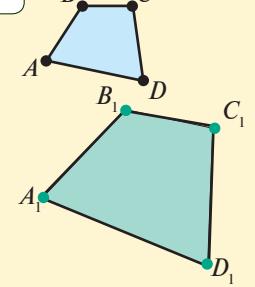
5



6



7



6.3. 2-nji suratda görkezilen a) we b) romblar nämé sebäpden meňzeş däl? b) we ç) romblar nämé?

6.4. 6-njy suratdaky ABO we CDO üçburçluklar meňzeş bolsa, AB , OC kesimleriň uzynlygyny we meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.

6.5. 7-nji suratda $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. A_1B_1 , D_1A_1 we C_1D_1 kesimleri tapyň.

6.6*. ABC üçburçluguň AB we AC taraplarynyň ortalary degişlilikde P we Q bolsun. $\Delta ABC \sim \Delta APQ$ bolýandygyny subut ediň.

Iň ýonekeý köpburçluk bolan üçburçluklaryň meňzeşligini öwrenýäris.

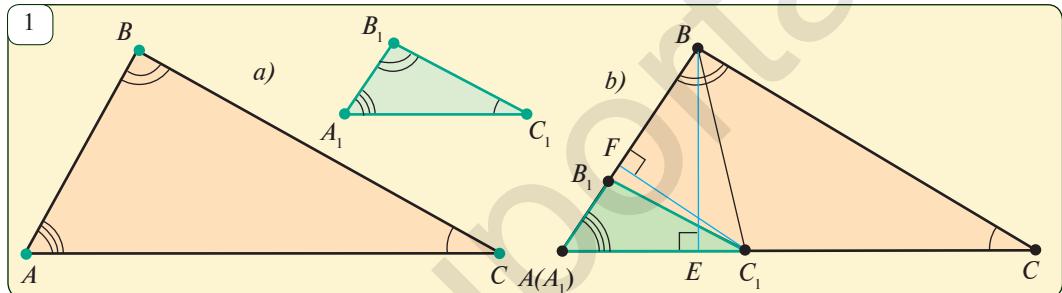
Teorema. *Iki meňzeş üçburçlugyň perimetrlarınıň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.*

Bu teoremany özbaşdak subut ediň.

Teorema. *Iki meňzeş üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň.*

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \text{ (1-nji a surat)}, \quad k = \text{meňzeşlik koeffisiýenti} \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$$

Subudy. Teoremanyň şertine görä, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Diýmek, köpburçluklaryň meňzeşligi kesgitlemesine görä, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$



$\angle A = \angle A_1$ bolýanlygyndan peýdalanyп, olary 1-nji b surtdaky ýaly üstme-üst goýýarys we degişli gurmak hem-de belgilemeleri amala aşyrýarys.

Aşakdaky üçburçluklar meýdanlaryny tapýarys we olaryň gatnaşyklaryna garáýarys:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \end{aligned} \right] \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (1),$$

$$\left. \begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned} \right] \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \quad (2).$$

(1) deňligi agzama-agza (2) deňlige bölsek, deň burça eýe bolan üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy üçin (3) deňlii $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (3)

Bu ýerde şerte görä, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

deňlik gelip çykýar. **Teorema subut edildi.**

1-nji mesele. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy şu taraplara geçirilen beýiklikleriň gatnaşygyna deňligini subut ediň (2-nji surat).

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1, \quad BD, B_1D_1 - \text{beýiklikler}$$

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$$

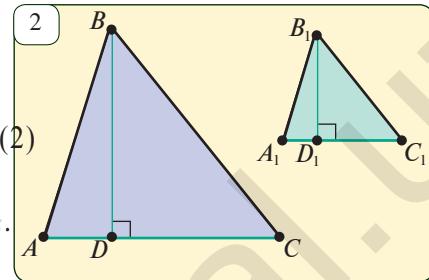
Cözülişi. Berlen üçburçluklaryň meňzeşlik koeffisiýenti k bolsun. Onda, $AC : A_1C_1 = k$; $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$ (1) bolýar. Ikinji tarapdan,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1}$$

$$(1) \text{ we } (2) \text{ deňliklerden } k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k^2 \text{ ýa-da } \frac{BD}{B_1D_1} = k.$$

Şeýlelikde, $\frac{BD}{B_1D_1}$ hem, $\frac{AC}{A_1C_1}$ gatnaşyk hem

$$k \text{ deň, ýagny } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$$



2 Meseleler we ýumuşlar

7.1. Meňzeş üçburçluklar meýdanlary gatnaşygy baradaky teoremany aýdyň we subut ediň.

7.2. İki meňzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar berlen. Eger $S_{ABC} = 25 \text{ cm}^2$ we $S_{A_1B_1C_1} = 81 \text{ cm}^2$ bolsa, meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.

7.3. İki meňzeş üçburçluguň meýdanlary 65 m^2 we 260 m^2 . Birinji üçburçluguň bir tarapy 6 m bolsa, ikinji üçburçluguň oňa degişli tarapyny tapyň.

7.4. Berlen üçburçluguň taraplary 15 cm , 25 cm we 30 cm . Eger perimetri 35 cm bolan üçburçluk berlen üçburçluga meňzeş bolsa, onuň taraplaryny tapyň.

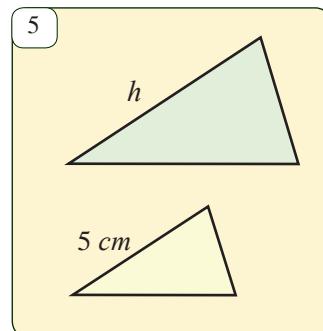
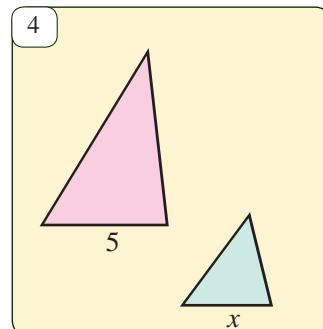
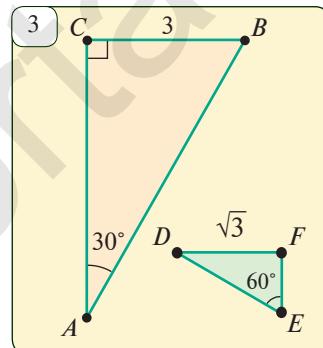
7.5. Taraplary 12 cm , 20 cm we 13 cm bolan üçburçluk berlen. Eger kiçi tarapy 9 cm bolan üçburçluk berlen üçburçluga meňzeş bolsa, onuň galan taraplaryny tapyň.

7.6. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ we bu üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy $7 : 5$ -e deň. Eger ABC üçburçluguň meýdany $A_1B_1C_1$ üçburçluguň meýdanyndan 36 m^2 -a artyk bolsa, şu üçburçluklaryň meýdanlaryny tapyň.

7.7. 3-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, üçburçluklaryň meňzeş ýa-da meňzeş dälligini anyklaň.

7.8. 4-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş we meýdanlarynyň gatnaşygy $25 : 9$ ýaly bolsa, näbelli kesimiň uzynlygyny tapyň.

7.9. 5-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş we $S_1 : S_2 = 49 : 25$ bolsa, näbelli tarapy tapyň.



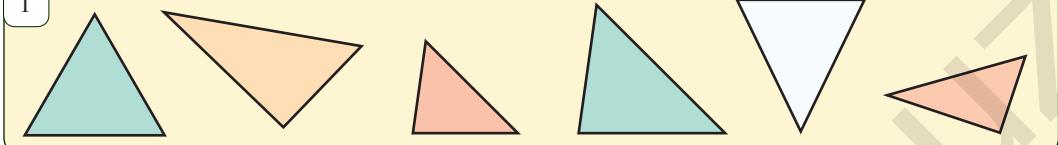
ÜÇBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIGINIŇ BIRINJI NYŞANY



Ugrukdyryjy gönükmə

1-nji suratda görkezilen üçburçluklardan meňzeşlerini anyklaň. Olaryň meňzeşligini nähili anykladyňyz?

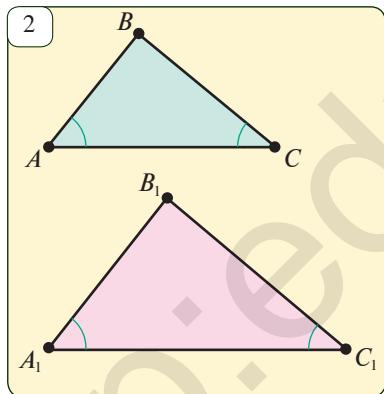
1



Kesgitlemä görä, iki üçburçluguň meňzeşligini anyklamak üçin olar burçlarynyň deňligini we degişli taraplarynyň proporsionaldygyny barlamaly bolýar. Üçburçluklar üçin bu iş ep-esli aňsatlaşyán eken. Aşakda getirilýän teoremlar şu babańda bolup, olar “üçburçluklaryň meňzeşliginiň nyşanlary” diýlip atlandyrylyar.

Teorema. (Üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşany). *Eger bir üçburçluguň iki burçy ikinji üçburçluguň iki burçuna degişlilikde deň bolsa, şeýle üçburçluklar meňzes bolýar (2-nji surat).*

2



$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$$



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Subudy. 1. Üçburçluguň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema görä,

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C), \\ \angle B_1 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle B = \angle B_1$$

Diýmek, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň burçlary degişlilikde deň.

2. Şerte görä, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Deň burça eýe bolan üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teorema görä

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

Bu deňlikleriň sag böleklerini deňläp, birmeňzeş agzalar gysgaldylsa,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ deňlik emele gelýär. Edil şunuň ýaly, } \angle A = \angle A_1 \text{ we } \angle B = \angle B_1$$

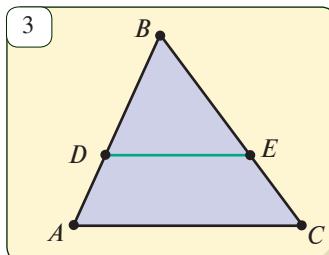
deňliklerden peýdalanyп, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ deňligi alarys. Şeýdip, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň burçlary deň we degişli taraplary proporsional, ýagny bu üçburçluklar meňzeş. *Teorema subut edildi.*



Mesele. ABC üçburçluguň iki tarapyny kesip geçýän we üçünji tarapyna parallel bolan DE goni çyzyk üçburçlukdan oňa meňzeş üçburçluk bolýandygyny subut ediň (3-nji surat).

Subudy. ABC we DBE üçburçluklarda $\angle B$ — umumy, $\angle CAB = \angle EDB$ (AC we DE parallel göni çzyklary AB kesiji bilen kesende emele gelen degişli burçlar deň bolany üçin) (3-nji surat).

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $ABC \sim \Delta DBE$.

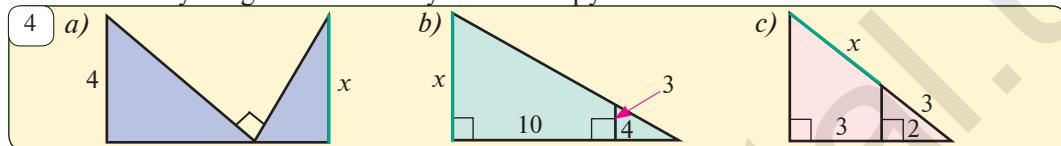


Meseleler we ýumuşlar

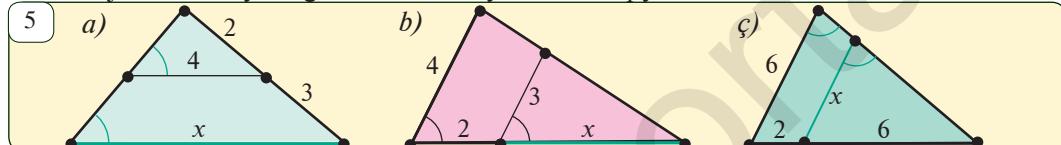
8.1. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň kesgitlemesini we BB nyşanyny özara deňeşdiriň.

8.2. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyny subut ediň.

8.3. Suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.



8.4. 5-nji suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.

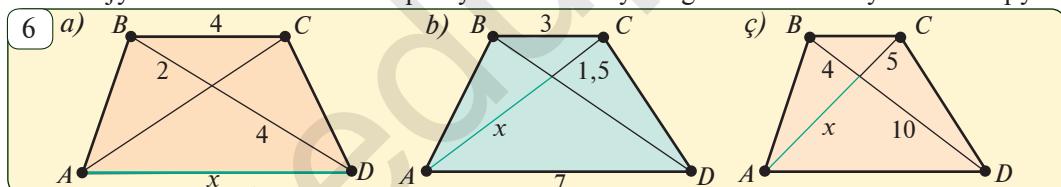


8.5. $ABCD$ parallelogramyň CD tarapynda E nokat alnan. AE we BC şöheler F nokatda kesişyär.

a) Eger $DE = 8 \text{ cm}$, $EC = 4 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$, $AE = 10 \text{ cm}$ bolsa, EF we FC -ni;

b) Eger $AB = 8 \text{ cm}$, $AD = 5 \text{ cm}$, $CF = 2 \text{ cm}$ bolsa, DE we EC -ni tapyň.

8.6. 6-njy suratda $ABCD$ — trapesiya. Suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.

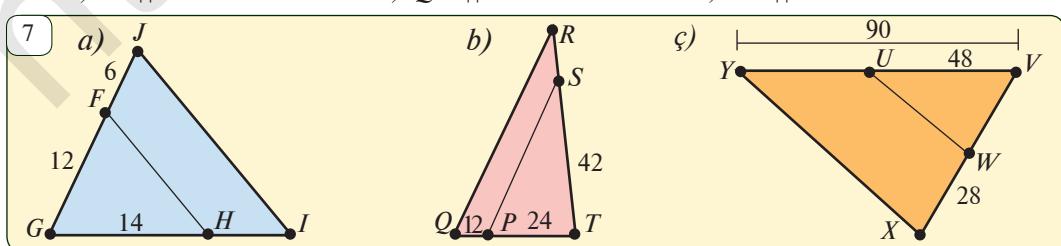


8.7*. Birden ýiti burçlary deň bolan iki gönüburçly üçburçluklar meňzeş bolýandygyny subut ediň.

8.8*. ABC üçburçluguň AC tarapynda D nokat alnan. Eger $\angle ABC = \angle BDC$ bolsa, ABC we BDC üçburçluklar meňzeş bolýandygyny subut ediň. Şonuň ýaly-da, $3AB = 4BD$ we $BC = 9 \text{ cm}$ bolsa, AC kesimi tapyň.

8.9. 7-nji suratda berlenlere esasan näbelli kesimi tapyň.

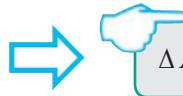
a) $IJ \parallel FH$, HI -? b) $QR \parallel PS$, RS -? d) $XY \parallel UW$, VX -?



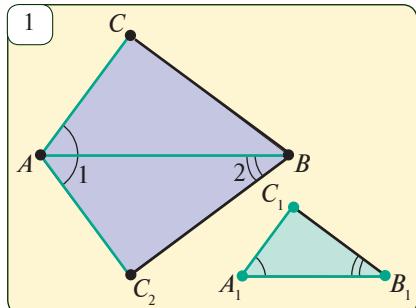
Teorema. (Üçburçluklaryň meńzeşliginiň TBT nyşany). *Eger bir üçburçlugyň iki tarapy ikinji üçburçlugyň iki tarapyna proporsional we bu taraplar emele getiren burçlar deň bolsa, şeýle üçburçluklar meńzeş bolýar (1-nji surat).*



$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



Subudy. $\angle 1 = \angle A_1, \angle 2 = \angle B_1$ bolýan edip ABC_2 üçburçluk guryarys (1-nji surat). Ol BB nyşan boýunça $A_1B_1C_1$ üçburçluga meńzeş bolýar.

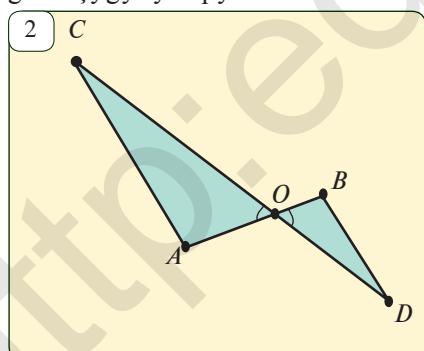
$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC_2 : \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$$

$$\text{Şerte görä: } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Bu iki deňlikden, $AC_2 = AC$ bolýandygyny anyklaýarys. Onda, üçburçluklar deňliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta ABC \sim \Delta ABC_2$. Hususan-da, $\angle 2 = \angle B$. Yöne gurmaga görä, $\angle 2 = \angle B_1$ -di. Diýmek, $\angle B = \angle B_1$. Onda, $\angle A = \angle A_1$ we $\angle B = \angle B_1$ bolany üçin, üçburçluklaryň meńzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **Teorema subut edildi.**



Mesele. AB we CD kesimler O nokatda kesişyär, $AO = 12 \text{ cm}, BO = 4 \text{ cm}, CO = 30 \text{ cm}, DO = 10 \text{ cm}$ bolsa, AOC we BOD üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.



Cözülişi: Şerte görä,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{OC}{OD} = \frac{30}{10} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = 3.$$

Diýmek, AOC üçburçlugyň iki tarapy BOD üçburçlugyň iki tarapyna proporsional we bu taraplaryň arasyndaky degişli burçlar wertikal burçlar bolany üçin: $\angle AOC = \angle BOD$. Şonuň üçin, üçburçluklaryň meńzeşliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ we meńzeşlik koeffisiýenti $k = \frac{OA}{OB} = 3$. Indi meńzeş üçburçluklar meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teoremany ulanýrys:

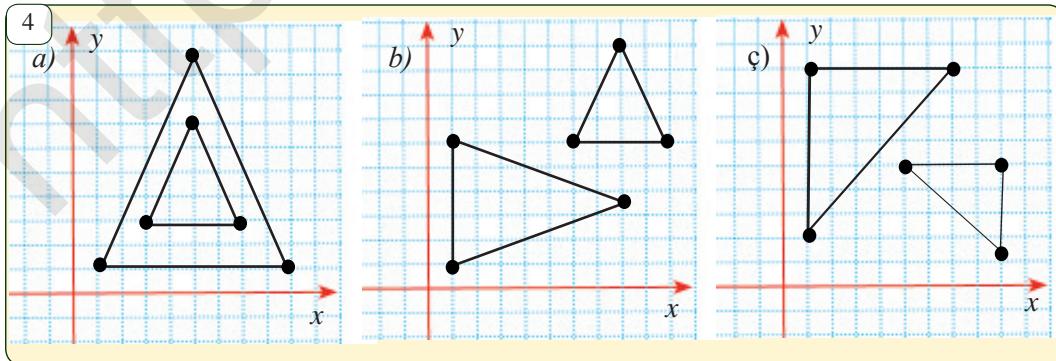
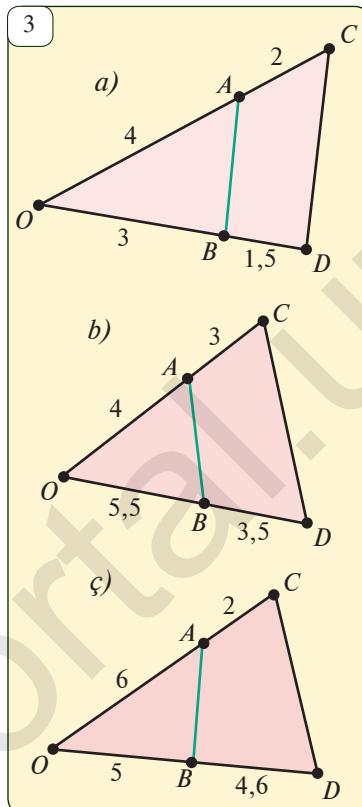
$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = k^2 = 9.$$

Jogaby: 9.

?

Meseleler we ýumuşlar

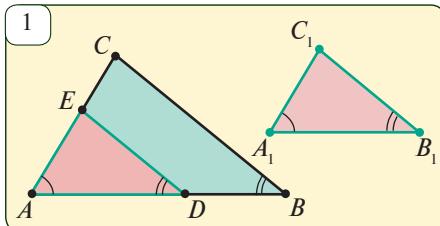
- 9.1.** Üçburçluklaryň meňzeşliginiň kesgitlemesini we TBT nyşanyny özara deňeşdiriň.
- 9.2.** Depesindäki burçlary deň bolan deňyánly üçburçluklaryň meňzeşligini a) BB; b) TBT nyşandan peýdalanyп subut ediň.
- 9.3.** 3-nji suratda görkezilen OAB we OCD üçburçluklар meňzeş bolarmy? Eger meňzeş bolsa, bu üçburçluklaryň perimetreniň gatnaşygyny tapyň.
- 9.4.** AC we BD şöhleler O nokatda kesişyär. Eger $AO : CO = BO : DO = 3$, $AB = 7 \text{ cm}$ bolsa, CD kesimi hem-de AOB we COD üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
- 9.5.** ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = 4 : 3$.
- Eger AB kesim A_1B_1 -den 5 cm artyk bolsa, AB we A_1B_1 taraplary tapyň.
 - Eger A_1B_1 kesim AB -den 6 cm kem bolsa, AB we A_1B_1 taraplaryny tapyň.
 - Eger berlen üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi 400 cm^2 bolsa, üçburçluklaryň hersiniň meýdanyny tapyň.
- 9.6.** Eger bir gönüburçly üçburçlugyň katetleri ikinji gönüburçly üçburçlugyň degişli katetlerine proporsional bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.
- 9.7.** Katetleri 3 dm we 4 dm bolan gönüburçly üçburçluk bilen bir kateti 8 dm we hipotenuzasy 10 dm bolan gönüburçly üçburçlugyň meňzeş bolýandygyny subut ediň.
- 9.8*.** AB kesim we l goni çyzyk O nokatda kesişyär. l goni çyzyga AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar geçirilen. Eger $AA_1 = 2 \text{ cm}$, $OA_1 = 4 \text{ cm}$ we $OB_1 = 3 \text{ cm}$ bolsa, BB_1 , OA we AB kesimleri tapyň.
- 9.9*.** 4-nji suratda berlen maglumatlar esasynda üçburçluklaryň meňzeşligini esaslandyryň.



Teorema. (Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşany). *Eger bir üçburçlugyň üç tarapy ikinji üçburçlugyň üç tarapyna degişlilikde proporsional bolsa, şeýle üçburçluklar meňzeş bolýar.*

$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} \text{ (1-nji surat)}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



Subudy. ABC üçburçlugyň AB tarapynda $AD = A_1B_1$ bolýan edip D nokady belgileýäris. D nokatdan BC tarapa parallel edip geçirilen gönü çyzyk AC tarapy E nokatda kessin. Onda üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, ΔADE we ΔABC meňzeş bolýar. Onda bu

meňzeşlik teoremanyň şertine görä aşakdaky deňlikler jübütine eýe bolarys:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ we } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad (1) \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ we } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad (2)$$

Onda $AD = A_1B_1$ bolýandygyny hasaba alsak, olaryň birinjisinden $B_1C_1 = DE$, ikinjisinden bolsa $A_1C_1 = AE$ bolýandygy gelip çykýar. Şeýdip, üçburçluklaryň deňliginiň TTT nyşanyna görä, $\Delta ADE = \Delta A_1B_1C_1$. Onda $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Diýmek, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **Teorema subut edildi.**

Mesele. Eger iki deňyanly üçburçlukdan biriniň esasy we gapdal tarapy ikinjisiniň esasy we gapdal tarapyna proporsional bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

$$\Delta ABC, AB = BC, \left| \begin{array}{l} \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \\ \Delta A_1B_1C_1, A_1B_1 = B_1C_1, \end{array} \right.$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Subudy. Berlen $AB = BC$, $A_1B_1 = B_1C_1$ deňliklerden we $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ gatnaşykdan $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ deňlikleri alarys. Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşanyna görä, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

?

Meseleler we ýumuşlar

10.1. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşanyny aýdyň we subudyny beýan ediň.

10.2. $AC = 14 \text{ cm}$, $AB = 11 \text{ cm}$, $BC = 13 \text{ cm}$, $A_1C_1 = 28 \text{ cm}$, $A_1B_1 = 22 \text{ cm}$, $B_1C_1 = 26 \text{ cm}$ bolýandygy mälim. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar meňzeş bolarmy?

10.3. 2-nji suratkadaky meňzeş üçburçluklaryň jübütliklerini görkeziň.

10.4. $ABCD$ trapesiýanyň AB we CD gapdal taraplary dowam etdirilse, E nokatda kesişyär. Eger $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$, $AD = 15 \text{ cm}$ bolsa, AED üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

10.5. Trapesiýanyň esaslary 6 cm we 9 cm , beýikligi 10 cm . Trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan esaslaryna çenli bolan aralyklary tapyň.

10.6. Islendik iki deň taraply üçburçluguň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

10.7. Esasy 12 cm , beýikligi 8 cm bolan deňyanly üçburçluguň içinden kwadrat şeýle çyzylan bolup, kwadratyň iki depesi üçburçluguň esasynda, galan iki depesi bolsa gapdal taraplarda ýatýar. Kwadratyň tarapyny tapyň.

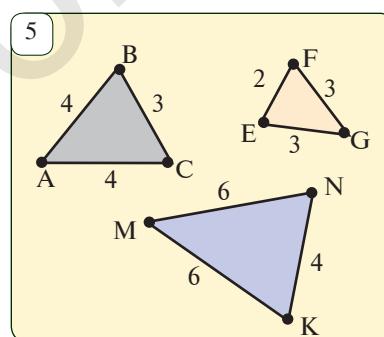
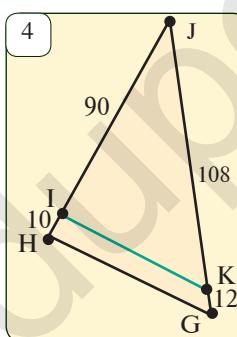
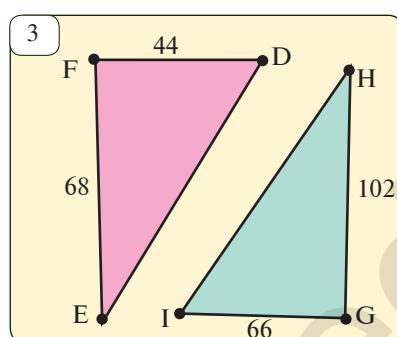
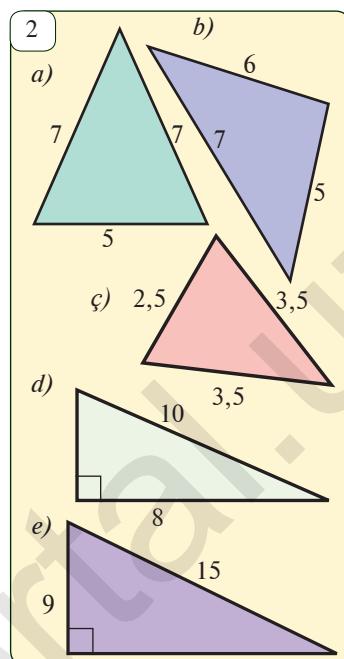
10.8*. Yiti burçly ABC üçburçluguň AA_1 we BB_1 beýiklikleri geçirilen. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ -ni subut ediň.

10.9. Iki meňzeş üçburçluguň meýdanlary 6 we 24 -e deň. Olardan biriniň perimetri ikinjisiniňkiden 6 -a artyk. Uly üçburçluguň perimetrini tapyň.

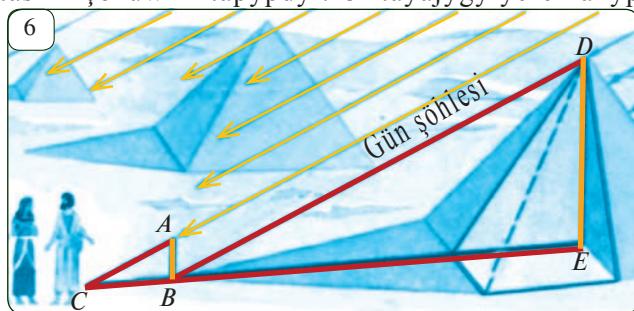
10.10. 3-nji suratkaky üçburçluklar haýsy nyşana görä meňzeş?

10.11. 4-nji suratkaky JKI we JGH üçburçluklar haýsy nyşana görä meňzeş?

10.12. 5-nji suratkaky üçburçluklaryň haýsylary bir-birine meňzeş?



Taryhy maglumatlar. Bu waka miladydan öñki VI asyrda bolupdyr. Bu wagtda grekler geometriya bilen meşgullanmaýardylar diýen ýalydy. Greek filosofy Fales Müsüre onuň ylmy bilen tanyşmak üçin barypdyr. Müsürliler oña kyn mesele berýärler: äpet piridalardan biriniň beýikligini nähili hasaplamaý mumkin? Fales bu meseläniň ýonekey we täsirli çözüwini tapypdyr. Ol taýajygы ýere kakyp şeýle diýipdir: "Haçan-da şu taýajygыň kölegesiniň uzynlygy taýajygыň uzynlygy bilen deň bolsa, piridalanyň kölegesiniň uzynlygy piridalanyň beýikligi bilen deň bolýar" (6-njy surat). Falesiň pikirini esaslandyrjak boluň!



Mälim bolşy ýaly, gönüburçly üçburçluklaryň bir sanydan burclary goni burçdan ybarat bolýar. Şonuň üçin şeýle üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary ep-esli ýonekeýleşýär.

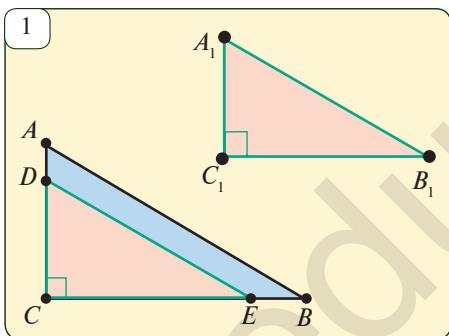
1-nji teorema. *Gönüburçly üçburçluklaryň bir sanydan ýiti burçy degişlilikde deň bolsa, olar meňzeş bolýar.*

2-nji teorema. *Gönüburçly üçburçluklaryň katetleri degişlilikde proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.*

3-nji teorema. *Gönüburçly üçburçluklardan biriniň gipotenuzasy we kateti ikinjisiniň gipotenuzasyna we katetine degişlilikde proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.*

Bu nyşanlardan ilkinci ikisiniň doğrudygy öz-özünden aýdyň. Geliň, üçünji nyşany subut edeliň.

$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \angle C = 90^\circ, \angle C_1 = 90^\circ, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



Subudy. *ABC üçburçlugyň BC tarapyna $CE = C_1B_1$ bolýan edip CE kesimi goýýarys we $DE // AB$ -ni geçirýäris (1-nji surat).* Onda üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, ΔDEC we ΔABC meňzeş bolýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň proporsionallygyndan: $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}$.

Gurmaga görä, $CE = C_1B_1$. Diýmek,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{C_1B_1} \quad (1)$$

deňlik dogry. Başga tarapdan, teorema şartine görä, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$ (2)

(1) we (2) deňliklerden $DE = A_1B_1$ bolýandygyny anyklaýarys.

$A_1B_1C_1$ we DEC üçburçluklara garaýarys: 1. $CE = C_1B_1$ (gurmaga görä);
2. $DE = A_1B_1$ (subut edilen deňlik).

Gönüburçly üçburçluklaryň birden kateti hem-de gipotenuzasy boýunça deňlik nyşanyna görä, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Ikinji tarapdan bolsa $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. Onda, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ bolýar.

Teorema subut edildi.

Mesele. Eger iki deňyanly üçburçlukdan biriniň gapdal tarapy we beýikligi ikinjisiniň gapdal tarapyna we beýikligine proporsional bolsa, su üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň (2-nji surat).

Subudy. Gönüburçly ABD we $A_1B_1D_1$ üçburçluklara garaýarys. Şerte görä, olaryň bir sanydan kateti we gipotenuzasy özara proporsional. Diýmek, 3-nji

teorema esasan $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$. Onda $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Deňýanly üçburçluguň esasynda geçirilen beýikligiň bissektrisa hem bolýandygyny hasaba alsak, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ bolýar.

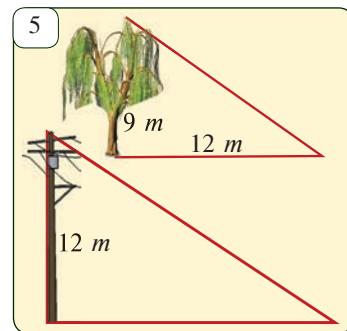
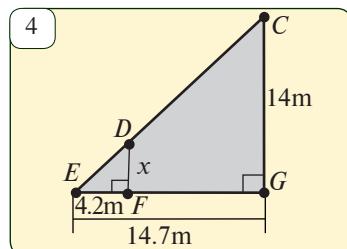
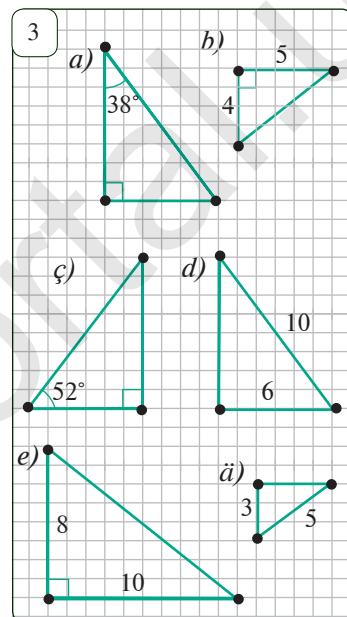
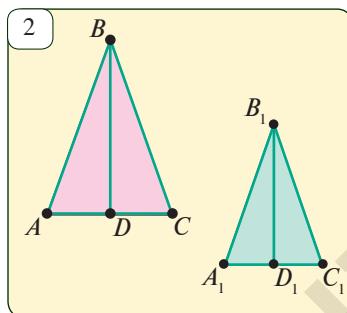
Netijede, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda

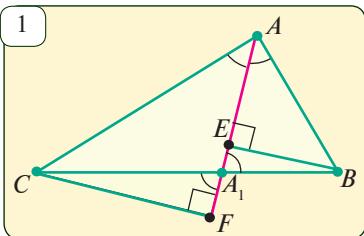
$\angle B = \angle B_1$ we $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ deňliklere eýe bolarys.

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanynda görä, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Soralan tassyklama subut edildi.

2 Meseleler we ýumuşlar

- 11.1. 3-nji suratdan meňzeş üçburçluklary tapyň.
- 11.2. Katetleri $3 m$ we $4 m$ bolan gönüburçly üçburçluga meňzeş üçburçluguň bir kateti $27 m$ bolsa, ikinji kateti näçe m bolar?
- 11.3. Meýdanlary $21 m^2$ we $84 m^2$ bolan iki gönüburçly üçburçluklar meňzeş. Eger birinji üçburçluguň bir kateti $6 m$ bolsa, ikinji üçburçluk katetlerini tapyň.
- 11.4. Bir töweregideki iki meňzeş gönüburçly üçburçluk çzyylan. Şu üçburçluklaryň deňligini subut ediň.
- 11.5*. Katetleri $10 cm$ we $12 cm$ bolan gönüburçly üçburçluguň içinden bir burçy umumy bolan kwadrat çzyylan. Eger kwadratyň bir depesi gipotenuzada bolýandygy mälim bolsa, kwadratyň tarapyny tapyň.
- 11.6*. ABC üçburçluk berlen. Onuň iinden $ADEF$ romb çzyylan bolup, D , E we F nokatlar degişlilikde üçburçluguň AB , BC we CA taraplarynda ýatýar. Eger $AB = c$, $AC = b$ bolsa, romb tarapyny tapyň.
- 11.7. 4-nji suratda berlen maglumatlar esasynda nämälim kesimiň uzynlygyny tapyň.
- 11.8. Tal agajynyň beýikligi $9 m$, elektrik sütüniň beýikligi $12 m$ (5-nji surat). Eger talyň kölegesi $12 m$ bolsa, elektrik sütüniň kölegesiniň uzynlygyny tapyň.
- 11.9. Nar agajynyň beýikligi $3 m$ bolup onuň kölegesi aşama baryp $6 m$ -e ýetdi. Beýikligi $4,2 m$ bolan alma agajynyň kölegesi bu wagtda näçe bolar?





1-nji mesele. Üçburçluguň bissektrisasy özi düşen tarapy galan iki tarapa proporsional kesimlere böläändigini subut ediň.

$$\Delta ABC, AA_1 - \text{bissektrisa} \quad (1\text{-nji surat})$$

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AC}{A_1C}$$

Subudy. AA_1 gönü çyzyga BE we CF perpendikulýarlar geçirýäris. Onda $\angle CAF = \angle BAE$ bolany üçin, gönüburçly CAF we BAE üçburçluklar meňzeş bolýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň proporsionallygynyndan

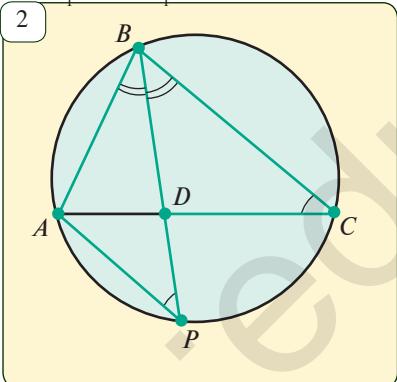
$$\Delta CAF \sim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE} \quad (1)$$

$$\Delta CA_1F \sim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CF}{BE} \quad (2)$$

Şuňa meňzeş

(1) we (2) deňlikleri deňeşdirse, $\frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$ ýa-da $\frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$ bolýar. Bu

A_1B we A_1C kesimler AB we AC kesimlere proporsional bolýandygyny aňladýar.



2-nji mesele. ABC üçburçluguň BD bissektrisasy üçburçluguň daşyndan çyzylan töweregى B we P nokatlarda kesýär. $\Delta ABP \sim \Delta DBC$ bolýandygyny subut ediň (2-nji surat).

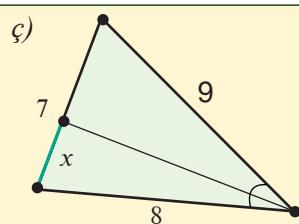
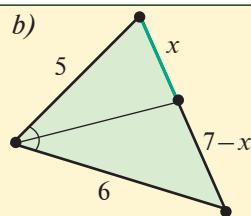
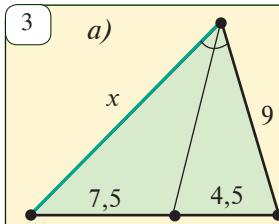
Subudy. ΔABP we $\angle DBC$ -da:

1. $\angle DBC = \angle ABP \Leftarrow$ çünkü BD bissektrisa;
2. $\angle DCB = \angle APB$, çünkü olar bir duga direlen.

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta ABP \sim \Delta DBC$.

Meſeleler we ýumuşlar

- 12.1. Üçburçluguň bissektrisasynyň özi düşen tarapda bölen kesimlerini we üçburçluguň galan taraplarynyň arasyndaky proporsionallygy ýazyp görkeziň.
- 12.2. Gönüburçly ABC üçburçluguň C gönü burçundan CD beýiklik geçirilen. $\angle ACD = \angle CBD$ bolýandygyny subut ediň. Emele gelen şeñilde näçe özara meňzeş üçburçluklary görkezip bilersiňiz?
- 12.3. 3-nji suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.
- 12.4. ABC üçburçluklaryň AD bissektrisasy geçirilen. Eger $CD = 4,5 \text{ m}$; $BD = 13,5 \text{ m}$ we ABC üçburçluguň perimetri 42 m bolsa, onuň AB we AC taraplaryny tapyň.
- 12.5. ABC üçburçluguň medianalary N nokatda kesişyär. Eger ABC üçburçluguň meýdany 87 dm^2 bolsa, ANB üçburçluguň meýdany nämä deň?



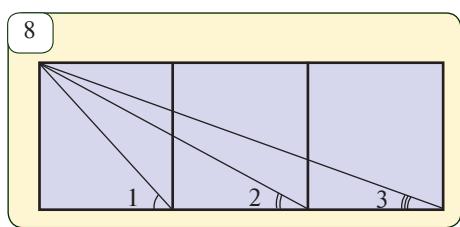
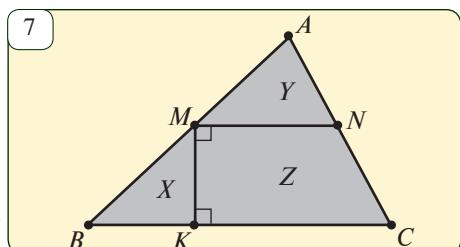
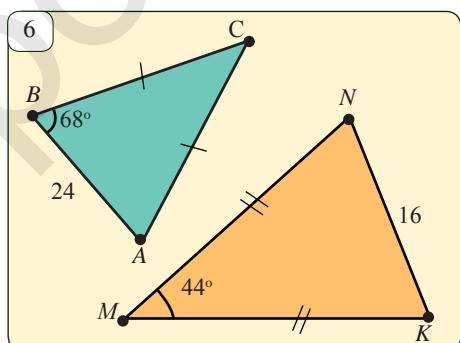
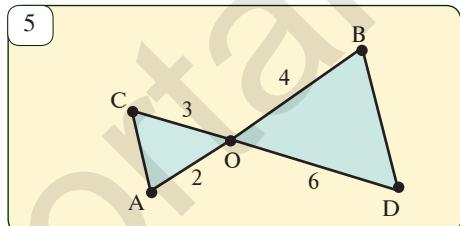
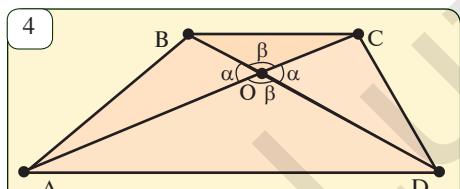
12.6. ABC üçburçluginde medianalary kesişen N nokatdan AB we BC taraplara çenli bolan aralyklar degişlilikde 3 dm we 4 dm . Eger $AB = 8\text{ dm}$ bolsa, BC tarapy hasaplaň.

12.7*. Trapesiýanyň esasynda parallel gönüçzyk gapdal taraplaryndan birini $m:n$ gatnaşykdaky bölyändigi mälim. Bu gönüçzyk onuň ikinji gapdal tarapyny nähili gatnaşykdaky bölyär?

12.8. 4-nji suratda trapesiýa görkezilen AOD we COB üçburçluklaryň meňzeşligini subut ediň.

12.9. 5-nji suratda AOC we DOB üçburçluklar meňzeşligini görkeziň.

12.10. 6-njy suratda görkezilen üçburçluklar meňzeşmi?



Gyzykly meseleler

Geometriýa we iňlis dili. Aşakda iňlis dilinde berlen geometrik meseläni çözjek boluň! Munuň bilen hem iňlis dilinden, hem geometriýadan öz bilimiňizi synarsyňyz.

1) *Dissection Puzzle:* Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC . The triangle has been dissected into parts X , Y , Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendicular to the base BC (picture 7). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.

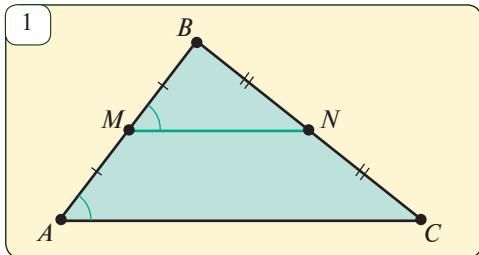
2) Look at the picture 8 and proof

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$$

1-nji mesele. Üçburçluklaryň meňzeşliginden peýdalanyп, üçburçlugyň orta çyzygy üçburçlugyň bir tarapyna parallel we şu tarapyň ýarysyna deň bolýandygyny subut ediň.

ΔABC , MN — orta çyzyk (1-nji surat): $MA = MB$, $NC = NB$

$$MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2} AC$$



Subudy. ΔABC we ΔMBN üçin:

$$\angle B \text{ — umumy, } \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$$

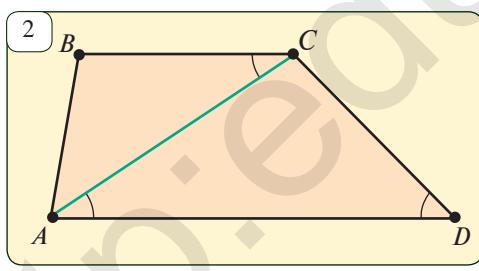
Şonuň üçin, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä, bu iki üçburçluk meňzeş. Indi pikir ýöretmäni ynha şeýle dowam etdirýäris:

$$\Delta MBN \sim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN = \frac{1}{2} AC. \end{cases}$$

2-nji mesele. Eger esaslary BC we AD bolan $ABCD$ trapesiyanyň AC diagonaly ony iki meňzeş üçburçluga böлse, $AC^2 = BC \cdot AD$ bolýandygyny subut ediň.

$ABCD$ — trapesiya, $BC \parallel AD$,
 $\Delta ABC \sim \Delta DCA$ (2-nji surat)

$$AC^2 = BC \cdot AD$$



$\angle ACD = \angle B$.

2-nji ädim. Indi ABC we DCA meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygyny ýazýarys: , $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$ mundan $AC^2 = BC \cdot AD$.

?

Meseleler we ýumuşlar

- 13.1.a) Boýy 170 cm bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy 1 m bolsa, beýikligi 5,4 m bolan elektik sütüniň kölegesiniň uzynlygyny tapyň.
- b) Iki deňyanly üçburçlugyň depesindäki burçlary deň. Birinji üçburçlugyň gapdal tarapy 17 cm, esasy 10 cm-e, ikinji üçburçlugyň esasy 8 cm-e deň. Ikinji üçburçlugyň gapdal tarapyny tapyň.

13.2. 3-nji suratdaky her bir bir çyzygidan meňzeş üçburçluklary görkeziň.

13.3. ABC üçburçluguň AP medianasy BC tarapa parallel we depeleri AB we AC taraplarda ýatýan islendik kesimi deň ýarpa bölýändigini subut ediň.

13.4. Üçburçluguň depeleri onuň orta çyzygyny öz içine alan gönü çyzykdan deň aralykda ýatýandygyny subut ediň.

13.5. Töwereginiñ içinden çyzylan $ABCD$ dörtburçluguň diagonallary O nokatda kesişyär.

$\Delta AOB \sim \Delta COD$ bolýandygyny subut ediň.

13.6. ABC üçburçluguň içki zolagynda O nokat we OA, OB, OC şöhlelerde degişlilikde E, F, K nokatlar alnan (4-nji surat). Eger $AB//EF$ we $BC//FK$ bolsa, ABC we EFK üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

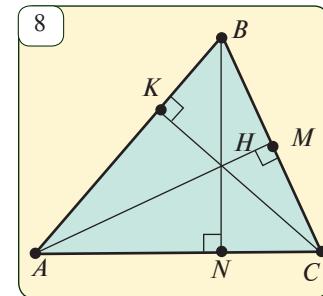
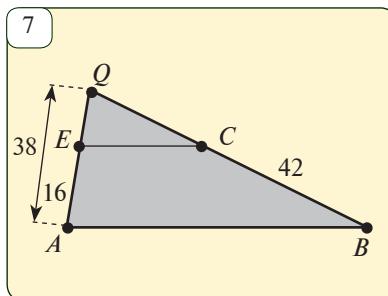
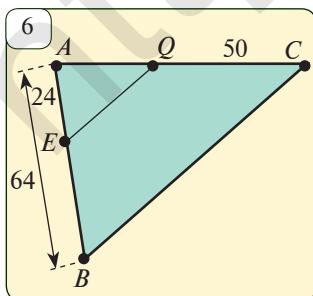
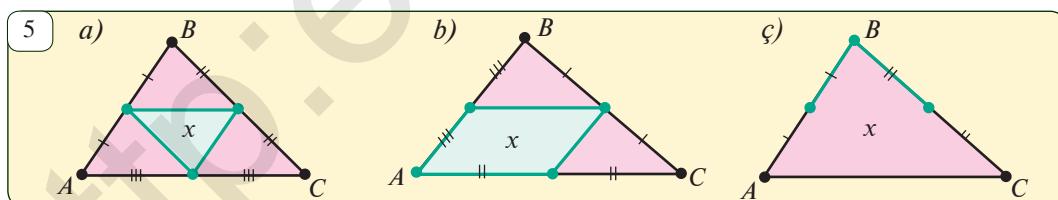
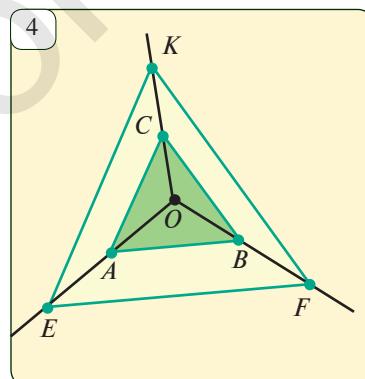
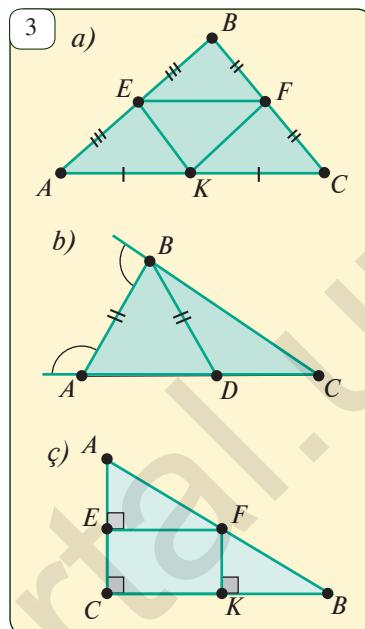
13.7*. Trapesiýanyň diagonallary kesişme nokadyn dan geçýän gönü çyzyk trapesiýanyň esaslaryndan birini $m:n$ gatnaşykda bölýär. Bu gönü çyzyk ikinji esasy nähili gatnaşykda bölýär?

13.8. Eger ABC üçburçluguň meydany S -e deň bolsa, 5-nji suratda x bilen belgilenen zolagyň meýdanyny tapyň.

13.9. 6-njy suratda $EQ // BC$. AQ -ny tapyň.

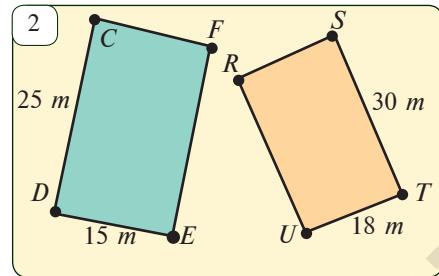
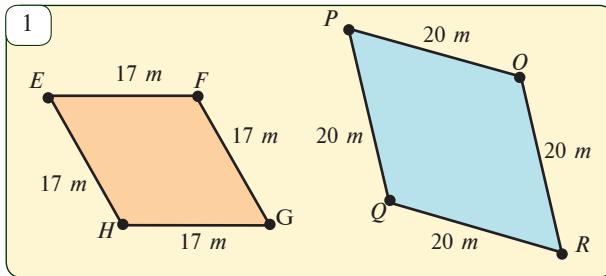
13.10. 7-nji suratda $AB // EC$. QC -ny tapyň.

13.11. 8-nji suratda ABC üçburçluguň beýiklikleri geçirilen. Netijede näçe meňzeş üçburçluklar emele geldi?



I. Testler

1. Aşakdaky kesgitlemelerden haýsсы dogry?
 - A) İki üçburçlугыň burçlary degişlilikde deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
 - B) İki üçburçlугыň taraplary degişlilikde deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
 - C) İki üçburçlугыň degişli taraplary proporsional we degişli burçlary deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
 - D) İki üçburçlугыň degişli taraplary deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
 - E) İki üçburçlугыň degişli taraplary we degişli burçlary deň bolsa, olara meňzeş diýilýär.
2. İki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy nämä deň?
 - A) Meňzeşlik koeffisiýentine;
 - B) Olaryň degişli taraplarynyň gatnaşygyna;
 - C) Olaryň perimetrleriniň gatnaşygyna;
 - D) Meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna.
3. Aşakdaky tassyklamalardan haýsсы dogry?
 - A) Üçburçluklardan biriniň iki burçy ikinjisiniň iki burçuna deň bolsa, olar meňzeş bolýar;
 - B) Üçburçluklardan biriniň iki tarapy ikinjisiniň iki tarapyna deň bolsa, olar meňzeş bolýar;
 - C) İki üçburçlугыň bir sanydan burçlary deň we ikiden taraplary proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar;
 - D) İki üçburçlугыň bir sanydan burçlary deň we bir sanydan taraplary proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.
4. Dogry jogaby tapyň. Eger iki üçburçluk meňzeş bolsa, olaryň ...
 - A) Beýiklikleri deň bolýar; B) Taraplary proporsional bolýar;
 - C) Taraplary deň bolýar; D) Meýdanlary deň bolýar.
5. Meňzeş üçburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy nämä deň?
 - A) Degişli taraplaryň gatnaşygynyň kwadratyna; B) Meňzeşlik koeffisiýentine;
 - C) Meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna; E) Meýdanlarynyň gatnaşygyna.
6. Haýsy bentde 1-nji suratda görkezilen romblaryň meňzeşligi dogry ýazylan?
 - A) $EHGF \sim PQRO$; B) $HGFE \sim PQRO$;
 - C) $GFEH \sim QROP$; E) $EHGF \sim QROP$.
7. 2-nji suratdaky köpburçluklar meňzeşmi? Nämä üçin?
 - A) Hawa, çünkü bu köpburçluklaryň degişli burçlary deň we degişli taraplary proporsional;
 - B) Hawa, çünkü bu köpburçluklaryň degişli burçlary proporsional we degişli taraplary deň;
 - C) Hawa, çünkü bu köpburçluklaryň degişli burçlary deň;
 - D) Hawa, çünkü bu köpburçluklaryň degişli taraplary proporsional;



8. 3-nji suratdaky SRQT we VVXU trapesiyalar meňzeşmi? Eger meňzeş bolsa, olaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň?

- A. Hawa, $k = 0,4$; B. Hawa, $k = 0,5$;
D. Hawa, $k = 0,8$; E. Ýok.

9. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplary 4 cm we 13 cm . Eger birinji üçburçlugyň meýdany 16 cm^2 -a deň bolsa, ikinji üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

- A. 169 cm^2 ; B. 16 cm^2 ;
D. 52 cm^2 ; E. 189 cm^2 ;

10. Iki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy 144 -e deň. Olaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy nämä deň?

- A. 13-e; B. 12-ä;
D. 14-e; E. 16-a;

11. 4-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş. Suratda berlen ululyklara görä uly üçburçlugyň meýdanynyň kiçi üçburçlugyň meýdanyna gatnaşygyny tapyň.

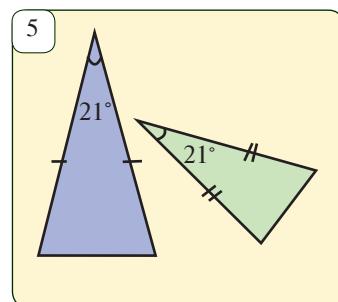
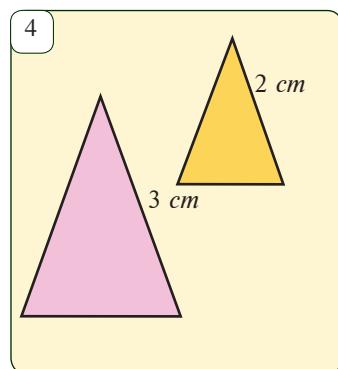
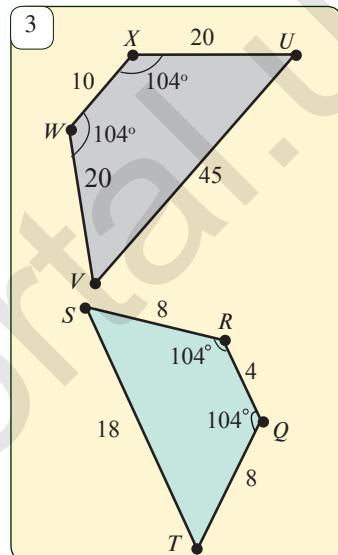
- A. 9:4; B. 3:2;
D. 4:9; E. 2:3;

12. Iki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy a -ga deň bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň bolýar?

- A. $1:a^2$; B. a^2 ; D. $a;\sqrt{E}$. 1: a ;

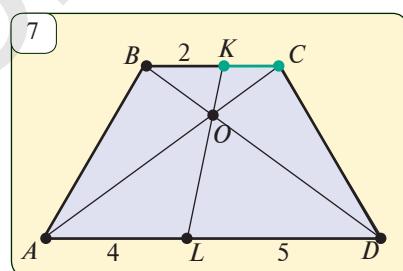
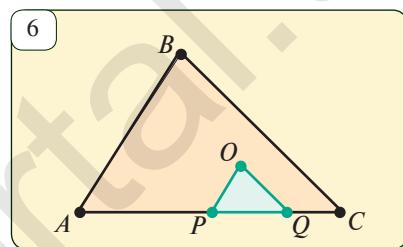
13. 5-nji suratda getirilen deňyanly üçburçluklar meňzeşmi? Näme üçin?

- A. Hawa, çünki olaryň ikiden taraplary proporsional we olaryň arasyndaky burçy deň;
B. Ýok, çünki olaryň iki burçy özara deň däl;
D. Ýok, çünki olaryň degişli burçlary deň däl;
E. Ýok, çünki olaryň taraplary proporsional däl;

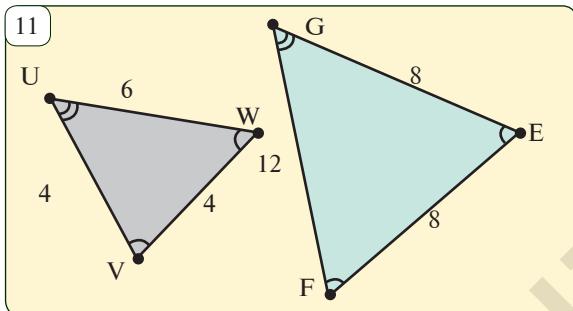
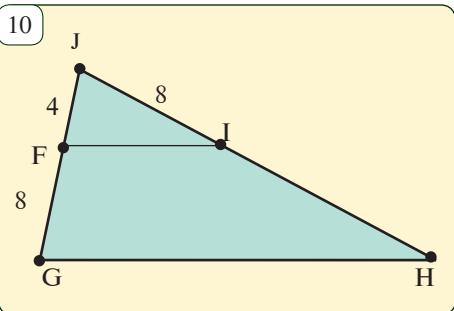


II. Meseleler

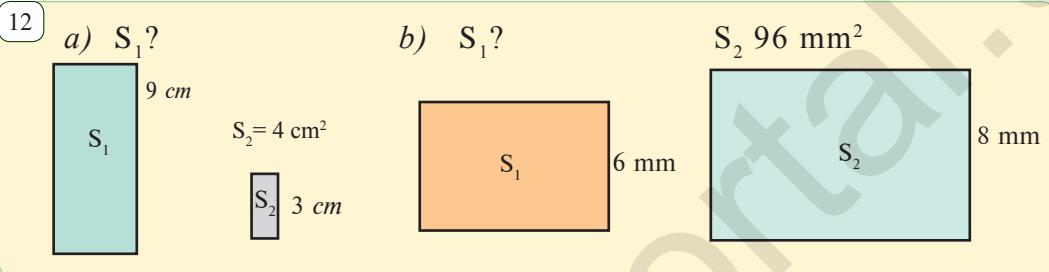
- ABC üçburçluguň AB we AC taraplarynyň ortalary degişlilikde E we F nokatlar bolsun. Eger AEF üçburçluguň meýdany 3 cm^2 bolsa, ABC üçburçluguň meýdanyny tapyň.
- ABC üçburçluguň AC tarapyna parallel gönü çyzyk AB we BC taraplary degişlilikde N we P nokatlarda kesýär. Eger $AN = 4$, $NB = 3$, $BP = 3,6$ bolsa, BC tarapy tapyň.
- Ýiti burçly ABC üçburçluguň AB tarapynda K nokat alnan. Eger $AK = 3$, $BK = 2$ we üçburçluguň BD beýikligi 4-e deň bolsa, K nokatdan AC kesime çenli bolan aralygy tapyň.
- $ABCD$ parallelogramyň BC tarapynyň ortasyndaky K nokatdan geçirilen DK şöhle bilen AB şöhle F nokatda kesişyär. Eger $AD = 4$, $DK = 5$ we $DC = 5$ bolsa, AFD üçburçluguň perimetreni hasaplaň.
- ABC üçburçluguň içki zolagynda alnan O nokatdan AB we BC taraplara parallel gönü çyzyklar geçirilen. Bu gönü çyzyklar AC tarapy degişlilikde P we Q nokatlarda kesýär. Eger $PQ = 2$, $AC = 7$ we ABC üçburçluguň meýdany 98-e deň bolsa, PAk üçburçluguň meýdanyny anyklaň (6-nji surat).
- $ABCD$ trapesiýanyň BC we AD esaslarynda degişlilikde K we L nokatlar alnan. KL kesim trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan geçyär. Eger $AL = 4$, $LD = 5$ we $BK = 2$ bolsa, KC kesimi tapyň (7-nji surat).
- Iki meňzeş üçburçluklardan birinjisiniň meýdany 15 mm^2 , ikinjisiniň meýdany bolsa 135 mm^2 . Birinji üçburçluguň bir tarapy 6 mm bolsa, ikinji üçburçluguň oña degişli tarapyny tapyň?
- 8-nji suratda berlenlere görä näbelli kesimi tapyň.
- 9-nji suratda getirilen üçburçluk meňzeşmi? Nämé üçin?



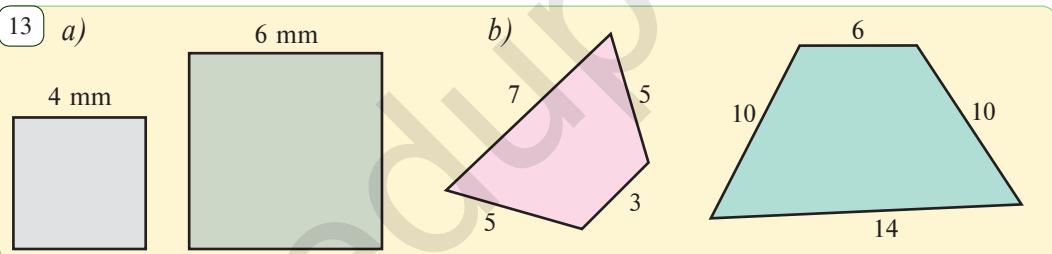
- 10-nji suratda $\Delta JIF \sim \Delta JHG$. IH kesimiň uzynlygyny tapyň
- 11-nji suratda görkezilen üçburçluklar meňzeşmi? Eger meňzeş bolsa, olaryň meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.
12. Iki meňzeş üçburçluklardan birinjisiniň meýdany 24 mm^2 , ikinjisiniň meýdany bolsa 216 mm^2 . Birinji üçburçluguň beýikliklerinden biri 8 mm bolsa, ikinji üçburçluguň degişli beýikligini tapyň.



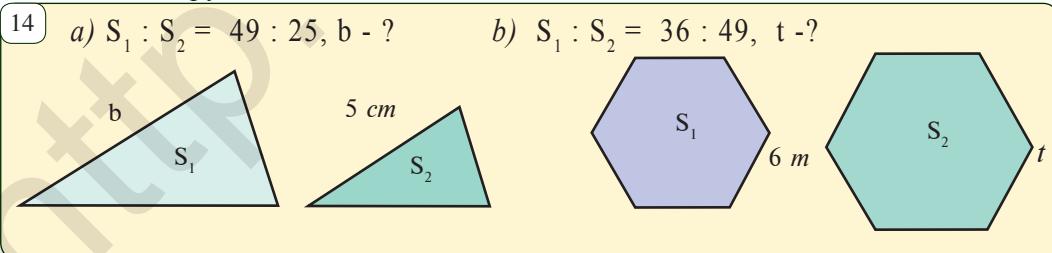
13. 12-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlardan peýdalanyп, näbelli ululygy tapyň



14. 13-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlardan peýdalanyп, olaryň meňzeşlik koeffisiýentini tapyň



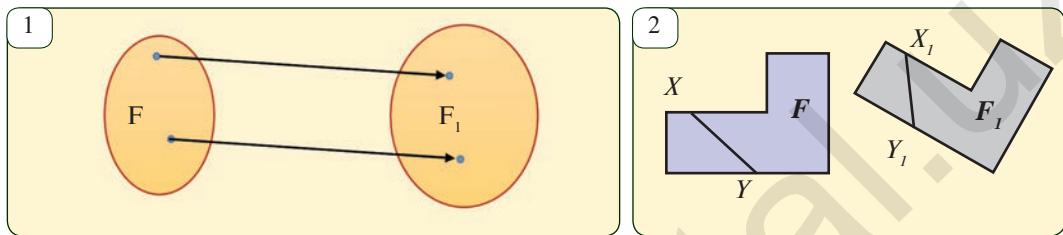
15. 14-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlar esasynda näbellini tapyň.



16. Çynar agajynyň kölegesi 12 m. Onuň ýanyndык köp etažly öýүн kölegesi bolsa 6 m. Eger çynar agajy öýden 16 m beýik bolsa, öýүн beýikligi näçani düzýär?

17. Heýkeliň beýikligi 9 m bolup, onuň kölegesi 12 m. Heýkeliň ýanynda ösýän derek agajynyň kölegesi bolsa 16 m. Deregiň beýikligi näçe?

Tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokady käbir usulda götürilse, täze F_1 şekil emele gelýär (1-nji surat). Eger bu götürmede (öwrümde) birinji şekiliň dürlü nokatlary ikinji şekiliň dürlü nokatlaryna götürilse (öwrüm özara bir bahaly bolsa), bu götürme **geometrik öz-özüne öwrülme** diýlip atlandyrylyar.



Eger öz-özüne öwrülmeye tekizligiň ähli nokatlary götürilse, onda tekizligi öz-özüne öwrülme barada hem aýtmak mümkün. Aşakda tekizlikdäki käbir geometrik öz-özüne öwrülmeleriň üstünde durup geçýäris.

Nokatlaryň arasyndaky aralygy saklaýan öz-özüne öwrülme **hereket** diýlip atlandyrylyar.

Kesgitlemä görä, öz-özüne öwrülmeye F şekiliň erkin X we Y nokatlary F_1 şekiliň nähiliidir X_1 we Y_1 nokatlaryna geçen bolup, $XY = X_1Y_1$ deňlik ýerine ýetirilse (ýagny aralyk saklansa), şeýle öz-özüne öwrülme hereket bolýar (2-nji surat).

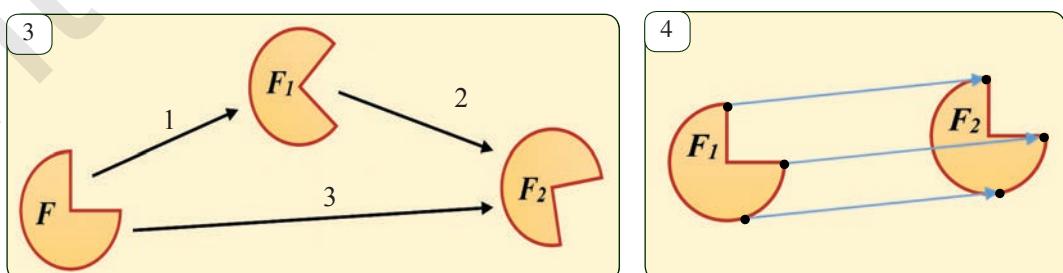
Hereketiň aşakdaky häsiýetlerini getirmek mümkün.

Hereketda goni çyzyk – goni çyzyga, şöhle – şöhlä, kesim - oňa deň kesime, burç - oňa deň burça, üçburçluk - oňa deň üçburçluga öwrülýär (göçýär).

Aýdaly, F şekil birinji hereket netijesinde F_1 şekile, F_1 şekil bolsa ikinji hereketiň kömeginde F_2 şekile geçen bolsun. Netijede, F şekil bu iki hereketiň kömeginde F_2 şekile öwrülýär we bu öwrülme öz nobatında ýene hereket bolýar (3-nji surat).

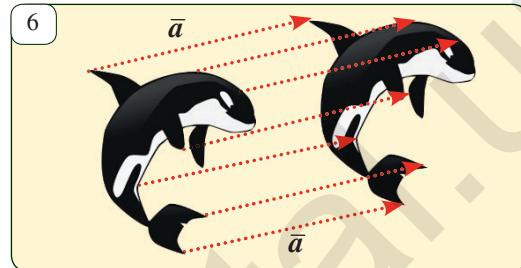
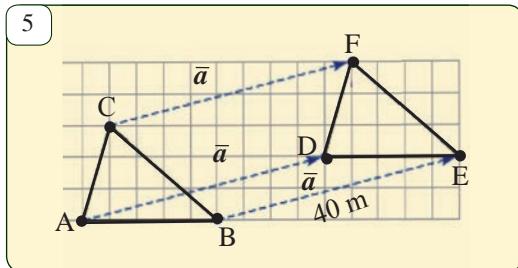
Tekizlikde käbir hereketiň kömeginde birini ikinjisine öwrülmegi mümkün bolan şekiller deň diýilýär.

Tekizlikde käbir AB wektor we erkin X nokat berlen bolsun. Eger X_1 nokat üçin $XX_1 = AB$ şert ýerine ýetirilse, X nokat X_1 nokada AB wektor boyúnça **parallel götürülen** diýlip atlandyrylyar.



Eger tekizlikde berlen F_1 şekiliň her bir nokady \overline{AB} wektor boýunça götürilse (4-nji surat), täze F_2 şekil emele gelýär. Munda F_1 şekil F_2 şekile parallel götürilen diýilýär. Parallel götürmede F_1 şekiliň her bir nokady birmeňzes ugurda birmeňzes uzaklyga götürilen bolýär.

5-nji suratda görkezilen üçburçluguň her bir nokady başlangyç ýagdaýyna görä 40 m-e parallel göçen. 6-njy suratdaky delfin hem a wektor boýunça parallel götürilen.



Görnüşi ýaly, parallel götürme hereketdir. Şonuň üçin, parallel götürmede gönüçzyk - gönüçzyga, şöhle - şöhlä, kesim - oña deň kesime öwrülýär we başgalar.

Aýdaly, $\overline{AB} = (a; b)$ wektor boýunça parallel götürmede F şekiliň nokady $X(x; y)$ we F_1 şekiliň nokady $X_1(x_1; y_1)$ -e geçsin. Onda kesgitlemä görä aşakdakylara eýediris:

$$x_1 - x = a, \quad y_1 - y = b \quad \text{ýa-da} \quad x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b.$$

Bu deňlikler paralel götürme formulalary diýlip atlandyrylyar.

1-nji mesele. $\bar{p} = (\bar{3}; \bar{2})$ wektor boýunça parallel götürmede $P(-2; 4)$ nokat haýsy nokada geçýär?

Çözülişi. Yökardaky parallel götürme formulalardan peýdalanýarys:

$$x_1 = -2 + 3 = 1, \quad y_1 = 4 + 2 = 6.$$

Jogaby: $P_1(1; 6)$.

?

Meseleler we ýumuşlar

15.1. $\bar{p} = (-2; 1)$ wektor boýunça parallel götürmede a) $(3; -2)$; b) $(0; 2)$; c) $(2; -5)$ nokat haýsy nokada geçýär?

15.2. Parallel götürmede $A(4; 2)$ nokat $B(3; 7)$ nokada geçdi. Parallel götürme haýsy wektor boýunça amala aşyrylan?

15.3. Parallel götürmede a) gönüçzyk - gönüçzyga; b) şöhle - şöhlä; c) kesim - oña deň kesime öwrülýändigini subut ediň.

15.4. Parallel götürmede $(1; 2)$ nokat $(1; -1)$ nokada geçýär. Koordinata başlangyjy bu öz-özüne öwrülmeye haýsy nokada geçýär?

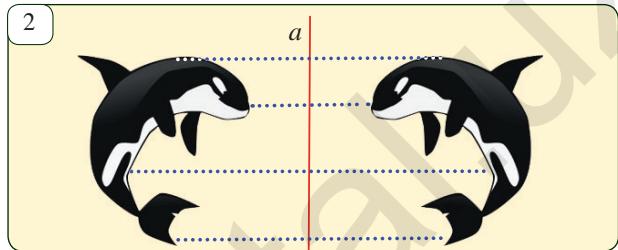
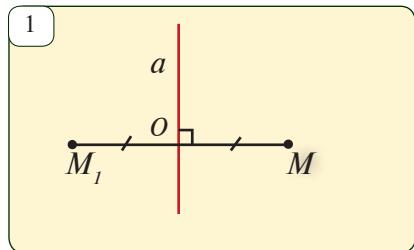
15.5. Parallel götürmede $(3; 4)$ nokat $(2; -4)$ nokada geçýär. Bu öz-özüne öwrülmeye koordinata başlangyjy haýsy nokada geçýär?

15.6. $A(2; 1)$ nokat $B(1; 0)$ nokada, $C(3; -2)$ nokat bolsa $D(2; -3)$ nokada geçýän parallel götürme barmy?

15.7. $A(-2; 3)$ nokat $B(1; 2)$ nokada, $C(4; -3)$ nokat bolsa $D(7; -2)$ nokada geçýärgan parallel götürme barmy?

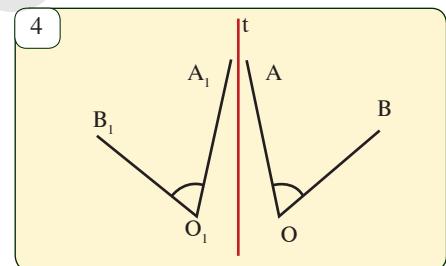
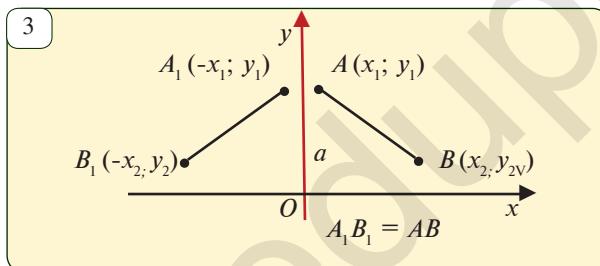
15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berlen. Parallel götürmede A_1D kesim B_1C kesime geçýär. Bu götürmede AA_1 kesim haýsy kesime geçýär?

Tekizlikde käbir a gönü çyzyk we onda ýatmaýan erkin M nokat berlen bolsun. M nokatdan a gönü çyzyga perpendikulýar geçirýäris we onuň esasyny O bilen belgileýäris (1-nji surat). Perpendikulýarda ýatýan M_1 nokat üçin $MO = M_1O$ bolsa, M we M_1 nokatlara a gönü çyzyk ýa-da *oka görä simmetrik* nokatlar diýilýär,



Tekizligiň erkin M nokadyna a gönü çyzyk (oka) görä oňa simmetrik bolan M_1 nokady laýyk goýýarys. Tekizligi şeýle öz-özüne öwrülmegine *oka görä simmetriýa* diýýäris. Gönü çyzygy bolsa *simmetriýa oky* diýýäris.

2-nji suratda görkezilen delfinler özara a oka görä simmetrik bolýär.



Oka görä simmetriýa hereketdir ýagny ol nokatlaryň arasyndaky aralygy saklaýar.

Geliň bu tasyklamany subut edeliň. 3-nji suratda erkin $A(x_1; y_1)$ we $B(x_2; y_2)$ nokatlardan bolup, $A_1(-x_1; y_1)$ we $B_1(-x_2; y_2)$ nokatlar bolsa olaryň a gönü çyzyga (Oy oka) görä degişlilikde simmetrik şöhlelenmeleri bolsun. $AB = A_1B_1$ bolýandygyny görkezýäris.

Hakykatdan hem, iki nokadyň arasyndaky aralygy hasaplamagyň formulasyna görä

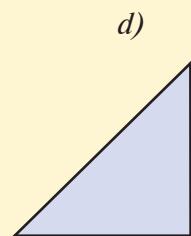
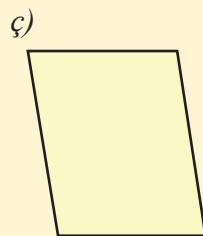
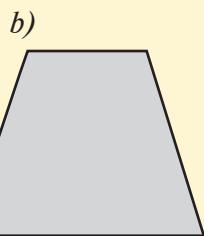
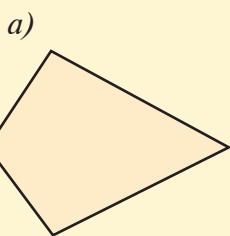
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ýagny bu aralyklar özara deň. Mundan oka görä simmetriýada her bir kesim özüne deň kesime geçýändigi-de gelip çykýar.

Edil şuňa meňzeş, oka görä simmetriýada burç – özüne deň burça geçýändigini hem görkezmek mümkün. Munda diňe burcuň ugry üýtgeýär (4-nji surat).

5



Koordinatalar tekizliginde berlen $A(x; y)$ nokat Ox okuna görä simmetriýada $A_1(x; -y)$ nokada, Oy okuna görä simmetriýada bolsa $A_2(-x; y)$ nokada geçýär.

?

Meseleler we ýumuşlar

16.1. $(1; 2), (0; 2), (2; 2)$ nokatlar koordinata oklaryna görä simmetriýalarda haýsy nokatlara geçýär? a) Ox okuna görä; b) OY okuna görä.

16.2. $(2; 4)$ nokat koordinata okuna görä simmetrik öwrülende $(2; -4)$ nokada geçdi. Öwrülme haýsy koordinata okuna görä amala aşyrylan?

16.3. 5-nji suratda görkezilen figuralaryň haýsylary simmetriýa okuna eýe? Bu şekilleri depderiňize götürüp çyzyň we olaryň simmetriýa oklaryny guruň.

16.4. Gönüburçluk, kwadrat, romb, deňyanly trapesiya we deňyanly üçburçlugyň näçe simmetriýa oky bar?

16.5. Erkin ABC üçburçluk çyzyň. Onuň C depesinde geçýän goni çyzyga görä oňa simmetrik bolan üçburçlugu şekillendirin.

16.6. Koordinata tekizliginde depeleri $A(3; 2), B(2; 7), C(6; 7)$ we $D(7; 2)$ nokatlarda bolan $ABCD$ parallelograma Oy okuna görä simmetrik bolan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramy şekillendirin.

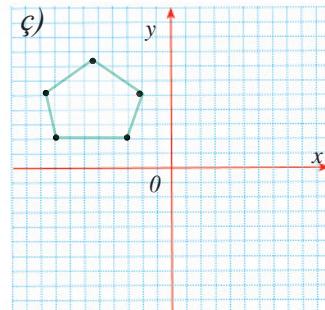
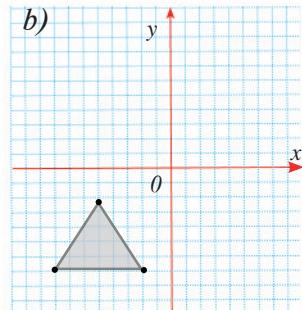
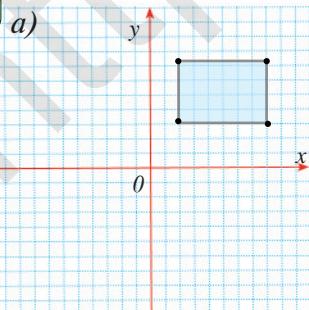
16.7. Koordinata tekizliginde $y = x + 4$ funksiýa grafigini çyzyň. Bu grafige Ox okuna görä simmetrik bolan goni çyzygy şekillendirin we ol haýsy funksiýanyň grafigi bolýandygyny anyklaň.

16.8. Çepden saga hem, sagdan çepe hem okap bolýan sözlere polindromlar diýilýär. Aşakdaky polindrom sözleriň haýsylarynyň simmetriýa oky bar?

KETEK NAN SOS KÖK ATA MUM RADAR

16.9. 6-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şekilleri depderiňize götürüp çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde bu şekillere Ox hem-de Oy oklaryna görä simmetrik bolan şekilleri guruň.

6



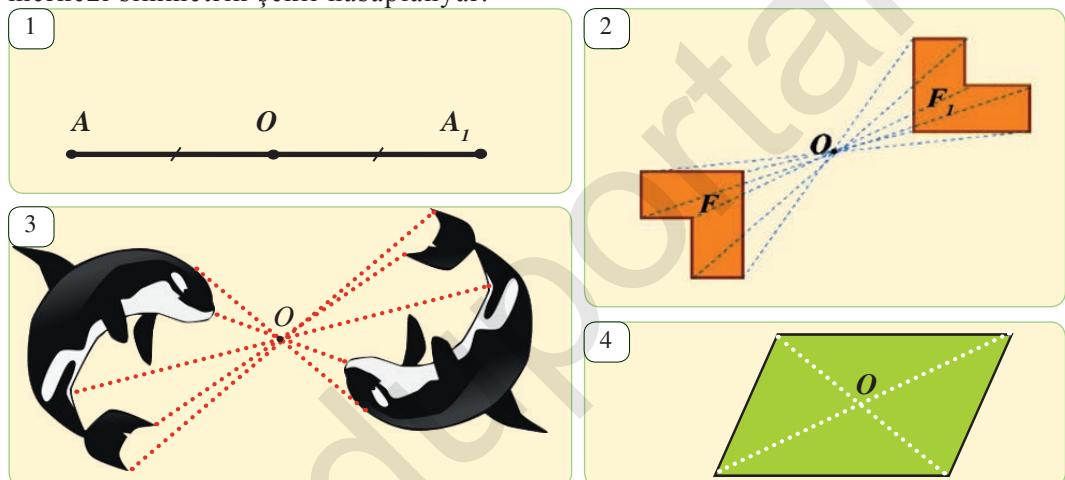
Tekizlikde berlen A we A_1 nokatlar O nokada görä simmetrik diýilýär, егер $AO = OA_1$, ýagñy O nokat AA_1 kesimiň ortasy bolsa (1-nji surat).

Eger tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokady O nokada görä simmetrik nokada geçirilse (2-nji surat), täze F_1 şekil emele gelýär. Şeýle orun çalyşmada F we F_1 şekiller *O nokada görä simmetrik* diýilýär. 3-nji suratlardaky delfinleriň suraty O nokada görä simmetrik şekiller bolýar.

Nokada görä simmetriýa – hereketdir.

Eger F şekil O nokada görä simmetrik orun çalyşmada özüne öwrülse, ol *merkezi simmetrik şekil* diýlip atlandyrylyar.

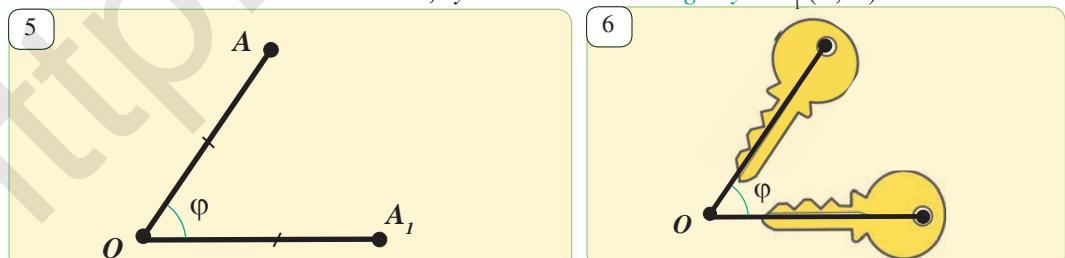
Meselem, parallelogram (4-nji surat) diagonallary kesişme O nokadyna görä merkezi simmetrik şekil hasaplanýar.



1-nji mesele. $O(2; 4)$ nokada görä simmetriýada $A(1; 2)$ nokat haýsy nokada geçýär?

Cözülişi. $A_1(x; y)$ gözlenýän nokat bolsun. Kesitlemä görä, O nokat AA_1 kesimiň ortasy. Diýmek, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$.

Bu deňliklerden $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$. *Jogaby:* $A_1(3; 6)$.



Aýdaly, tekizlikde O nokat we φ burç berlen bolup, öz-özüne öwrülmeye tekizligiň erkin A nokady şeýle A_1 nokada göçsün, $OA = OA_1$ we $\angle AOA_1 = \varphi$ bolsun. Şeýle öz-özüne öwrülmeye tekizligi O nokadyň daşynda φ burça *öwrülmeye* diýlip atlandyrylyar (5-nji surat).

Eger tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokadyny O nokada görä ϕ burça öwürsek, taze F_1 şekil emele gelýär. Munda F şekil O nokada görä ϕ burça öwrülende F_1 şekile geçdi diýilýär. 6-njy suratda açaryň suraty we ony käbir burça öwürmekde emele gelen şekil getirilen.

Nokada görä öwrülme hem hereket bolýar.

O nokada görä 180° burça öwrülme O nokada görä merkezi simmetriýadan ybarat bolýar.

Koordinatalary bilen berlen $A(x; y)$ nokat koordinata başlangyjyna görä simmetriýada $A_1(-x; -y)$ nokada geçýär: $A(x; y) \longrightarrow A_1(-x; -y)$.

Tebigatda simmetriýa her ädimde duşýar. Meselem, janly jandarlaryň köpüsü, hususan-da, adamyň we haywanlaryň göwresi, ösümlikleriň ýapraklary we gülleri simmetrik düzülen (7-nji surat). Şonuň ýaly-da, jansyz tebigatyň elementleri: garyň bölejikleri, duzuň kristallary, maddalaryň molekulýar gurluşy hem ajaýyp simmetrik şekillerden ybarat. Tebigatdaky bu gözelliğden we kämillikden ülhi alan gurluşykçy, inžener we arhitektor ýaly döredijilikli adamlar döreden köp desgalar we binalar, gurluşlar we mehanizmler, tehnika we transport serişdeleri hem simmetrik döredilen.

7



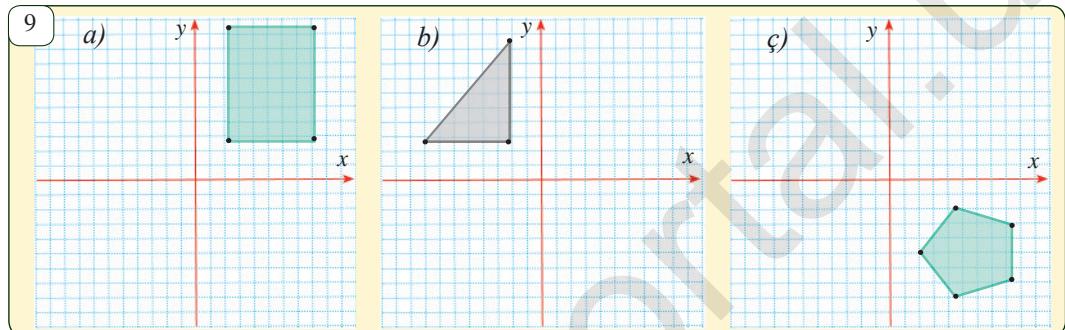
8



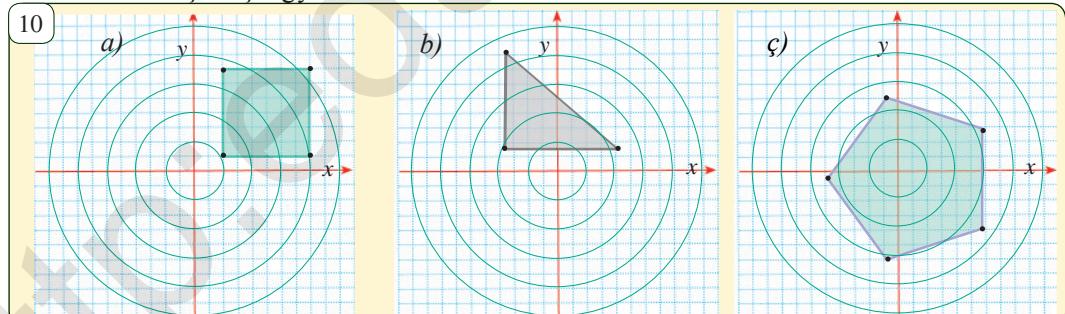
Meseleler we ýumuşlar

- 17.1. $O(-2; 3)$ nokada görä merkezi simmetriýada $A(4; 2)$ nokat haýsy nokada geçýär?
- 17.2. 8-nji suratda görkezilen şekillerde O nokat simmetriýa merkezi bolýandygyny esaslandyryň.
- 17.3. $(-2; 5), (2; 2), (-6; 12)$ nokatlar koordinata başlangyjyna görä merkezi simmetriýada haýsy nokatlara geçýär?
- 17.4. Merkezi simmetriýanyň hereket bolýandygyny subut ediň.
- 17.5. Parallelogramyň (4-nji surat) diagonallary kesişme nokady O -a görä merkezi simmetrik şekil bolýandygyny subut ediň.

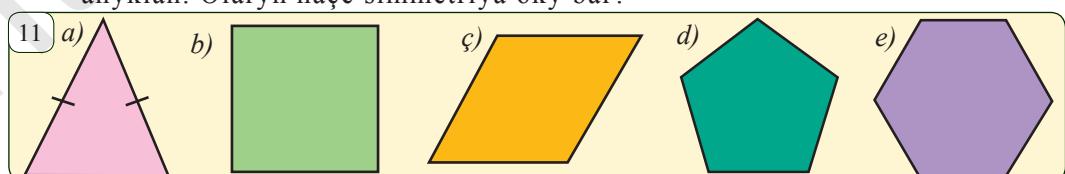
- 17.6.** Gönüburçluk, kwadrat, parallelogram, burç, gönü çyzyk we deňyanly üçburçluklaryň haýsylary merkezi simmetrik şekilden ybarat bolýar? Olaryň simmetriýa merkezi nirede ýerleşen?
- 17.7.** Erkin AB kesim we onda ýatmaýan M nokat çyzyň. AB kesime M nokada görä simmetrik bolan A_1B_1 kesimi şekillendirin.
- 17.8.** Erkin ABC üçburçluk çyzyň. a) C depesine görä; b) medianalarynyň kesişme nokadyna görä simmetrik bolan üçburçlugu şekillendirin.
- 17.9.** Koordinata tekizliginde depeleri $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$ we $D(6; 2)$ nokatlarda bolan $ABCD$ parallelograma koordinata başlangyjy $O(0, 0)$ nokada görä simmetrik bolan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramy şekillendirin.



- 17.10.** 9-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şeklärleri depderiňize götürüp çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde bu şeklärle koordinata başlangyjyna görä simmetrik bolan şeklärleri guruň.
- 17.11.** 10-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şeklärleri depderiňize götürüp çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde kwadraty 90° -a, üçburçlugu 180° -a we bâşburçlugu 120° -a öwrüň.



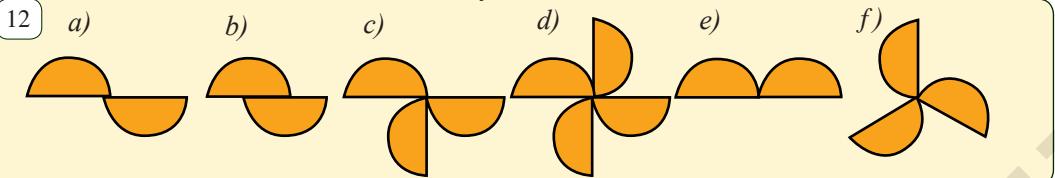
- 17.12.11-nji suratdaky köpburçluklar nähili simmetriýa eýye bolýandygyny anyklaň. Olaryň näçe simmetriýa oky bar?**



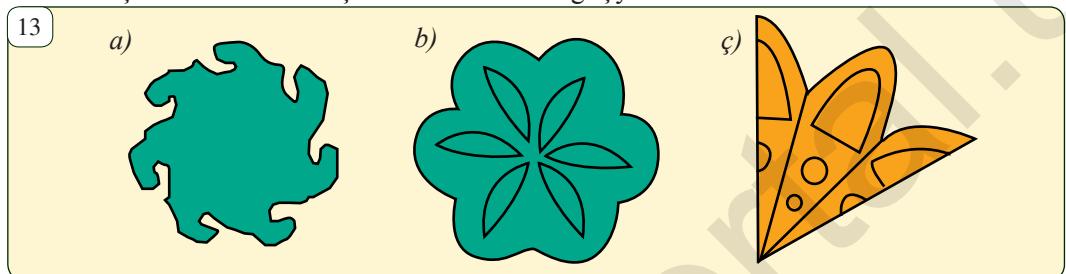
- 17.13.** $M, N, S, X, Z, V, T, Y, U, W, D, B, H, K, C, I, E, A$ harplary nähili simmetriýa eýye bolýandygyny anyklaň.

17.14. 12-nji suratdaky şekiller birnäçe birmeňzeş ýarym tegelejiklerden düzülen.

Bu şekilleri öz-özüne geçirýän öwrülme bar ýa-da ýoklugyny anyklaň. Eger bar bolsa, ol nähili öwrülme bolýar?



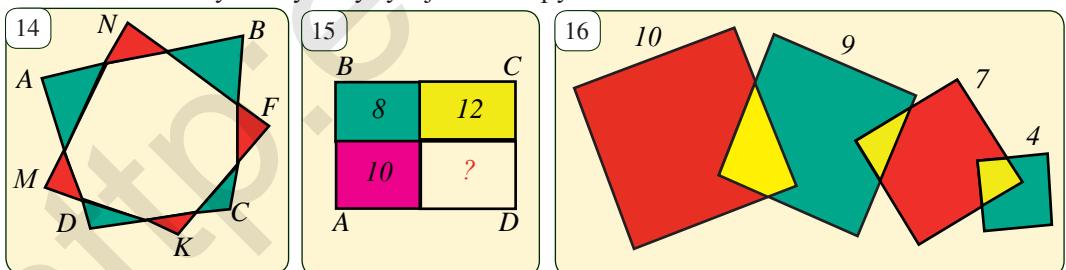
17.15. 13-nji suratdaky figuralaryň haýsylary simmetriýa merkezine eýe. Nähili burça öwrülende bu şekiller öz-özüne geçýär?



17.16. Iki $ABCD$ we $MNPK$ deňdeş ýagny deň meýdana eýe bolan dörtburçluklar bir-biriniň üstüne 14-nji suratda görkezilişi ýaly edip goýlan. Gyzyl reňkdäki üçburçluguň meýdanlary jemi ýaşyl reňke boýalan üçburçluklaryň meýdanynyň jemine deňligini görkeziň.

17.17. $ABCD$ gönüburçluk taraplaryna parallel göni çzyklar bilen dört gönüburçluga bölünen. 15-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, boýalmadyk gönüburçluguň meýdanyny tapyň.

17.18. 16-njy suratdaky kwadratlaryň taraplary 10 cm , 9 cm , 7 cm we 4 cm . Gyzyl reňkdäki kwadratlaryň meýdanynyň jemi 112 cm^2 -a deň. Gök reňkdäki kwadratlaryň meýdanynyň jemini tapyň.

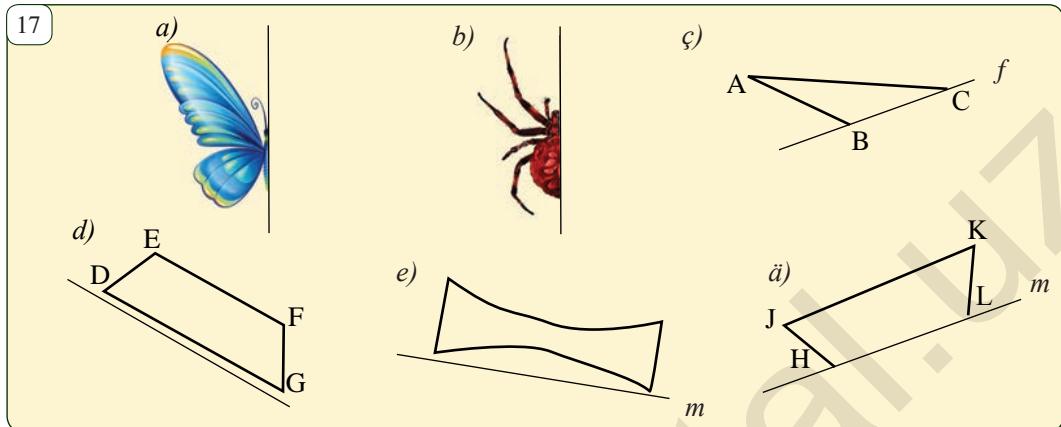


"Gar bölejikleri" taslama işi

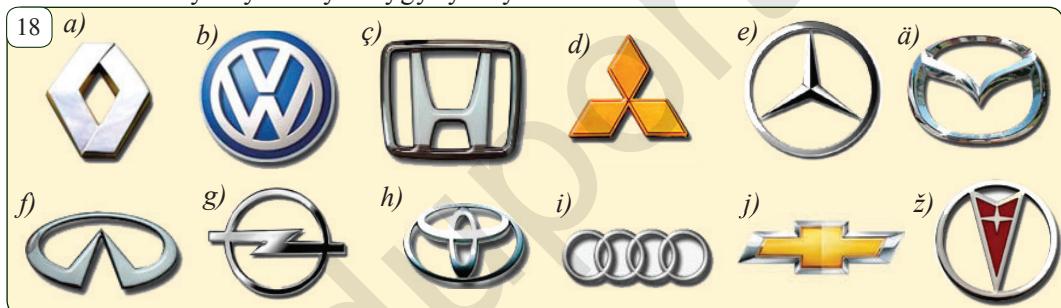
Tebigatda ähli gar bölejikleri simmetrik şekile eýe bolýar we bir-birine meňzemeýär. Her bir gar bölejigi merkezine görä 60° -a öwrülende öz-özüne geçýär. 60° -a öwrülende öz-özüne geçýän şekilleri kagyzdan nädip gyrkyp almak mümkün? Birnäçe dürli şekildäki gar bölejiklerini kagyzdan gyrkyp alyň.



17.19. 17-nji suratda görkezilen şekilleri depderiňze çyzyp alyň we berlen oka görä simmetrik öwrülmesini guruň.

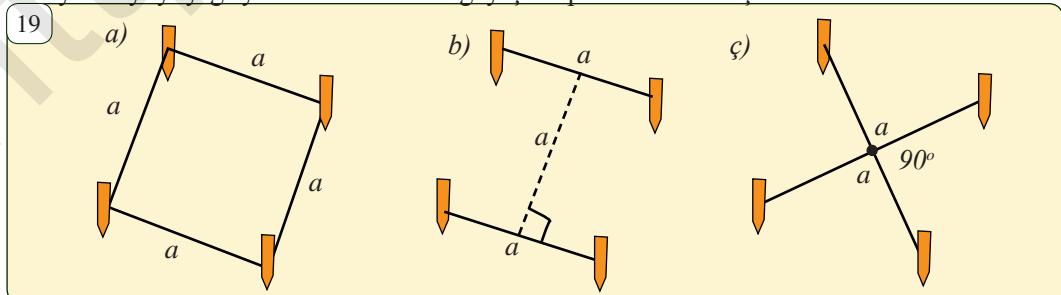


17.20. 18-nji suratda görkezilen awtomobil kompaniyalarynyň logotipleri nähili simmetriýa eýe bolýandygyny anyklaň.



"Gülzara geometriya" taslama işi.

Üç ýoldaş Aly, Weli we Saly kwadrat şeklindäki gülzar döretmekçi. Aly kwadrat şeklindäki gülzary 4 gazyga 4 sany birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleri çekip bölmekçi (19-nji a surat). Weli kwadrat şeklindäki gülzary 2 birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleri gazyklara çekip, olary parallel ýagdaýda aralaryndaky aralygy ýüpüň uzynlygyna deň edip ornaşdyryp bölmekçi (19-nji b surat). Saly bolsa 2 birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleriň ortalaryny düwüp, olaryň ortalary üstme-üst düşyän we bir-birine perpendikulýar edip çekip gazyklara daňyp bölmekçi (19-nji ç surat). Hany aýdyň, olaryň haýsсы goýlan meselәni dogry çözüپdir? Nämе üçin?

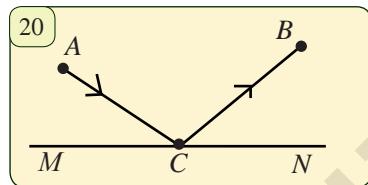


"Geometriя we optika" taslama işi.

XVII asyrda beýik fransuz matematik alymy Pýer Ferma aşakdaky kanunalaýyklygy açыş etdi: ýagtylyk şöhlesi bir nokatdan ikinji nokada iň gysga wagtyň dowamynnda ýetip barýar.

1. Aýnanyň bir tarapyndaky A we B nokatlar berlen. Ýagtylyk şöhlesi A nokatdan çykyp, aýna urlup B nokatdan geçdi (20-nji surat). Fermanyň prinsipinden peýdalanyп, ACM (düşme burçy) we BCN (serpilme burçy) arasyndaky gatnaşygy tapyň.

2. Derýanyň kenaryndaky A nokatda fermeriň öyi we B nokatda onuň fermasy ýerleşýär (21-nji surat). Fermer her gün derýa baryp, gaplara suw dolduryp fermasyna eltýärdi. Ol bu işi iň gysga ýol bilen amala aşyrmak üçin nähili ýoldan ýöräni makul?



Gzykly geometriя

a) 22-nji suratda erkin gübercek dörtburçluk görkezilen. Dörtburçlugin diagonallary ony dört üçburçluga bölýär. Bu üçburçluklaryň meýdany üçin $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ bolýandygyny subut ediň.

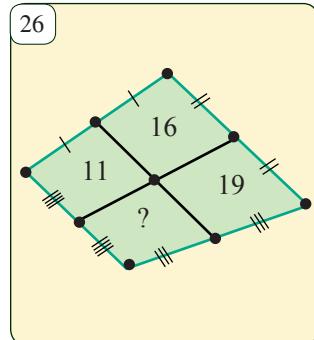
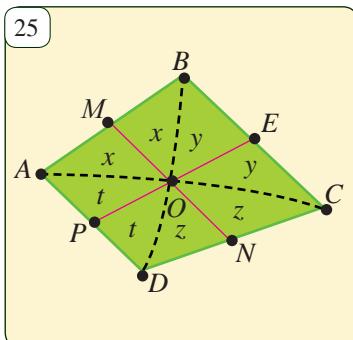
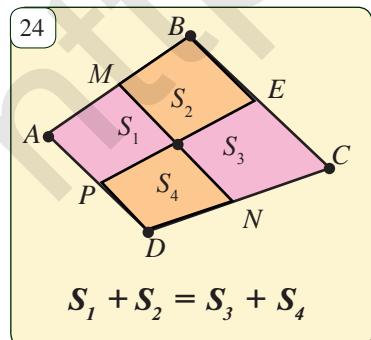
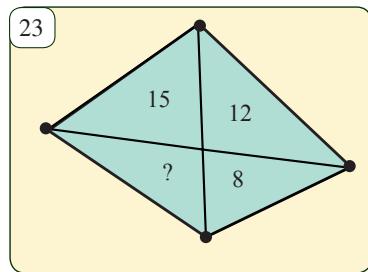
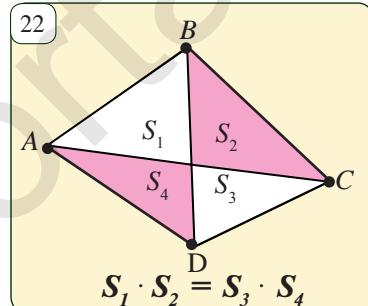
Görkezme: meňzeş şekilleriň häsiýetlerinden peýdalanyň.

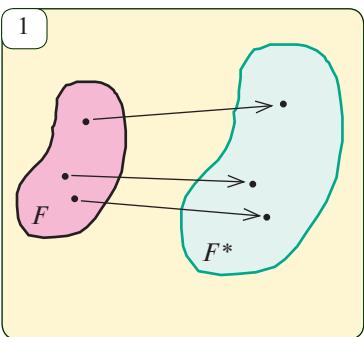
b) 23-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, nämälim meýdany tapyň.

ç) 24-nji suratda erkin gübercek dörtburçluk görkezilen. Dörtburçlugin garşylykly tarapalarynyň ortalary utgaşdyrylan. Netijede dörtburçluk dört dörtburçluga bölünen. Bu dörtburçluklaryň meýdany üçin $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ bolýandygyny subut ediň.

Görkezme: subut etmek üçin 25-nji suratdaky kömekaş şekeleñden peýdalanyň.

d) 26-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, näbelli meýdany tapyň.

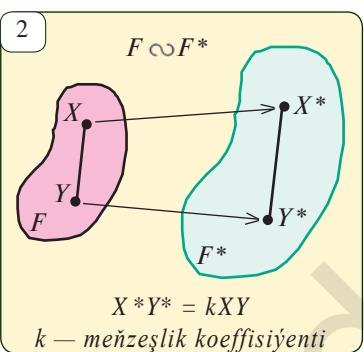




Önki derslerde köpburçluklaryň meńzeşligi düşünjesi bilen tanyşdyk. Bu düşünjäni diňe köpburçluklar üçin däl, eýsem islendik geometrik figuralar üçin hem girizmek mümkün.

Eger F we F^* şekiller berlen bolup, F şekiliň her bir nokadyna F^* şekiliň kabir nokady laýyk goýlan bolsa we munda F^* şekiliň her bir nokadyna F şekiliň diňe bir nokady gabat gelse, (*1-nji surat*) ***F* şekil F^* sekile öwürlen** diýilýär.

✓ Kesitleme. Eger F şekili F^* şekile öwürende nokatlaryň arasyndaky aralyklar birmeňzeş san esse özgerse, şeýle öwürmä **meńzeşlik öwrülmesi** diýilýär (*2-nji surat*).

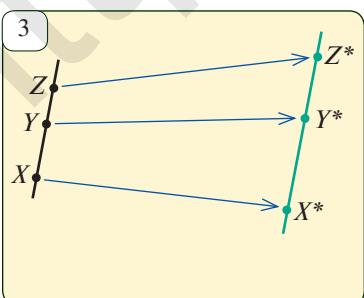


Bu kesitlemäni aşakdaky ýaly düşündirmek mümkün: Aýdaly, kabir öwrülme netijesinde F şekiliň erkin X , Y nokatlaryna F^* şekiliň X^* , Y^* nokatlary gabat goýlan bolsun. Eger $X^*Y^* = k \cdot XY$, $k > 0$ bolsa, şeýle öwürmä **meńzeşlik öwrülmesi** diýilýär. Munda k — ähli X we Y nokatlar üçin birmeňzeş san bolup, oňa meńzeşlik koeffisiýenti diýilýär.

Eger F we F^* şekiller berlen bolup, bu şekil-lerden biriniň ikinjisine geçirýän meńzeşlik öwrülmesi bar bolsa, F we F^* şekiller özara **meńzeş** diýilýär. Figuralaryň meńzeşligi $F \bowtie F^*$ ýaly ýazylýär. Eger meńzeşlik koeffisiýenti k -ny hem görkezmeli bolsa, $F \bowtie F^*$ ýaly hem belgilenýär.

Eger meńzeşlik öwrülmesinde X nokada X^* nokat gabat goýlan bolsa, ***X* nokat X^* nokada meńzeş ýa-da **öwrüldi** diýilýär.**

Teorema. **Meńzeşlik öwrülmesi** a) *göni çyzygy göni çyzyga; b) şöhläni şöhlä;* c) *burçy (onuň ululygyny saklamak bilen) burça; d) kesimi (uzynlygy bu kesimden k esse uzyn bolan) kesime öwürýär.*



Subudy. a) Meńzeşlik koeffisiýenti k bolan öwrülmede bir göni çyzykda ýatýan dürli X , Y we Z nokatlardan degişlilikde X^* , Y^* we Z^* nokatlara öwrülsin (*3-nji surat*).

X , Y , Z nokatlardan biri, aýdaly, Y galan ikisiniň arasynda ýatsyn. Onda $XZ = XY + YZ$. Meńzeşlik öwrülmesiniň kesitlemesine görä:

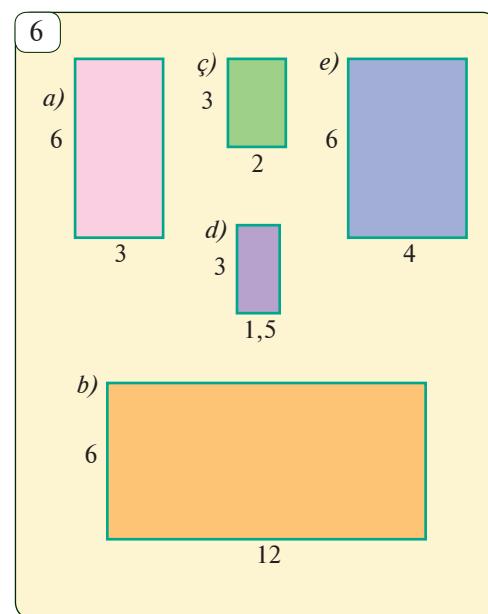
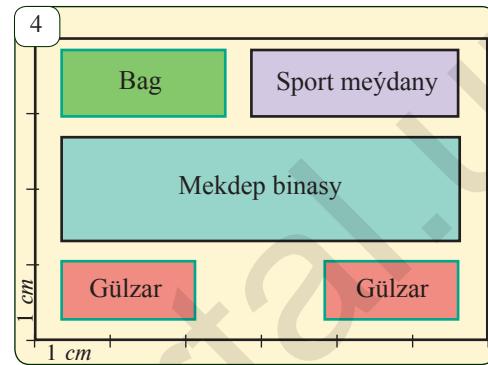
$$X^*Z^* = k \cdot XZ = k \cdot (XY + YZ) = k \cdot XY + k \cdot YZ = X^*Y^* + Y^*Z^*.$$

Bu deňlikden X^* , Y^* we Z^* nokatlaryň bir goni çyzykda ýatýandygy gelip çykýar.

Teoremanyň subudyny diňe a) tassyklama üçin getirdik. Galan tassyklamalarda subut etmegi size maşk hökmünde galdyrýarys.

Meseleler we ýumuşlar

- 18.1.** Meňzeşlik öwrülmesi näme?
- 18.2.** Nähili şekillere meňzeş diýilýär?
- 18.3.** Ini 3 cm , uzynlygy 4 cm bolan gönüburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti $2\text{-}a$ deň bolan dörtburçluk guruň.
- 18.4.** 4-nji suratda mekdep howlusynyň shemasy $1:1000$ masstabda görkezilen. Ölçeg işlerini ýerine ýetirip,
a) howlynyň; b) mekdep binasynyň;
ç) gülzarlaryň; d) sport meýdanynyň;
e) bagy hakyky ölçeglerini tapyň.
- 18.5.** Eger karta $1:50000$ masstabda şekillendirilen bolsa (5-nji surat), Abat we Azat oba merkezleriniň arasyndaky aralygy tapyň.
- 18.6.** Meňzeşlik öwrülmesinde şöhleleriň arasyndaky burç saklanndygyny subut ediň.
- 18.7*.** Meňzeşlik öwrülmesinde a) parallelogram parallelograma; b) kwadrat kwadrata; ç) gönüburçluk gönüburçluga; d) trapesiýa trapesiýa öwrülýändigini subut ediň.
- 18.8*.** ABC üçburçluguň meňzeşlik öwrülmesinde $A^*B^*C^*$ üçburçluga öwrülýär. Eger meňzeşlik koeffisiýenti $0,6\text{-}a$ we ABC üçburçluguň perimetri 12 cm -e deň bolsa, $A^*B^*C^*$ üçburçluguň perimetreni tapyň.
- 18.9.** 6-njy suratdan meňzeş gönüburçluklaryň jübütliklerini tapyň we meňzeşlik koeffisiýentlerini anyklaň.

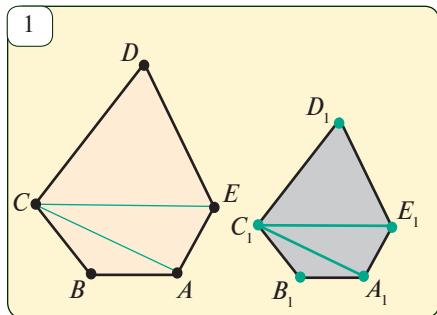


1-nji teorema. Meńzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy meńzeşlik koeffisiýentine deň.

Subudy. Hakykatdan hem, $A_1A_2\dots A_n$ we $B_1B_2\dots B_n$ köpburçluklar meńzeş we meńzeşlik koeffisiýenti k bolsa, $B_1B_2=k\cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k\cdot A_2A_3$, …, $B_nB_1=k\cdot A_nA_1$ bolýar. Mundan

$P=B_1B_2+B_2B_3+\dots+B_nB_1=k\cdot A_1A_2+k\cdot A_2A_3+\dots+k\cdot A_nA_1=k\cdot(A_1A_2+A_2A_3+\dots+A_nA_1)=k\cdot P_1$ deňligi alarys. *Teorema subut edildi.*

2-nji teorema. Meńzeş köpburçluklary birmeńzeş sandaky meńzeş üçburçluklara bölmek mümkün.



Subudy. Aýdaly, $ABCDE$ we $A_1B_1C_1D_1E_1$ köpburçluklar meńzeş bolup, meńzeşlik koeffisiýenti k bolsun.

Özara laýyk C we C_1 depelerden CA , CE we C_1A_1 , C_1E_1 diagonallary geçirýäris (1-nji surat). Netijede, köpburçluklar birmeńzeş sandaky üçburçluklara bölündi. Emele gelen üç jübüt degişli üçburçluklaryň meńzeşligini görkezýäris.

1. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Çünkü, bu üçburçluklarda, şerte görä, $\angle B = \angle B_1$,
 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Üçburçluklaryň meńzeşliginiň TBT nyşanyna görä,

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

2. $\Delta CDE \sim \Delta C_1D_1E_1$. Bu meńzeşlik 1-nji bentdäki ýaly subut edilýär.

3. $\Delta ACE \sim \Delta A_1C_1E_1$. Hakykatdan hem, $\angle CAE$ we $\angle C_1A_1E_1$ burçlara garaýarys:

$$\angle CAE = \angle BAE - \angle CAB, \quad \angle C_1A_1E_1 = \angle B_1A_1E_1 - \angle C_1A_1B_1.$$

Bu ýerde, $\angle BAE = \angle B_1A_1E_1$ (berlen meńzeş başburçluklaryň degişli burçlary).
 $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ (meńzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň degişli burçlary).

Diýmek, $\angle CAE = \angle C_1A_1E_1$.

AC we AE hem-de A_1C_1 we A_1E_1 taraplara garaýarys: $AC = kA_1C_1$, çünkü olar özara meńzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň degişli taraplary, $AE = kA_1E_1$, çünkü olar hem berlen meńzeş başburçluklaryň degişli taraplary. Diýmek, üçburçluklaryň meńzeşliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta ACE \sim \Delta A_1C_1E_1$. Erkin meńzeş köpburçluklar üçin hem şunuňya ly pikir ýöretmeler dogry bolýandygy aýdyň.

Teorema subut edildi.

3-nji teorema. Meńzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy meńzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň.

Subudy. Aýdaly, $A_1A_2\dots A_n$ we $B_1B_2\dots B_n$ köpburçluklar meňzeş we k — meňzeşlik koeffisiýenti bolsun. Onda $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \dots, A_1A_{n-1}A_n$ üçburçluklar degişlilikde, $B_1B_2B_3, B_1B_3B_4, \dots, B_1B_{n-1}B_n$ üçburçluklara meňzeş bolup, meňzeş üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy k^2 -a deň bolýar (2-nji surat):

$$S_{A_1A_2A_3} = k^2 S_{B_1B_2B_3}, S_{A_1A_3A_4} = k^2 S_{B_1B_3B_4}, \dots, S_{A_1A_{n-1}A_n} = k^2 S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Bu deňlikleriň degişli böleklerini goşsak,

$$S_{A_1A_2\dots A_n} = k^2 S_{B_1B_2\dots B_n}$$

Teorema subut edildi.

Mesele. Perimetrleri 18 cm we 24 cm bolan iki meňzeş köpburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

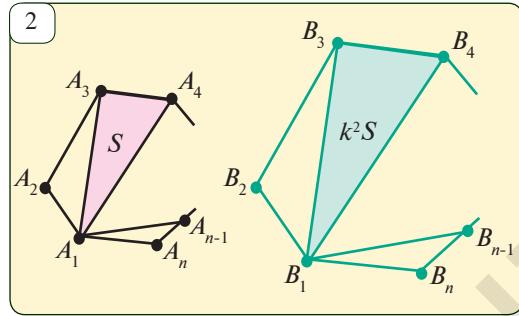
Çözülişi. 1) Meňzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deňliginden peýdalanyп, $k = 24 : 18 = 4 : 3$ bolýandyгyny tapýarys.

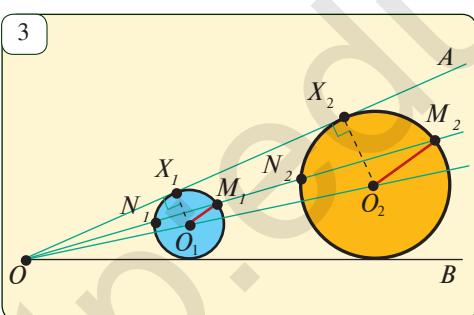
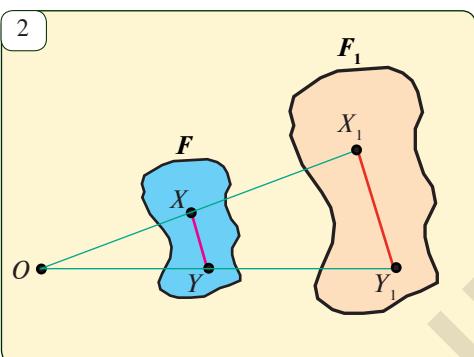
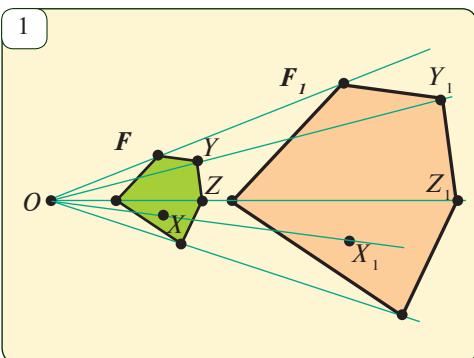
2) Meňzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň bolany üçin gözlenýän gatnaşyk $k^2 = \frac{16}{9}$ -a deň. **Jogaby:** $\frac{16}{9}$.

?

Meseleler we ýumuşlar

- 19.1. Meňzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy nämä deň?
- 19.2. Meňzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teoremany düşündiriň.
- 19.3. Üçburçluk bilen dörtburçluk meňzeş bolmagy mümkünmi?
- 19.4. Meýdanlary 6 m^2 we 24 m^2 bolan iki dörtburçluk meňzeş. Meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.
- 19.5. İki köpburçlugyň perimetrleri 18 cm we 36 cm -e, meýdanlarynyň jemi bolsa 30 cm^2 -a deň. Köpburçluklaryň meýdanlaryny tapyň.
- 19.6. Perimetri 84 cm bolan üçburçlugyň bir tarapyna parallel edip geçirilen goni çyzyk ondan perimetri 42 cm -e we meýdany 26 cm^2 -a deň üçburçluk böldi. Berlen üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
- 19.7. O nokada görä simmetrik şekiller meňzeş bolarmy? Oka görä simmetrik şekiller näme? Olaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň?
- 19.8. Dörtburçluk şeklärindäki pagta meýdany kartada meýdany 12 cm^2 bolan dörtburçluk bilen şekillenýärt. Eger kartanyň masstäby 1:1000 bolsa, meýdanyň hakyky meýdanyny hasaplaň.
- 19.9*. Meýdanlary 8 cm^2 we 32 cm^2 bolan iki meňzeş üçburçluk perimetrleriniň jemi 48 cm -e deň. Üçburçluklaryň perimetrlerini tapyň.





In ýonekeý meñzeş öz-özüne öwrülmelerden biri gomotetiýadır. Aýdaly, F — şeñil, O — nokat we k — položitel san berlen bolsun. F şeñiliň islendik X nokady arkaly OX şöhle geçirýäris we bu şöhlede uzynlygy $k \cdot OX$ bolan OX_1 kesimi goýyarys (*1-nji surat*). Şu usul bilen F şeñiliň her bir X nokadyna X_1 nokady laýyk goýyan öwrülmä *gomotetiýa* diýilýär. Munda, O nokat gomotetiýa merkezi, k sani gomotetiýa koeffisiýenti, F we gomotetiýa netijesinde F öwrülyän F_1 şeñillere bolsa *gomotetik şeñiller* diýilýär.

Teorema. Gomotetiýa meñzeşlik öwrülmesi bolýar.

Subudy. Erkin O merkezli, k koeffisiýentli gomotetiýada F şeñiliň X we Y nokatlary X_1 we Y_1 nokatlara geçsin (*2-nji surat*). Onda, gomotetiýanyň kesgitlemesine görä, XOY we X_1OY_1 üçburçluklarda $\angle O$ — umumy we $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k$ bolýar.

Diýmek, XOY we X_1OY_1 üçburçluklar iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça meñzeş.

Sonuň üçin $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{OX_1}{OX}$, hususan-da, $X_1Y_1 = k \cdot XY$

Teorema subut edildi.

Mesele. AOB burcuň taraplaryna galtaşýan erkin iki töwerek gomotetik bolýandygyny we O nokat şu gomotetiýa üçin merkez bolýandygyny subut ediň.

Subudy. Merkezleri O_1 we O_2 bolan töwerekler AOB burcuň taraplaryna galtaşsyn (*3-nji surat*). Bu töwerekleriň gomotetik bolýandygyny subut edýäris.

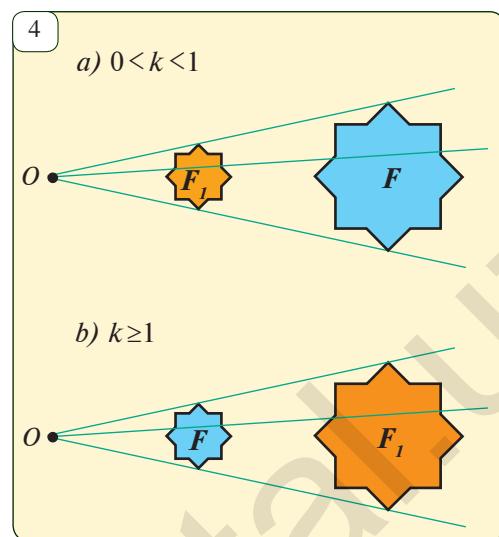
Töwerekler OA şöhlä degişlilikde X_1 we X_2 nokatlarda galtaşan bolsun (*3-nji surat*). Onda, $\Delta OX_1O_1 \sim \Delta OX_2O_2$, çünki

$$\angle X_1OO_1 = \angle X_2OO_2 \quad \text{we} \quad \angle OX_1O_1 = \angle OX_2O_2 = 90^\circ.$$

Mundan, $\frac{O_2X_2}{O_1X_1} = \frac{OO_2}{OO_1}$.

Sag tarapdaky gatnaşygy k bilen belgileýäris we koeffisiýenti $k = \frac{O_2 X_2}{O_1 X_1}$, merkezi O bolan gomotetiýa garáyarys. Aýdaly, bu gomotetiýada O_1 merkezli töwerekgiň islendik M_1 nokady M_2 nokada geçen bolsun. Onda, $O_2 M_2 = k O_1 M_1$ ýa-da $O_2 M_2 = \frac{O_2 X_2}{O_1 X_1} \cdot O_1 M_1$

Mundan, $O_1 X_1 = O_1 M_1$ bolany üçin $O_2 M_2 = O_2 X_2$, deňligi alarys. Bu M_2 nokat merkezi O_2 nokatda, radiusy $O_2 X_2$ -ä deň bolan töwerekde ýatýandygyny aňladýar. Diýmek, garalýan töwerekler özara gomotetik eken.

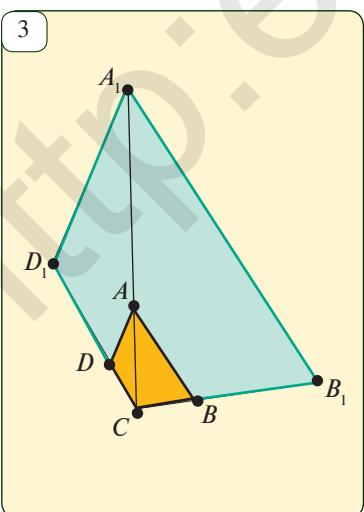
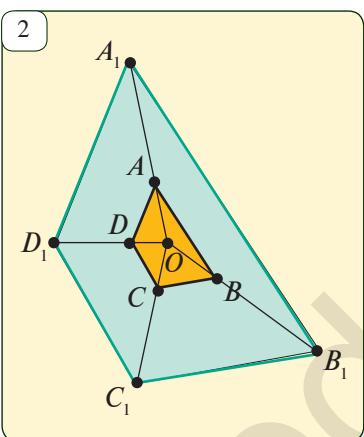
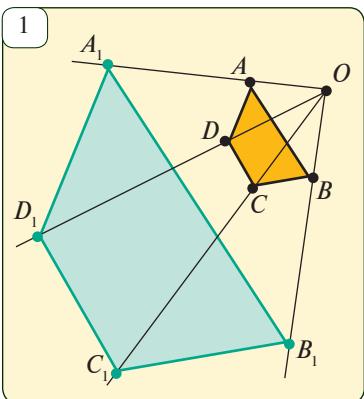


Ugrukdyryjy gönükmə

4-nji suratda gomotetiýanyň koeffisiýenti a) $0 < k < 1$; b) $k \geq 1$ bolan gomotetik şeklärler görkezilen. Gomotetiýanyň koeffisiýentiniň bahasyna garap gomotetik figuralaryň “gysylmagy” ýa-da “süýnmegi” barada nähili netije çykarmak mümkün?

Meseleler we ýumuşlar

- 20.1. Gomotetiýa näme? Gomotetiýanyň merkezi, koeffisiýenti näme?
- 20.2. Gomotetiýanyň meňzeşlik öwrülmesi bolýandygyny düşündiriň.
- 20.3. Üçburçluk çyzyň. Üçburçlugyň a) içki zolagynda; b) daşky zolagynda O nokat belgiläň we koeffisiýenti 2-ä deň bolan O merkezli gomotetiýa garap, berlen üçburçluga gomotetik üçburçluk guruň.
- 20.4. Perimetrleri 18 cm we 27 cm bolan iki romb özara gomotetik. Bu romblaryň taraplarynyň we meýdanlarynyň gatnaşyklaryny tapyň.
- 20.5. Gomotetiýada X nokat X_1 nokada, Y nokat Y_1 nokada geçýär. Eger X, X_1, Y, Y_1 nokatlар bir goni çyzykda ýatmasa, şu gomotetiýanyň merkezini tapyň.
- 20.6. Koeffisiýenti 2-ä deň bolan gomotetiýada X nokat X_1 nokada geçýändigi mälim. Şu gomotetiýanyň merkezini guruň.
- 20.7. Töwerege gomotetik şeklär töwerek bolýandygyny subut ediň.
- 20.8. Töwerek çyzyň. Merkezi töwerekgiň merkezinde we koeffisiýenti a) $\frac{1}{2}$; b) 2; ç) 3; d) $\frac{1}{3}$ e deň bolan gomotetiýada çyzylan töwerege gomotetik bolan şeklärleri guruň.
- 20.9. Burç we onuň içki zolagynda A nokat berlen. Burcuň taraplaryna galtaşyp, A nokatdan geçýän töwerek guruň.



Şu wagta çenli teoremlary subut edende we meseleleri çözende dürli meňzeş üçburçluklary gurup geldik. Meňzeş köpburçluklar nähili gurulýar? Aşakda su bilen tanyşarsyňyz.

Mesele. Berlen $ABCD$ dörtburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluk guruň (*1-nji surat*).

Gurmak. Tekizlikde erkin O nokady alýarys. Ondan we dörtburçluguň depelerinden geçýän OA , OB , OC we OD şöhleleri geçirýäris. Bu şöhlelerde O nokatdan $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ we $OD_1=3OD$ kesimleri goýýarys. Emele gelen $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluk gözlenýän dörtburçlukdyr.

Egaslandyrma. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ bolýandygyny subut edýäris.

1. Degişli taraplaryň proportionallygyny.

$$\text{a)} \Delta AOD \sim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{O_1D_1}{OD} = \frac{OA_1}{OA} = 3 ; \quad (1)$$

$$\text{b)} \Delta DOC \sim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \frac{OD_1}{OD} = \frac{D_1C_1}{DC} = \frac{OC_1}{OC} = 3 . \quad (2)$$

(1) we (2) deňlikden $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{D_1C_1}{DC}$ bolýandygyny alarys.

Dörtburçluklaryň başga degişli taraplarynyň proportionallygyny edil şuňa meňzeş subut etmek mümkün.

2. Degişli burçlaryň deňligi.

Meňzeş üçburçluklaryň degişli burçlary deň bolany üçin, $\angle A_1D_1O = \angle ADO$, $\angle C_1D_1O = \angle CDO$.

$$\begin{aligned} \text{Onda, } \angle A_1D_1C_1 &= \angle A_1D_1O + \angle C_1D_1O = \\ &= \angle ADO + \angle CDO = \angle ADC, \end{aligned}$$

yagny dörtburçluklaryň degişli $A_1D_1C_1$ we ADC burçlary deň.

Edil şuňa meňzeş dörtburçluklaryň başga degişli burçlarynyň deňligi subut edilýär.

Diýmek, $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluklar meňzeş. Taraplary erkin sanda bolan köpburçluga meňzeş köpburçluk hem edil şunuň ýaly gurulýar.

Gomotetiýanyň merkezini bu meselede dörtburçlugsyň daşky zolagyndan saýladyk. Umuman alanda, gomotetiýanyň merkezini dörtburçlugsyň içki zolagynda (*2-nji surat*), käbir depesinde (*3-nji surat*) ýa-da käbir tarapynda (*4-nji surat*) ýatýan edip saýlap hem bilerdik. Gomotetiýanyň merkezini nirede alsak-da, berlen $ABCD$ dörtburçluga meňzeş we meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan dörtburçluklar özara deň bolýar.

2 Meseleler we ýumuşlar

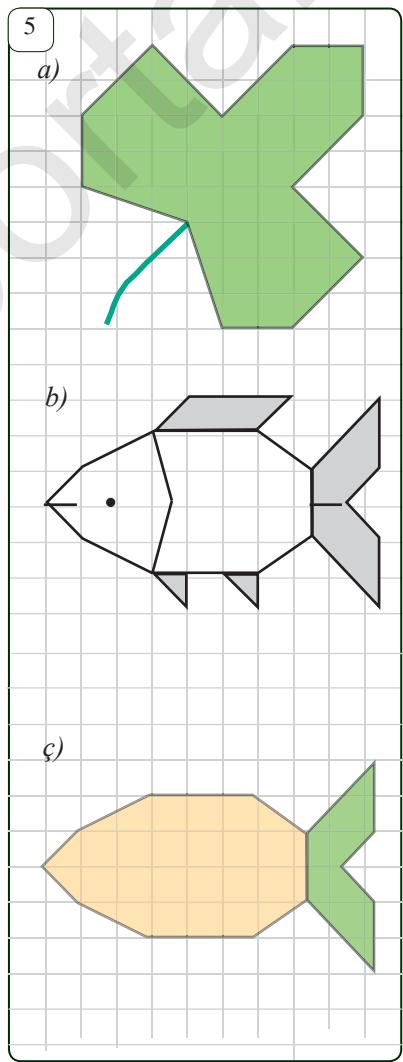
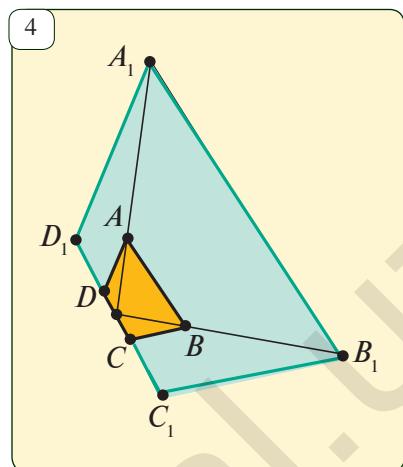
21.1. Berlen köpburçluga meňzeş köpburçlugsy gurmagyň yzygiderligini aýdyň.

21.2. Depderiňize käbir $ABCDE$ başburçluk çyzyň. Gomotetiýanyň kömeginde bu başburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti 0,5-e deň bolan başburçluk guruň. Gomotetiýanyň merkezi a) C nokatda; b) başburçlugsyň içinde; ç) AB tarapda bolan ýagdaýlara aýry garaň.

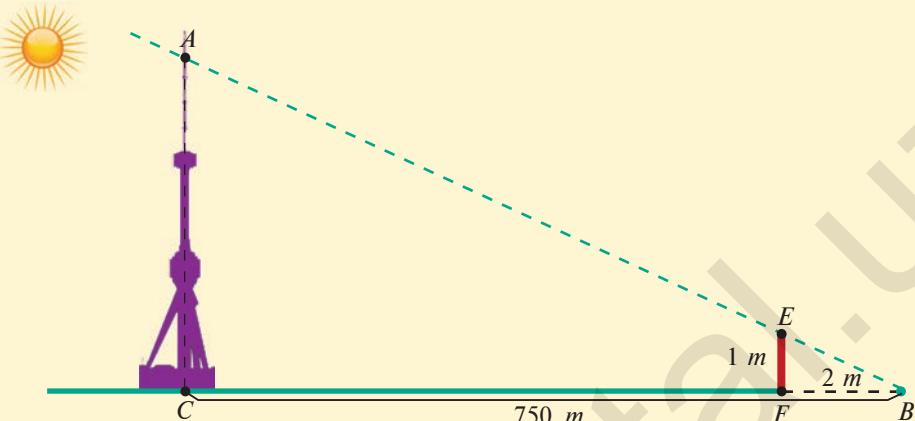
21.3. Gözenekleri hasaba almak bilen, 5-nji suratda berlen şekilleri depderiňize çyzyň:
a) ýapraka meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan ýapragy; b) balyjaga meňzeşlik koeffisiýenti 0,8-e deň bolan balyjagy ç) käşire meňzeşlik koeffisiýenti 1,8-e deň bolan käşiri gomotetiýanyň kömeginde çyzyň.

21.4. F_1 köpburçluk F_2 köpburçluga meňzeş, k — meňzeşlik koeffisiýenti. P_1, P_2, S_1, S_2 harplar bilen degişlilikde bu köpburçluklaryň perimetrleri we meýdanlary belgilenen. Aşakdaky jedweli depderiňize göçüriň we ony dolduryň.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
a)	84		100	25	
b)	14	28		48	
ç)		150	200	100	
d)		30	24		3



1

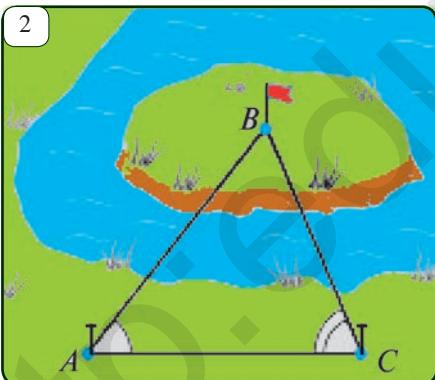


1. Beýikligi anyklamak.

Ýerde durup, Daşkent teleminarasynyň beýikligini tapalyň. Minaranyň depesi — A nokadyň kölegesi B nokat bolsun. EF taýagy wertikal ýagday şeýle kakýarys (*1-nji surat*), ýagny taýagyň E ujunyň kölegesi hem B nokatda bolsun. Minaranyň esasyny C bilen belgileýiris. Emele gelen, gönüburçly ABC we EBF üçburçluklar meňzeş bolýar. Şonuň üçin,

$$\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{BF} \quad \text{ýa-da } AC = \frac{AC \cdot EF}{BF}$$

2



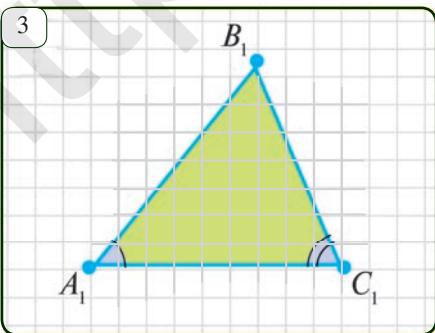
BC , BF aralıqlary we EF taýagyň uzynlygyny ölçüp, emele gelen formuladan teleminoranyň beýikligi — AC kesimiň uzynlygyny tapýarys. Meselem, eger $EF = 1 \text{ m}$, $BC = 750 \text{ m}$, $FB = 2 \text{ m}$ bolýandygy mälim bolsa, onda $AC = 375 \text{ m}$ bolýar.

2. Baryp bolmaýan ýere çenli bolan aralygy ölçemek.

Aýdaly, A nokatdan barmak mümkün bolmadyk B nokada çenli bolan aralygy anyklamaly bolsun (*2-nji surat*). A nokatdan baryp bolýan şeýle C nokady belgileýäris, ýagny ondan garanda A we B nokatlar görnüp dursun hem-de AC aralygy ölçüp bolsun.

Esbaplaryň kömeginde BAC we ACB burçlary ölçeýäris. Aýdaly, $\angle BAC = a$ we $\angle ACB = b$ bolsun. Kagzyza $\angle A_1 = a$, $\angle C_1 = b$ bolan $A_1B_1C_1$ üçburçluk gurýarys. Onda ABC we $A_1B_1C_1$

3



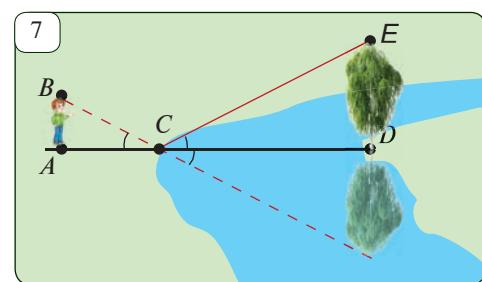
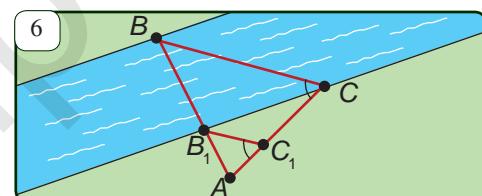
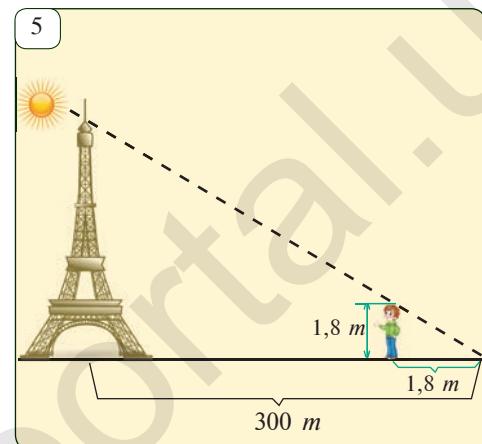
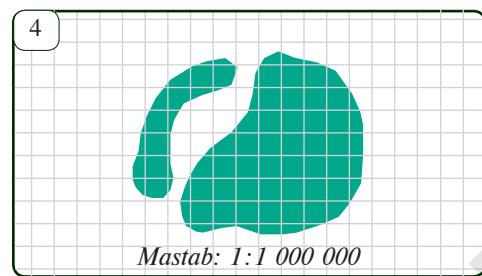
üçburçluklar iki burçy boýunça meňzeş bolýar (2-nji we 3-nji suratlар). Mundan,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ ýa-da } AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$$

AC aralyk we A_1B_1, A_1C_1 kesimleri ölçüp, netijeda emele gelen formulanyň kömeginde AB kesim hasaplanýar. Hasaplama işlerini aňsatlaşdyrmak maksadynda $AC:A_1C_1$ gatnaşygy 100:1, 1000:1 ýaly gatnaşykdä almak mümkün. Meselem, $AC=130\text{ m}$, $\angle A=73^\circ$, $\angle C=58^\circ$ bolsa, kagyzda $A_1B_1C_1$ üçburçlugu $\angle A_1=73^\circ$, $\angle C_1=58^\circ$, $A_1C_1=130\text{ mm}$ edip çyzýarys. A_1B_1 kesimi ölçüp, onuň 153 mm bolýandygyny tapýarys. Onda, gözlenen aralyk 153 m bolýar.

3. Köl barada amaly iş.

4-nji suratda suw basseýniniň kosmos gämisinden alınan suraty görkezilen. Onuň esasynda degişli ölçeg we hasaplama işlerini ýerine yetirip, suw basseýniniň meýdanynyň ýakynlaşan bahasyny tapyň.



- 22.1. Eger boýy 1,7 m bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy 2,5 m bolsa, kölegesiniň uzynlygy 10,2 m bolan agajyň beýikligi näçe bolar?
- 22.2. 5-nji suratda görkezilen minaranyň beýikligini anyklaň.
- 22.3. 6-njy suratdaky iki meňzeş AB_1C_1 we ABC üçburçluklaryň kömeginde derýanyň giňligini (inini) anyklamaly. Eger $AC=100\text{ m}$, $AC_1=32\text{ m}$ we $AB_1=34\text{ m}$ bolsa, derýanyň ini (BB_1)-i tapyň.
- 22.4. Ýabyň kenaryndaky DE agajyň suwdaky suraty A nokatdaky adama görnüp dur. Eger $AB=165\text{ cm}$, $AC=120\text{ cm}$, $CD=4,8\text{ m}$ bolsa, agajyň beýikligini tapyň (7-nji surat).
- 22.5. Howluda käbir agajy saýlaň we onuň beýikligini anyklaň. Bu işi nähili ýerine ýetirendigiňiz barada hasabat taýýarlaň.

1-nji mesele. $ABCD$ trapesiýanyň AB we CD gapdal taraplarynda M we N nokatlar alnan. Munda MN kesim trapesiýanyň esaslaryna parallel we trapesiýanyň diagonallary kesişen O nokatdan geçýär. Eger $BC = a$, $AD = b$ bolsa, a) MO ; b) ON ; ç) MN kesimleri tapyň (1-nji surat).

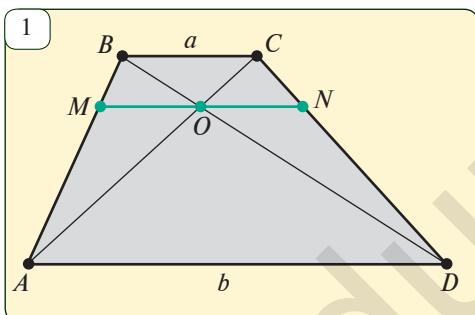
Cözülişi. 1) AOD we BOC üçburçluklar BB nyşana görä meňzeş, çünkü $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle OBC = \angle ADO$. Mundan,

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \text{ ýa-da } \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

2) ABC we AOM üçburçluklar hem BB nyşana görä meňzeş, çünkü $\angle AMO = \angle ABC$, $\angle ACB = \angle AOM$. Mundan,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BC}{MO} \text{ ýa-da } \frac{OA+OC}{OA} = \frac{a}{MO} \Rightarrow 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} \text{ , } \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} - 1. \quad (2)$$

3) (1) we (2) deňlikleriň sag böleklerini deňleşdirip,



$$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b}$$

deňligi we ondan

$$MO = \frac{ab}{a+b} \quad (3)$$

bolýandygyny tapýarys. Ыкardaky ýaly çemeleşip

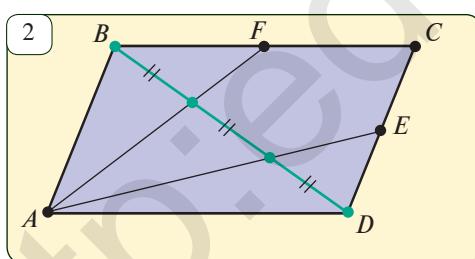
$$ON = \frac{ab}{a+b} \quad (4)$$

deňligi, soň bolsa (3) we (4) deňlikleriň degişli taraplaryny goşup

$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$

deňligi alarys.

Jogaby: a) $\frac{ab}{a+b}$; b) $\frac{ab}{a+b}$; ç) $\frac{2ab}{a+b}$.



Ýatlatma. Bu meseläniň çözüwinden $MO = ON$ bolýandygy gelip çykýar.

?

Meseleler we ýumuşlar

- 23.1. ABC üçburçluguň AB we BC gapdal taraplarynda D we E nokatlar alnan. Eger $AC \parallel DE$, $AC = 6$, $DB = 3$ we $DE = 2$ bolsa, AB tarapy tapyň.
- 23.2. İki meňzeş köpburçluguň meýdanlary 8 dm^2 we 72 dm^2 -a deň, olardan biriniň perimetri ikinjisiniňkiden 26 dm kem. Uly köpburçluguň perimetrini tapyň.
- 23.3. Perimetri 1 m bolan $A_1B_1C_1$ üçburçluk $A_2B_2C_2$ üçburçluguň taraplarynyň ortalaryny, $A_2B_2C_2$ üçburçluk $A_3B_3C_3$ üçburçluk taraplarynyň ortalaryny,

$A_3B_3C_3$ üçburçluk bolsa $A_4B_4C_4$ üçburçluk taraplarynyň ortalaryny utgaşdyrmakdan alnan bolsa, $A_4B_4C_4$ üçburçlugyň perimetri näče bolar?



23.4. İki meňzeş üçburçlugyň perimetrleri 18 dm we 36 dm -e, meýdanlarynyň jemi 30 dm^2 -a deň. Uly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

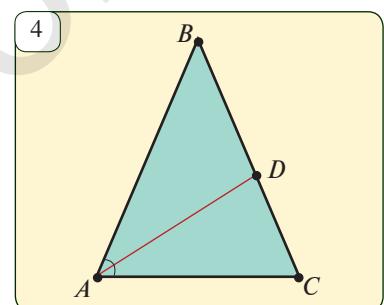
23.5. Romb taraplarynyň ortalary gönüburçlugyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

23.6. ABC üçburçluk guruň. Bu üçburçluga meňzeş we meýdany ABC üçburçlugyň meýdanyndan 9 esse kiçi bolan $A_1B_1C_1$ üçburçlugy guruň.

23.7*. E we F nokatlar degişlilikde $ABCD$ parallelogramyň CD we BC taraplarynyň ortalary. AF we AE goni çyzyklar BD diagonaly deň üç bölege bolýändigini subut ediň (2-nji surat).

23.8. 3-nji suratda Daškent şäherindäki Halklar dostlugu köşgünüň öñünde dikilen iň uly Özbegistany baýdagы görkezilen. Baýdagы ölçegleri $20 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ bolýandygy mälim bolsa, çyzgydan degişli kesimleriň uzynlygyny ölçüp anyklap, baýdagы sütüniniň hakyky beýikligini tapyň.

23.9. Deňyanly üçburçlugyň esasyndaky burç bissektrisasy bu üçburçlukdan özüne meňzeş üçburçluk bölyär. Üçburçluk burçlaryny anyklaň (4-nji surat, $AB = BC$, $\Delta ABC \sim \Delta CAD$).



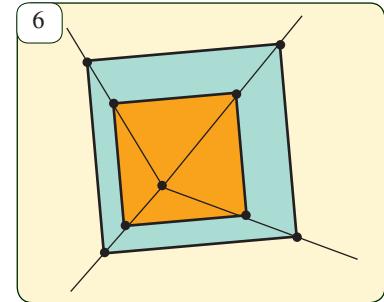
23.10. Töwerek guruň we onda O nokat belgilän. Merkezi O nokatda we koeffisiýenti 2-ä deň bolan gomotetiýada berlen töwerege gomotetik bolan töwerek guruň.

23.11. İki meňzeş köpburçlugyň perimetrleriniň gatnaşygy 2:3 ýaly. Uly köpburçlugyň meýdany 27 bolsa, kiçi köpburçlugyň meýdanyny tapyň.



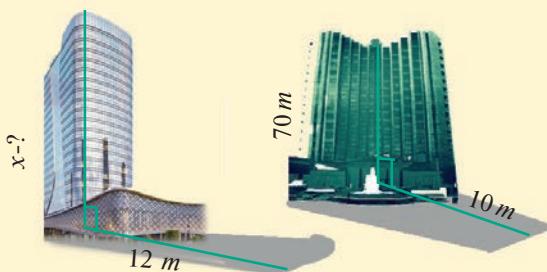
23.12. 5-nji suratda Günün doly tutulan ýagdaýy görkezilen. Eger Günün radiusy 686784 km , Aýyň radiusy 1760 km we Yerden Aýa çenli bolan aralyk 384400 km bolsa, Yerden Güne çenli bolan aralygy tapyň.

23.13. a) Bir töweregiň içinden iki meňzeş köpburçluk çyzylan. Bu köpburçluklar deň bolarmy?
b) Bir töweregiň daşyndan iki meňzeş köpburçluk çyzylan. Bu köpburçluklar deň bolarmy?

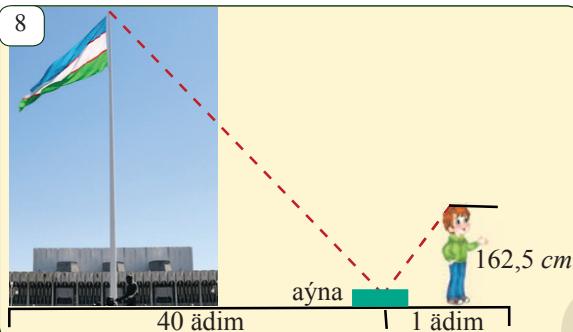


23.14*. Bir kwadratyň taraplary ikinji kwadratyň taraplaryna parallel. Eger kwadratlar bir-birine deň bolmasa, olar gomotetik bolýandygyny subut ediň (6-njy surat).

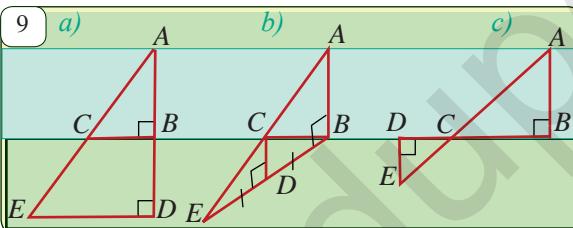
7



8



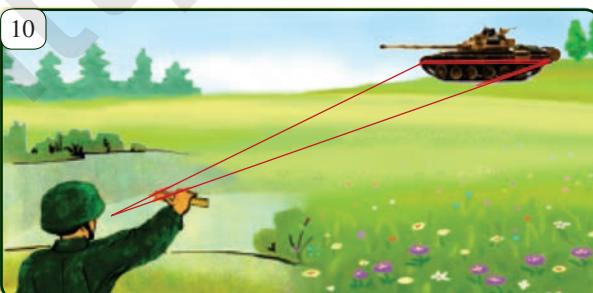
9



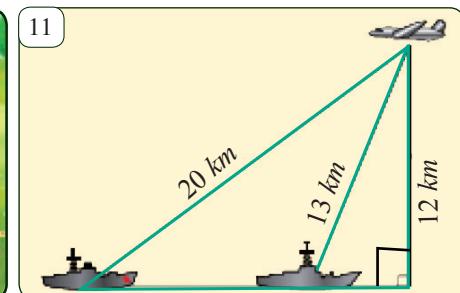
Geometriýa we harby iş

1. Harbylar çyzgyjyň we uzadylan eliň kömeginde nyşana çenli aralygy kesgitläp bilýärler. Eger 10-njy suratdaky çyzgyjyň tanky örtýän uzynlygy 5 cm , eginden çyzgyja çenli bolan aralyk 50 cm we tankyň uzynlygy $6,86\text{ m}$ bolsa, tanka çenli bolan aralygy tapyň.
2. 12 km beýiklikde uçup barýan samolýotyň uçujysy ondan 13 km uzaklykda yüzüp barýan gämini we ýene ondan 20 km uzaklykda birinji gämini yzarlap barýan başga gämini gördü (11-nji surat). Bu gämileriň arasyndaky aralygy anyklaň.

10



11



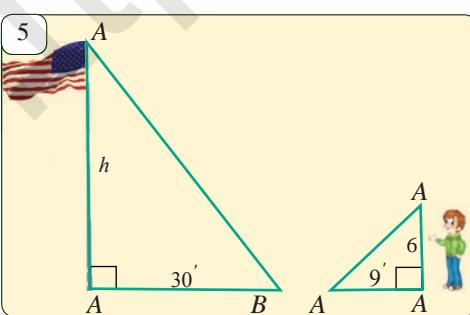
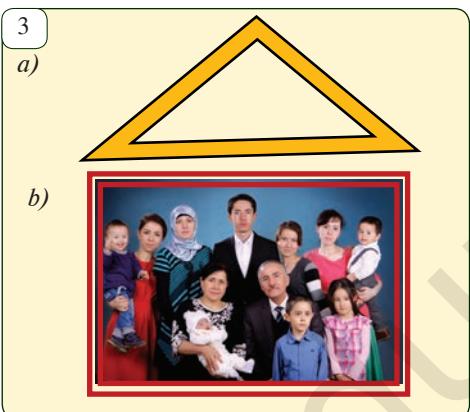
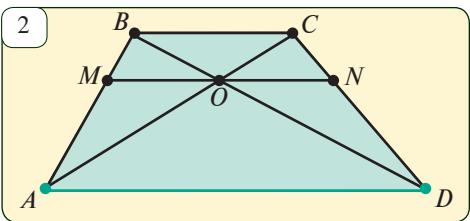
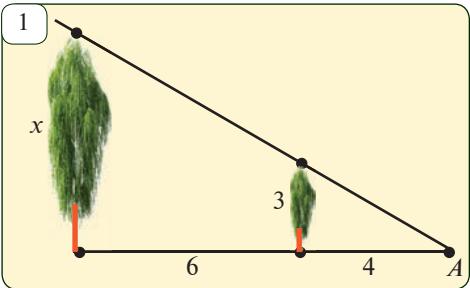
I. Testler

1. **Iki meňzeş üçburçluk üçin nädogry tassyklamany tapyň:**
A. Meydanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
B. Degişli medianalarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
D. Degişli bissektrisalarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
E. Degişli beýiklikleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.
2. **Iki gomotetik köpburçluk üçin dogry tassyklamany tapyň:**
A. Olar deň; B. Olar meňzeş;
D. Olar deňdeş; E. Dogry jogap ýok.
3. **Üçburçlugyň medianalary üçin nädogry tassyklamany görkeziň:**
A. Bir nokatda kesişyär; B. Kesişme nokadynda 2:1 gatnaşykda bölünýär;
D. Bir-birine deň; E. Her biri üçburçlugy iki deňdeş
bölege bölýär.
4. **Üçburçlugyň bissektrisalary üçin nädogry tassyklamany görkeziň:**
A. Bir nokatda kesişyär; B. Kesişme nokadynda 2:1 gatnaşykda bölünýär;
D. Özi düşen tarapy galan iki tarapa proporsional kesimlere bölýär;
E. Özi çykan depedäki burçy deň ikä bölýär.
5. **Iki meňzeş köpburçluk üçin nädogry tassyklamany tapyň:**
A. Olaryň taraplary sany deň; B. Olaryň burçlary sany deň;
D. Degişli taraplary proporsional; E. Meydanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik
koeffisiýentine deň.

II. Meseleler

- 24.1. Esaslary 6 m we 12 m bolan trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan esaslara parallel gönü çyzyk geçirilen. Gönü çyzygyň trapesiýanyň içindäki böleginiň uzynlygyny tapyň.
- 24.2. ABC üçburçlukda $BC = BA = 10$, $AC = 8$. Eger AA_1 we CC_1 üçburçlugyň bissektrisalary bolsa, A_1C_1 kesimi tapyň.
- 24.3. A nokatdan baryp bolmaýan B nokada çenli bolan aralygy anyklamak üçin tekiz ýerde C nokat saýlandy. Soň AC aralyk, BAC we ACB burçlar ölçündi we ABC üçburçluga meňzeş $A_1B_1C_1$ üçburçluk guruldy. Eger $AC = 42\text{ m}$, $A_1C_1 = 6,3\text{ cm}$, $A_1B_1 = 7,2\text{ cm}$ bolsa, AB aralygy tapyň.
- 24.4. Koeffisiýenti $k = 3$ bolan gomotetiýada F köpburçluk F_1 köpburçluga öwrülýär. Eger F_1 köpburçlugyň perimetri 12 cm we meýdany $4,5\text{ cm}^2$ bolsa, F köpburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.
- 24.5. Boýy 180 cm bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy $2,4\text{ m}$ bolan wagtda beýikligi 4 m bolan elektik sütüniň kölegesiniň uzynlygy näçe metr bolar?
- 24.6. Kartada Daşkent we Ürgenç şäherleriniň arasyndaky aralyk $8,67\text{ cm}$. Eger kartanyň masstäby $1:10\,000\,000$ bolsa, Daşkent we Ürgenç şäherleriniň arasyndaky aralygy tapyň.

III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)



24.7. 1-nji suratda berlen maglumatlar esasynda agajyň beýikligini tapyň.

24.8. ABC üçburçluguň taraplary

$AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$. Bu üçburçluguň AC tarapynna parallel göni çyzyk AB tarapynы P nokatda, BC tarapynы bolsa K nokatda kesýär. Eger $PK = 2 \text{ cm}$ bolsa, PBK üçburçluk perimetreni tapyň.

24.9. 2-nji suratda $AD \parallel BC \parallel MN$. Eger $BC = 6 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$ bolsa, MN kesimi tapyň.

24.10. (Goşmaça). Rombuň taraplarynyň ortalary gönüburçluguň depeleri bolýandygyny subut ediň.



Gyzykly meseleler

1. 4 esse ulaldylyp görkezilen aýnalupa bilen garalanda 2° -ly burcuň ululygy näčä üýtgär?

2. a) Üçburçly çyzgyjyň suratynda şekillendirilen içki we daşky üçburçluklar meňzeşmi (3-nji a surat)?
b) 3-nji b suratdaky romning içki we daşky gapyrgalaryni şekillilovchi dörtburçluklar meňzeşmi?

3. Aşakdaky daşary ýurt dilinde berlen meseläni çözjek boluň. Şeýdip hem rus we iňlis dilinden, hem geometriýadan başarnygyňzy bilersiňiz.

a) На 4-рисунке изображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:

a) A и B; b) A и D; d) C и F; e) B и E.

b) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

c) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If $XY = 160$ ft, $YW = 40$ ft, $TY = 120$ ft, and $WZ = 50$ ft, find XT .

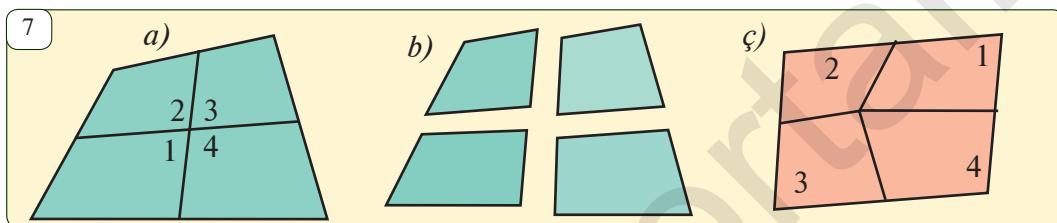
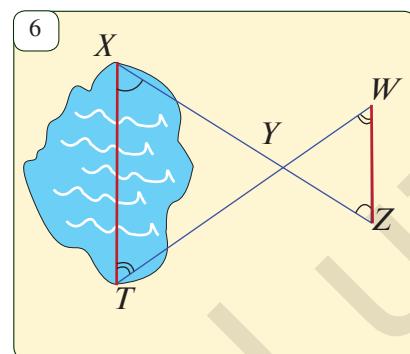
Geometrik modelirleme

1. Erkin dörtburçluk çyzyň we gaýçy bilen gyrkyp alyň.

2. Onuň garşylykly taraplarynyň ortalalaryny belgilän we kesimler bilen utgaşdyryň (7-nji a surat) hem-de şu kesimler boýunça dörtburçlugy kesiň (7-nji b surat).

3. Emele gelen böleklerden 7-nji ç suratda görkezilişi ýaly edip parallelogram düzүн.

4. Bu işi ýerine ýetirende hakykatdan hem parallelogram emele gelýändigini esaslandyryň.

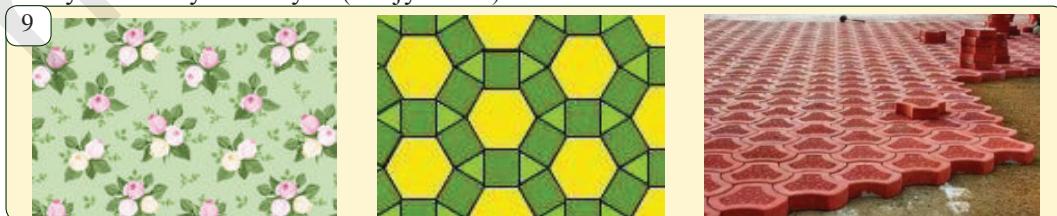


Nagyşlar, germewler (bardýurlar) we parketler

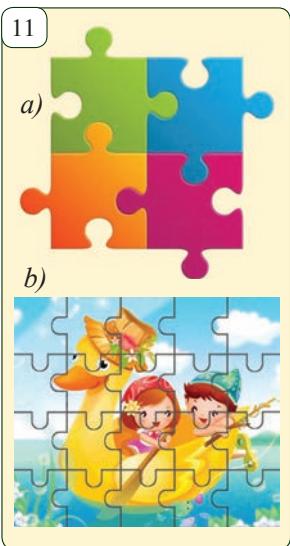
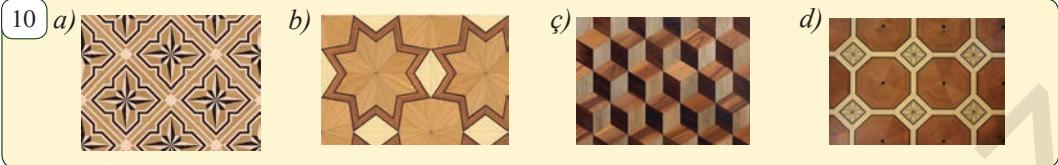
Öýümiziň diwarlaryndaky gülkagyzlara üns berip garasaňyz, olarda birmeňeş şekil ýygy-ýygydan gaýtalanyп tutuş diwary örtendigini görmek mümkün. Bir şekil gaýtalanyп tutuş tekizligi doldursa, şeýle ýygma şekillere nagyş diýýäris. Meşhur golland suratkeşi Moris Eşeriň galamyna degişli ynha şu täsin suratlar nagyşlara mysal bolýar (8-nji surat). Bu nagyślarda şol bir şekil nähili gaýtalanyпdyr?



Eger bir şekil ýygy-ýygydan gaýtalanyп iki parallel gönü çyzyklaryň arasyndaky lentany doldursa, şeýle ýygma lenta şekillere germew ýa-da bardýur diýýäris. Gulkagyz rulony, surat salnan matalar we parklardaky germewler çäkli uzynlykdaky bardýurlara mysal bolýar (9-nji surat).



Dogry köpburçluklar bilen örtülen nagışlara parket diýýäris. Parketler bilen öýümiziň pollary bezelýär. Iň ýonekeý parketler 10-njy suratda getirilen. Görnüşi ýaly, olar parallel göçürmede öz-özüne geçýär.



Geometrik modelirleme.

Pazl şekilleri nähili düzülen?

Pazl oýnawaçlaryny gowy bilýärsiňiz? (11-nji surat)

Geliň, olary nähili gurmak mümkünligine garalyň.

1. Ölçeğleri $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ bolan kwadrat çyzyň.

2. Onuň aşaky esasyň ortasından tegelek şekilli bölegi kesip alyň (12-nji a surat).

3. Kesip alnan bölegi kwadratyň ýokary esasyň ortasyna birleşdiriň (12-nji b surat).

4. Indi kwadratyň gapdal tarapynyň ortasından ýene şeýle ululykdaky tegelek şekilli bölegi kesip alyň (12-nji c surat).

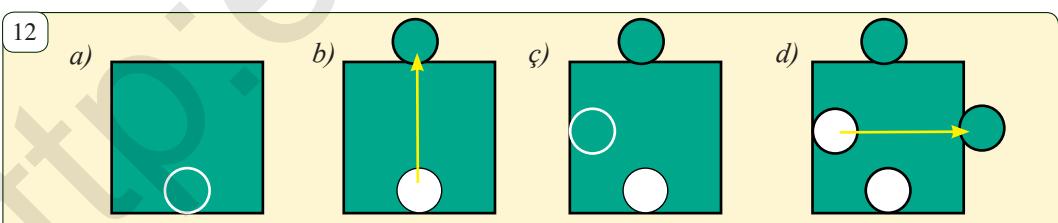
3. Kesip alnan bölegi kwadratyň ikinji gapdal tarapynyň ortasyna birleşdiriň (12-nji d surat).

4. Netijede pazl oýnawajynyň bir sanyсы taýýar boldy.

5. Bu pazl bölegi bilen bütün tekizligi örtmek mümkünligini esaslandyrıryň.

6. Kwadratyň taraplaryndan tegelek däl başgaça sekildäki bölekleri gyrykyp, birleşdirmek arkaly başga görnüşdäki pazl böleklerini hem almak mümkün.

7. Hany, käbir täze pazl böleginiň çyzgysyny dörediň. Birnäçe reňkli pazl böleklerini gyrykyp alyp, olardan dürli nagışlary düzüň.



Geometrik barlag.

73-nji sahypadaky "Geometrik modelirleme" bölümünde getirilen maglumatlar esasynda erkin güberçek dörtburçluk bilen tutuş tekizligi örtmek mümkünligini subut ediň.

ÜÇBURÇLUGYŇ TARAPLARYNYŇ WE BURÇLARYNYŇ ARASYNDAKY GATNAŞYKLAR



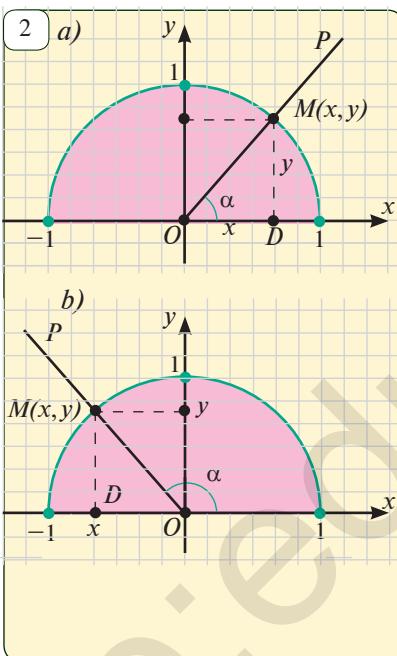
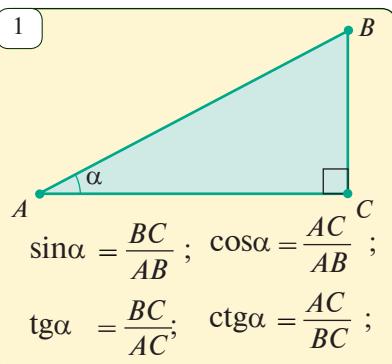
Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere, endiklere we başarnyklara eýe bolarsyňyz:

Bilimler:

- ✓ erkin burcuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi kesgitlemelerini;
- ✓ burcuň radian ölçegini;
- ✓ esasy trigonometrik toždestwolary;
- ✓ üçburçluguň meýdanyny burcuň sinusynyň kömeginde hasaplamagyň formulasyny;
- ✓ sinuslar we kosinuslar teoremasyny bilmek.

Amaly endikler:

- ✓ käbir burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensini hasaplamak;
- ✓ esasy trigonometrik toždestwolary mysallar çözmede ulanyp bilmek;
- ✓ üçburçluguň meýdanyny onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça hasaplap bilmek;
- ✓ sinuslar, kosinuslar teoremasыndan peýdalanyп hasaplamaga we subut etmäge degişli meseleleri çözmek.



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Kesitlemä görä, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ bolany üçin,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ),$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

toždestwolar ýerliklidir.

(2) deňligiň iki bölegini hem ilki $\cos^2 \alpha$, soň bolsa $\sin^2 \alpha$ bölüp,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ),$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ) \quad (3)$$

toždestwolary alarys.

Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90^\circ$ bolsun. Mälim bolşy ýaly, onda A ýiti burcuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi 1-nji suratdaky ly anyklaňardy. Indi 0° -dan 180° -a çenli bolan burcuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini anyklaýarys

Radiusy birlik kesime deň, merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan ýarym töwerege garaýarys (2-nji surat). Töweregi $M(x; y)$ nokatda kesýän OP şöhläni geçirýäris. Bu şöhläniň Ox şöhle bilen emele getiren burçuny α bilen belgileýäris. OP şöhläniň Ox şöhle bilen üstme-üst düşen ýagdaýdaky burçy 0° -ly burç hökmünde kabul edýäris.

Mälim bolşy ýaly, α ýiti burç bolanda (2-nji a surat), bu burcuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi gönüburçly ODM üçburçlukdan $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$; $\cos \alpha = \frac{OD}{MO}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{DM}{OD}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OD}{DM}$. deňlikleriň kömeginde anyklaýar. Eger $MO = 1$, $DM = y$, $OD = x$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (1)$$

deňliklere eýe bolarys.

Umumy ýagdaýda, 0° -dan 180° -a çenli bolan burcuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hem (1) formula arkaly anyklaýarys (2-nji b surat):

OMD üçburçlukda $OD^2 + DM^2 = MO^2$ ýa-da $x^2 + y^2 = 1$. $\sin \alpha = y$ we $\cos \alpha = x$ bolýandygyny hasaba alsak, islendik α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) burç üçin (2) esasy trigonometrik toždestwony alarys.

Ýokardaky (1) deňlikler esasynda her bir α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) burça bu burcuň sinusynyň (kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň) bir bahasy laýyk goýulýär. Bu laýyklyklar burcuň "sinus", "kosinus", "tangens" we "kotangens" diýlip atlandyrylýan funksiyalaryny kesgitleyär. Olar trigonometrik funksiyalar diýlip atlandyrylýär.

"Trigonometriýa" sözi — grekçe "üçburçluklary çözme" diýen manyny aňladýär.

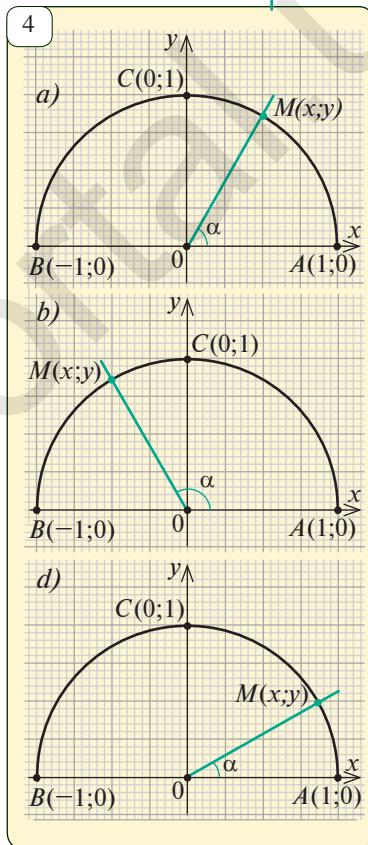
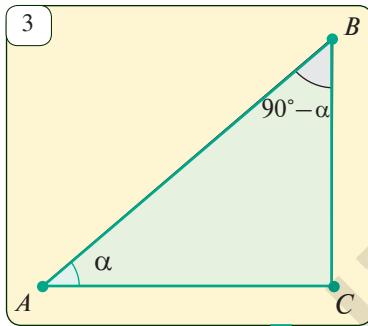
Islandik ýiti α burç üçin:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \quad (2)$$

Islandik α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) burç üçin:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad (3)$$

(2) we (3) formulalara *getirme formulalary* diýilýär. Olar algebra kursunda subut edilýär.



25.1. Eger $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ bolsa, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ we $\operatorname{ctg}\alpha$ bahalarynyň alamatyny anyklaň.

25.2. 4-nji suratdaky α burçy ölçäň we onuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini degişiلى ölçemeleriň kömeginde anyklaň.

25.3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) we $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) toždestwolary subut ediň.

25.4. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$) we $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$ we $\alpha \neq 180^\circ$) toždestwolary subut ediň.

25.5. Yönekeýlesdiriň:

- a) $\cos^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \alpha);$
- b) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha);$
- c) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha);$
- e) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha).$

25.6. ABC üçburçlukda $\angle A = 150^\circ$ we $AC = 7 \text{ cm}$ bolsa, üçburçlugsyň C depesinden geçirilen beýikligini tapyň.

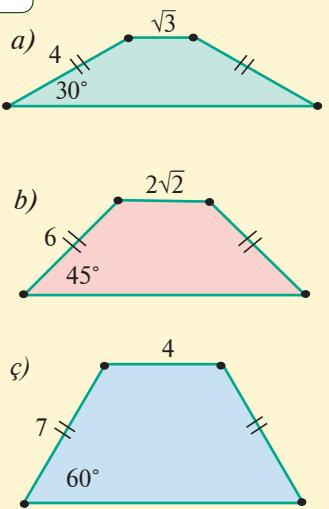
25.7. Eger a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; ç) $\sin\alpha = 1$ bolsa, $\cos\alpha$ -ny tapyň.

25.8*: Eger a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; ç) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, α -ny tapyň.

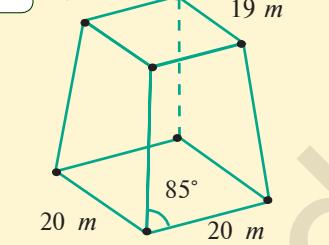
25.9. Jedweli dolduryň.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

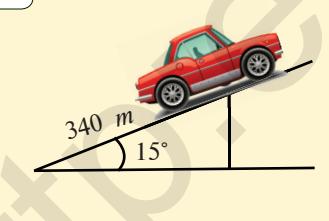
1



2

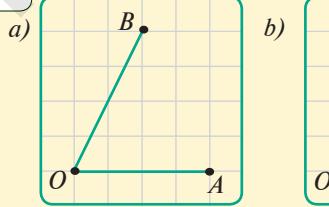


3



26.11. 4-nji suratda görkezilen burçlaryň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini tapyň.

4



26.1. Beýikligi 3 cm we ýiti burçy 30° bolan rombuň perimetrini we meýdanyny hasaplaň.

26.2. Deňyanly gönüburçly üçburçlugyň hipotenuzasы 12 cm . Onuň meýdanyny hasaplaň.

26.3. Beýikligi $4\sqrt{3}\text{ cm}$ bolan deň taraply üçburçlugyň perimetrini tapyň.

26.4. 1-nji suratda berlenlere görä deňyanly trapesiýalaryň meýdanyny tapyň.

26.5. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy 30° -a, beýikligi 4 cm -e we kiçi esasy 6 cm -e deň. Trapesiýanyň perimetrini we meýdanyny tapyň.

26.6. Töwerekigى hordasy 120 gradusly dugany çekip durýar. Eger töwerekigى radiusы 10 cm bolsa, hordanыň uzynlygyny tapyň.

26.7*. Deňyanly üçburçlugyň depesindäki burçy a) 120° ; b) 90° ; c) 60° . Üçburçlugyň beýikliginiň esasyna gatnaşygyny hasaplaň.

26.8*. 2-nji suratda görkezilen pagta harmanynyň gapdal granlary deňyanly trapesiýa, üsti bolsa kwadrat şeklärde. Suratda berlenlerden peýdalanyп, harmany doly ýapmak üçin näce mata zerurdygyny anyklaň.

26.9. Yénil maşyn geçelgäniň ýokary galma böleginde 340 m ýol geçdi. Eger ýoluň gorizonta görä galma burçy 15° bolsa, yénil maşyn näce metr beýiklige galypdyr (3-nji surat)?

26.10. Aman öýünden gündogar tarapa 800 m , soň demirgazyk tarapa 600 m ýol ýöredi. Ol öýünden näce metr uzaklyga geldi? Indi ol öýüne goni çyzyk boýunça ýetip gelmek üçin günbatara görä nähili burç astynda ýöremeli?

- 26.12.** Otly her 30 m ýol ýörände 1 m ýokary galýar. Demir ýoluň gorizonta görä ýokary galma burçuny tapyň.
- 26.13.** Eger beýikligi 30 m bolan binanyň kölegesiniň uzynlygy 45 m bolsa, Gün şöhlesiniň şu bina ýerleşýän meýdana düşüş burçuny tapyň.
- 26.14.** Gönüburçly üçburçluguň bir burçy 60° -a, uly kateti bolsa 6-a deň. Onuň kiçi katetini we gipotenuzasyny tapyň.
- 26.15.** O merkezli töweregىň A nokadyndan geçirilen galtaşmada B nokat alnan. Eger $AB=9\text{ cm}$, $\angle ABO=30^\circ$ bolsa, töweregىň radiusyny we BO kesim uzynlygyny tapyň.
- 26.16.** m gönü çyzyk we uni kesip geçmeýän AB kesim berlen. Munda $AB=10$, AB we m gönü çyzyklaryň arasyndaky burç 60° . AB kesimiň uçlaryndan m gönü çyzyga AC we BD perpendikulýarlar geçirilen. CD kesimi tapyň.
- 26.17.** Rombuň ýiti burçy 60° -a, beýikligi bolsa 6-a deň. Rombuň uly diagonalynyň uzynlygyny we meýdanyny tapyň.
- 26.18.** Radiusy 5 cm bolan töweregde deňyanly trapesiýa daşyndan çyzylan. Eger trapesiýanyň ýiti burçy 30° bolsa, onuň gapdal tarapyny we meýdanyny tapyň.
- 26.19.** Eger $ABCD$ gönüburçlukda $AB = 4$, $\angle CAD = 30^\circ$ bolsa, onuň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny we gönüburçluguň meýdanyny hasaplaň.
- 26.20.** Gönüburçluguň taraplary 3 cm we $\sqrt{3}\text{ cm}$. Onuň bir diagonalı bilen taraplary emele getiren burçlaryny tapyň.
- 26.21.** Eger a) $\sin A = \frac{4}{7}$, b) $\cos A = \frac{4}{7}$, ç) $\cos A = -\frac{4}{7}$ bolsa, A burçy guruň.
- 26.22.** Gönüburçly üçburçluguň bir burçy 30° , gipotenuzasyna geçirilen beýikligi 6 cm . Üçburçluguň taraplaryny tapyň.
- 26.23.** Ýiti burçy 30° -a, beýikligi bolsa 4 cm -e deň bolan rombuň meýdanyny hasaplaň.



Taryhy maglumatlar. "Altyn" üçburçluk

Grekler burçlary 36° , 72° we 72° bolan deňyanly üçburçlugu — “*altyn üçburçluk*” diýip atlandyrypyrlar. Sebäbi - ol ynha şeýle ajaýyp häsiýete eýe eken: *esasyndaky burç bissektrisasy AD ony iki deňyanly üçburçluga bölýär* (5-nji surat).

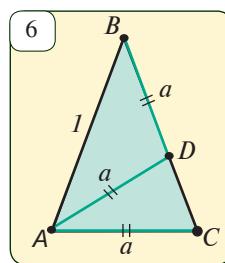
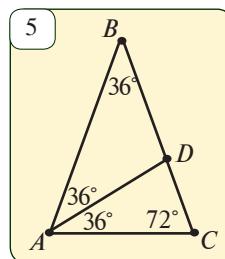
Hakykatdan hem, AD bissektrisa bolany üçin, BAD we DAC burçlar hem 36° -dan. Diýmek, ABD üçburçluk deňyanly. ADC üçburçlukda ADC burç $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ bolup, ACD burça deň. Diýmek, ADC üçburçluk hem deňyanly.

Netije. ABC üçburçluk ACD üçburçluga meňzeş we

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}. \quad (1)$$

Eger ABC üçburçluguň gapdal taraplary $AB = BC = 1$ diýip alsak, onuň esasy aşakdaky ýaly tapylyar (6-njy surat): $AC = a$ bolsun.

Onda, 1. $AD = a$ bolýar, çünkü ΔACD deňyanly.



2. $BD = a$ bolýar, çünki ΔABD deňýanly.

3. $CD = BC - BD = 1 - a$.

$$(1) \text{ deňlige görä: } \frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$$

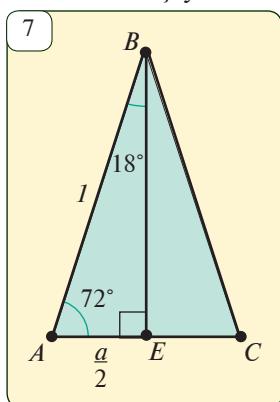
Mundan $a^2 + a - 1 = 0$. Bu kwadrat deňlemäni çözüp, $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ bolýandygyny tapýarys.

Mesele. $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ, \sin 72^\circ, \cos 72^\circ$ bahalary hasaplaň.

Çözülişi: Gapdal tarapy $AB = BC = 1$ we esasy $AC = a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ -e deň bolan ABC “altyn üçburçluga” garaýarys (7-nji surat). Onuň BE beýikligini geçirýäris.

Gönüburçly ABE üçburçlukda:

$$\sin 18^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$



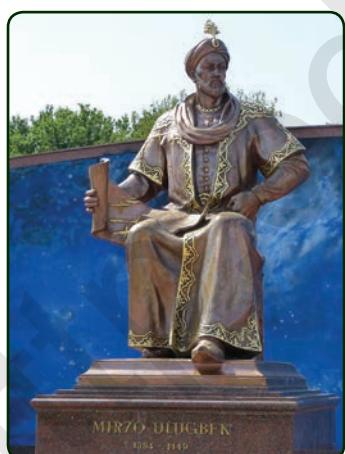
Mundan peýdalanyп, tapylmagy talap edilen başga bahalaryny hasaplaýarys:

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4};$$

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Jogaby: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.



Taryhy maglumatlar

Mürze Ulugbek (1394–1449) — beýik özbek alymy we döwlet işgäri. Asyl ady Muhammet Taragaý. Ol sahypgyran Emir Temuryň agtygy. Ulugbegiň atasy Şahruh hem döwlet işgäri bolupdyr. Ulugbek takmynan 1425–1428-nji ýyllarda Samarkandyň golaýyndaky Obi Rahmat depeliginde özuniň meşhur obserwatoriýasyny gurýar. Obserwatoriýanyň binasy üç etažly bolup, onuň esasy esbaby — kwadrantyň beýikligi 50 metrdi. Ulugbegiň iň meşhur eseri “Ziji kuragany” diýlip atlandyrlyan astronomik jedweldir. Ol 1018 sany ýıldızы öz içine alypdyr.

Şunuň bilen bir hatarda Ulugbegiň trigonometrik jedwelleri hem üns bererlikdir. Ulugbegiň trigonometrik jedwelleri 10 sany onluk öýjük takyklykda hasaplapdyr. Hasaplaýış serişdeleri bolmadık diýen ýaly bir döwürde bu işleri ýerine ýetirmek üçin čuňnur pikirlenmä esaslanan nazary ukyp we anyk formulalar hem-de ep-esli hasapçylar talap edilen bolsa gerek. Zijde Ulugbek 1 gradusyň sinusyny hasaplamak üçin aýratyn risala ýazanlygy agzalýar.

Geometriya we astronomiya degişli taslama işi

Gadymky grek alymy Eratosfen (miladydan öňki 276-194-nji ýyllar) Ýeriň töweregini birinji bolup ölçäpdir. Ol Sien (hazırkı Assuan) şäherinde miladydan öňki 240-njy ýylyň 19-njy iýün günü, tomusky deň günlüğüň günortan wagtynda Gün dik ýokarda (zenitde) bolýandygyny we çuň guýynyň düýbüni hem ýagtylandyrandygyny anyklapdyr. Ýöne, şunuň bilen birlikde, ol ýylyň bu gününde we wagtynda Aleksandriýada Gün dik ýokardan (zenitden) töwereginiň dugasynyň 1/50 bölegine çenli gyşarýandygyny hem anyklapdyr.

Mundan Eratosfen nähili netijä gelipdir? Onuň pikirini dowam etdiriň we aşakdaky 8-nji suratda berlenlar esasynda Yer radiusy uzynlygyny tapyň.

Zerur bolmagy mümkün bolan käbir maglumatlar we hasap-hesipler:

Sien we Aleksandriýa şäherleriniň arasyndaky aralyk 787,5 km.
Töwereginiň dugasynyň 1/50 bölegi –

$$\alpha = 7,2^\circ$$

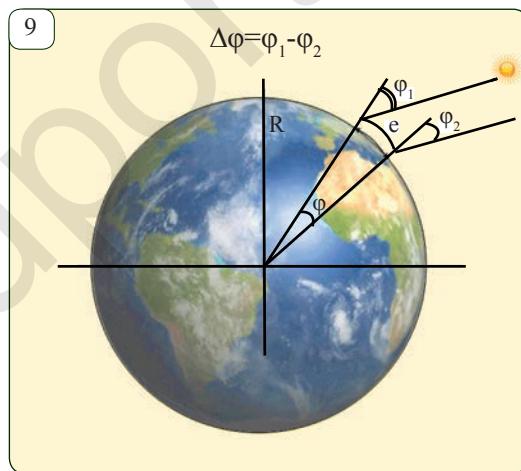
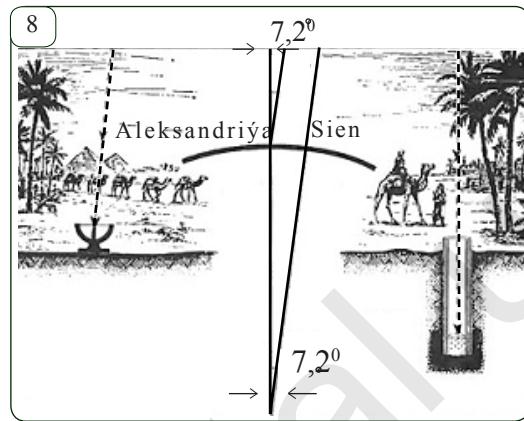
C - Ýeriň töwereginiň uzynlygy.

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{787,5}{C}$$

$$\text{Mundan } C = 360 \cdot 787,5 : 7,2 = 39\ 375 \text{ km.}$$

Bu gunki hasap-hesiplere görä, Ýeriň ekwator boýunça töwereginiň uzynlygy 40 075,017 km, nolunyj metrinden boýunça töwereginiň uzynlygy bolsa - 40 007,86 km. Görüşüniz ýaly, gadymky alym diňe azajyk azaşypdyr.

Ýumus. 9 -njy suratdan peýdalanyп, Ýeriň töwereginiň uzynlygyny tapmagyň islendik wagtda ulanmak mümkün bolan amaly usulyny işläp taýýarlaň we esaslandyryň.



 **1-nji teorema.** Üçburçluguň meýdany onuň iki tarapy bilen şu iki tarapыň arasyndaky burcuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň.


 $\Delta ABC, BC = a, AC = b, \angle C$ (1-nji surat)

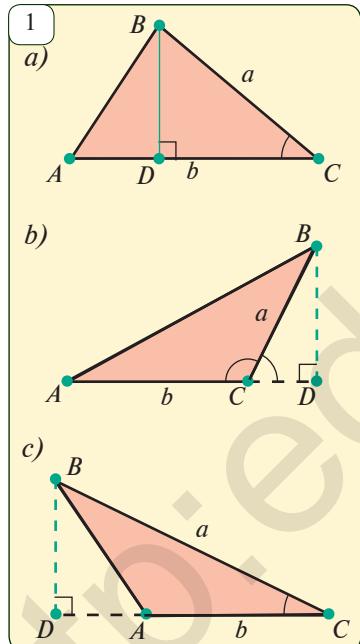

 $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$

Subudy. ABC üçburçluguň BD beýikligini geçirýäris. Onda 1-nji suratda görkezilen üç ýagdaýyň bolmagy mümkün.

Birinji ýagdaýa garaýarys (1-nji a surat). BCD üçburçlukda $\sin C = \frac{BD}{BC}$. Mundan $BD = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin C$. Şeýdip,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin C = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ikinji we üçünji ýagdaýlaryň subudyny özbaşdak ýerine yetiriň. **Teorema subut edildi.**



1-nji teorema görä, üçburçluguň meýdany üçin

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{we} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

formulalar hem ýerlikli bolýar.

 **1-nji mesele.** ABC üçburçluguň meýdany 24 cm^2 . Eger $AC = 8 \text{ cm}$ we $\angle A = 30^\circ$ bolsa, AB tarapy tapyň.

Çözülişi. Üçburçluguň meýdanyny burcuň sinusy arkaly tapmak formulasyna görä,

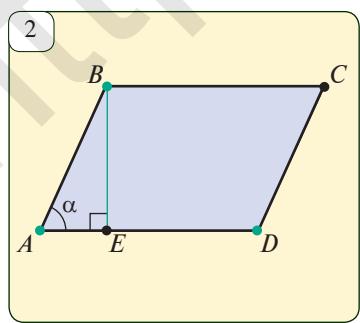
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Mundan,

$$AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin A} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot 0,5} = 12 \text{ (cm)}.$$

Jogaby: 12 cm .

 **2-nji mesele** Parallelogramyň meýdany onuň iki goňşy tarapynyň we şu taraplaryň arasyndaky burcuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deňdigini subut ediň.



$ABCD$ parallelogram,
 $AB = a, AD = b, \angle A = \alpha$
(2-nji surat)


 $S_{ABCD} = ab \sin \alpha$

Çözülişi. BE beýiklik geçirýäris. ABE üçburçlukda $\sin A = \frac{BE}{AB}$ ýa-da $BE = AB \sin A = a \sin \alpha$.

Onda, $S_{ABCD} = AD \cdot BE = ab \sin \alpha$.

2-nji teorema. Dörtburçluguň meýdany onuň diagonallary bilen diagonallarynyň arasyndaky burcuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň.

Subudy. Diagonallaryň kesişmeginden emele gelen burçlara garaýarys (3-nji surat):

şerte görä $\angle AOB = \alpha$

$\angle AOB$ -ge wertikal bolany üçin $\angle COD = \alpha$,

$\angle AOB$ -ge goňşy bolany üçin $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$,

$\angle BOC$ -ge wertikal bolany üçin $\angle DOA = 180^\circ - \alpha$

Üçburçluguň meýdanyny burcuň sinusynyň kömeginde hasaplasmak formulasyna görä:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha;$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha; \quad S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha.$$

Meýdanyň häsiýetine görä:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha + \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA) \sin \alpha = \frac{1}{2} \{(OB \cdot (AO + OC) +$$

$$+ OD \cdot (CO + OA)\} \sin \alpha = \frac{1}{2} (OB \cdot AC + OD \cdot AC) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha.$$

Teorema subut edildi.

Meseleler we ýumuşlar

27.1. 1-nji teoremany 1-nji b we 1-nji ç suratda görkezilen ýagdaýlar üçin subut ediň.

27.2. Eger a) $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $\angle A = 30^\circ$; b) $AC = 14 \text{ cm}$, $BC = 7\sqrt{3} \text{ cm}$, $\angle C = 60^\circ$;

ç) $BC = 3 \text{ cm}$, $AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, $\angle B = 45^\circ$ bolsa, ABC üçburçluguň meýdanyny tapyň.

27.3. Diagonaly 12 cm we diagonallary arasyndaky burçy 30° bolan gönüburçluguň meýdanyny tapyň.

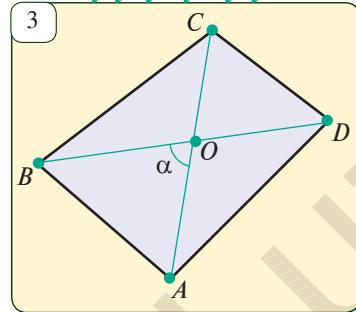
27.4. Tarapы $7\sqrt{2} \text{ cm}$ we kütek burçy 135° bolan rombuň meýdanyny tapyň.

27.5. Rombuň uly diagonaly 18 cm we bir burçy 120° . Rombuň meýdanyny tapyň.

27.6. Meýdany $6\sqrt{2} \text{ cm}^2$ -a deň bolan ABC üçburçlukda $AB = 9 \text{ cm}$, $\angle A = 45^\circ$. Üçburçluguň AC tarapyny we şu tarapa geçirilen beýikligini tapyň.

27.7*. ABC üçburçlukda $\angle A = \alpha$, onuň B we C depelerinden geçirilen beýiklikleri bolsa degişlilikde h_b we h_c bolsa, üçburçluguň meýdanyny tapyň.

27.8*. ABC üçburçlukda $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$ we $\angle A = 60^\circ$ bolsa, onuň AD bissektrisasyны tapyň (görkezme: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$).

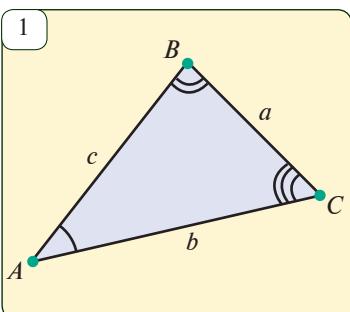


Teorema. (Sinuslar teoremasy). *Üçburçluguň taraplary garşysyndaky burçlaryň sinuslaryna proporsional.*

$\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b$ (1-nji surat)



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



Subudy. Üçburçluguň meýdanyny burcuň sinusy arkaly tapmak formulasyna görä,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin B. \quad (\diamond)$$

Bu deňlikleriň ilkinji ikisine görä,

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ diýmek } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

Şonuň ýaly-da, (\diamond) deňlikleriň birinjisinden we üçünjiden $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ deňligi alarys.

Şeýle edip, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Teorema subut edildi.

1-nji mesele. ABC üçburçlukda $AB = 14 \text{ dm}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ (1-nji surat). BC tarapy tapyň.

Cözülişi: Sinuslar teoremasyna görä,

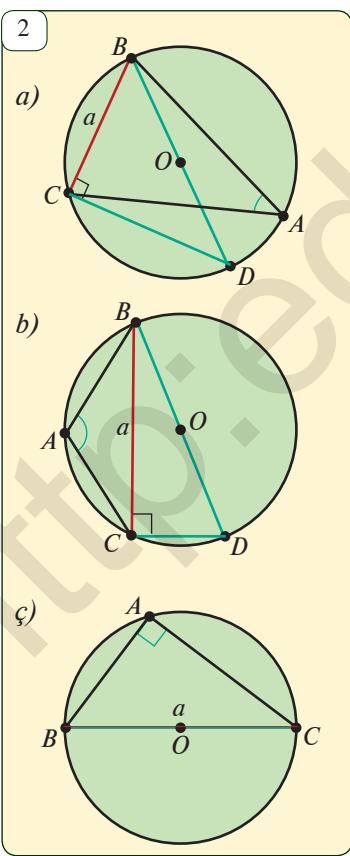
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \quad \text{Ondan,}$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 65^\circ} \approx \frac{14 \cdot 0,5}{0,9} \approx 7,78 \text{ (dm).}$$

Yatlatma: Trigonometrik funksiyalaryň bahalary ýörite kalkulyatoryň ýa-da jedwelleriň kömeginde tapylýar. Bu ýerde $\sin 65^\circ \approx 0,9$ bolýandygyny dersligiň 153-nji sahypasynadaky jedwelden anykladyk.

Jogaby: 7,78 dm.

2-nji mesele. Üçburçluguň tarapynyň şu tarapyň garşysyndaky burçunyň sinusyna gatnaşygy üçburçluguň daşyndan çyzylan töweregideň diametrine deň, ýagny $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ bolýandygyny subut ediň (2-nji surat).



Subudy. Görnüşi ýaly, sinuslar teoremasyna görä, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ deňligi subut etmek ýeterli. Üç ýagdaýyň bolmagy mümkün:

1-nji ýagdaý: $\angle A$ — ýiti burç (2-nji a surat); 2-nji ýagdaý: $\angle A$ — kütek burç (2-nji b surat); 3-nji ýagdaý: $\angle A$ — göni burç (2-nji ç surat).

1-nji ýagdaýa garaýarys: C we D nokatlary utgaşdyryýarys. BCD — gönüburçly üçburçluk, çünkü $\angle BCD$ burç BD diametre direlen.

ΔABC -da: $BC = BD \cdot \sin D = 2R \sin D$. Yöne, $\angle D = \angle A$, çünkü olar bir BC duga direlen içinden çyzylan burçlar. Onda,

$$BC = 2R \sin A \quad \text{ýa-da } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Galan ýagdaýlary özbaşdak subut ediň (görkezme: 2-nji ýagdaýda $\angle D = 180^\circ - \angle A$ bolýanlygyndan, 3-ýagdaýda $a = 2R$ bolýanlygyndan peýdalanyň)

2 Meseleler we ýumuşlar

28.1. Üçburçluguň islendik tarapynyň şu tarapyn garşsyndaky burcuň sinusyna gatnaşygy üçburçluguň daşyndan çyzylan töwereginiň diametrine deň bolýandygyny 2-nji meselede getirilen 2-nji we 3-nji ýagdaýlar üçin subut ediň.

28.2. 3-nji suratda berlenlere görä, soralan kesimleri tapyň.

28.3. Eger ABC üçburçlukda:

a) $\sin A = 0,4$; $BC = 6 \text{ cm}$ we $AB = 5 \text{ cm}$ bolsa, $\sin C$ -ni;

b) $\sin B = \frac{1}{2}$; $AC = 8 \text{ dm}$ we $BC = 7 \text{ dm}$ bolsa, $\sin A$ -ny;

c) $\sin C = \frac{1}{2}$; $AB = 6 \text{ m}$ we $AC = 8 \text{ m}$ bolsa, $\sin B$ -ni tapyň.

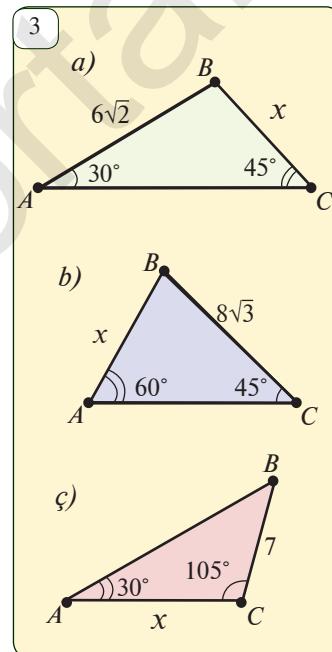
28.4. Üçburçluguň bir burçy 30° -a deň. Onuň garşsyndaky tarap $4,8 \text{ dm}$. Üçburçluguň daşyndan çyzylan töwereginiň radiusyny hasaplaň.

28.5. Üçburçluguň bir tarap üçburçluguň daşyndan çyzylan töwereginiň radiusyna deň. Üçburçluguň şu tarapynyň garşsyndaky burçuny tapyň. Munda, iki ýagdaýa garamaly bolýandygyna üns beriň.

28.6. ABC üçburçluk üçin $AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B$ deňligiň doğrudugyny esaslandyryň. $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ deňlik dogry bolmagy mümkünimi?

28.7. Eger ABC üçburçlukda $BC = 20 \text{ m}$, $AC = 13 \text{ m}$ we $\angle A = 67^\circ$ bolsa, üçburçluguň AB tarapyny, B we C burçlaryny tapyň.

28.8*. Eger ABC üçburçlukda $BC = 18 \text{ dm}$, $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 62^\circ$ bolsa, üçburçluguň C burçuny, AB we AC taraplaryny tapyň.

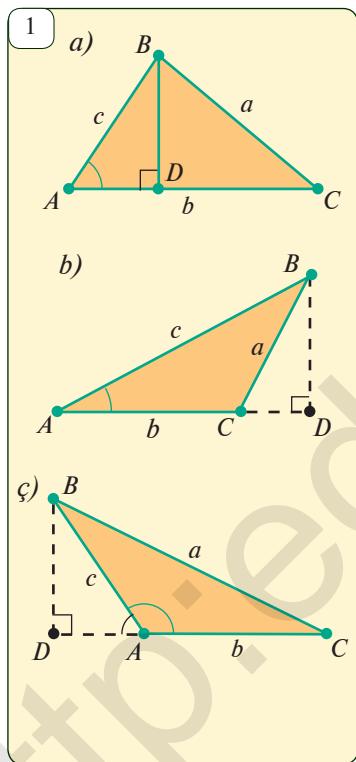


Gönüburçly üçburçlukda gönü burcuň garşysyndaky tarapyň (gipotenuza) kwadraty galan taraplaryň (katetler) kwadratlarynyň jemine deň.

Onda, gönü bolmadyk burç üçin nähili? Aşakdaky teorema şu babatda.

Teorema. (Kosinuslar teoremasy). Üçburçluguň islendik tarapynyň kwadraty galan iki tarapynyň kwadratlarynyň jemi şu iki tarap bilen olaryň arasyndaky burcuň kosinusynyň köpełtmek hasylynyň ikeldileniniň tapawudyna deň.

$$\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b \text{ (1-nji surat)} \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Subudy. ABC üçburçluguň BD beýikligini geçirýäris. D nokat AC tarapda (*1-nji a surat*) ýa-da onuň dowamynda (*1-nji b we 1-nji ç suratlar*) bolmagy mümkün. Birinji ýagdaýa garaýarys. Gönüburçly BCD üçburçlukda Pifagoryň teoremasyna görä,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

$DC = AC - AD$ bolany üçin:

$$BC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = BD^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AD + AD^2.$$

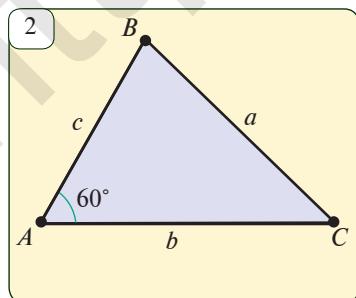
Gönüburçly ABD üçburçlukda $BD^2 + AD^2 = AB^2$ we $AD = AB \cos A$ bolýandygyny hasaba alyp, ahyrky deňlikden

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

ýagny $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ deňlige eýe bolarys.

Teorema subut edildi.

1-nji b suratda görkezilen ýagdaýda $DC = AD - AC$, 1-nji ç suratda görkezilen ýagdaýda $DC = AD + AC$ we $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$ deňliklerden peýdalanylý, kosinuslar teoremasyny özbaşdak subut ediň.



Ýatlatma. Kosinuslar teoreması Pifagoryň teoremasynyň umumylaşanydyr. $\angle A = 90^\circ$ bolanda ($\cos 90^\circ = 0$ bolany üçin) kosinuslar teoremasыndан Pifagoryň teoremasы gelip çykýar.

1-nji mesele. ABC üçburçlukda $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 7 \text{ cm}$, $\angle A = 60^\circ$ (*2-nji surat*). BC tarapy tapyň.

Çözülişi. Kosinuslar teoremasyna görä, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ýa-da $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$ bolany üçin

$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 49 + 36 - 84 \cdot \frac{1}{2} = 43,$$

ýagny $BC = \sqrt{43}$ cm. **Jogaby:** $\sqrt{43}$ cm.

Kosinuslar teoremasyndan peýdalanylар, taraplary mälim bolan üçburçlугын burçlaryny tapmak mümkün:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

2-mesele. ABC üçburçlугын taraplary $a=5$ m, $b=6$ m we $c=4$ m. Kiçi tarapyň uly tarapdaky proýeksiýasyny tapyň (3-nji surat).

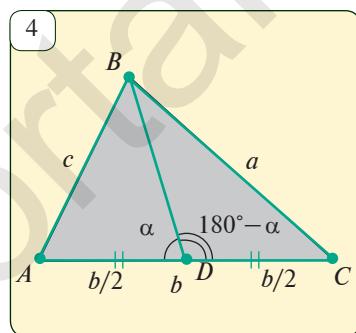
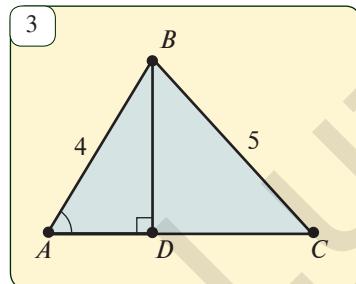
Çözülişi. (1) formula esasynda $\cos A$ ni tapýarys:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

Gönüburçly ABD üçburçlukda $AD = AB \cdot \cos A$ bolany üçin

$$AD = 4 \cdot \frac{9}{16} = 2,25 \text{ (m)}.$$

Jogaby: 2,25 m.



Meseleler we ýumuşlar

- 29.1. Kosinuslar teoremasyny 1-nji b we 1-nji c suratda görkezilen ýagdaýlarda subut ediň.
- 29.2. ABC üçburçlukda
 - a) $AC=3$ cm, $BC=4$ cm we $\angle C=60^\circ$ bolsa, AB -ni;
 - b) $AB=4$ m, $BC=4\sqrt{2}$ m we $\angle B=45^\circ$ bolsa, AC -ni;
 - c) $AB=7$ dm, $AC=6\sqrt{3}$ dm we $\angle A=150^\circ$ bolsa, BC -ni tapyň.
- 29.3. Taraplary 5 cm, 6 cm, 7 cm bolan üçburçlугын burçlarynyň kosinuslaryny tapyň.
- 29.4. ABC üçburçlukda $AB=10$ cm, $BC=12$ m we $\sin B=0,6$ bolsa, AC tarapy tapyň.
- 29.5. Parallelogramyň diagonallary 10 cm we 12 cm, olaryň arasyndaky burçy 60° -a deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.
- 29.6. Taraplary 5 cm we 7 cm bolan parallelogramyň bir burçy 120° -a deň. Onuň diagonallaryny tapyň.
- 29.7*. Taraplary a , b , c bolan ABC üçburçlугын BD medianasy $BD = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň (4-nji surat).
- 29.8*. Taraplary 6 m, 7 m we 8 m bolan üçburçlугын medianalaryny tapyň.
- 29.9. Taraplary 5 cm, 6 cm, 7 cm bolan üçburçlугын bissektrisalaryny tapyň.
- 29.10. Taraplary 5 cm, 6 cm, 7 cm bolan üçburçlугыň beýikliklerini tapyň.

Öňki derslerde subut edilen sinuslar we kosinuslar teoremlaryndan üçburçluklara degişli dürli-dürli meseleleri çözende netijeli peýdalanmak mümkün. Bu dersde bu teoremlaryň käbir ulanylyşyna durup geçýäris.

1. Kosinuslar teoreması üçburçlugyň burçlaryny tapmazdan, onuň burçlar boýunça görnüşini (ýiti, kütek ýa-da gönü burçly bolýandygyny) anyklamaga mümkünçilik berýär. Hakykatdan hem,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

formulada

- 1) eger $b^2 + c^2 > a^2$ bolsa, $\cos A > 0$. Diýmek, A — ýiti burç;
- 2) eger $b^2 + c^2 = a^2$ bolsa, $\cos A = 0$. Diýmek, A — gönü burç;
- 3) eger $b^2 + c^2 < a^2$ bolsa, $\cos A < 0$. Diýmek, A — kütek burç.

$b^2 + c^2 = a^2$ deňlik ýa-da $b^2 + c^2 < a^2$ deňsizlik a — üçburçlugyň diňe iň uly tarapy bolan ýagdaýda ýerine ýetirilýär. Diýmek, üçburçlugyň gönü ýa-da kütek burçy onuň iň uly tarapynyň garşysynda ýatýar.

Üçburçlugyň iň uly tarapynyň garşysyndaky burcuň ululygyna garap, bu üçburçlugyň nähili (ýiti, kütek, gönü burçly) üçburçludygy barada netijä gelmek mümkün.

 **1-nji mesele.** Taraplary 5 m, 6 m we 7 m bolan üçburçlugyň burçlaryny tapmazdan onuň görnüşini anyklaň.

Cözülişi. Iň uly burcuň garşysynda iň uly tarap ýatýar. Şonuň üçin, eger $a=7$, $b=6$, $c=5$ bolsa, $\angle A$ iň uly burç bolýar.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Diýmek, A — ýiti burç, berlen üçburçluk bolsa ýiti burçly.

2. Üçburçlugyň meýdanyny onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy arkaly hasaplamagyň formulasy

$$S = \frac{1}{2} b c \sin A$$

we $\sin A = \frac{a}{2R}$ formulalardan üçburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin

$$S = \frac{abc}{4R}$$

formulany we üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny hasaplamak üçin

$$R = \frac{abc}{4S}$$

formulany alarys.



2-nii mesele. Taraplary $a=5$, $b=6$, $c=10$ болан üçburçlugsyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.

Cözülişi. Geronyň formulasyndan peýdalanyп, üçburçlugsyň meýdanyny tapýarys:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+10}{2} = 11,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{264} \approx 16,3.$$

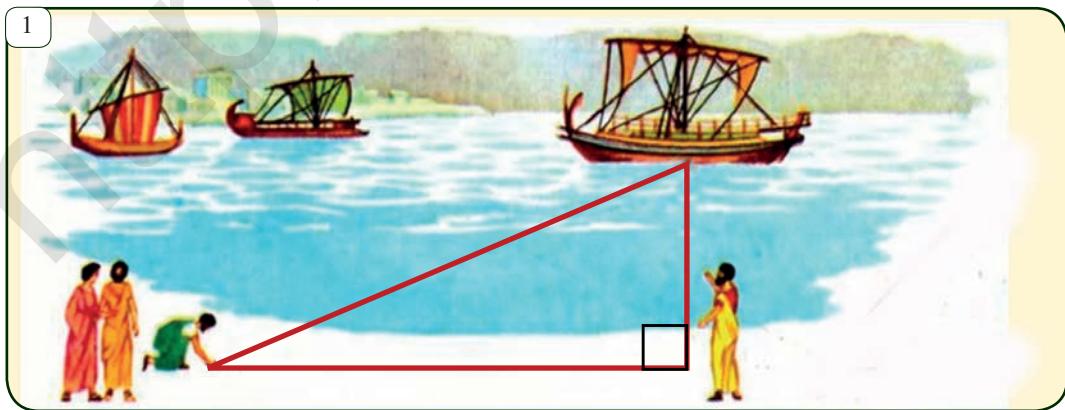
Unda, $R = \frac{abc}{4S} \approx \frac{5 \cdot 7 \cdot 10}{4 \cdot 16,3} \approx 5,4$.

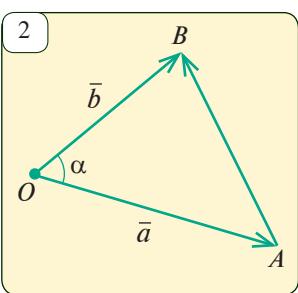
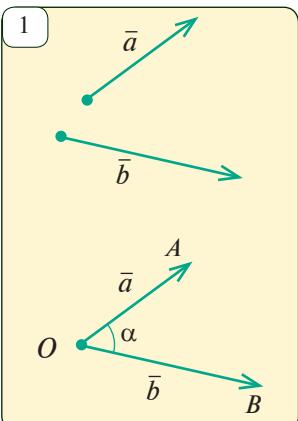
Jogaby: $\approx 5,4$.

?

Meseleler we ýumuşlar

- 30.1.** Eger $AB=7\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$, $CA=9\text{ cm}$ bolsa, ABC üçburçlugsyň iň uly we eng kiçi burçuny tapyň.
- 30.2.** Eger ABC üçburçlukda $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$ bolsa, üçburçlugsyň iň uly we iň kiçi taraplaryny anyklaň.
- 30.3.** Üçburçlugsyň üç tarapy berlen:
- a) $a=5$, $b=4$, $c=4$; b) $a=17$, $b=8$, $c=15$; d) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Üçburçluk ýiti burçly, gönüburçly ýa-da kütek burçly bolýandygyny anyklaň.
- 30.4.** Taraplary a) 13, 14, 15; b) 15, 13, 4; ç) 35, 29, 8; d) 4, 5, 7 болан üçburçlugsyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.
- 30.5.** ABC üçburçlugsyň AB tarapynda D nokat belgilenen. CD kesim AC we BC kesimleriň azындан birinden kiçi bolýandygyny subut ediň.
- 30.6.** Üçburçlugsyň uly burçunyň garşysynda uly tarapy ýatýandygyny subut ediň.
- 30.7.** Üçburçlugsyň uly tarapynyň garşysynda uly burçunyň ýatýandygyny subut ediň.
- 30.8*.** ABC üçburçlugsyň CD medianasy geçirilen. Eger $AC > BC$ bolsa, ACD burcuň BCD burçdan kiçi bolýandygyny subut ediň.
- 30.9*.** 1-nji suratda berlenlere esaslanyp, gadymda grekler kenardan gämä çenli болан aralygy nähili ölçändiklerini anyklaň.





Nol wektordan tapawutly \bar{a} wea \bar{b} wektorlaryň arasyndaky burç diýip O nokatdan çykýan $\overline{OA} = \bar{a}$ we $\overline{OB} = \bar{b}$ wektorlaryň ugrukdyryjy kesimleriniň arasyndaky AOB burça aýdylýar (1-nji surat).

Birmeňše ugrukdyrylan wektorlaryň arasyndaky burç 0° -a deň diýilip hasaplanýar. Eger iki wektoryň arasyndaky burç 90° -a deň bolsa, olara *perpendikulyar* diýilýär.

\bar{a} wea \bar{b} wektorlaryň *skalýar köpeltmek hasyly* diýip, bu wektorlaryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burcuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna aýdylýar.

Eger wektorlaryň biri nol wektor bolsa, olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolýar.

Skalýar köpeltmek hasyly $\bar{a} \cdot \bar{b}$ ýaly belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi. \quad (1)$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, \bar{a} we \bar{b} wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolsa, olar *perpendikulyar* bolýar we tersine.

Fizikada jisimi \bar{F} güýjüň täsiri astynda \bar{s} aralyga süýşürmekde edilen A iş \bar{F} we \bar{s} wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deň bolýar:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = |\bar{F}| \cdot |\bar{s}| \cos\varphi.$$

Häsiyet. $\bar{a}(a_1; a_2)$ we $\bar{b}(b_1; b_2)$ wektorlar üçin $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Subudy. \bar{a} we \bar{b} wektorlary koordinata başlangyjy O nokada goýýarys (2-nji surat). Onda $\overline{OA} = (\bar{a}_1; \bar{a}_2)$ we $\overline{OB} = (\bar{b}_1; \bar{b}_2)$ bolýar. Eger berlen wektorlar kollinear bolmasa, ABO üçburçlukdan ybarat bolýar we onuň üçin kosinuslar teoreması dogry bolýar: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$.

Onda $OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2)$ bolýar.

Ýöne, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2$, $OB^2 = b_1^2 + b_2^2$ we $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Diýmek, } \bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) = a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

Berlen wektorlar kollinear bolan ($\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 180^\circ$) ýagdaýda hem bu deňligiň dogry bolýandygyny özbaşdak görkeziň. \square

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň häsiýetleri

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ orun çalyşma häsiýeti.
2. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ paýlama häsiýeti.
3. $\lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \cdot \bar{b})$ toparlama häsiýeti.
4. Eger a we b wektorlar birmeňzeş ugurdaky kollinear wektorlar bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$ bolýar, çünki $\cos 0^\circ = 1$.
5. Eger garşylykly ugrukdyrylan bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = -|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, çünki $\cos 180^\circ = -1$.
6. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| |\bar{a}| \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.
7. a we b wektorlar özara perpendikulýar bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ bolýar.

Netijeler:

- a) $\bar{a} = (a_1; a_2)$ wektoryň uzynlygy: $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; (1)
- b) $\bar{a} = (a_1; a_2)$ we $\bar{b} = (b_1; b_2)$ wektorlar arasyndaky burç kosinusy:

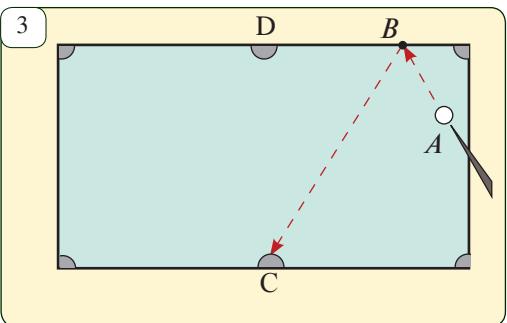
$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \quad \text{ýa-da} \quad \cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

 **Mesele.** $\bar{a}(1;2)$ we $\bar{b}(4;-2)$ wektorlar arasyndaky burçy tapyň.

Çözülişi. Berlen wektorlaryň arasyndaky burçy α diýip belgilesek, formula görä, $\cos\alpha = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = 0$. Diýmek, $\alpha = 90^\circ$. **Jogaby:** 90° .

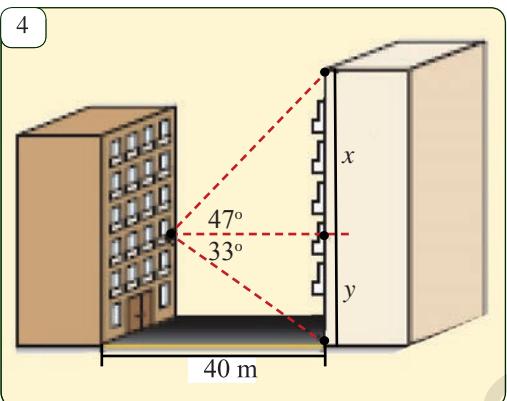
? Meseleler we ýumuşlar

- 31.1. Eger \bar{a} we \bar{b} wektorlar üçin a) $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=5$, $\alpha=30^\circ$; b) $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=7$, $\alpha=45^\circ$; d) $|\bar{a}|=2.4$, $|\bar{b}|=10$, $\alpha=60^\circ$; e) $|\bar{a}|=0.8$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$, $\alpha=40^\circ$ bolsa, bu wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň (bu ýerde $\bar{a} = \bar{a}$ we b wektorlaryň arasyndaky burç).
- 31.2. a) $\bar{a}(\frac{1}{2}; -1)$ we $\bar{b}(2; 3)$; b) $\bar{a}(-5; 6)$ we $\bar{b}(6; 5)$; ç) $\bar{a}(1,5; 2)$ we $\bar{b}(4; -2)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny hasaplaň we olaryň arasyndaky burçy tapyň.
- 31.3. ABCD rombuň diagonallary O nokatda kesişýär we munda $\overline{BD} = \overline{AB} = 4$ cm.
a) \overline{AB} we \overline{AD} ; b) \overline{AB} we \overline{AC} ; d) \overline{AD} we \overline{DC} ; e) \overline{OC} we \overline{OD} wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny we bu wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.
- 31.4. Nol wektordan tapawutly \bar{a} we \bar{b} wektorlar berlen bolsun. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ bolanda bu wektorlar perpendikulýar bolýandygyny we tersine, \bar{a} we \bar{b} wektorlar perpendikulýar bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ bolýandygyny subut ediň.
- 31.5*. x-iň nähili bahasynda a) $\bar{a}(4; 5)$ we $\bar{b}(x; 6)$; b) $\bar{a}(x; 1)$ we $\bar{b}(3; 2)$; ç) $\bar{a}(0; -3)$ we $\bar{b}(5; x)$ wektorlar özara perpendikulýar bolýar?
- 31.6. $\bar{a}(3; 3)$, $\bar{b}(2; -2)$, $\bar{c}(-1; -4)$ we $\bar{d}(-4; 1)$ wektorlaryň arasyndan özara perpendikulýar jübütlerini tapyň.



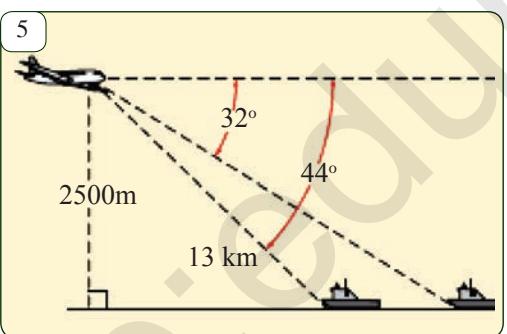
31.7*. Bilýard oýnunda A nokatda duran şar zarbadan soň bilýard stoluna tarapyna B nokatda uruldy we ugruny üýtgedip C nokatdaky sebetjige duşdi (3-nji surat).

Eger $AB=40$ cm, $BC=150$ cm we $\angle ABD=120^\circ$ bolsa, $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.



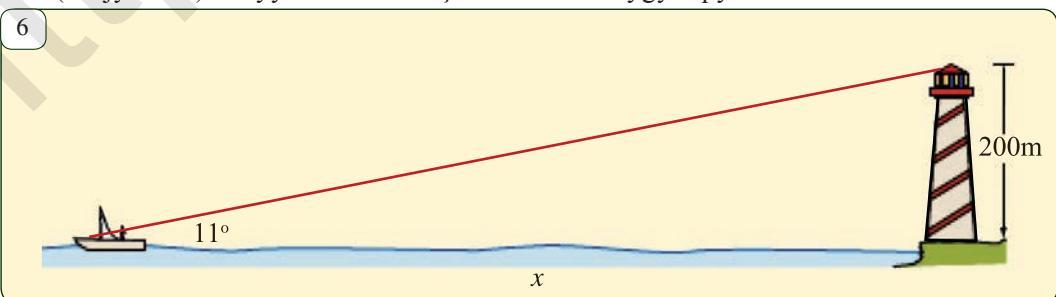
31.8. F(-3, 4) güýjüň täsiri astynda nokat A(5, -1)ýagdaýdan B(2, 1) ýagdaýa geçdi. Bu prosesde nähili iş edildi?

31.9. Leýla köp etažly öýüň 3-nji etažynda ýasaýar. Onuň aýnasyn dan öýünden 40 m aralykda duran başga bir öý görnüp durýar (4-nji surat). Eger garşydaky öýüň üçegi Leýla 47° burç astynda, aşaky esasy bolsa 33° burç astynda görünse, garşydaky öýüň beýikligini tapyň.



31.10. 2500 m beýiklikde uçup barýan samolýotdan birinji gämi gorizonta görä 44° burç astynda, ikinji gämi bolsa 32° burç astynda görünýär (5-nji surat). Gämileriň arasyndaky aralygy tapyň.

31.11. Balykçylaryň gaýygyn dan beýikligi 200 m bolan mayak 11° burç astynda görünýär (6-nji surat). Gaýykdan kenara çenli bolan aralygy tapyň.





Geometriýadan we geografiýadan taslama işi

Geografiýa predmetinden mälim bolşy ýaly, Ýer şarynyň üstündäki ýerler geografik koordinatalaryň kömeginde anyklanýar. 7-nji suratda bu koordinatalar getirilen. Onda

1 - nolunjy (Grinwiç) meridian;

2 - nolunjy meridiandan sagda (gündogarda) ýerleşyän meridianlar;

3 - ekwatoridan pesde (günortada) ýerleşyän paralleller;

4 - ekwator.

Nolunjy (Grinwiç) meridianynyň (1) ekwator (4) bilen kesişme nokady geografik koordinatalaryň sanaw başy hasaplanýar.

Ekwatordan demirgazyga tarap meridian boýunça çärýek töwereginiň dugasy 90° demirgazyk giňligi, ekwatordan günorta tarap hem 90° günorta giňligi öz içine alýar.

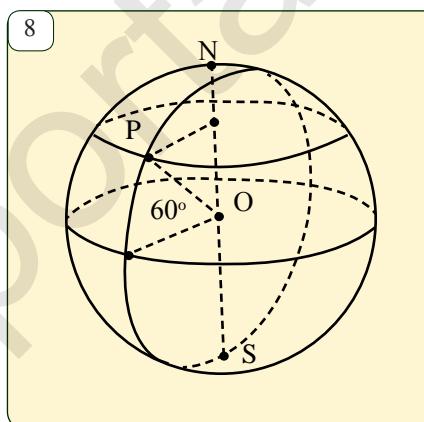
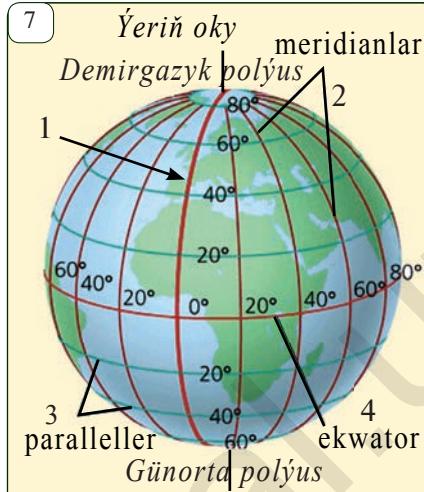
Nolunjy meridiandan gündogara tarap ekwator boýunça ýarym töwereginiň dugasy 180° gündogar uzaklygy, nolunjy meridiandan günbatara tarap hem 180° günbatar uzaklygy öz içine alýar.

1. Daşkent şäheriniň geografik koordinatalaryny tapyň.

2. Watanymyzyň paýtagty bilen ýene haýsy uly şäherler takmynan birmeňzeş meridianda ýerleşyär.

3. Daşkent şäherinden Tokio, Pekin, Seul, Waşington we Nýu-Ýork şäherlerine čenli (meridian boýunça) bolan aralyklary anyklaň (ýetişmeýän maglumatlary özüňiz gözläp tapyň).

4. Şäher 60° demirgazyk giňlikde ýerleşyär. Eger Ýeriň radiusy $6400\ km$ bolsa, bu şäher ýerleşyän parallelin radiusyny tapyň.

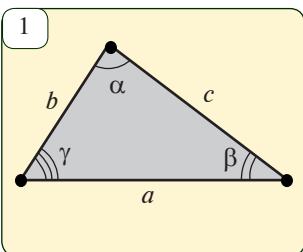


Gyzykly geometriýa

Awçy awa çykdy. Ilki ol günorta tarap $1\ km$ ýöredi. Soň gündogara tarap $1\ km$, soň bolsa demirgazyga tarap $1\ km$ ýöredi we başlangyç ýagdaýyna geldi. Seretse, aýy dur. Ony atdy.

1. Awlanan aýynyn reňki nähili?

2. Ýer şarynyň ýene haýsy ýerlerinden ýola çykyp, ýokarda görkezilişi ýaly 3 tarapa ýöräp ýene başlangyç nokada gelmek mümkün? Ol ýerlerde aýy ýasaýarmy?



Üçburçluguň taraplaryny a , b , c bilen, bu taraplaryň garşysyndaky burclary degişlilikde α , β , γ bilen belgileýäris (1-nji surat). Üçburçluguň taraplaryny we burclaryny bir at bilen — onuň *elementleri* diýýärler.

Üçburçlugu kesgitleýji berlen elementlerine görä, onuň galan elementlerini tapmaga *üçburçlugu çözme* diýilýär.

1-nji mesele. (*Üçburçlugu berlen bir tarapy we oňa seleşyän burclary boýunça çözme*). Eger üçburçlukda $\alpha=6$, $\beta=60^\circ$ we $\gamma=45^\circ$ bolsa, onuň üçünji burçuny we galan iki tarapyny tapyň.

Cözülişi. 1. Üçburçluguň burclarynyň jemi 180° bolany üçin

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Sinuslar teoremasyndan peýdalanylý, galan iki tarapy tapýarys:

$$2. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \text{ deňlikden } b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,8660}{0,9659} \approx 5,3794 \approx 5,4.$$

($\sin 60^\circ$ we $\sin 75^\circ$ bahalary mikrokalkulyatorda tapyp goýulýar, olary dersligiň 153-nji sahypasyndaky jedwelen hem tapyp bilersiňiz).

$$3. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ deňlikden } c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,7071}{0,9659} \approx 4,3924 \approx 4,4.$$

Jogaby: $\alpha=75^\circ$; $\beta \approx 5,4$; $c \approx 4,4$.

2-nji mesele. (*Üçburçlugu berlen iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça çözme*). Eger üçburçlukda $a=6$, $b=4$ we $\gamma=120^\circ$ bolsa, onuň üçünji tarapyny we galan burclaryny tapyň.

Cözülişi. 1. Kosinuslar teoremasyndan peýdalanylý, üçburçluguň üçünji c tarapyny tapýarys.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (-0,5)} = \sqrt{76} \approx 8,7.$$

2. Indi, üçburçluguň üç tarapyny bilmek bilen, kosinuslar teoremasyndan peýdalanylý, üçburçluguň galan burclaryny tapýarys:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 76 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{76}} \approx 0,8046.$$

$\cos \alpha \approx 0,8046$ deňlik esasynda α burcuň bahasyny 153-nji sahypadaky jedwelen anyklaýarys (α — ýiti burç): $\alpha \approx 36^\circ$.

$$3. \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - (36^\circ + 120^\circ) = 24^\circ.$$

Jogaby: $c \approx 8,7$; $\alpha \approx 36^\circ$, $\beta \approx 24^\circ$.

3-nji mesele. (*Üçburçlugu berlen üç tarapy boýunça çözme*). Eger üçburçlukda $a=10$, $b=6$ we $c=13$ bolsa, onuň burclaryny tapyň.

Cözülesi: 1. Üçburçlugin kütæk burçly bolmagy ýa-da bolmazlygyny uly tarapyp garşysyndaky burcuň kosinusynyň alamatyna garap anyklaýarys:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 36 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0,275 < 0.$$

Diýmek, C — kütæk burç eken. Muny 153-nji sahypadaky jedwelden C burcuň ululygyny anyklamakda hasaba alýarys. Jedwelden kosinusy 0,275-e deň burç $\angle C_1 = 74^\circ$ bolýandygyny tapýarys. Onda $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ formula görä,

$$\angle C = 180^\circ - \angle C_1 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ.$$

2. Sinuslar teoremasyna görä,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \text{ Mundan, } \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{10 \cdot \sin 106^\circ}{13} = \frac{10 \cdot \sin 74^\circ}{13} \approx \frac{10 \cdot 0,9615}{13} \approx 0,7396.$$

A — ýiti burç bolany üçin 153-nji sahypadaky jedwelden $\angle A \approx 47^\circ$ bolýandygyny anyklaýarys.

3. $\angle B \approx 180^\circ - (106^\circ + 47^\circ) = 26^\circ$.

Jogaby: $\angle A \approx 47^\circ$, $\angle B \approx 26^\circ$, $\angle C \approx 106^\circ$.

2 Meseleler we ýumuşlar

32.1. Üçburçlugin bir tarapy we oňa sepleşyän iki burçy berlen:

- | | |
|--|---|
| a) $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; | c) $c = 20 \text{ cm}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 60^\circ$; |
| d) $a = 35 \text{ cm}$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; | e) $c = 12 \text{ cm}$, $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 25^\circ$. |

Üçburçlugin üçünji burçuny we galan iki tarapynы tapyň.

32.2. Üçburçlugin iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy berlen:

- | | |
|---|---|
| a) $a = 6$, $b = 4$, $\gamma = 60^\circ$; | c) $a = 14$, $b = 43$, $\gamma = 130^\circ$; |
| d) $b = 17$, $c = 9$, $\alpha = 85^\circ$; | e) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145^\circ$. |

Üçburçlugin galan burçlaryny we üçünji tarapynы tapyň.

32.3. Üçburçlugin üç tarapy berlen:

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; | c) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$; |
| d) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$; | e) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$. |

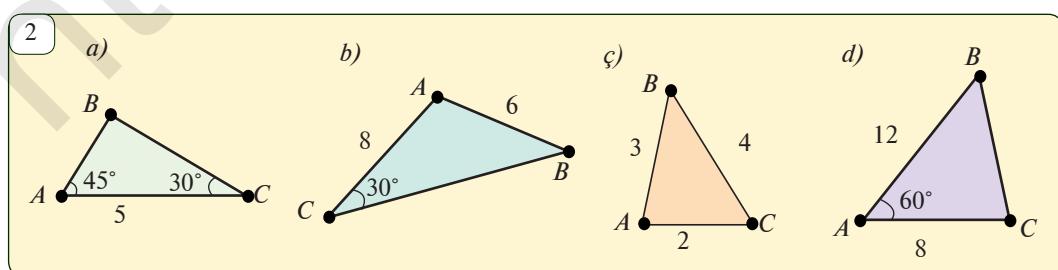
Üçburçlugin burçlaryny tapyň.

32.4. Üçburçlugin iki tarapy we bu taraplardan biriniň garşysyndaky burçy berlen.

Üçburçlugin galan tarapynы we burçlaryny tapyň:

- | | |
|--|--|
| a) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120^\circ$; | c) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138^\circ$; |
| d) $b = 2$, $c = 2$, $\alpha = 60^\circ$; | e) $b = 6$, $c = 8$, $\alpha = 30^\circ$. |

32.5. 2-nji suratda berlen maglumatlar esasynda üçburçlugin çözüň.

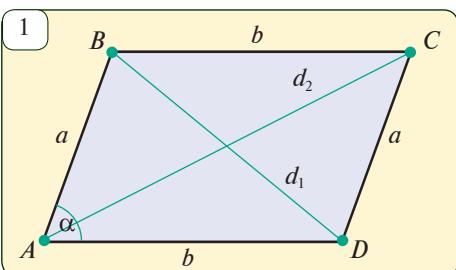




1-nji mesele. Parallelogramyň diagonallarynyň kwadratlarynyň jemi tarapalarynyň kwadratlarynyň jeminiň ikeldilenine deňdigiňi subut ediň.

$ABCD$ — parallelogram, $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ (1-nji surat).

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Subudy. $ABCD$ parallelogramyň A burçy α deň bolsun. Onda $\angle B = 180^\circ - \alpha$. ABD we ABC üçburçluklara kosinuslar teoremasyny ulanýarys (1-nji surat):

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha, \quad (1)$$

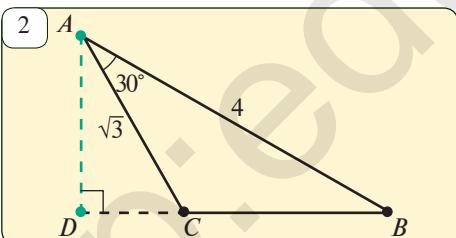
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha).$$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ deňligi hasaba alsak,

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

(1) we (2) deňlikleriň degişli böleklerini goşup, $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ deňligi alarys.

2-nji mesele. ABC üçburçlukda $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4$, $AC = \sqrt{3}$ bolsa, üçburçluguň A depesinden geçirilgen AD beýikligini tapyň (2-nji surat).



Çözülişi. 1) Kosinuslar teoremasyndan peýdalanyп, üçburçluguň BC tarapyny tapýarys:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 7, \quad BC = \sqrt{7}.$$

2) Indi üçburçluguň meýdanyny tapýarys:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Tapylanlardan peýdalanyп, üçburçluguň AD beýikligini tapýarys:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD \quad \text{formuladan} \quad AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad \text{Jogaby: } \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$



3-nji mesele. Sürüji köçe hereketiniň düzgünlerini bozup, sagat 12^00 -da şáýolunyň A nokadyndan Almazar köçesine tarap öwrüldi we 140 km/sagat tizlikde hereketini dowam etdirdi (3-nji surat). Sagat 12^00 -da DAG işgäri B nokatdan daş düşelen ýol boýunça 70 km/sagat tizlikde düzgünbozujy sürüjiniň ýolyny

kesip çymak üçin ýola çykdy. DAG işgäri çatrykda, ýagny C nokatda düzgün bozujy sürüjini saklap bilmədi?

Çözülişi: ABC üçburçlukda

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

1. Almazar köçesindäki ýoluň AC bölegiň uzynlygyny tapýarys: sinuslar teoremasyna ko'ra,

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}. \text{ Bu deňlikden } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ)} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \approx \frac{2 \cdot 0,766}{0,940} = \frac{1,532}{0,94} \approx 1,630 \text{ (km). Bu ýoly düzgün bozujy sürüji } \frac{1,630 \text{ km}}{140 \text{ km/h}} \approx \approx 0,0116 \text{ sagat} = 0,012 \cdot 3600 \text{ sekunt} \approx 42 \text{ sekundta geçýär.}$$

2. Indi daş düşelen ýoluň BC böleginiň uzynlygyny tapýarys: sinuslar teoremasyna görä, $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Bu deňlikden $BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{2 \cdot 0,342}{0,766} \approx 0,893 \text{ (km).}$

Bu ýoly DAG işgäri $\frac{0,893 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} \approx 0,0128 \text{ sagat} = 0,0128 \cdot 3600 \text{ sekunt} \approx$

$\approx 46 \text{ sekundta geçýär. Diýmek, C çatryga DAG işgäri sürüjiden gjiräk ýetip geler eken. }$ **Jogaby:** Ýok.

?

Meseleler we ýumuşlar

33.1. 4-nji suratdaky maglumatlar boýunça x -iň bahasyny tapyň.

33.2. ABC üçburçluguň CD beýikligi 4 m . Eger $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ bolsa, üçburçluguň taraplaryny tapyň.

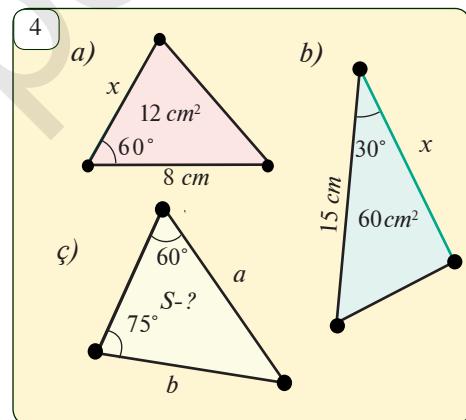
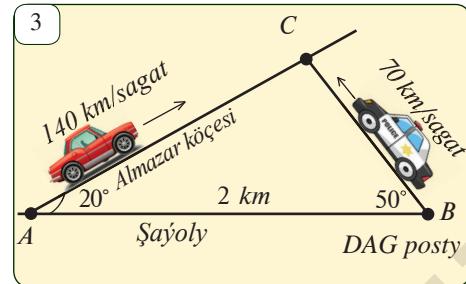
33.3. Bir nokada ululygy birmeňzeş bolan iki güýç goýlan. Eger bu güýçleriň ugurlarynyň arasyndaky burç 60° we güýçleriň deň täsir edijisi 150 kg bolsa, şu güýçleriň ululygyny tapyň.

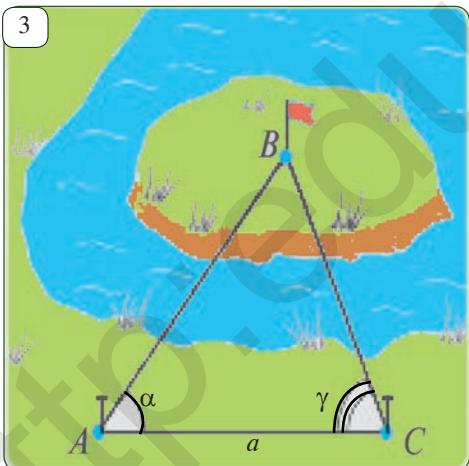
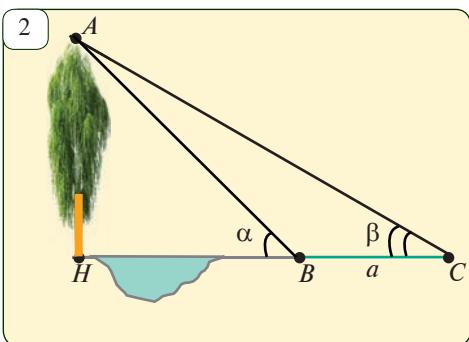
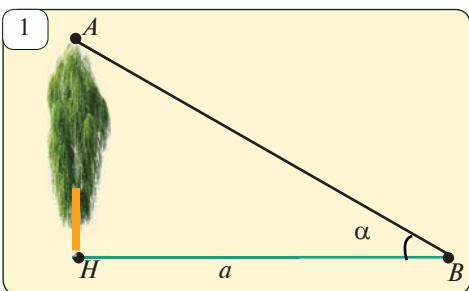
33.4. Üçburçluguň iki tarapy 7 dm we 11 dm , üçünji tarapyna geçirilen medianasy bolsa 6 dm . Üçburçluguň üçünji tarapyny tapyň.

33.5. Taraplary 6 cm we 8 cm bolan parallelogramyň bir diagonalı 12 cm bolsa, onuň ikinji diagonalyny tapyň.

33.6. Üçburçluguň 18 cm -e deň tarapynyň garşysyndaky burçy 60° -a deň. Üçburçluguň daşyndan çzyylan töweregىň radiusyny tapyň.

33.7. Deňyanly trapesiyanyň kiçi esasynyň gapdal tarapyna deň, uly esasy bolsa 20 cm . Eger trapesiyanyň bir burçy 120° bolsa, onuň perimetrini tapyň.





1. Beýikligi ölçemek. Aýdaly, agajyň AH beýikligini ölçemeli bolsun (1-nji surat).

a) Munuň üçin B nokady belgileýäris we BH aralyk a -ny we HBA burç α -ny ölçüýäris. Onda, gönüburçly ABH üçburçlukda

$$AH = BH \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

b) Eger beýikligiň esasy H nokat baryp bolmaýan nokat bolsa (2-nji surat), ýokardaky usul bilen AH beýikligi anyklap bilmersiňiz. Onda aşakdaky ýaly çemeleşýäris:

- 1) H nokat bilen bir goni çyzykda ýatýan B we C nokatlary belgileýäris;
- 2) BC aralygy ölçäp a -ny tapýarys;
- 3) ABH we ACH burçlary ölçäp $\angle ABH = \alpha$ we $\angle ACH = \beta$ -lary tapýarys;
- 4) ABC üçburçluga sinuslar teoremasyny ulansak ($\angle BAC = \alpha - \beta$)

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}, \text{ ýagny } AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

5) gönüburçly ABH üçburçlukda AH beýikligi tapýarys:

$$AH = AB \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

2. Baryp bolmaýan nokada çenli bolan aralygy hasaplama. Aýdaly, A nokatdan baryp bolmaýan B nokada çenli bolan aralygy hasaplamaly (3-nji surat). Bu meseläni üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryndan peýdalanyп jogabyny tapandygymyzy ýatladyp geçýäris.

Indi bu meseläni sinuslar teoremasyndan peýdalanyп çözýäris.

1) A we B nokatlardan görnüp duran tekiz ýerde C nokady belgileýäris.

2) AC aralygy ölçüýäris: $AC = a$.

3) Esbaplaryň kömeginde ACB we BCA burçlary ölçüýäris: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$.

4) ABC üçburçlukda $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$ bolany üçin,

$$\sin B = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

Sinuslar teoremasyna görä, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ ýa-da $AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$

?

Meseleler we ýumuşlar

34.1.-nji suratda $a=12\text{ m}$, $\alpha=42^\circ$ bolsa, agajyň beýikligini hasaplaň.

34.2.-nji suratda $a=8\text{ m}$, $\alpha=43^\circ$, $\beta=32^\circ$ bolsa, agajyň beýikligini hasaplaň.

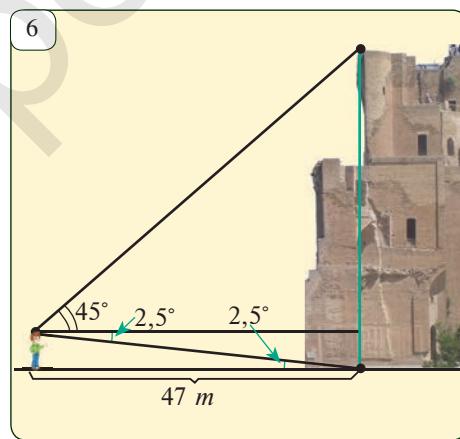
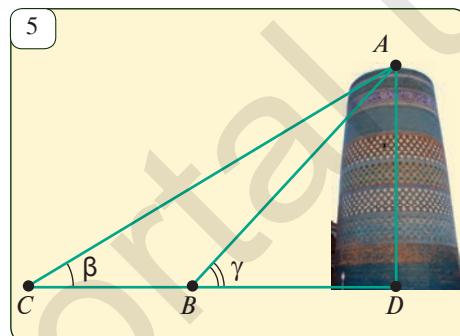
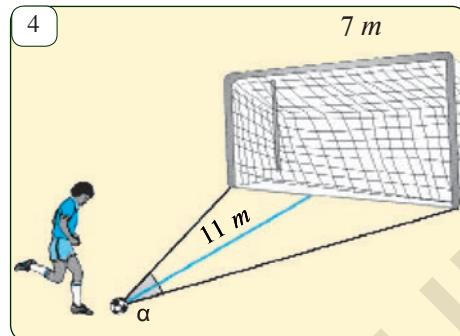
34.3.-nji suratda $a=60\text{ m}$, $\alpha=62^\circ$, $\gamma=44^\circ$ bolsa, AB aralygy tapyň.

34.4. Futbol oýnunda 11 metrlik jerima topuny derwezä ugrukdyryjy burçy α -ni tapyň (4-nji surat). Derwezäniň giňligi 7 m.

34.5. 5-nji suratda Hywa şäherindäki Kelteminar görkezilen. Eger $\beta=30,7^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $BC=50\text{ m}$ bolsa, Kelteminaryň beýikligini tapyň.

34.6. Syýahatçı Şährisebz şäherindäki Aksaraýy ondan 47 m aralykda tomaşa edýär (6-njy surat). Eger ol Aksaraýyň esasyny gorizonta görä $2,5^\circ$ -a deň burç astynda, depe bölegini bolsa 45° -a deň burç astynda görýän bolsa, Aksaraýyň beýikligini tapyň.

34.7. Üç ýol ABC üçburçlugu emele getirýär. Bu üçburçlukda $\angle A=20^\circ$, $\angle B=150^\circ$. A nokatdan ýola çykan sürüji C nokada mümkingadar tizräk ýetip barmakçy. AC we CB ýollar daşly, AB asfalt ýol bolup, asfalt ýolda daşly ýola garanda 2 esse tizräk hereketlenmek mümkün. Sürüşä haýsy ýoldan ýöremegi maslahat berýärsiňiz?



⌚ Gyzykly mesele

Pifagoryň teoremasynyň ýene bir “subudy”

Gönüburçly ABC üçburçlukda $a=c \sin \alpha$, $b=c \cos \alpha$. Bu iki deňligi kwadrata göterip, agzama-agza goşsak we $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$a^2 + b^2 = c^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2.$$

Diýmek, $a^2 + b^2 = c^2$. Bu “subut” logiki taýdan nädogry bolýandygyny esaslandyryň.

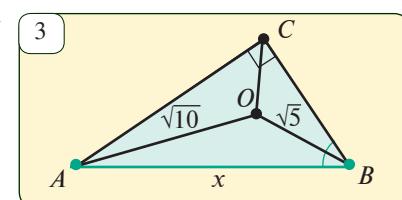
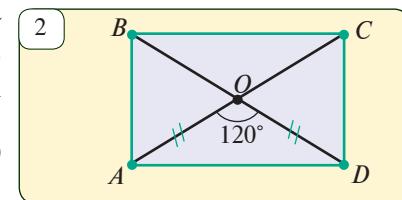
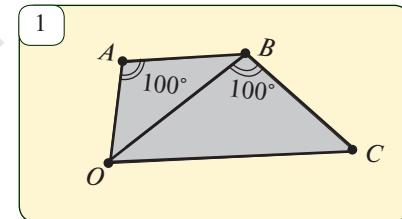
I. Testler

1. Taraplary a, b, c , degişli burçlary α, β, γ , meýdany S bolan üçburçluk üçin haýsy deňlik nädogry?
- A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$; B. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;
 D. $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$; E. $S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$.
2. Nädogry deňligi tapyň:
- A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; B. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
 D. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$; E. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
3. Üçburçluguň üç tarapy mälim bolsa, haýsy teoremadan peýdalanyп onuň burçlaryny tapmak mümkün?
- A. Sinuslar teoremasы; B. Kosinuslar teoremasы;
 D. Falesiň teoremasы; E. Geronyň formulasy.
4. Üçburçluguň bir burçy 137° -a, ikinji burçy 15° -a deň. Eger bu üçburçluguň uly tarapy 22-ä deň bolsa, onuň kiçi tarapyny tapyň.
- A. 8,3; B. 9,3; D. 3,8; E. 6,5.
5. Üçburçluguň 14 we 19-a deň bolan taraplary arasyndaky burçy 26° . Şu üçburçluguň üçünji tarapyny tapyň.
- A. 1,2; B. 5,4; D. 6,9; E. 19,7.
6. Eger iki wektoryň uzynlykları $|a|=2$, $|b|=5$ we olaryň arasyndaky burç 45° bolsa, a we b wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.
- A. 52; B. 32 D. 102; E. 2.
7. $a(4; -1)$ we $b(2; 3)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.
- A. 5; B. 3; D. 4; E. 9.
8. $a(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ we $b(\sqrt{3}; 1)$ wektorlar arasyndaky burçy tapyň.
- A. 30° ; B. 60° ; D. 90° ; E. 45° .
9. Üçburçluk burçlarynyň gatnaşygy $3:2:1$ ýaly bolsa, onuň taraplary gatnaşygyny tapyň.
- A. $3:2:1$; B. $1:2:3$; D. $2:\sqrt{3}:1$; E. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.
10. Tarapy 3 cm bolan dogry üçburçluguň daşyndan çyzyylan töweregiň radiusyny tapyň.
- A. $\sqrt{3}$; B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$; E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. Meseleler

1. ABC üçburçluga $AB = 6 \text{ cm}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. BC tarapy hem-de ABC üçburçluguň daşyndan çyzyylan töweregiň radiusyny tapyň.
2. Taraplary 5 cm, 6 cm we 10 cm bolan üçburçluguň burçlarynyň kosinusalaryny tapyň.

3. ABC üçburçlukda $\angle B = 60^\circ$, $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$. AC tarapy hem-de ABC üçburçlugsyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.
4. Taraplary 51 cm , 52 cm we 53 cm bolan üçburçlugsyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.
5. Üçburçlugsyň iki tarapy 14 cm we 22 cm , üçünji tarapyna geçirilen medianasy bolsa 12 cm . Üçburçlugsyň üçünji tarapyny tapyň.
6. Parallelogramyň diagonallary 4 cm , $4\sqrt{2} \text{ cm}$ we olaryň arasyndaky burç 45° . Parallelogramyň a) meýdanyny; b) perimetрини; ç) beýikliklerini tapyň.
7. Taraplary 3 we 5 bolan parallelogramyň bir diagonaly 4 -e deň. Onuň ikinji diagonalyны tapyň.
8. Taraplary a) 2 , 2 we $2,5$; b) 24 , 7 we 25 ; ç) 9 , 5 we 6 bolan üçburçlugsyň görnüşini anyklaň.
9. Parallelogramyň taraplary $7\sqrt{3}$ we 6 cm . Eger onuň kütek burçы 120° bolsa, onuň meýdanyny tapyň.
10. ABC üçburçlugsyň AB , BC taraplarynda N , K nokatlar alnan. Onda $BN = 2AN$, $3BK = 2KC$. Eger $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$ bolsa, NK kesimi tapyň.
11. ABC üçburçlukda $\angle A = 30^\circ$, $BC = 7 \text{ cm}$. Üçburçlugsyň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.
12. ABC üçburçlugsyň BE bissektrisasy geçirilen. E nokatdan BC tarapa EF perpendikulár geçirilen. Eger $EF = 3$, $\angle A = 30^\circ$ bolsa, AE -ni tapyň.
13. $ABCD$ gönüburçluk AD tarapynyň ortasy N nokatda. Eger $AB = 3$, $BC = 6$ bolsa, $\overline{NB} \cdot \overline{NC}$ skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.
14. $\bar{a}(2;x)$, $\bar{b}(-4;1)$ bolup, $\bar{a} + \bar{b}$ we \bar{b} wektorlar perpendikulár. x -i tapyň.
15. $\bar{m}(7;3)$ we $\bar{n}(-2;-5)$ wektorlaryň arasyndaky burçы tapyň.
16. 1-nji suratda berlenlerden peýdalanyп, suratdaky iň uly kesimi anyklaň.
17. $ABCD$ gönüburçlugsyň diagonallary O nokatda kesişyär (2-nji surat). Eger $AO = 12 \text{ cm}$, $\angle AOD = 120^\circ$ bolsa, dörtburçlugsyň perimetрини tapyň.
18. Gönüburçly ABC üçburçluk bissektrisalary O nokatda kesişyär ($\angle C = 90^\circ$). Eger $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$ bolsa, AB gipotenuzany tapyň (3-nji surat).



III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

1. Taraplary $a=45$, $b=70$, $c=95$ bolan üçburçluguň iň uly burçuny tapyň.
2. Üçburçlukda $b=5$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=50^\circ$ bolsa, üçburçlugu çözüň.
3. PKH üçburçlukda $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100^\circ$. HF mediananyň uzynlygyny we PFH üçburçluguň meýdanyny tapyň.
4. (*Goşmaça*). Üçburçlukda $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135^\circ$ bolsa, β burçy tapyň.



Taryhy maglumatlar. Sinus barada

Sinus baradaky maglumat ilki IV–V asyrlardaky hindi astronomlarynyň eserlerinde duşýar.

Orta aziýaly alymlar al-Horezmi, Biruny, Ibn Sina, Abdurahman al-Hazyny (XII asr) sinus üçin «*al-jáyb*» adalgasyny ulanypdyrlar.

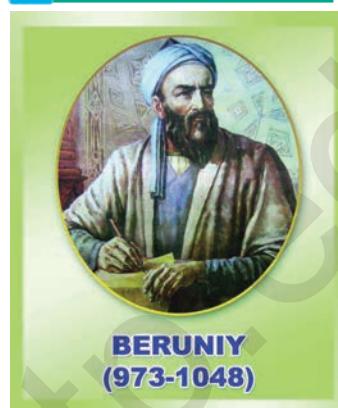
Häzirki sinus belgisini Simpson, Eýler, Dalamber, Lagranj (XVII asyr) we başgalar ulanypdyr.

«*Kosinus*» adalgasy latynça «komplimenti sinus» adalgasynyň gysgaldylany, ol «goşmaça sinus», has takygy «goşmaça duganyň sinusy» diýmekdir.

Kosinuslar teoremasyny grekler hem bilipdir, onuň subudy Ýewklidiň “Esaslar” eserinde getirilen. Sinuslar teoremasynyň özboluşly subudyny Abu Reýhan Biruny beýan edipdir.



Taryhy maglumatlar.



Biruny (doly ady – Abu Reýhan Muhammet ibn Ahmet) (973 — 1048) – orta asyryň beýik ensiklopedist alymy. Ol Horezm ülkesiniň Kyýat şäherinde doglupdyr. Kyýat Amyderýanyň sag kenary – häzirki Biruny şäheriniň ýerinde bolan, ol ýakyn wagtlara çenli Şabbaž diýlip atlandyrylypdyr. Birunynyň matematika we ylmyň başga ugurlaryna goşan goşandyny ýazyp galdyran 150-den artyk eserinden hem görmek mümkün. Olardan iň irileri – “Hindistan”, “Ýadygärlikler”, “Mas’ud kanunlary”, “Geodeziya”, “Mineralogiya” we “Astronomiya”.

Birunynyň şa eseri “Mas’ud kanunlary”, esasan, astronomiya degişli bolsa-da, onuň matematika degişli ençeme açыşlary şu eserde beýan edilen.

Bu eserde Biruny iki burcuň jeminiň we tapawudynyň sinuslary, ikeldilen we ýarym burcuň sinuslary baradaky teoremlar bilen deň güýçli bolan hordalar baradaky teoremlary subut edipdir, iki gradusly duganyň hordalaryny hasaplap tapypdyr, sinuslar we tangensler jedwellerini düzüpdir, sinuslar teoremasyny özboluşly usulda subut edipdir.

III BAP

TÖWEREGIŇ UZYNLYGY WE TEGELEGIŇ MEÝDANY



Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňz:

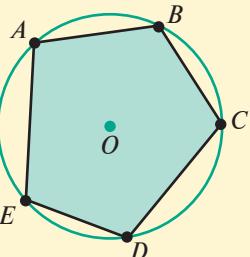
Bilimler:

- ✓ köpburçluguň daşyndan we içinden çzyylan töwerekleriň häsiyetlerini bilmek;
- ✓ dogry köpburçluklaryň häsiyetlerini bilmek;
- ✓ dogry köpburçluguň meýdanyny hasaplamagyň formulalaryny bilmek;
- ✓ töweregiň we onuň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulalaryny;
- ✓ tegelegiň we onuň bölekleriniň meýdanyny tapmagyň formulalaryny bilmek;
- ✓ burcuň radian ölçegini bilmek.

Amaly endikler:

- ✓ dogry köpburçluklary şekillendirip bilmek;
- ✓ dogry köpburçluguň daşyndan we içinden çzyylan töwerekleriň radiuslaryny tapyp bilmek;
- ✓ töweregiň we duganyň uzynlygyny hasaplap bilmek;
- ✓ tegelek we onuň bölekleriniň meýdanyny hasaplap bilmek.

1



Töwerekdeki içinden çyzylan başburçluk ýa-da başburçlugin daşyndan çyzylan töwerek.

Kesgitleme. Eger köpburçlugin ähli depeleri töwerekde ýatsa, bu köpburçluk töweregiden *çyzylan*, töwerek bolsa köpburçlugin *daşyndan çyzylan* diýilýär (*1-nji surat*).

Islendik üçburçlugin daşyndan töwerek çyzmak mümkünligini we bu töweregiden merkezi üçburçlugin taraplarynyň orta perpendikulýarlary kesişen noktada ýatýandygyny 8-nji synpda öwrenipdiňiz.

Eger köpburçlugin burçlarynyň sany üçden artyk bolsa, köpburçlugin daşyndan ylmydama töwerek çyzyp bolubermeýär. Meselem, gönüburçlukdan tapawutly parallelogram üçin daşyndan çyzylan töwerek ýok (*2-nji surat*).

8-nji synp geometriya kursundan mälim bolsy ýaly, dörtnurçlugin daşyndan garşylykly burçlarynyň jemi 180° -a deň bolanda we diňe şonda töwerek çyzmak mümkün (*3-nji surat*).

1-nji mesele. Yiti burçly ABC üçburçlugin AA_1 we BB_1 beýiklikleri H noktada kesişyär. A_1HB_1C dörtnurçlugin daşyndan töwerek çyzmak mümkünligini subut ediň.

Çözülişi. $AA_1 \perp BC$ we $BB_1 \perp AC$ bolany üçin (*4-nji surat*)
 $\angle HB_1C = \angle HA_1C = 90^\circ$.

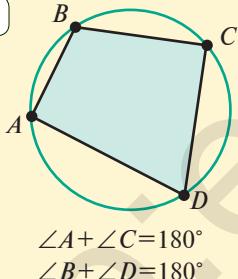
Onda $\angle HB_1C + \angle HA_1C = 180^\circ$. Dörtnurçlugin içki burçlarynyň jemi 360° bolany üçin:

$$\angle B_1CA_1 + \angle B_1HA_1 = 180^\circ.$$

Diýmek, A_1HB_1C dörtnurçlugin daşyndan töwerek çyzmak mümkün.

Töweregiden çyzylan köpburçlugin depeleri töweregiden merkezinden deň uzaklykda ýatýandygyny üçin töweregiden merkezi köpburçlugin taraplarynyň orta perpendikulýarlarynda ýatýar (*5-nji surat*). Diýmek, töweregiden çyzylan köpburçlugin taraplarynyň orta perpendikulýarlary hökman bir noktada kesişmeli.

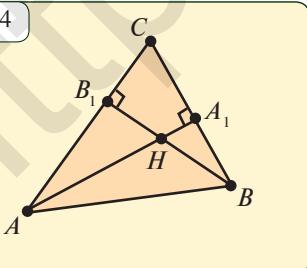
3



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

4



2-nji mesele. Esasyna geçirilen beýikligi 16 cm bolan deňýanly üçburçlugin radiusy 10 cm bolan töweregiden çyzylan. Üçburçlugin taraplaryny tapyň.

Cözülişi. ABC üçburçluguň daşyndan çzyylan töweregiň merkezi O nokat AC tarapыň orta perpendikuláry bolan BD beýiklikde ýatýar (*6-njy surat*). Onda,

$$OD = BD - OB = 16 - 10 = 6 \text{ (cm)}$$

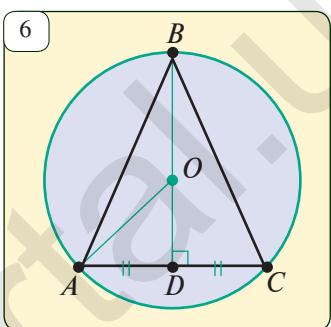
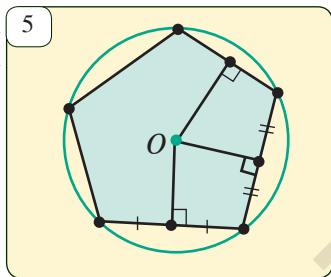
bolýar we Pifagoryň teoremasyna görä,

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}, AC = 2AD = 16 \text{ (cm)}.$$

Şonuň ýaly-da, gönüburçly ABD üçburçlukda

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \text{ (cm)}.$$

Jogaby: $8\sqrt{5}$ cm, $8\sqrt{5}$ cm, 16 cm.



?

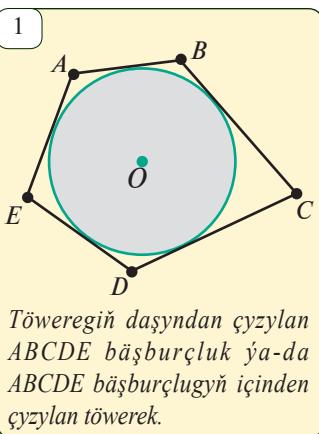
Meseleler we ýumuşlar

- 36.1. Eger köpburçluk töweregiň içinden çzyylan bolsa, onuň taraplary orta perpendikulárlary bir noktada kesişyändigini subut ediň.
- 36.2. Nähili üçburçluk töweregiň içinden çzyylan bolmagy mümkün? Dörtburçluk nähili?
- 36.3. $ABCDE$ bäsburçluk töweregiň içinden çzyylan bolsa, $\angle ACB = \angle AEB$ bolýan-dygyny subut ediň.
- 36.4. Katetleri 16 cm we 12 cm bolan gönüburçly üçburçluguň daşyndan çzyylan töweregiň radiusyny tapyň.
- 36.5. Radiusy 25 cm bolan töweregiň içinden bir tarap 14 cm bolan gönüburçluk çzyylan. Gönüburçluguň meýdanyny tapyň.
- 36.6. Radiusy 10 cm bolan töweregiň içinden çzyylan a) deň taraply üçburçluguň; b) kwadratyň; ç) deňyanly gönüburçly üçburçluguň taraplaryny tapyň.
- 36.7. Taraplary 16 cm, 10 cm we 10 cm bolan üçburçluguň daşyndan çzyylan töweregiň radiusyny tapyň.
- 36.8. Töweregiň içinden çzyylan $ABCDEF$ altyburçlukda $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$ bolsa, töweregiň merkeziniň AF tarapda ýatýandygyny subut ediň.
- 36.9. Islendik deňyanly trapesiya töweregiň içinden çyzylmagy mümkünligini subut ediň.
- 36.10. Deňyanly trapesiya çyzyň. Onuň daşyndan çzyylan töwerek guruň.

⌚ Gyzykly mesele

On alty ýaşly Galua (E.Galua — fransuz matematigi, 1811—1832) kolležde okap ýören wagtlarynda, oňa mugallymy bir sagadyň içinde üç meseläni çözüp bermegi sorapdyr. Galua çözüwi onçakly aňsat bolmadyk bu meseleleri 15 minutda çözüp, hemmäni haýran galdyrypdyr. Ynha, şu meselelerden biri. Ony siz hem çözjek boluň!

Mesele. Töweregiň içinden çzyylan dörtburçluguň dört tarapы a, b, c we d -ge deň. Onuň diagonallaryny tapyň.



Kesgitleme. Eger köpburçluguň ähli taraplary töwerege galtaşsa, onda köpburçluk töwerek köpburçluguň *içinden çizylan*, töwerek bolsa köpburçluguň *içinden çizylan* diýilýär (*1-nji surat*).

Islendik üçburçluguň içinden töwerek çizmek mümkünligi we bu töwerek merkezi üçburçluguň bissektrisalary kesişen nokatdadygy bilen 8-nji synpda tanşypdyňyz.

Eger köpburçluguň burçlarynyň sany üçden artyk bolsa, bu köpburçluguň içinden hemise töwerek çyzyp bolubermeýär. Meselem, kwadratdan tapawutly gönüburçluguň içinden töwerek çyzyp bolmaýar (*2-nji surat*).

Ýene 8-nji synp geometriýa kursundan mälim bolşy ýaly, dörtburçluguň içinden diňe we diňe garşylykly taraplarynyň jemi deň bolanda töwerek çizmek mümkün (*3-nji surat*).

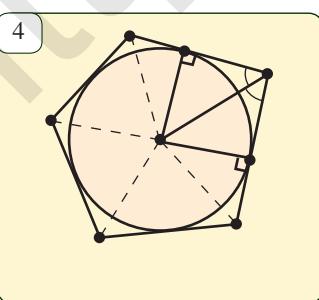
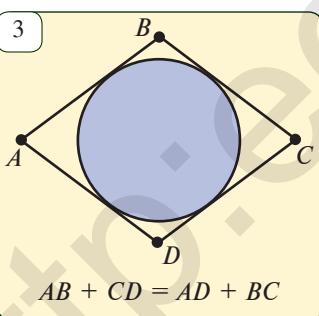
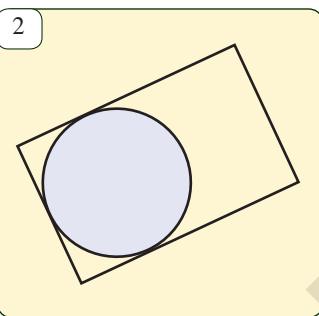
Töwerek köpburçluguň taraplarы töwerege galtaşany üçin töwerek merkezi şu köpburçluguň burçlarynyň bissektrisasynda ýatýár (*4-nji surat*). Diýmek, töwerek köpburçluk köpburçluguň bissektrisalary bir nokatda kesişyär.

Teorema. Eger r radiusly töwerek köpburçluguň meýdany S , ýarym perimetri p bolsa, $S = pr$ bolýar.

Subudy. Teorema subudyny töwerek köpburçluguň meýdany S altyburçluk üçin getirýäris. Töwerek merkezi O nokady köpburçluguň depeleri bilen utgaşdyryp, köpburçlugu üçburçluklara bölýäris. Bu üçburçluklaryň beýiklikleri r -e deň (*5-nji surat*). Onda,

$$\begin{aligned} S &= S_{AOB} + S_{BOC} + \dots + S_{FOA} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \dots + \frac{1}{2} FA \cdot r = \\ &= \frac{AB + BC + \dots + FA}{2} \cdot r = pr. \end{aligned}$$

Teorema subut edildi.

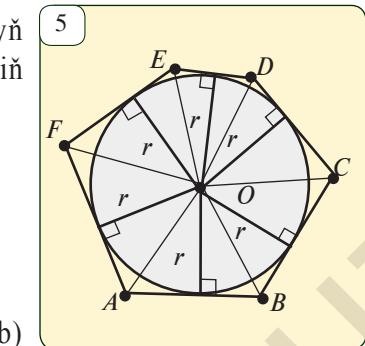




Mesele. Töweregiň daşyndan çyzylan dörtburçluguň meýdany 21 cm^2 -a, perimetri bolsa 7 cm -e deň. Töweregiň radiusyny tapyň.

Çözülişi. $S = pr$ formula görä,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{21}{3,5} = 6 \text{ (cm)}.$$



2 Meseleler we ýumuşlar

37.1. Taraply 6 cm bolan a) deň taraply üçburçluguň; b) kwadratyň içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

37.2. Radiusy 5 cm bolan töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluguň meýdany 18 cm^2 . Köpburçluk perimetreni tapyň.

37.3. 6-njy suratdaky dörtburçluklaryň perimetreni tapyň.

37.4. 7-nji suratdaky maglumatlar esasynda soralan kesimi tapyň.

37.5. Töweregiň daşyndan çyzylan parallelogram romb bolýandygyny subut ediň.

37.6. Gönüburçly üçburçluguň içinden çyzylan töweregiň radiusy katetleriň jemi bilen gipotenuzanyň tapawdynyň ýarysyna deňligini subut ediň.

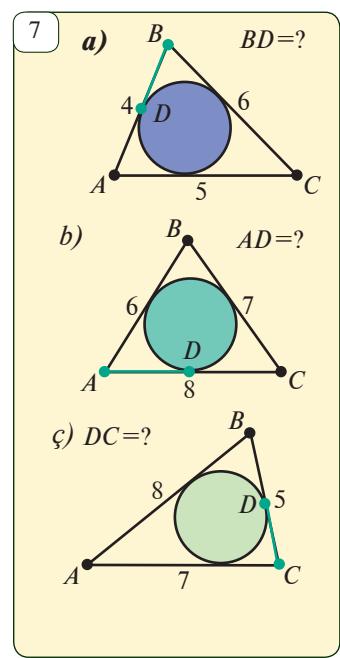
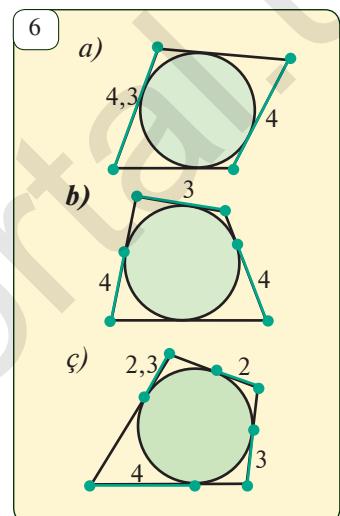
37.7. Töweregiň daşyndan deňyanly trapesiyanyň orta çyzygy onuň gapdal tarapyna deň bolýandygyny subut ediň.

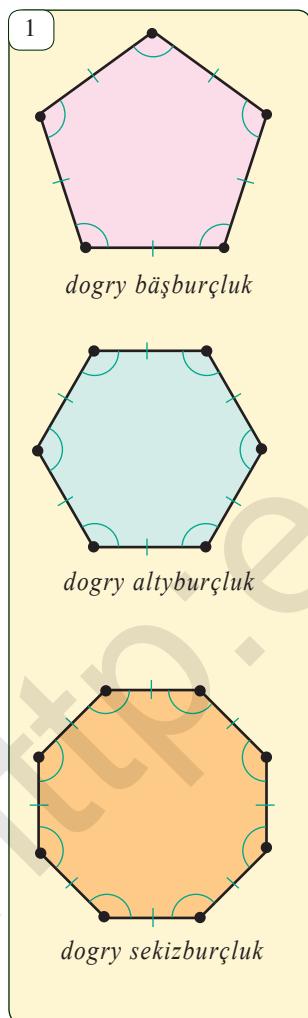
37.8. Esaslary 9 cm we 16 cm bolan deňyanly trapesiya töweregiň daşyndan çyzylan. Töweregiň radiusyny tapyň.

37.9*. $ABCD$ dörtburçluk O merkezli töweregiň daşyndan çyzylan. AOB we COD üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi dörtburçluguň meýdanynyň ýarysyna deňligini subut ediň.

37.10*. Töweregiň daşyndan deňyanly trapesiyanyň esaslary a we b bolsa, onuň beýikligi $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ -ge deň bolýandygyny subut ediň.

37.11*. Depeleri $ABCD$ dörtburçluguň bissektrisalary kesişen nokatlarda bolan $EFPQ$ dörtburçluguň daşyndan töwerek çyzmak mümkünligini subut ediň.





Ugrukdyryjy soraglar

1. Nähili şekillere köpburçluk diýilýär?
2. Köpburçlugsyň burçlary, goňşy taraplary, diagonallary diýip nämä aýdylýar?
3. Güberçek köpburçluk diýip nähili köpburçluga aýdylýar?
4. Güberçek köpburçlugsyň içki burçlary jemi baradaky teoremany aýdyň.

Kesgitleme. Hemme taraplary deň we hemme burçlary deň bolan güberçek köpburçluga *dogry köpburçluk* diýilýär.

Deň taraply üçburçluk, kwadrat dogry köpburçluga mysal bolýar. 1-nji suratda dogry başburçluk, altyburçluk we sekizburçluklar görkezilen.

Teorema. *Dogry n burçlugsyň her bir burçy*

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ\text{-a deň.}$$

Subudy. Dogry n burçlugsyň burçlarynyň jemi $(n-2) \cdot 180^\circ$ -a deň (8-nji synp). Diýmek, onuň her bir burçy $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ -a deň. *Teorema subut edildi.*

Mesele. Dogry $A_1A_2A_3A_4A_5$ başburçlukda A_1A_3 we A_1A_4 diagonallar deň bolýandygyny görkeziň (2-nji surat).

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — *dogry başburçluk*

$A_1A_3 = A_1A_4$

Çözülişi. Üçburçluklaryň deňliginiň *TBT* nyşanyna görä, $A_1A_2A_3$ we $A_1A_5A_4$ üçburçluklar özara deň. Hakykatdan hem, dogry köpburçlugsyň taraplary deň we burçlary deň bolany üçin,

$$A_1A_2 = A_1A_5, A_2A_3 = A_5A_4 \text{ we } \angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_5A_4.$$

Diýmek, $\Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_1A_5A_4$. Mundan

$$A_1A_3 = A_1A_4 \text{ bolýandygy gelip cykýar.}$$

Netije. Dogry başburçluguň ähli diagonallary özara deň.

?

Meseleler we ýumuşlar

38.1. Dogry bolmadyk köpburçluklara mysallar aýdyň we näme üçin dogry dälligini düşündiriň.

38.2. Aşakdaky tassyklamalardan doğrularny tapyň:
a) ähli taraplary deň bolan üçburçluk dogry bolýar;

b) ähli taraplary deň dörtburçluk dogry bolýar;

c) ähli burçlary deň dörtburçluk dogry bolýar;

d) ähli burçlary deň romb dogry bolýar;

e) ähli taraplary deň gönüburçluk dogry bolýar.

38.3. Eger a) $n=3$; b) $n=5$; ç) $n=6$; d) $n=10$;

e) $n=18$ bolsa, dogry n burçluguň burçlaryny tapyň.

38.4. Dogry n burçluguň daşky burçy nämä deň bolýar? Eger a) $n=3$; b) $n=5$; ç) $n=6$; d) $n=10$; e) $n=12$ bolsa, dogry n burçluguň daşky burçuny tapyň.

38.5. Dogry n burçluguň her depesinden birden alınan daşky burçlarynyň jemi 360° -a deň bolýandygyny subut ediň.

38.6. Eger dogry köpburçluguň her bir burçy a) 60° ; b) 90° ; ç) 135° ; d) 150° bolsa, bu köpburçluguň taraplarynyň sanyny tapyň.

38.7. Dogry $ABCDEF$ altyburçluk berlen.

a) AC we BD diagonallaryň deňligini subut ediň.

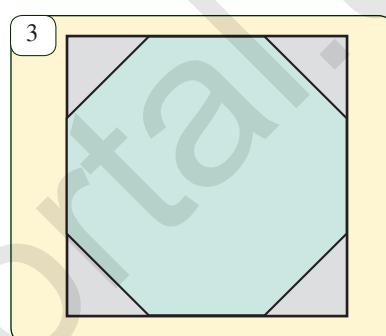
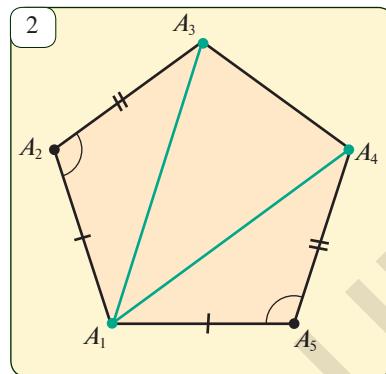
b) ACE — dogry üçburçluk bolýandygyny subut ediň.

d) AD , BE we CF diagonallaryň özara deňligini subut ediň.

38.8. Tarapy 10 cm bolan dogry a) başburçluguň; b) altyburçluguň; ç) sekizburçluguň; d) on ikiburçluguň; ä) on sekizburçluguň kiçi diagonalyny hasaplaň.

38.9. Dogry dörtburçluguň kwadratdygyny subut ediň.

38.10*. Kwadratyň tarapy a -ga deň. Onuň taraplaryna her bir depesinden başlap diagonalyny ýarysyna deň kesimler goýuldy. Netijede, 3-nji suratda görkezilen sekizburçluk emele geldi. Onuň görünüşini anyklaň we meýdanyny tapyň.

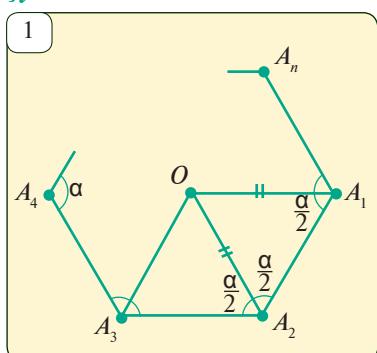




Ugrukdyryjy soraglar

1. Nähili köpburçluga töwerekinden çyzylan köpburçluk diýilýär?
2. Nähili köpburçluga töwerekinden daşyndan çyzylan köpburçluk diýilýär?
3. Islendik köpburçluk töwerekinden (daşyndan) çyzylan bolmagy mümkünmi?

Teorema. *Islendik dogry köpburçlugyň hem içinden, hem daşyndan töwerek çyzmak mümkün.*



Subudy. Aýdaly, $A_1A_2 \dots A_n$ — dogry köpburçluk, $O - A_1$ we A_2 burçlarynyň bissektrisalarynyň kesişme nokady bolsun. Bu dogry köpburçlugyň burçuny α bilen belgiläliň.

1. $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$ bolýandygyny subut edýäris (*1-nji surat*). Burcuň bissektrisalarynyň kesgitlemesine görä,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Diýmek, A_1OA_2 — deňyanly üçburçluk. Mundan, $OA_1=OA_2$ gelip çykýar. ΔA_1A_2O we ΔA_3A_2O üçburçluklarynyň deňliginiň TBT nyşanyna görä deň, çünkü $A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — tarap umumy hem-de

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

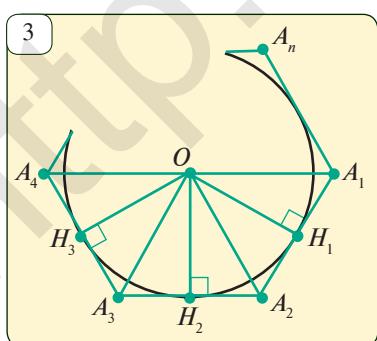
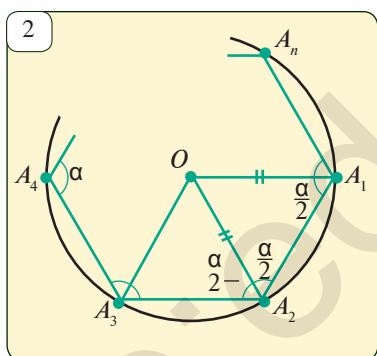
Şonuň üçin $OA_3=OA_1$. Edil şeýle çemeleşip, $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ we başga deňlikleriň dogry bolýanlygy görkezilýär.

Şeýdip, $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$, ýagny merkezi O we radiusy OA_1 bolan töwerek köpburçlugyň daşyndan çyzylan töwerekden ybarat bolýar (*2-nji surat*).

2. Yókarda aýdylanlara görä, deňyanly A_1OA_2 , A_2OA_3 , ... A_nOA_1 üçburçluklar deň. Şonuň üçin bu üçburçluklaryny O depesinden geçirilen beýiklikleri hem deň bolýar (*3-nji surat*):

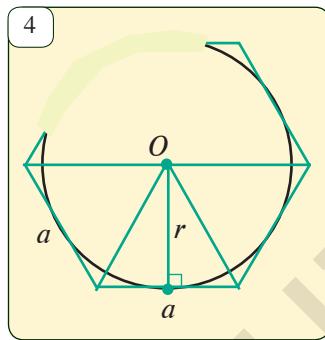
$$OH_1=OH_2=\dots=OH_n.$$

Diýmek, O merkezli we radiusy OH_1 kesime deň bolan töwerek köpburçlugyň ähli taraplaryna galtaşýar. Ýagny, bu töwerek köpburçlugyň içinden çyzylan töwerek bolýar. ***Teorema subut edildi.***

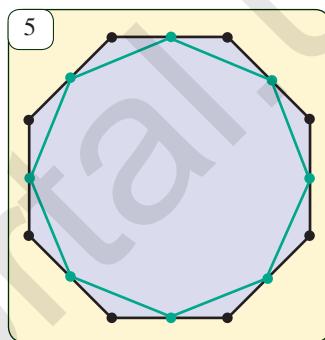


Netije. *Dogry köpburçlugyň içinden çyzylan we daşyndan çyzylan töwerekleriň merkezleri bir nokatda bolýar.*

Bu nokada dogry köpburçluguň *merkezi* diýilýär. Dogry köpburçluguň merkezini onuň iki goňşy depeleri bilen utgaşdyryán şöhlelerden ybarat burça (1-nji suratdaky A_1OA_2 , A_2OA_3 ... burçlar) onuň *merkezi burçy* diýilýär. Dogry köpburçluguň merkezinden taraplaryna geçirilen perpendikulýarlara (3-nji suratdaky OH_1 , OH_2 , ... kesimler) onuň *apofemasy* diýilýär.



Mesele. Eger dogry n burçluguň tarapy a , onuň içinden çyzylan töweregiň radiusy r bolsa, onuň meýdany $S = \frac{1}{2} nar$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň. (4-nji surat).



Subudy. Köpburçluguň ýarım perimetri $p = \frac{1}{2} na$ bolany üçin, töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluguň meýdanyny tapmagyň formulasy $S = pr-e$ görä, $S = \frac{1}{2} nar$ bolýar.

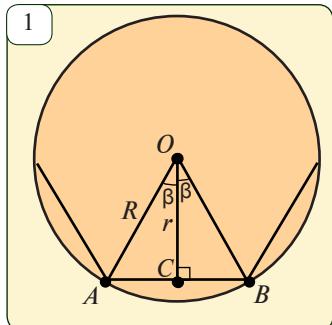
Meýdany we ýumuşlar

- 39.1. Meýdany 36 cm^2 bolan kwadratyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny tapyň.
- 39.2. Perimetri 18 cm bolan dogry üçburçluguň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny hasaplaň.
- 39.3. Dogry altyburçluguň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy onuň tarapyna deň bolýandygyny subut ediň.
- 39.4. Dogry köpburçluguň taraplarynyň ortalary başga bir dogry köpburçluguň depeleri bolýandygyny subut ediň (5-nji surat).
- 39.5. Dogry üçburçluguň içinden çyzylan töweregiň radiusy daşyndan çyzylan töweregiň radiusyndan iki esse kiçidigini subut ediň.
- 39.6*. Dogry köpburçluguň islendik iki tarapynyň orta perpendikulýarlary bir nokatda kesişyändigini ýa-da bir goni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.
- 39.7. Töweregiň içinden çyzylan dogry köpburçluguň bir tarapy töwerekden a) 60° ; b) 30° ; c) 36° ; d) 18° ; e) 72° -a deň duga bölyär. Köpburçluguň näçe tarapy bar?
- 39.8. Kagyzdan alty sany deň dogry üçburçluk gyrkyp alyň. Olardan peýdalanylп, dogry altyburçluk guruň. Taraplary deň bolan dogry altyburçluguň we üçburçluguň meýdanlarynyň gatnaşyglyny tapyň.

 ***Ugrukdyryjy soraglar***

Gönüburçly üçburçluguň ýiti burçuny a) sinusy; b) kosinusy; ç) tangensi diýip nämä aýdylýar?

Tarapy a_n -e deň bolan dogry n burçluguň daşyndan çyzylan töwerekgiň R radiusyny we içinden çyzylan töwerekgiň r radiusyny hasaplamak üçin formulalar tapýarys. Munuň üçin gönüburçly ACO üçburçlukdan peýdalanýarys. Bu ýerde O — köpburçluguň merkezi, C — köpburçluguň AB tarapynyň ortasy (*1-nji surat*). Onda,



$$\beta = \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OA = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}; \quad r = OC = \frac{AC}{\tan \beta} = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = OA \cdot \cos \beta = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Bu formulalardan peýdalanyп, käbir dogry köpburçluklaryň tarapy, içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslarynyň arasyndaky baglanyşyklary tapýarys.

1. Dogry üçburçluk üçin ($n=3$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad R = \frac{a_3}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a_3}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a_3}{2 \tan 60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}; \quad R = 2r.$$

2. Kwadrat üçin ($n=4$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ; \quad R = \frac{a_4}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a_4}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a_4}{2 \tan 45^\circ} = \frac{a_4}{2}; \quad R = r\sqrt{2}.$$

3. Dogry altyburçluk üçin ($n=6$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ; \quad R = \frac{a_6}{2 \sin 30^\circ} = a_6; \quad r = \frac{a_6}{2 \tan 30^\circ} = \frac{a_6}{\sqrt{3}}; \quad R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

 **Mesele.** Dogry n burçluguň a_n tarapyny şu köpburçluguň daşyndan çyzylan töwerekgiň R radiusu we içinden çyzylan töwerekgiň r radiusu arkaly aňladyň.

Çözülişi. $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ we $r = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$ formulalardan $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ we $a_n = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$

formulalary alarys. Hususan-da, $n=3$ bolsa, $a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$.

? Meseleler we ýumuşlar

40.1. Tarapy 15 cm bolan: a) dogry üçburçluguň; b) dogry dörtburçluguň; ç) dogry altyburçluguň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny hasaplaň.

40.2.2-nji suratda R radiusly töwereginiň içinden çyzylan kwadrat, dogry üçburçluk we dogry altyburçluk görkezilen. Depderiňze berlen jedwelleri göçürip, onuň boş gözeneklerini dolduryň (a_n — köpburçlugyň tarapy, P — köpburçlugyň perimetri, S — onuň meýdany, r — onuň içinden çyzylan töwereginiň radiusy).

40.3. Radiusy 8 cm bolan töwereginiň içinden çyzylan dogry on ikiburçlugyň bir depesinden çykan diagonallaryny tapyň.

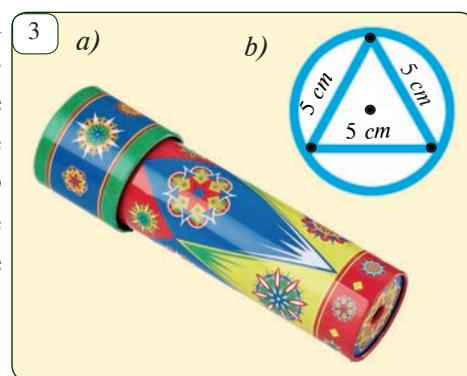
40.4. Töwereginiň içinden çyzylan dogry üçburçlugyň perimetri 24 cm . Şu töwereginiň içinden çyzylan kwadratyň tarapyny tapyň.

40.5. Silindr şeklärindäki agaçdan esasyň tarapy 20 cm bolan: a) kwadrat; b) dogry altyburçluk bolan prizma şeklärindäki sütün taýýarlamaly. Agajyň kese kesiginiň diametri azyndan näçe bolmaly?

2					
	<i>a)</i>	<i>b)</i>	<i>c)</i>		
	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.			28		
5.				16	

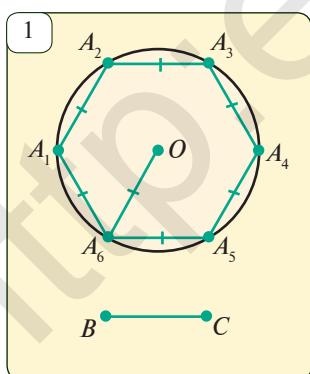
3					
	<i>a)</i>	<i>b)</i>			
	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.				10	
3.		2			
4.			5		
5.				6	

40.6.3-nji a suratda görkezilen, reňbe-reň nagyşlary tomaşa etmek bolýan “Kaleýdoskop” diýlip atlandyrlyýan oýnawaç size tanyş bolsa gerek. Oýnawaç turbadan we 3 sany aýna böleklerinden ybarat. 3-nji *b* suratda onuň kese kesigi görkezilen we ölçegleri berlen. Kaleýdoskopyň kese kesiginiň radiusyny tapyň.



I. Testler

- Aşakdaky köpburçluklaryň haýsysynyň içinden çyzylan töwerek ýok?**
 - A) Üçburçluguň; D) Kwadratdan tapawutly rombuň;
 - B) Kwadratyň; E) Rombdan tapawutly gönüburçluguň.
- Aşakdaky köpburçluklaryň haýsysynyň daşyndan çyzylan töwerek ýok?**
 - A) Üçburçlukda; D) Kwadratdan tapawutly rombda;
 - B) Kwadratda; E) Rombdan tapawutly gönüburçlukda.
- Töweregىň içinden çyzylan ähli ABCD dörtnurçluklar üçin nädogry deňligi tapyň.**
 - A) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; D) $AB + CD = BC + AD$;
 - B) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; E) $\angle B + \angle D = 180^\circ$.
- Töweregىň daşyndan çyzylan ähli ABCD dörtnurçluklar üçin nädogry deňligi tapyň.**
 - A) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; D) $AB + CD = BC + AD$;
 - B) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; E) $AB - BC = AD - CD$.
- Taraplary 5 cm we 12 cm bolan gönüburçluguň daşyndan çyzylan töweregىň radiusyny tapyň.**
 - A) 6 cm; B) 6,5 cm; D) 7 cm; E) 7,5 cm.
- Dogry 24 burçluguň içki burçuny tapyň.**
 - A) 120° ; B) 135° ; D) 150° ; E) 165° .
- Her bir daşky burçy 60° bolan dogry köpburçluguň içki burçlarynyň jemini tapyň.**
 - A) 540° ; B) 360° ; D) 90° ; E) 720° .

**II. Gurmaga degişli meseleler.**

1. Tarapy berlen kesime deň dogry altyburçluk guruň. Munda dogry altyburçluguň daşyndan çyzylan töweregىň radiusy altyburçluguň tarapyna deňliginden we 1-nji suratdan peýdalanyň.

2. 2-4-nji suratlardaky maglumatlardan peýdalanyp, berlen töweregىň içinden çyzylan a) dogry üçburçluk; b) kwadrat; ç) dogry sekizburçluk guruň.

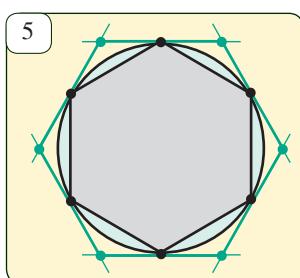
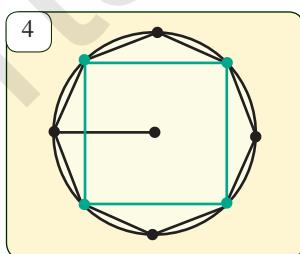
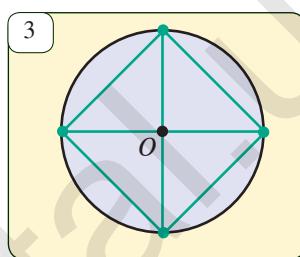
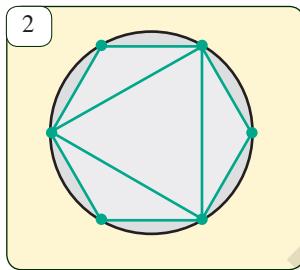
3. 5-nji suratdan peýdalanyp, berlen töweregىň daşyndan çyzylan dogry altyburçluk guruň (5-nji suratda görkezilen töweregىň daşyndan çyzylan altyburçluguň tarapları şu töweregىň içinden çyzylan dogry altyburçluguň depelerinden töwerege geçirilen galtaşmalarda ýatýar).

III. Hasaplamağa degişli meseleler.

- Dogry üçburçluguň, kwadratyň we dogry altyburçluklaryň taraplary bir-birine deň. Olaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
- Bir töweregiň içinden çzyylan dogry altyburçluguň we daşyndan çzyylan altyburçluguň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
- Dogry a) altyburçluguň; b) sekizburçluguň; ç) on ikiburçluguň parallel taraplarynyň arasyndaky aralyk 10 cm -e deň. Köpburçluguň tarapyny tapyň.
- Radiusy R bolan töwerege $A_1A_2\dots A_8$ dogry sekizburçluguň içinden çzyylan. $A_3A_4A_7A_8$ dörtburçluguň gönüburçlukdygyny subut ediň we onuň meýdanyny tapyň.
- Töweregiň daşyndan çzyylan gönüburçly üçburçluguň hipotenuzasy şu töwerege galtaşma nokadynda 4 cm we 6 cm uzynlykdaky kesimlere bölünýär. Üçburçluguň meýdanyny tapyň.
- Dogry onburçluguň bir depesinden çykan iň uly we iň kiçi diagonallarynyň arasyndaky burçy tapyň.

IV. Özünizi synaň (nusga barlag işi).

- Katetleri 10 cm we 24 cm bolan gönüburçly üçburçluguň içinden çzyylan we daşyndan çzyylan töwerekleriň radiuslaryny tapyň.
- Radiusy 5 cm bolan töweregiň daşyndan çzyylan rombuň bir burçy 150° -a deň. Rombuň a) perimetrini; b) diagonallaryny; ç) meýdanyny tapyň.
- Tarapy 4 cm bolan dogry altyburçluguň bir depesinden çykan diagonallaryny tapyň.
- (Goşmaça). Radiusy 3 cm bolan töweregiň içinden çzyylan dogry altyburçluguň we dogry üçburçluklaryň meýdanlarynyň tapawudyny tapyň.



Taryhy maglumatlar. Islendik dogry köpburçlugu hem sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde gurup bolubermeýär. Muny 1801-nji ýylda nemes matematigi Karl Gauss (1777-1855) algebraik usulda subut edipdir. Ol eger n sanyň $2^m p_1 p_2 \dots p_n$ ýáýylmasydaky p_1, p_2, \dots, p_n dürli düýp sanlar diňe $2^{2^k} + 1$ görnüşinde bolsa dogry n burçlugu sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde gurmak mümkindigini subut edipdir. Bu ýerde m we k otrisatel bolmadyk bitin sanlar.



Ugrukdyryjy maşk

1. Adatda turba böleginiň kese kesigi töwerekden ybarat bolýar. Ince ýüpi bir ujundan başlap, turba bir gezek oraň. Bir gezek oramaga giden ýüpüň bölegi turbanyň kese kesigi, ýagny töweregiň uzynlygy bolýar. Ony 1-nji suratda görkezilişi ýaly edip çyzgyjyň kömeginde ölçäň.
2. Ýokardaky usul bilen turbanyň kese kesiginiň diametrini anyklaň.
3. Anyklanan töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny hasaplaň.
4. Ýokarda getirilen ölçeg we hasaplama işlerini ýene birnäçe dürli ölçügdäki turba bölekleri üçin hem ýerine ýetirip, töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny tapyň.
5. Maşk netijesine görä, töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine gatnaşygy barada nähili netije çykarmak mümkün?

Teorema. *Töweregiň uzynlygynyň töweregiň diametrine gatnaşygy töweregiň radiusyna bagly däl, ýagny islendik töwerek üçin bu gatnaşyk hemişelik sandyr.*

Subudy. Iki erkin töwerek alýarys. Olaryň radiuslary R_1 we R_2 , uzynlyklary bolsa degişlilikde C_1 we C_2 bolsun. $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ deňligi subut etmelidir. Iki töweregiň hem içinden dogry n -burçlugu çyzýarys. Olaryň perimetrlерini degişlilikde P_1 we P_2 diýip belgiläliň. Onda,

$$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, P_2 = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ bolany üçin } \frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2} (*) \text{ bolýar.}$$

Bu deňlik islendik n üçin dogry. n sany barha ulaldysa, berlen töweregiň içinden çyzylan n -burçluguň perimetri P_1 şu töweregiň uzynlygy C_1 -e barha ýakynlaşýar. Şular ly P_2 hem C_2 -ä barha ýakynlaşýar.

Sonuň üçin $\frac{P_1}{P_2}$ gatnaşyk $\frac{C_1}{C_2}$ gatnaşyga deň bolýar (onuň doly subudy matematikanyň ýokary basgańçaklarynda öwrenilýär). Şeýdip, (*) deňlikden $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, mundan bolsa $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ deňlik gelip çykýar. *Teorema subut edildi.*

Töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny grek elipbiýiniň π harpy bilen belgilemek kabul edilen (“ pi ” diýlip okalýar). Töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine gatnaşygyny “ π ” harpy bilen belgilemegi beýik matematik Leonard Eýler (1707—1783) ylma girizipdir. Grekçede “töwerek” sözi şu harp bilen başlanýar. π irrasional san bolup, amalyétde onuň 3,1416-a deň bolan ýakynlaşan bahasyndan peýdalanylýar.

Şeýlelikde, $\frac{C}{2R} = \pi$. Bu deňlikden radiusy R -e deň töweregiň uzynlygy üçin $C=2\pi R$ formulany alarys.

 **Mesele.** Tarapy 6 cm bolan dogry üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

Çözülişi. Dogry üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapmagyň formulasы $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ -e görä, $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (cm). Indi, töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasындан

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm).} \quad \text{Jogaby: } 4\pi\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Meseleler we ýumuşlar

42.1. Nähili san π bilen belgilenýär? Radiusy R -e deň töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasындан peýdalanyп, jedweli dolduryň ($\pi \approx 3,14$ diýip hasaplaň).

C			82	18π	6,28	
R	4	3			0,7	101,5

42.2. Eger töweregiň radiusy a) 3 esse artsa; b) 3 cm-e oshsa; d) 3 esse kemelse; e) 3 cm-e kemelse, töweregiň uzynlygy näçä üýtgar?

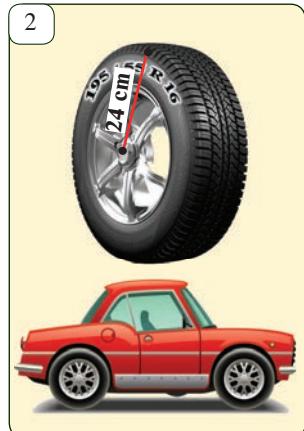
42.3. Eger Yer şarynyň ekwatorynyň 40 milliondan bir bölegi 1 m-e deň bolsa, Yer şarynyň radiusyny tapyň.

42.4.a) Tarapy a -ga deň bolan dogry üçburçlugyň; b) katetleri a we b bolan gönüburçly üçburçlugyň; ç) esasy a we gapdal tarapy b bolan deňyanly üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

42.5.a) Tarapy a -ga deň kwadratyň; b) gitotenuzasy c -ge deň bolan deňyanly gönüburçly üçburçlugyň; ç) gitotenuzasy c , ýiti burçy a bolan gönüburçly üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

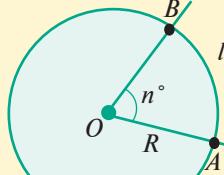
42.6. Teplowoz 1413 m ýol ýöredи. Munda onuň tigiri 300 gezek aýlandy. Teplowozыň tigiriniň diametrini tapyň.

42.7. Yeñil awtomobiliň tigiriniň töwereginiň radiusy 24 cm-e deň. Awtomobil 100 km ýol ýöreсе, onuň tigiri näçe gezek aýlanar (2-nji surat)?



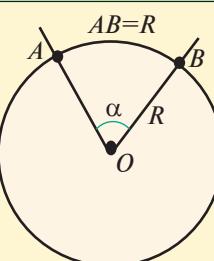
TÖWEREGIŇ DUGASYNYŇ UZYNLYGY. BURCUŇ RADIAN ÖLCEGI

1



$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

2



$$\alpha = 1 \text{ radian} \approx 57^\circ 17' 45''$$

1. n° -ly merkezi burç direlyän duganyň uzynlygy.

Aýdaly, radiusy R -e deň bolan töwerekde n° -ly AOB merkezi burç berlen bolsun (*1-nji surat*). Munda töweregini AOB merkezi burça direlyän AB dugasynyň gradus ölçegine n° ýa-da n° -ly duga diýilýändigini ýatladyr.

Radiusy R -e deň bitin töwerek, ýagny ölçegi 360° bolan duganyň uzynlygy $2\pi R$ -e deň bolany üçin,

$$1^\circ\text{-ly duganyň uzynlygy } \frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ} \text{ -e deň.}$$

Onda, n° -ly duganyň uzynlygy $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ formula bilen anyklaňyar (*1-nji surat*).

2. Burcuň radian ölçügi.

Burcuň gradus ölçegi bilen bir hatarda onuň radian ölçegi hem ulanylýar (*2-nji surat*).

Töweregini dugasynyň uzynlygynyň radiusa gatnaşy-gyny ýokardaky formula esasan: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$ -a deň.

Diýmek, töweregini dugasynyň uzynlygynyň radiusyna gatnaşygy diňe şu duga direlyän merkezi burcuň ululygyna bagly eken. Bu häsiyetden peýdalanyp, burcuň radian ölçegi hökmünde edil şu gatnaşygy alýarys:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ.$$

Adatda, radian sözi ýazylmaýar. Meselem: 5 radianыň ýerine 5 diýip ýazylýar. Bir radian $\frac{180^\circ}{\pi}$ gradusa deň: $1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Burcuň gradus ölçeginden radian ölçegine geçmek üçin

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

formuladan peýdalanylýar.

Şeýlelikde, n° -ly burcuň radian ölçegini tapmak üçin onuň gradus ölçegini $\frac{\pi}{180^\circ}$ -a köpeltmek ýeterli eken. Hususy ýagdaýda, 180° -ly burcuň radian ölçegi π -ge deň, 90° -ly, ýagny goni burcuň radian ölçegi $\frac{\pi}{2}$ -e deň bolýar.

α radiana deň merkezi burça degişli dugasynyň uzynlygy $l = \alpha R$ formula bilen hasaplanýar.

 **Mesele.** Iki burçy degişlilikde 30° we 45° bolan üçburçlugsyň burçlarynyň radian ölçeglerini tapýň.

Çözülişi. Üçburçlugsyň 30° -ly burçunyň radian ölçügi $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$, 45° -ly burçunyň radian ölçügi $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. Üçburçlugsyň içki burçlarynyň jemi 180° -a, ýagny π -ge deňligi baradaky teorema esasan üçburçlugsyň üçünji burçunyň radian ölçegini tapýarys

$$\pi \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Jogaby: $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{4}$ we $\frac{7\pi}{12}$.

Meseleler we ýumuşlar

43.1. Radiusy 6 cm bolan töwerekgiň gradus ölçügi a) 30° ; b) 45° ; c) 90° ; d) 120° bolan dugasynyň uzynlygyny tapýň.

43.2. a) 40° ; b) 60° ; c) 75° -a deň burcuň radian ölçegini tapýň.

43.3. a) $1,2$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$ radiana deň burcuň gradus ölçegin tapýň.

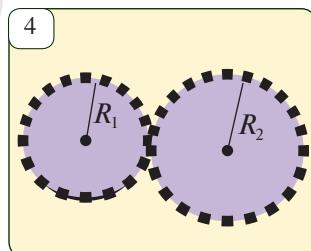
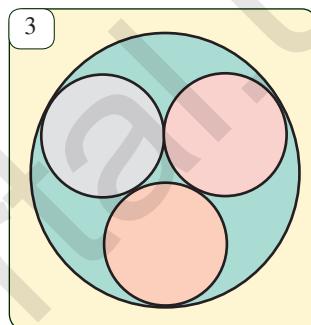
43.4. Eger töwerekgiň radiusy 5 cm bolsa, onuň a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{2\pi}{5}$; c) $\frac{3\pi}{4}$ radiana deň merkezi burçy direlyän duganyň uzynlygyny tapýň.

43.5. Radiusy 12 cm bolan töwerekgiň içinden ABC üçburçluk çyzylan. Eger a) $\angle A=30^\circ$; b) $\angle A=120^\circ$ bolsa, A nokadý öz içine almaýan BC duganyň uzynlygyny tapýň.

43.6. Töwerekgiň deň hordalary töwerekden deň dugalary bölýändigini subut ediň.

43.7*. İki töwerek bir-biriniň merkezinden geçýär. Bu töwerekleriň umumy hordasy iki töwerekden hem bölünen dugalaryň uzynlyklarynyň gatnaşygyny tapýň.

43.8*. Radiuslary deň bolan üç töwerek bir-birine daşardan we radiusy R -e deň bolan töwerege içersinden galtaşýar (*3-nji surat*): a) töwerekleriň radiusyny tapýň; b) boýalan şekili çäkleýän dugalaryň uzynlyklarynyň jemini tapýň.

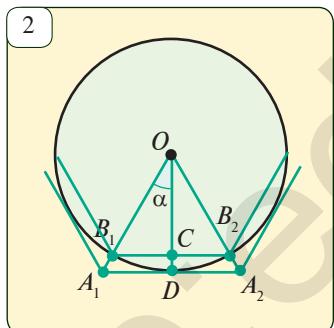
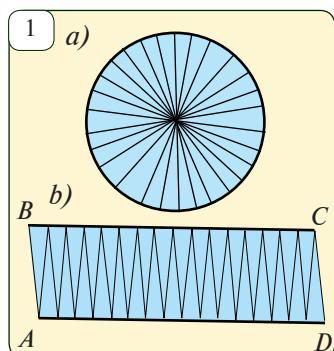


Gzykly mesele

4-nji suratda görkezilen iki dişli tigirler bir-birine “dişledilen”. Tigirleriň radiusy R_1 we R_2 . Birinji tigir n gezek aýlananda ikinji tigir näçe gezek aýlanar?

Kesgitleme. Tekizligiň berlen O nokadyndan berlen R aralykdan uly bolmadyk aralykda ýatýan ähli nokatlaryndan düzülen şekil *tegelek* diýlip atlandyrylyar.

Munda O nokat tegelegiň merkezi, R bolsa tegelegiň radiusy diýlip atlandyrylyar. Şu tegelegiň araçägi merkezi O nokatda, radiusy bolsa R -e deň bolan töwerekden ybarat bolýar.



Ugrukdyryjy maşk

Bir list kagyza ýogyn çyzyk bilen töwerek çyzyň we 1-nji a suratdaky ýaly, onuň birnäçe diametrlerini geçirip, tegelegi deň böleklerе bölүн. Soň bu bölekleri gyýyp alyň we 1-nji b suratda görkezilişi ýaly ýygyp, F şekil alyň. Eger tegelek islendikče köp deň böleklerе bölünip, bu bölekler suratda görkezilen tertipde ýygylsa, netijede gönüburçluga örän ýakyn F şekil peýda bolýar.

a) F çekilin gönüburçluk şekiline örän ýakynlygyny hasaba alyp, onuň AB tarapy takmynan nämä deň bolýandygyny tapyň (görkezme: AB tarapy tegelegiň radiusy bilen deňeshdiriň).

b) F çekilin BC “tarapy” takmynan nämä deň bolýar? (Görkezme: BC we AD taraplar ýogyn çyzyk bilen çyzylanyna, ýagny töweregىň dugajyklaryndan ybaratdygyna üns beriň)

c) F çekilin $ABCD$ gönüburçluk şekilinе örän ýakyn bolýandygyny hasaba alyp, onuň meýdanyny takmynan hasaplanya. F çekilin meýdany tegelegiň meýdanyна örän ýakyndygyny üçin, tegelegiň meýdany barada netije çykaryň.

Teorema. Radiusy R -e deň bolan tegelegiň meýdany $\pi R^2 - a$ deň.

Subudy. Radiusy R we merkezi O nokatda bolan töwerege garaýarys.

Töweregىň daşyndan çyzylan $A_1A_2 \dots A_n$ we içinden çyzylan $B_1B_2 \dots B_n$ dogry n burçluklaryň meýdanlary degişlilikde S'_n we S''_n bolsun (2-nji surat).

A_1OA_2 we B_1OB_2 üçburçluklar meýdanlaryny tapýarys:

$$S'_{A_1OA_2} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot OD = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot R; \quad S''_{B_1OB_2} = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot OC = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot R \cos\alpha = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot R \cos\alpha.$$

$$\text{Onda, } S''_n = n \cdot \frac{1}{2}AA_1 \cdot R = \frac{1}{2}P_n R, \quad S'_n = n \cdot \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot R \cos\alpha = \frac{1}{2}P_n R \cos\alpha \quad (1)$$

Bu ýerde P'_n we P''_n degişlilikde $A_1A_2...A_n$ we $B_1B_2...B_n$ köpburçluklaryň perimetleri. $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ bolany üçin n -iň ýeterlige uly bahalarynda cosa-nyň bahasy birden, P_n we P'_n -leriň bahalary töwüregiň uzynlygyndan, ýagny $2\pi R$ -den islendikçe az tapawutlanýar. Onda, (1) deňliklere görä, n -iň ýeterlige uly bahalarynda köpburçluklaryň meýdany πR^2 -e barha ýakynlaşýar. Mundan, tegelegiň meýdany üçin $S = \pi R^2$ formula gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

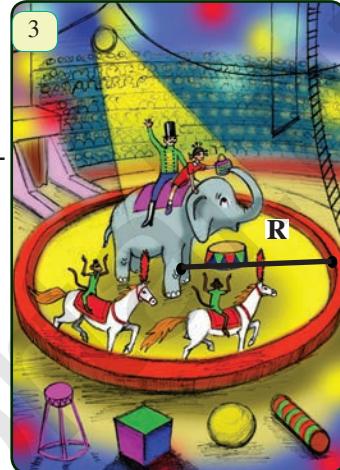
 **Mesele.** Sirk arenasynyň töwüreginiň uzynlygy 41 m. Arenanyň radiusyny we meýdanyny tapyň.

Çözülişi. 1) Töwüregiň uzynlygyny tapmagyň formulasyndan radiusy tapýarys (3-nji surat):

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{41}{2 \cdot 3,14} \approx 6,53 \text{ (m).}$$

2) Tegelegiň meýdanyny hasaplamagyň formulasyndan arenanyň meýdanyny tapýarys: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 6,53^2 \approx 133,84 \text{ (m}^2)$.

Jogaby: $R \approx 6,53 \text{ m}; S \approx 133,84 \text{ m}^2$.



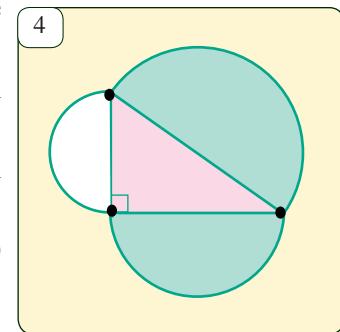
Meseleler we ýumuşlar

44.1. Tegelegiň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny esaslandyrıň.

44.2. Radiusy R -e deň bolan tegelegiň S meýdanyny tapmagyň formulasyndan peýdalanyň jedweli dolduryň ($\pi = 3,14$ diýip alyň).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

44.3. Eger tegelegiň radiusy a) k esse artsa; b) k esse kemelse, tegelegiň meýdany nähili üýtgär?



44.4. Tarapy 5 cm bolan kwadratyň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanyny tapyň.

44.5. Tarapy $3\sqrt{3}$ cm bolan dogry üçburçluguň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanyny tapyň.

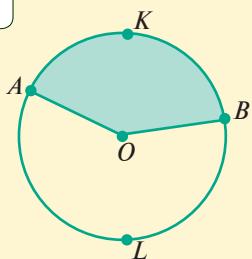
44.6. Radiusy R bolan tegelekden iň uly kwadrat gyrkyp alyndy. Tegelegiň galan böleginiň meýdanyny tapyň.

44.7. Taraplary 6 cm we 7 cm bolan gönüburçluguň daşyndan çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

44.8. Tarapy 10 cm we ýiti burçy 60° bolan rombuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

44.9*. Gönüburçly üçburçluguň taraplaryny diametr edip ýarym tegelekler çyzylan. Gipotenuza çyzylan ýarym tegelegiň meýdany katetlere çyzylan ýarym tegelekleriň meýdanlarynyň jemine deň bolýandygyny görkeziň (4-nji surat).

1



Kesgitleme. Tegelegiň dugasyny we bu duganyň ahyrlaryny tegelegiň merkezi bilen utgaşdyryan iki radiusy bilen çäklenen bölegine **sektor** diýilýär. Sektoryň araçägi bolan duga **sektoryň dugasy** diýilýär.

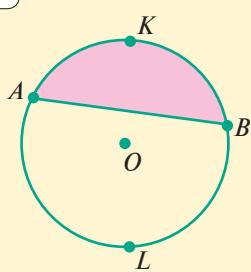
1-nji suratda AKB we BLA dugaly iki sektor görkezilen (olardan birinjisi boýalan).

Radiusy R -e we dugasynyň gradus ölçegi n° -a deň bolan sektoryň S meýdanyny tapmak üçin formula getirip çykarýarys. Dugasy 1° -a deň sektoryň meýdany tegelegiň (ýagny dugasy 360° -a deň sektor) meýdanynyň $\frac{1}{360}$ -bölegine deň bolany üçin, dugasy n gradus bolan sektoryň meýdany

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \quad \text{ýa-da} \quad S = \frac{1}{2} R \cdot l$$

formula arkaly tapylýar. Bu ýerde $l = n^\circ$ -ly sektoryň dugasynyň uzynlygy.

2



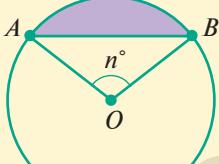
Kesgitleme. Tegelegiň dugasy we bu duganyň ahyrlaryny utgaşdyryan hordasy bilen çäklenen bölegine **segment** diýilýär.

2-nji suratda AKB we BLA dugaly iki segment şekillendirilen (olardan birinjisi boýalan). Ýarym tegelekden tapawutly segmenttiň S meýdany

$$S = S_{\text{sektor}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

formula boýunça hasaplanýar (3–4-nji suratlara garaň).

3



$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n - S_{AOB}$$

Mesele. Duganyň gradus ölçegi 72° bolan sektoryň meýdany 45π -ge deň. Sektoryň radiusyny tapyň.

Çözülişi. Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyna görä,

$$\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi.$$

$$\text{Mundan, } R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225, \text{ diýmek, } R = 15.$$

Jogaby: 15.

Meseleler we ýumuşlar

- 45.1. Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyny getirip çykaryň.
- 45.2. Segmentiň meýdanyny tapmagyň formulasyny getirip çykaryň.
- 45.3. Dugasynyň gradus ölçegi a) 30° ; b) 45° ; d) 120° ; e) 90° we radiusy 7 cm bolan sektoryň we segmentiň meýdanlaryny tapyň.
- 45.4. 5-nji suratda tarapy a)-ga deň bolan dogry üçburçluk, kwadrat we dogry altyburçluk görkezilen. Boýalan şekillereriň meýdanyny tapyň. Munda sektorlaryň radiuslary köpburçluguň tarapynyň ýarysyna deň.
- 45.5. Nyşanda radiuslary 1, 2, 3, 4-e deň bolan dört töwerek bar. Iň kiçi tegelegiň meýdanyny we her bir halkanyň meýdanyny tapyň (6-njy surat).

45.6. Radiusy 10 cm-e deň bolan tegelekde radiusa deň horda geçirilen. Emele gelen segmentleriň meýdanyny hasaplaň.

45.7. Radiuslary 15 cm dan bolan iki tegelegiň merkezleriniň arasyndaky aralyk 15 cm. Tegelekleriň umumy böleginiň meýdanyny tapyň.

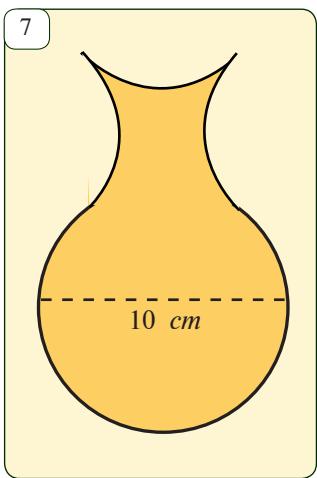
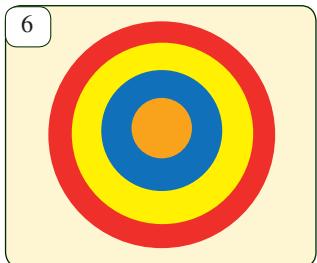
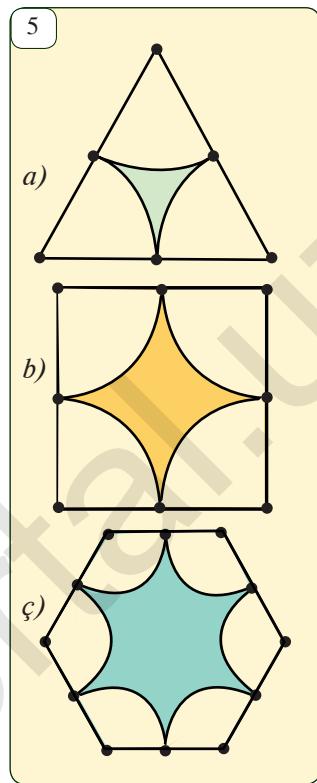
45.8. Radiusy 10 cm bolan tegelegiň içinden we daşyndan çyzylan dogry onikiburçluklaryň meýdanyny hasaplaň. Netijeleri tegelegiň meýdany bilen deňleşdiriň.

Gyzykly mesele

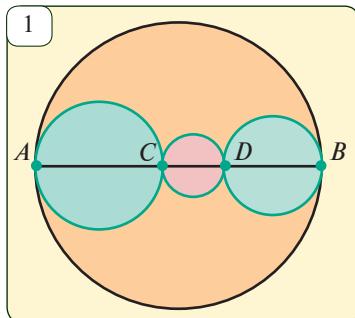
7-nji suratda görkezilen güldanyň suratyny:

- a) üç gönü çyzyk bilen şeýle dört bölege bölüň, ýagny olardan gönüburçluk ýygmak mümkün bolsun;
- b) iki gönü çyzyk bilen şeýle üç bölege bölüň, ýagny olardan kwadrat ýygmak mümkün bolsun.

 **Tarihy maglumatlar.** Uzak wagtlaryň dowamynda dünýäniň köp matematikleri "tegelegiň kwadraturasy" diýip at alan aşakdaky meseläni çözägeçtiýärler: sirkulyň we çyzygyjyň kömeginde meýdany berlen tegelegiň meýdanya deň bolan kwadrat gurmak. Diňe XIX asyryň ahyrynda bu mesele çözüwe eýe dälligi subut edilipdir.



1-nji mesele. C we D nokatlar tòwerek AB diametrini üç AC , CD we DB keşimlere bölýär. AC , CD we DB diametrlı tòwerekleriň uzynlyklarynyň jemi AB diametrlı tòwerek AB uzynlygyna deň bolýandygyny subut ediň (1-nji surat).



Çözülişi. Tòwerek AB uzynlygyny tapmagyň formulasyndan peýdalanyп, AC , CD we DB diametrlı tòwerekleriň C_1 , C_2 , C_3 uzynlyklarynyň jemini tapýarys:

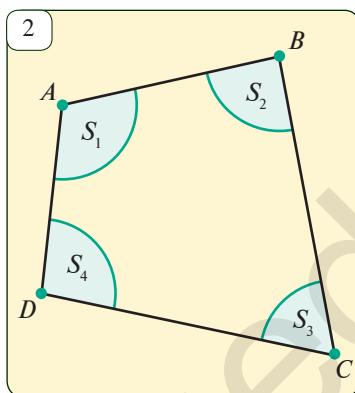
$$C_1 + C_2 + C_3 = AC \cdot \pi + CD \cdot \pi + DB \cdot \pi = \pi(AC + CD + DB).$$

$AC + CD + DB = AB$ we AB diametrlı tòwerek AB uzynlygy $AB \cdot \pi$ -ge deň bolany üçin

$$C_1 + C_2 + C_3 = AB \cdot \pi.$$

Şu deňligi subut etmek talap edilipdi.

2-nji mesele. ABCD dörtburçluguň depelerini merkez edip birmeňzeş radiusly sektorlar gurlan (2-nji surat). Bu sektorlardan islendik ikisi umumy nokada eýe däl hem-de ählisiniň radiusy 1 cm. Sektorlaryň meýdanlarynyň jemini tapyň.



Çözülişi. 1) Dörtburçluguň A, B, C, D burçlary degişlilikde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bolsun. Onda, köpburçluguň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema görä,

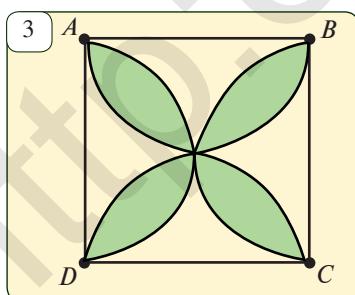
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ.$$

2) Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyna görä ($R = 1 \text{ cm}$),

$$S_1 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_1, \quad S_2 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_2, \quad S_3 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_3, \quad S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_4. \quad (1)$$

3) (1) deňlikleriň degişli taraplaryny goşýarys. Onda, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\pi}{360^\circ} 360^\circ = \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Jogaby: $\pi \text{ cm}^2$.



?

Meseleler we ýumuşlar

46.1. Perimetri 1 m bolan kwadrat we uzynlygy 1 m bolan tòwerek berlen. Şu tòwerek bilen çäklenen tegelegiň meýdany bilen kwadratyň meýdanyny deňediriň.

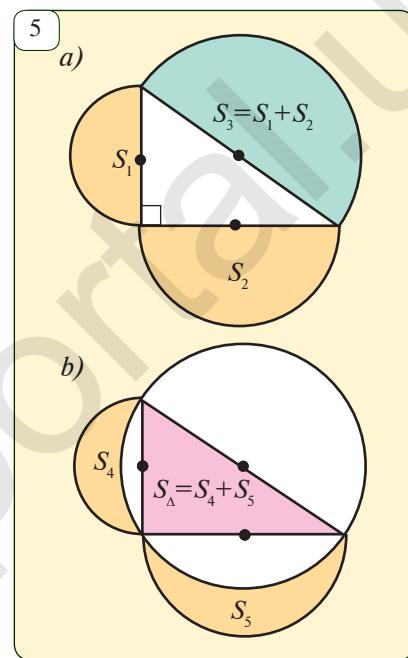
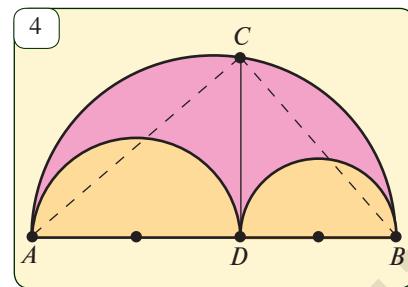
46.2. Radiusy 8 cm bolan tegelekden 60° -ly sektor gyrkyp alnan. Tegelegiň galan böleginiň meýdanyны тапын.

46.3. Diagonallary 6 cm we 8 cm bolan rombuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny hasaplaň.

46.4.3-nji suratda boýalan şekiliň meýdanyny tapyň. Onda $ABCD$ — kwadrat, $AB = 4 \text{ cm}$.

46.5*.4-nji suratda “Arhimediň pyçagy” diýilýän şekil boýalan. Onuň meýdany $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň (munda, $\angle ACB = 90^\circ$ we $CD^2 = AD \cdot DB$ -dan peýdalanyň).

46.6.Eger $AD = 6 \text{ cm}$, $BD = 4 \text{ cm}$ bolsa, 4-nji suratda boýalan şekiliň meýdanyny we perimetrinini (ony gurşap duran dugalaryň uzynlygynyň jemini) tapyň.

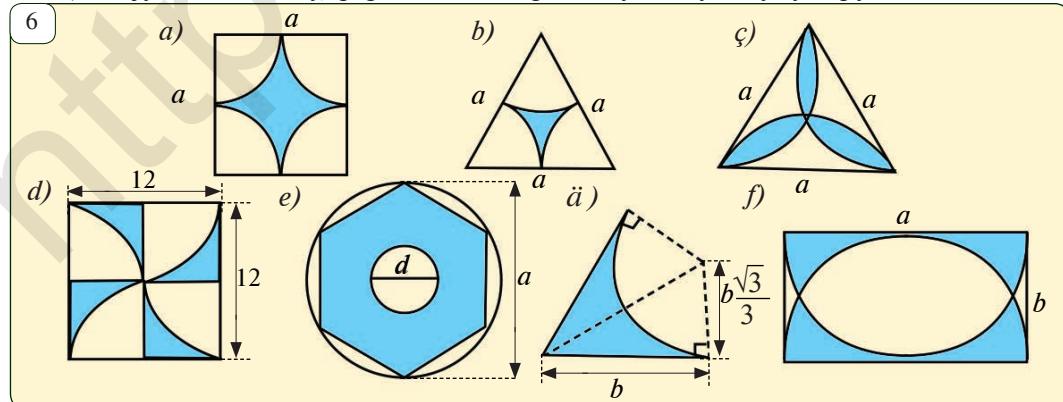


Taryhy maglumat. Gippokratyň aýjagazlary.
a) Gippokratyň aýjagazy – iki töweregىň dugalary bilen çäklenen we aşakdaky häsiýete eýe bolan şekildir: eger töwerekleriň radiuslary we aýjagazyň dugalary direlýän horda berlen bolsa, aýjagaza deňdeş kwadrat gurmak mümkün.

Pifagoryň teoremasын ulyylasa, 5-nji a suratda görkezilen hipotenuza gurlan ýarym tegelegiň meýdany katetlere gurlan ýarym tegelekleriň meýdanlarynyň jemine deň bolýar (121-nji sahypadaky 44.9-njy meselä garaň). Şonuň üçin 5-nji b suratdaky aýjagazlaryň meýdanlarynyň jemi üçburçlugyň meýdanyna deň (pikirleniň!). Eger suratdaky üçburçlugyň ýerine deňyanly gönüburçly üçburçlugy alsak, emele gelen iki aýjagazdan her biriniň meýdany üçburçlugyň meýdanynyň ýarysyna deň bolýar. Tegelegiň kwadraturasy baradaky meseläni çözäge synanyşyp, grek matematigi Gippokrat (miladydan öňki V asyr) köpburçluk bilen deňdeş birnäçe hili aýjagazlary oýlap tapypdyr.

Gippokratyň aýjagazlarynyň doly jedweli diňe XIX–XX asyrlarda düzülipdir.

b) 6-njy suratda boýap görkezilen figuralaryň meýdanyny tapyň.



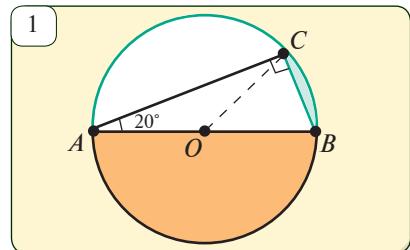
I. Testler

- 45 gradusly burcuň radian ölçegi nämä deň?
A. 1-e deň; B. $\frac{\pi}{2}$ -ä deň; D. $\frac{\pi}{4}$ -ä deň; E. $\sqrt{2}$ -ä deň.
- Radiusy 3 cm bolan töwerekgiň gradus ölçegi 150° bolan merkezi burç direlyän duganyň uzynlygyny tapyň.
A. $\frac{5\pi}{2}$ cm; B. $\frac{5\pi}{3}$ cm; D. $\frac{10\pi}{3}$ cm; E. $\frac{5\pi}{4}$ cm.
- Radiusy 6 cm bolan töwerekde $\frac{5\pi}{4}$ radiana deň merkezi burç direlyän duganyň uzynlygyny tapyň.
A. $\frac{15\pi}{2}$ cm; B. $\frac{5\pi}{6}$ cm; D. $\frac{4\pi}{3}$ cm; E. $\frac{5\pi}{2}$ cm.
- Tarapy 5 cm-e deň bolan kwadratyň daşyndan çyzylan töwerekgiň uzynlygyny tapyň.
A. $5\sqrt{2}\pi$; B. $\sqrt{2}\pi$; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 5π .
- Diametri 6-a deň tegelegiň meýdanyny tapyň.
A. 9π ; B. 6π ; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 12π .
- Dugasynyň gradus ölçegi 150° , radiusy 6 cm bolan tegelek sektoryň meýdanyny tapyň.
A. $15\pi \text{ cm}^2$; B. $6\pi \text{ cm}^2$; D. $30\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$; E. $24\pi \text{ cm}^2$.
- Dugasynyň uzynlygy 12 cm we radiusy 6 cm bolan tegelek sektoryň meýdanyny tapyň.
A. $15\pi \text{ cm}^2$; B. $6\pi \text{ cm}^2$; D. $30\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$; E. $24\pi \text{ cm}^2$.
- Dugasynyň gradus ölçegi 120° , radiusy 3-e deň bolan tegeleviy segmentning meýdanyny tapyň.
A. $6\pi - 4\sqrt{3}$; B. $6\pi + 4\sqrt{3}$; D. $3\pi - 4\sqrt{3}$; E. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

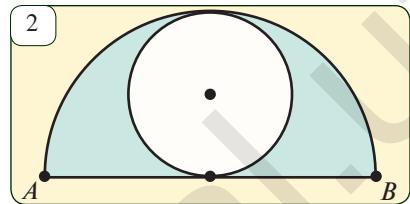
II. Meseleler

- $ABCDEFKL$ dogry sekizburçluguň tarapy 6 cm. Onuň AC diagonalyny tapyň.
- Kwadratradiusy 4 dm bolan töwerekgiň içinden çyzylan kwadratyň goňşy taraplarynyň ortalaryndan geçyän hordany töwerekden bölýän dugalaryň uzynlygyny tapyň.
- Töwerekgiň 90° -ly dugasynyň uzynlygy $15\pi \text{ cm}$. Töwerekgiň radiusyny tapyň.
- Radiusy 20-ä deň töwerekden uzynlygy 10π -ge deň duga bölündi. Bu duga laýyk merkezi burç tapyň.
- Iki tegelegiň umumy hordasy bu tegelekleri çäkleýän töwereklerden 60° -ly we 120° -ly dugalary bölýär. Tegelekleriň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
- Taraplary 3, 4, 5 bolan üçburçluguň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanlaryny tapyň.
- Tegelegiň hordasy 60° -ly dugany çekip dur. Bu horda bölen segmentleriň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
- Dogry altyburçluguň meýdanyny onuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyна gatnaşygyny tapyň.

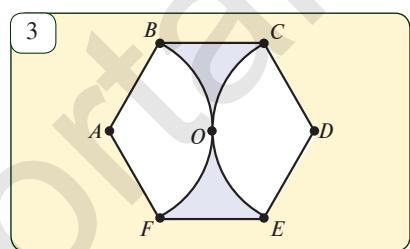
9. Tarapy a -ga deň bolan $ABCDEF$ dogry altyburçluk berlen. Merkezi A nokatda we radiusy a bolan töwerek bu altyburçlugy iki bölege bölýär. Her bir bölegiň meýdanyny tapyň.



10. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle A = 72^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 15 \text{ cm}$. BC diametrlı töweregide ABC üçburçlugyň içinde ýatýan dugasynyň uzynlygyny tapyň.

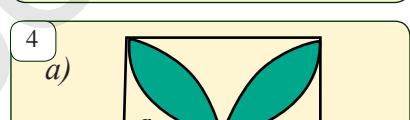


11. Tegelegiň içinden çyzylan dogry sekizburçluk berlen. Onuň iki goňşy depelerine geçirilen radiuslar tegelegi iki sektora bölýär. Şu sektorlaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

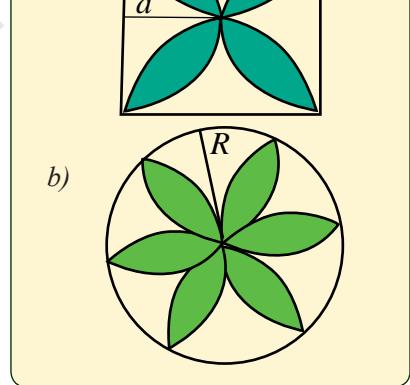


12. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 18 \text{ cm}$. BC kesim üçburçlugyň daşyndan çyzylan tegelegi iki segmente bölýär. Boýap görkezilen segmenttiň meýdanyny tapyň (1-nji surat).

13. Kiçi töwerek uly töwerege hem-de onuň AB diametrine galtaşýar. Eger diametre galtaşma nokady töweregide merkezi we $AB = 4$ bolsa, suratda boýalan şekiliň meýdanyny tapyň (2-nji surat).



14. Dogry $ABCDEF$ altyburçlugyň tarapy 6-a deň we merkezi O nokatda. Merkezleri A we D nokatda we radiuslary deň bolan töwerekler O nokatda galtaşýar. Boýalan zolagyň meýdanyny tapyň (3-nji surat).



15. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $CB = 2$. Merkezi gipotenuzada bolan töwerek üçburçlugyň katetlerine galtaşýar. Şu töweregide uzynlygyny tapyň.

16. 4-nji suratda boýalan figuralaryň meýdanyny tapyň. Olar nähili çzyzlandygyny anyklaň.

III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

- Tarapy 6 cm bolan kwadratyň daşyndan çyzylan töweregide uzynlygyny we içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.
- Tarapy 24 cm bolan dogry köpburçlugyň içinden çyzylan töweregide radiusy $4\sqrt{3} \text{ cm}$ -e deň bolsa, onuň daşyndan çyzylan töweregide radiusyny tapyň.
- 240° -ly töweregide dugasynyň uzynlygy 24 cm bolsa,
 - töweregide radiusyny;
 - dugasy 240° bolan sektoryň meýdanyny;
 - dugasy 240° bolan segmenttiň meýdanyny tapyň.



Gzykly mesele

In we Ýan

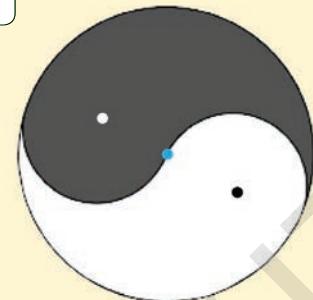
5-nji suratda tebigatdaky gapma-garşylyklary aňladýan “In we Ýan” diýen hytaý simwoly görkezilen.

a) In we Ýan simwollarynyň meýdanlarynyň deňligini görkeziň;

b) bir gönü çyzyk bilen bu simwollaryň her birini meýdanlary deň bolan iki bölege bölüň.

c) In we Ýan simwollarynyň perimetrlerini (olary gurşaý dugalaryň uzynlyklarynyň jemini) tapyň.

1



Taryhy maglumatlar. Töweregiň uzynlygyny hasaplamak örän gadymdan derwaýys mesele bolupdyr. Töweregiň uzynlygyny onuň içinden çyzylan köpburçluguň perimetrine öwürmek usuly giň ýáýrapdyr.

Orta aziýaly matematikler hem tegelegiň içinden çyzylan dogry köpburçluklary gurmak, olaryň taraplaryny tegelegiň radiusy arkaly aňlatmak meseleleri bilen meşgullanypdyrlar. Abu Reýhan Biruny “Kanuni Mas’udiý” eserinde tegelegiň içinden çyzylan köpburçluklaryň tarapyny anyklamak bilen meşgullanyp, içinden çyzylan başburçluguň, altyburçluguň, ýediburçluguň,..., onburçluguň taraplaryny anyklamagyň usulyny görkezýär. Bu hasaplama netjesinde ol $\pi \approx 3,14$ baha eýe bolýandygyny kesitleyär.

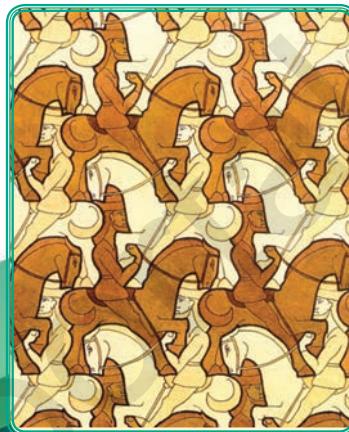
Gadimky Wawilon we Müsür golýazmalarynda we şinehatlarynda π üçe deň diýip alnan. Bu şol döwrüň takyklyk talaby üçin ýeterli bolupdyr. Soňluk bilen rimliler π üçin 3,12-ni ulanypdyrlar. π sany üçin Arhimed beren baha 3,14 bolup, bu amaly meseleleri çözende örän makuldy.

Hytaý matematiklerinde $\pi \approx 3,155 \dots$ we $22/7$. Hindileriň “Sulwa Sutra” (“Arkan düzgüni”) eserinde π üçin 3,008 we 3,1416 ... we $\sqrt{10} \approx 3,162 \dots$ bahalar duşýar.

Mürze Ulugbegiň “Astronomiya mekdebi” wekillerinden biri Jemşit Giýasiddin al-Koşy 1424-nji ýylda ýazan “Töweregiň uzynlygy barada kitap” atly risalasynda töweregiň içinden we daşyndan çyzylan dogry köpburçluguň taraplarynyň sanyны ikeltme ýoly bilen $3 \cdot 2^{28} = 800\ 335\ 168$ taraply dogry köpburçluklaryň perimetrini hasaplap, π üçin $\pi = 3,1\ 415\ 826\ 535\ 897\ 932$ bahany alypdyr. Bu 16 sany onluk sıfrine čenli anykdyr.

Emma al-Koşynyň eseri uzak wagta čenli Ýewropada näbelli bolupdyr. Ýewropalylardan belgiýaly Wan Romen 1597-nji ýylda 2^{30} taraply dogry köpburçluga Arhimediň usulyny ulanyp, π üçin 17 sany onluk sıfrları anyk bolan baha tapypdyr. Gollandiýaly Rudolf wan Seýlon (1540–1610) bu takyklygy 35 sany onluk sıfrlere čenli alyp barypdyr. Házırkı döwürde elektron hasaplaýyş maşynlarynyň kömeginde π üçin millionandan artyk onluk sıfrları anyk bolan bahanar tapylan. Gündelik hasaplamar üçin 3,14 baha, matematiki hasaplamar üçin 3,1416 baha, hatda astronomiya we kocmonawtika üçin 3,1415826 baha ýeterlidir.

ÜÇBURÇLUKDAKY WE TÖWEREKDÄKI METRIK GATNAŞYKLAR



Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňyz:

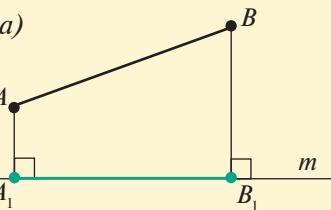
Bilimler:

- ✓ proporsional kesimleriň häsiyetlerini bilmek;
- ✓ gönüburçly üçburçlukda gipotenuza geçirilen beýikligiň häsiyetlerini bilmek;
- ✓ özara kesişyän hordalaryň kesimleri baradaky hem-de tòweregى kesiji goni çyzygyň kesimleri baradaky häsiyetleri bilmek.

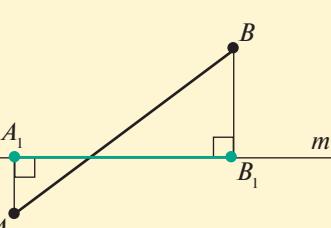
Endikler:

- ✓ kesimleriň gatnaşygyny we proporsional kesimlere degişli meseleleri çözüp bilmek;
- ✓ gönüburçly üçburçlukda gipotenuza geçirilen beýikligiň häsiyetlerinden peýdalanyп, meseleler çözüp bilmek;
- ✓ kesiji hordalaryň kesimleriniň we kesiji goni çyzygyň kesimleriniň häsiyetlerinden peýdalanyп, meseleler çözmek.

1

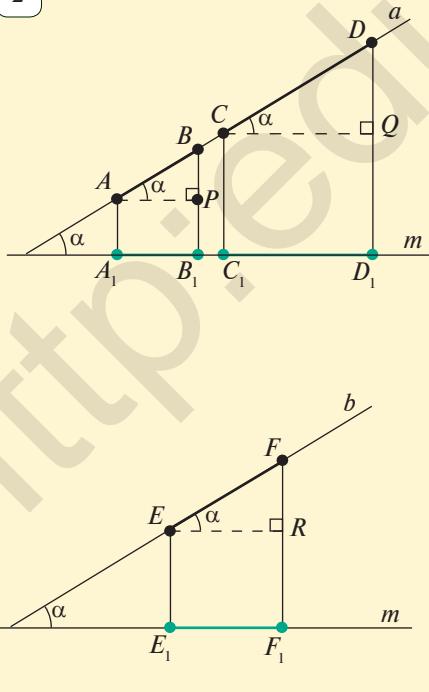


b)



A_1 — A nokadyň,
 B_1 — B nokadyň,
 A_1B_1 — AB kesimiň m gönü
 çyzykdaky projeksiýasy

2



Ugrukdyryjy soraglar

1. Kesimleriň gatnaşygy nämäni aňladýar?
2. Nähili kesimlere proporsional diýilýär?
3. Falesiň teoremasyny aýdyň.

Tekizlikde m gönü çyzyk we AB kesim berlen bolsun. A we B nokatlardan m gönü çyzyga AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar geçirýäris (*1-nji surat*). A_1B_1 kesim AB kesimiň m gönü çyzykdaky *projeksiýasy (kölegesi)* diýilýär.

AB kesimiň m gönü çyzykdaky A_1B_1 projeksiýasyny gurmak amaly AB kesimi m gönü çyzyga *proýesirleme* diýilýär.

Teorema. Bir gönü çyzykda ýa-da parallel gönü çyzyklarda ýatýan kesimler berlen bolsun. Olaryň şol bir gönü çyzyga projeksiýalary berlen kesimlere proporsional bolýar.

$a \parallel b$,

A_1B_1 — AB -niň,
 C_1D_1 — CD -niň,
 E_1F_1 — EF -niň
 m gönü çyzykdaky
 projeksiýalary
(2-nji surat)



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Subudy. a) Eger a we b gönü çyzyklar m gönü çyzyga parallel bolsa, $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, $EF = E_1F_1$ bolýandygy hem-de (1) deňlikleriň dogrudagy aýdyň.

b) Eger-de a we b gönü çyzyklar m gönü çyzyga perpendikulýar bolsa, A_1 we B_1 , C_1 we D_1 , E_1 we F_1 nokatlar gabat gelýär. Şonuň üçin A_1B_1 , C_1D_1 , E_1F_1 kesimleriň uzynlygy nola deň bolýar we (1) deňlikler ýerine ýetirilýär.

c) Indi başga ýagdaýa garaýarys. 2-nji suratda görkezilişi ýaly, gönüburçly ABP , CDQ , EFR üçbürçluklary gurýarys. Onda $a \parallel b$ bolany üçin, $\angle BAP = \angle DCQ = \angle FER$. Diýmek, ABP ,

CDQ we EFR gönüburçly üçburçluklar meňzeş.

Mundan $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF}$ deňlikleri alarys.

Teorema subut edildi.

Mesele. AB we CD kesimler parallel gönü çyzyklarda ýatýar. Eger $AB = 12 \text{ cm}$, $CD = 15 \text{ cm}$ we AB kesimiň käbir m gönü çyzykdaky proýeksiýasy 8 cm bolsa, CD kesimiň şu m gönü çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

Çözülişi. CD kesimiň m gönü çyzykdaky proýeksiýasy x bolsun. Onda, subut edilen teoremanyň we meseläniň şertinden peýdalanyп, proporsiýa düýäris:

$$\frac{x}{15} = \frac{8}{12}.$$

Bu deňlikden $x = 10$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: 10 cm .

Meseleler we ýumuşlar

48.1. Kesimiň berlen gönü çyzykdaky proýeksiýasy näme?

48.2. Bir gönü çyzykda ýa-da parallel gönü çyzyklarda ýatýan kesimleriň şol başga bir gönü çyzyga proýeksiýalary berlen kesimlere proporsional bolýandygyny subut ediň.

48.3.a we b gönü çyzyklaryň arasyndaky burç 45° -a deň. a gönü çyzykda uzynlygy 10 cm bolan AB kesim alnan. AB kesimiň b gönü çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

48.4. AB kesimiň depeleri l gönü çyzykdan 9 cm we 14 cm uzaklykda ýatýar. Eger AB kesim l gönü çyzygy kesip geçmese we $AB = 13 \text{ cm}$ bolsa, AB kesimiň l gönü çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

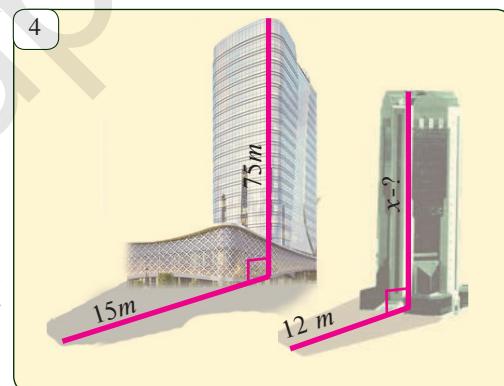
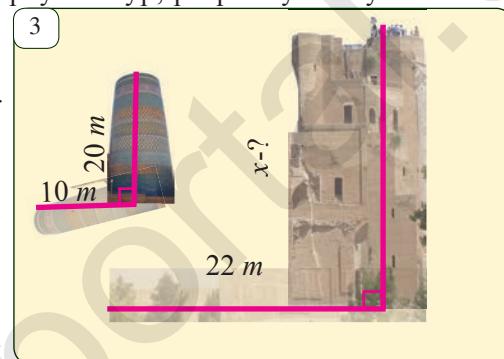
48.5.3- we 4-nji suratlardaky maglumatlar esasynda binalaryň beýikliklerini tapyň.

48.6. Gönü çyzyk we oňa parallel bolmadyk kesim çyzyň. Kesimiň gönü çyzykdaky proýeksiýasyny guruň.

48.7. Koordinatalar tekizliginde $A(2;3)$ we $B(3;-4)$ nokatlar belgilenen. AB kesimiň koordinata oklaryndaky proýeksiýalarynyň uzynlyklaryny tapyň.

48.8.a we b gönü çyzyklaryň arasyndaky burç a bolýandygy mälîm. a gönü çyzykda AB kesim alnan. AB kesimiň b gönü çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

48.9.* AB we CD kesimleriň l gönü çyzykdaky proýeksiýalary özara deň. AB we CD kesimleriň uzynlyklary barada näme diýmek mümkün? Mysallar getiriň.



Falesiň teoremasynyň umumylaşmasy bolan möhüm häsiýeti subut edýäris.

 **Teorema.** *Burcuň iki tarapyny hem kesip geçen parallel göni çyzyklar onuň taraplaryndan proporsional kesimleri bölýär.*



$\angle BAC, B_1C_1//B_2C_2//B_3C_3$ (1-nji surat)



$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$$

Subudy. C_1 we C_2 nokatlardan AB -ge parallel C_1A_1 we C_2A_2 göni çyzyklary geçirýäris. Onda, birinjiden, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ bolýär, çünkü olar özara parallel bolan AB , C_1A_1 we C_2A_2 göni çyzyklary AC göni çyzyk kesende emele gelen degişli burçlardyr. Ikinjiden, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, çünkü olar taraplary parallel bolan burçlardyr.

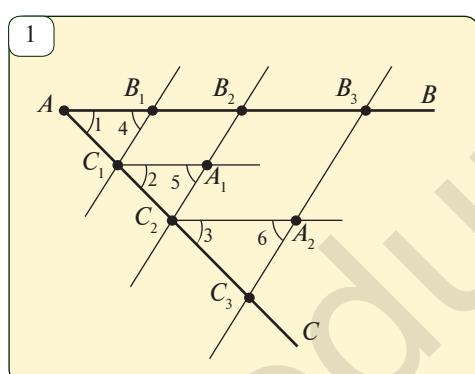
Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta C_1A_1C_2 \sim \Delta C_2A_2C_3$ bolýär.

Onda, $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{C_1A_1}{C_1C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2C_3}$ (1) deňlikleri alarys.

Mundan daşary, $B_1C_1A_1B_2$ we $B_2C_2A_2B_3$ dörtburçluklar parallelogram, çünkü

$B_1C_1//B_2C_2//B_3C_3$ — şerte görä;

$AB // C_1A_1 // C_2A_2$ — gurmaga görä.



Şonuň üçin, bu parallelogramlaryň garşylykly taraplary özara deň bolýär:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \text{ we } C_2A_2 = B_2B_3. \quad (2)$$

(1) we (2) deňliklerden $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$ bolýandygy gelip çykýar.

Teorema subut edildi.



Amaly gönükmeye. Kesimi berlen gatnaşykdada bölmek.

Berlen a kesimi, bölekleriň özara gatnaşygy $m:n:l:k$ ýaly bolýan edip dört bölge bölün.

Munuň üçin aşakdakylary ädimme-ädim ýerine ýetirýäris:

1-nji ädim. Erkin ýiti burç çyzyp, onuň bir tarapyna uzynlyklary $OA = m$, $AB = n$, $BC = l$ we $CD = k$ deň bolan kesimleri 2-nji suratda görkezilişi ýaly edip, yzygider goýup çykýarys.

2-nji ädim. Burcuň ikinji tarapyna berlen a kesime deň OD_1 kesimi goýýarys.

3-nji ädim. D we D_1 nokatlary utgaşdyryarys.

4-nji ädim. A, B, C nokatlar arkaly DD_1 -e parallel AA_1, BB_1 we CC_1 kesimleri geçirýäris.

Ýokardaky teorema görä, berlen $a=OD_1$ kesim A_1, B_1, C_1 we D_1 nokatlar bilen $m:n:l:k$ gatnaşykda bölünen bolýar.

Ýumuş: Şu tassyklamany özbaşdak esaslandyryň.

Amaly ýumuş. Dördünji proporsional kesimi gurmak.

a, b we c kesimler berlen. a we b kesimler c we d kesimlere proporsional, ýagny $a:b=c:d$ bolýandygygymälim. d kesimi guruň (3-nji surat).

1-nji ädim. Erkin ýiti burç çyzyyp, onuň bir tarapyna $OA=a$ we $AB=b$ kesimleri 3-nji suratda görkezilişi ýaly goýýarys.

2-nji ädim. Ikinji tarapyna bolsa $OC=c$ kesimi goýýarys.

3-nji ädim. A we C nokatlary utgaşdyryarys.

4-nji ädim. B nokatdan AC -ge parallel BD gönüçzyk geçirýäris.

Ýumuş: CD gözlenýän d kesim bolýandygyny esaslandyryň.

Meßeeler we ýumuşlar

49.1. Uzynlygy 42 cm bolan kesim berlen. Ony a) $5:2$; b) $3:4:7$; ç) $1:5:1:7$ gatnaşykdaky bölekjiklere bölüñ.

49.2. Suratda her bir bölek birlik kesimden ybarat bolsa, AB we CD, EF we MN, AC we DF, AN we CE, EN we BM kesimleriň gatnaşyklaryny tapyň.



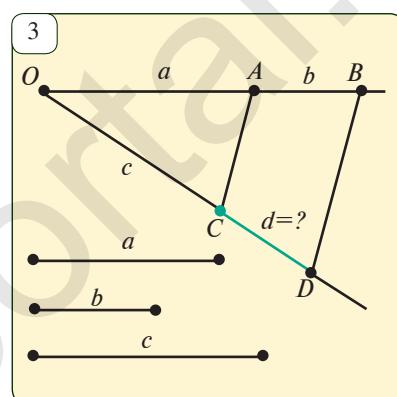
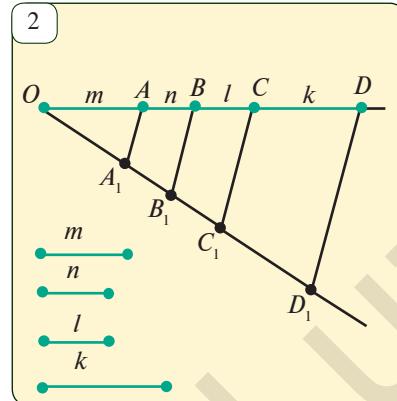
49.3. m, n kesimler l we k kesimlere proporsional. Eger a) $m=4\text{ cm}, n=3\text{ cm}$ we $l=8\text{ cm}$; b) $m=2\text{ cm}, n=3\text{ cm}$ we $l=7\text{ cm}$ bolsa, k — dördünji kesimi guruň we uzynlygyny tapyň.

49.4. Dörtburçlugyň perimetri 54 cm we taraplary $3:4:5:6$ ýaly gatnaşykdaky bolsa, onuň her bir tarapyny anyklaň.

49.5. Dörtburçlugyň burçlary özara $3:4:5:6$ ýaly gatnaşykdaky bolsa, onuň kiçi burçy nämä deňligini tapyň.

49.6. Uzynlygy $4, 5$ we 6 bolan kesimler berlen. Uzynlygy $4,8$ -e deň kesim guruň.

49.7*. Perimetri 60 cm bolan dörtburçlugyň bir tarapy 15 cm , galan taraplary bolsa $2:3:4$ gatnaşykdaky bolýandygymälim. Onuň uly tarapyny tapyň.



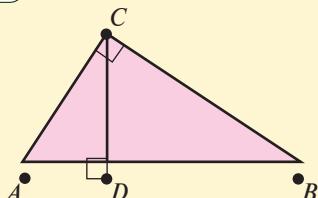


Häsiyet. Gönüburçly üçburçluguň goni burçunyň depesinden geçirilen beýikligi ony özüne meňzeş iki üçburçluga bölýär.

$\Delta ABC, \angle C = 90^\circ,$
 $CD - \text{beýiklik (1-nji surat)}$

$\Delta ABC \sim \Delta ACD, \Delta ABC \sim \Delta CBD$

1



Subudy. ABC we ACD üçburçluklar gönüburçly bolup, A burç bolsa olar üçin umumy. Diýmek, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Şunuň ýaly, ΔABC we ΔCBD gönüburçly bolup, olar üçin $\angle B$ umumy. Diýmek, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$.

1-nji suratda görkezilen AD we DC kesimler degişlilikde AC we BC katetleriň gipotenuzadaky proýeksiýalary diýilýär.



Kesitleme. Eger a , b we c kesimler üçin $a:b = b:c$ bolsa, b kesim a we c kesimleriň arasyndaky *orta proporsional kesim* diýlip atlandyrılýar.

Orta proporsionallyk şertini $b^2 = ac$ ýa-da $b = \sqrt{ac}$ görünüşde ýazmak mümkün.

Ýokarda subut edilen häsiyete esaslanýan bolsak, orta proporsional kesimler baradaky aşakdaky teoremlar aňsat subut edilýär:

1-nji teorema. Gönüburçly üçburçluguň goni burçunyň depesinden geçirilen beýiklik katetleriň gipotenuzadaky proýeksiýalarynyň arasynda orta proporsional bolýar.

Hakykatdan hem, subut edilen häsiyete görä, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$. Mundan,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$



2-nji teorema. Gönüburçly üçburçluguň kateti gipotenuza bilen şu katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasynyň arasynda orta proporsionaldyr (1-nji surat).

Hakykatdan hem, subut edilen häsiyete görä, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Mundan,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

Edil şuňa meňzeş $BC = \sqrt{BD \cdot AB}$ bolýandygyny subut etmek mümkün.



Mesele. Katetleri 15 cm we 20 cm bolan gönüburçly üçburçluguň kiçi katetiniň gipotenuzadaky proýeksiýasyny tapyň.

$\Delta ABC, \angle C = 90^\circ, CD - \text{beýiklik}, AC = 15 \text{ cm},$
 $BC = 20 \text{ cm}$ (1-nji surat)

\Rightarrow

$AD = ?$

Cözülişi. 1) Pifagoryň teoremasyndan peýdalanylп, üçburçluguň gipotenuzasyny tapýarys: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, ýagnы $AB = 25 \text{ cm}$.

2) Ikinji teoremadan peýdalanylп, AD -ni tapýarys:

$$AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ (cm).} \quad \text{Jogaby: } 9 \text{ cm.}$$

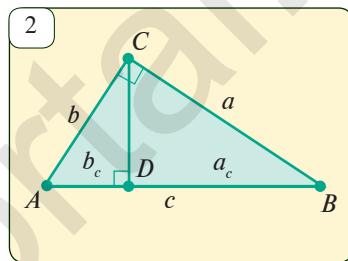
Ikinji teoremadan netije hökmünde Pifagoryň teoremasыnyň **Pifagoryň öziýazyp galdyran subudy** gelip çykýar (*1-nji surat*). 2- nji teorema görä, $\left. \begin{array}{l} AC^2 = AD \cdot AB \\ BC^2 = BD \cdot AB \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$.
Seýdip, $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

?

Meseleler we ýumuşlar

50.1. Subut ediň (*2-nji surat*):

- a) $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$;
- b) $b^2 = b_c \cdot c$, $a^2 = a_c \cdot c$; ç) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.



50.2. Gönüburçly üçburçluguň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi gipotenuzany 9 cm we 16 cm -e deň kesimlere bolýar. Üçburçluguň taraplaryny tapyň.

50.3. Gönüburçly üçburçluguň gipotenuzasy 15 cm -e, bir kateti bolsa 9 cm -e deň. Ikinji katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasyny tapyň.

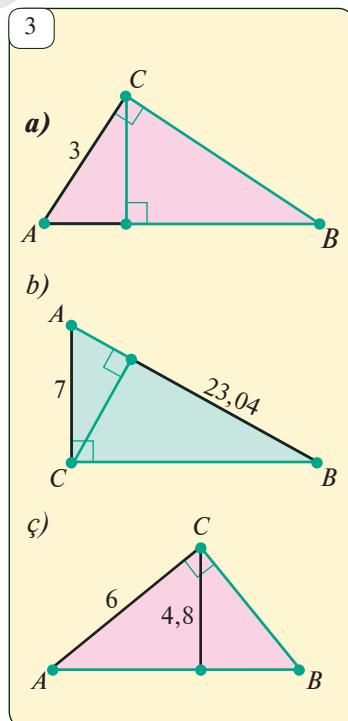
50.4.3-nji suratdaky maglumatlar esasynda ABC üçburçluguň taraplaryny tapyň.

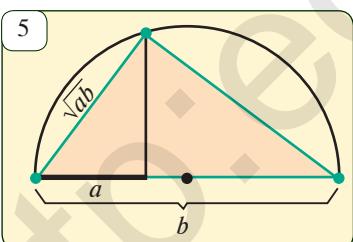
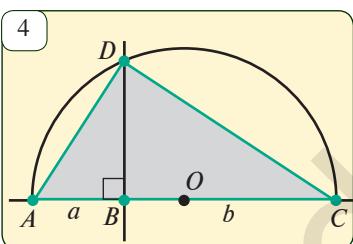
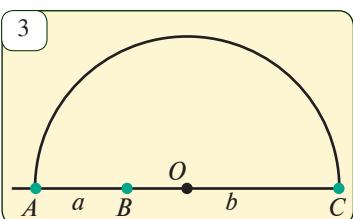
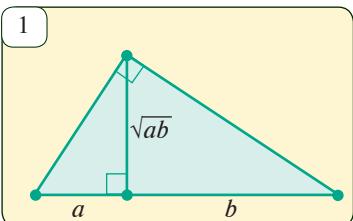
50.5*. Katetleriniň gatnaşygy $4:5$ ýaly bolan gönüburçly üçburçluguň katetleriniň gipotenuzadaky proýeksiýalarynyň gatnaşygyny tapyň.

50.6*. Katetleriniň gatnaşygy $3:2$ ýaly bolan gönüburçly üçburçluk berlen. Katetleriň gipotenuzasындaky proýeksiýalaryndan biri ikinjisinden 6 cm -e uzyn. Üçburçluguň meýdanyny tapyň.

50.7. Katetleriniň gipotenuzasындaky proýeksiýalary 2 cm we 18 cm bolan gönüburçly üçburçluguň meýdanyny tapyň.

50.8*. ABC üçburçlukda $\angle C = 90^\circ$, CD — beýiklik, CE — bissektrisa we $AE : EB = 2 : 3$. a) $AC : BC$; b) $S_{ACE} : S_{BCE}$; ç) $AD : BD$ gatnaşyklary tapyň.





?

Meseleler we ýumuşlar

- 51.1. Uzynlyklary a we b bolan kesimler berlen. Uzynlygy \sqrt{ab} bolan kesimi guruň.
- 51.2. Uzynlygy a we b -ge deň kesimler berlen. Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyп, uzynlygy a) $\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\sqrt{a^2-b^2}$ bolan kesimleri guruň.
- 51.3. Uzynlygy 1-e deň kesim berlen. Uzynlygy a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\sqrt{18}$; ä) $\sqrt{30}$ bolan kesimleri guruň.
- 51.4. 6-njy suratdaky maglumatlar esasynda ABC üçburçluguň meýdanyny tapyň.

Gönüburçly üçburçluguň goni burçundan geçirilen beýikligi gipotenuzany a we b kesimlere böлse, beýiklik \sqrt{ab} -ge deň bolýandygyny görüpdir (1-nji surat).

Diýmek, berlen iki kesime orta proporsional kesimi gurmak üçin:

1) gipotenuzasyň uzynlygy $a+b$ -ge deň (2-nji surat);

2) goni burçundan geçirilen beýikligi şu gipotenuzany a we b böleklerde böлýän gönüburçly üçburçlugu gurmak ýeterli.

Munuň üçin gönüburçly üçburçluguň daşyndan çyzylan töwerek merkezi gipotenuzanyň ortasynda ýerleşýänliginden peýdalanyarys (3-nji surat).

Gurmak:

1) Goni çyzyk çyzýarys we onda $AB = a$ we $BC = b$ bolýän edip A , B we C nokatlary belgileýäris (3-nji surat).

2) AC kesimiň ortasy — O nokady tapýarys. Merkezi O nokatda bolan AC diametri ýarym töwerek gurýarys (3-nji surat).

3) B nokatdan AC goni çyzyga perpendikulýar goni çyzyk geçiriyäris (4-nji surat). Bu goni çyzyk ýarym töwerek D nokatda kesip geçen bolsun. Onda ΔADC — gönüburçly üçburçluk, $BD = \sqrt{ab}$ — biz gurmaly bolan kesim bolýar.

Gurmak ýerine ýetirildi.

Orta proporsional kesimi gurmakda gönüburçly üçburçluguň kateti gipotenuza bilen şu katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasyň arasynda orta proporsionaligyndan peýdalananmak hem mümkün (5-nji surat).

51.5. Töwerekdäki C nokatdan AB diametre CD perpendikulär geçirilen. Eger $CD=12\text{ cm}$, $AD=24\text{ cm}$ bolsa, tegelegiň meýdanyny tapyň.

51.6. Öňki meseledäki ABC üçburçluguň meýdanyny tapyň.

51.7. Gönüburçly üçburçluguň goni burçunyň bissektrisasy gipotenuzany $5:3$ ýaly gatnaşykda bölýär. Goni burcuň depesinden geçirilen beýikligiň gipotenuzadan bölünen kesimleriniň gatnaşygyny tapyň.

51.8. Radiusy $8\text{ cm}-e$ deň tegelegiň içinden bir burçy 30° bolan gönüburçly üçburçluk çyzylan. Tegelegiň üçburçlukdan daşardaky bölegi 3 sany segmentden ybarat. Ine şu segmentleriň meýdanlaryny tapyň.

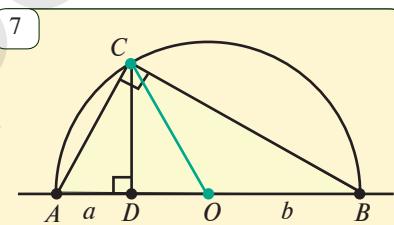
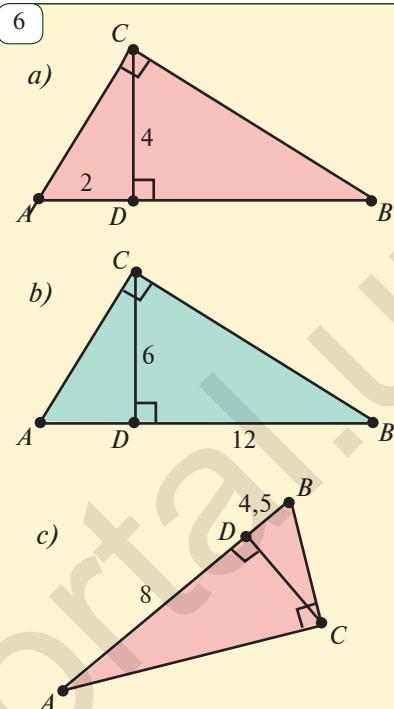
51.9*. 7-nji suratda $AD=a$, $DB=b$, diýmek, $OC=\frac{a+b}{2}=(O—töwerek merkezi)$. Suratdan peýdalanyп, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ deňsizligi subut ediň.

Gyzykly meseleler

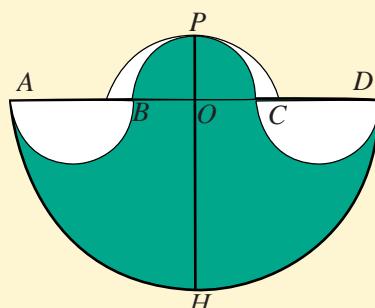
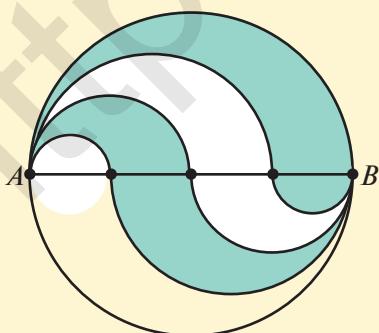
1. Töwerekdiň AB diametri dört deň bölege bölündi we 8-nji suratda görkezilişi ýaly ýarym töwerekler guruldy. Eger $AB=d$ bolsa, suratda boýap görkezilen her bir şekiliň meýdanyny hasaplaň.

2. 9-njy suratda AB we CD kesimler deň. O nokat AD kesimiň ortasy. AB , CD , AD we BC

kesimler ýarymtegelekleriň diametri. Bu ýarymtegelekler bilen çäklenen şekiliň meýdany diametri PH -a deň tegelegiň meýdanyna deňligini subut ediň. Bu ýerde PH kesim AD kesimiň ortasy O nokada geçirilen perpendikulär.



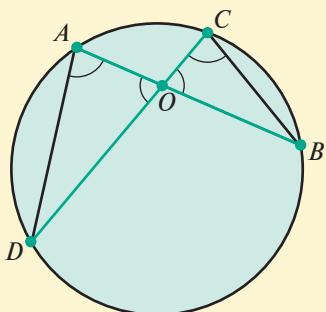
8





1-nji teorema. Töweregiň AB we CD hordalary O nokatda kesişse, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ deňlik dogry bolýar.

1



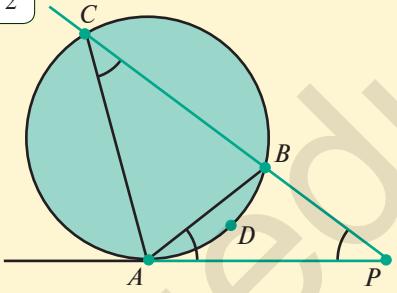
Subudy. AB we CD hordalar (1-nji surat) görkezilen tertipde ýerleşyän bolsun. Depelerini AD we BC hordalar bilen utgaşdyryarys. Şunda BAD we BCD burçlar bir duga direlyär, diýmek, $\angle BAD = \angle BCD$. Ýene görnüşi ýaly, $\angle AOD = \angle BOC$. Bu iki deňlikden, BB nyşana görä, AOD we COB üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplary bolsa proporsional: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$ ýa-da $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Teorema subut edildi.



2-nji teorema. Töweregiň daşky zolagyndaky P nokatdan töwerege PA galtaşma (A – galtaşma nokady) we töweregi B we C nokatlarda kesip geçýän goni çyzýk geçirilen bolsa, $PA^2 = PB \cdot PC$ bolýar.

2



Subudy. ABP we CBA üçburçluklara garaýarys (2-nji surat). Onda,

$$\angle C = \frac{\angle ADB}{2} = \angle BAP \text{ hem-de } \angle P \text{ — bu üçburçluk-}$$

lar üçin umumy burç. Diýmek, ABP we CBA üçburçluklar iki burç boýunça meňzeş. Mundan,

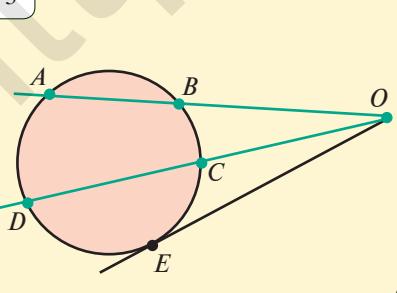
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \quad \text{ýa-da} \quad PA^2 = PB \cdot PC.$$

Teorema subut edildi.



Mesele. A, B, C we D nokatlar töweregi AB , BC , CD we AD dugalara bölýär. Eger AB we DC şöhleler O nokatda kesişse, onda $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.

3



Çözülişi. Meseläniň şertine laýyk çyzgy çyzýarys (3-nji surat) we O nokatdan OE galtaşma geçirýäris. Onda, 2-nji teorema görä,

$$\left. \begin{aligned} OB \cdot OA &= OE^2 \\ OC \cdot OD &= OE^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

?

Meseleler we ýumuşlar

52.1. 4-nji suratda x bilen belgilenen näbelli kesimi tapyň.

52.2. A nokatdan töwerege AB galtaşma (B — galtaşma nokady) we töweregide C we D nokatlarynda kesyän kesiji geçirilen. Eger

- a) $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 2 \text{ cm}$ bolsa, AD kesimi;
- b) $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$ bolsa, AC kesimi;
- ç) $AC = 3 \text{ cm}$, $AD = 2,7 \text{ cm}$ bolsa, AB kesimi tapyň.

52.3. Töweregide $ABCD$ dörtburçluk çyzylan.

AB we DC şöhleleri O nokatda kesişyär. Eger

- a) $AO = 10 \text{ dm}$, $BO = 6 \text{ dm}$, $DO = 15 \text{ dm}$ bolsa, OC kesimi;
- b) $CD = 10 \text{ dm}$, $OD = 8 \text{ dm}$, $AB = 4 \text{ dm}$ bolsa, OB kesimi tapyň.

52.4. Töweregide AB diametri we bu diametre perpendikulýar CD hordasy E nokatda kesişyär.

Eger $AE = 2 \text{ cm}$, $EB = 8 \text{ cm}$ bolsa, CD hordany tapyň.

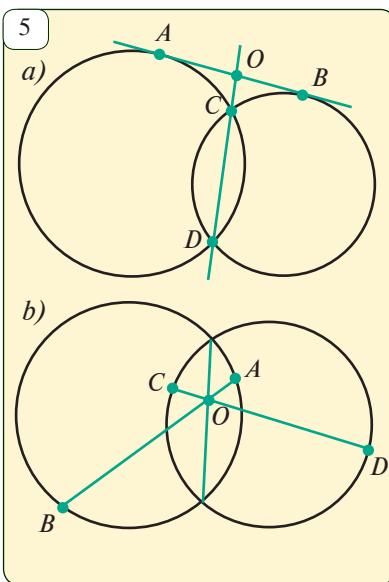
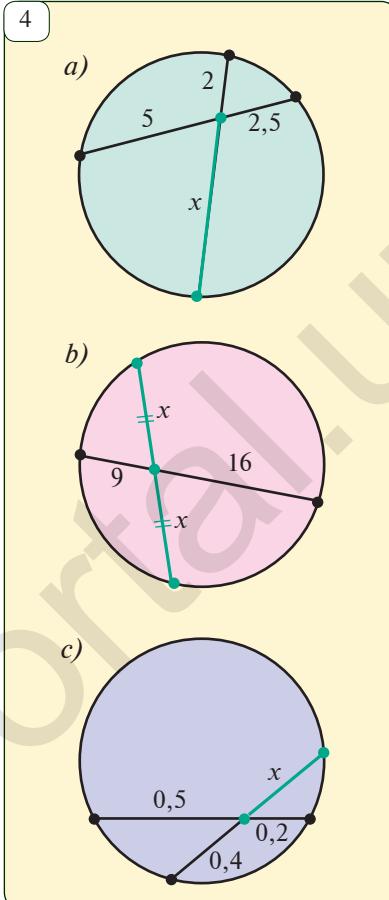
52.5. AB we CD kesimler O nokatda kesişyär. Eger $AO \cdot OB = BO \cdot OD$ bolsa, A , B , C we D nokatlaryny bir töwerekde ýatýandygyny subut ediň.

52.6. Radiusy 13 dm bolan töweregide merkezinden 5 dm uzaklykda P nokat alnan. P nokatdan uzynlygy 25 dm bolan AB horda geçirilen. AP we PB kesimleri tapyň.

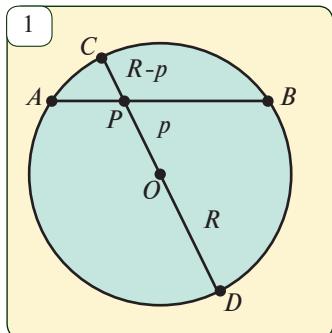
52.7.3.-nji suratda $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ deňligi AOD we BOC üçburçluklaryny meňzeşliginden peýdalanyп subut ediň.

52.8*. 5-nji suratlardaky maglumatlar esasynda $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ deňligi subut ediň.

52.9*. İki töwerek C nokatda galtaşyár. AB goni çyzyk birinji töwerege A nokatda, ikinji töwerege bolsa B nokatda galtaşyár. $\angle ACB = 90^\circ$ bolýandygyny subut ediň.



Öňki dersde töweregىň kesijileriniň we hordalarynyň häsiýetlerini subut edipdik. Indi şu häsiýetleriň käbir hususy ýagdaylary bilen tanyşýarys.



1-nji mesele. R radiusly töweregىň içki zolagyndaky P nokat töweregىň merkezinden p aralykda ýerleşýän bolsun. Onda P nokatdan geçirýän erkin AB horda üçin

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \quad (1)$$

deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.

Cözülişi. P nokat arkaly töweregىň CD diametrini geçirýäris. Onda, $PC = R - p$, $PD = R + p$ (*1-nji surat*). Kesiji hordalar baradaky teorema görä,

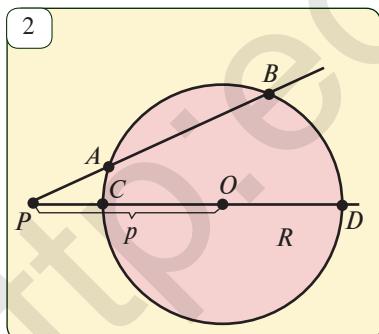
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2.$$

(1) deňlik subut edildi.

2-nji mesele. Radiusy 6 cm bolan töweregىň O merkezinden 4 cm uzaklykda P nokat alyndy. P nokat arkaly AB horda geçirildi. Eger $AP = 2\text{ cm}$ bolsa, PB kesimi tapyň.

Cözülişi. Meseläniň şertine görä, $R = 6\text{ cm}$, $d = 4\text{ cm}$, $AP = 2\text{ cm}$. Onda (1) deňlige görä, $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Mundan, $PB = 10\text{ cm}$.

Jogaby: $PB = 10\text{ cm}$.



3-nji mesele. R radiusly töweregىň daşky zolagyndaky P nokat töweregىň merkezinden p aralykda ýerleşýän bolsun. Onda P nokat arkaly geçirýän we töweregى A we B nokatlarda kesiji erkin goni çyzyk üçin

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \quad (2)$$

deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.

Cözmekى. Töweregىň O merkezi arkaly geçirýän PO goni çyzyk töwerek bilen C we D nokatlarda kesişsin (*2-nji surat*). Onda, şerte görä, $PC = p - R$, $PD = p + R$. Töweregىň daşky zolagyndaky nokatdan geçirilen kesijiler baradaky teorema görä,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Şeydip (2) deňlik subut edildi.



4-nji mesele. Radiusy 7 cm bolan töweregij merkezinden 13 cm uzaklykdaky P nokatdan geçýän gönü çyzyk töweregij A we B nokatlarda kesýär. Eger $PA = 10 \text{ cm}$ bolsa, AB hordany tapyň.

Çözülişi. Şerte görä, $R = 7 \text{ cm}$, $p = 13 \text{ cm}$. Onda (2) formula görä,

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 = 13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120.$$

Mundan, $PB = \frac{120}{PA} = \frac{120}{10} = 12 \text{ (cm)}$. Diýmek,

$$AB = PB - PA = 12 - 10 = 2 \text{ (cm). } \text{Jogaby: } 2 \text{ cm.}$$



Meseleler we ýumuşlar

53.1. Radiusy 5 cm bolan töweregij merkezinden 3 cm uzaklykdaky P nokat alnan. AB horda P nokat arkaly geçýär. Eger $PA = 2 \text{ cm}$ bolsa, AB hordanyň uzynlygyny tapyň.

53.2. Radiusy 5 m bolan töweregij merkezinden 7 m uzaklykdaky P nokat alnan. P nokat arkaly geçýän gönü çyzyk töweregij A we B nokatlarda kesýär. Eger $PA = 4 \text{ m}$ bolsa, AB hordanyň uzynlygyny tapyň.

53.3. 3-nji suratdaky maglumatlar esasynda x bilen belgilenen kesimi tapyň (O — töwerek merkezi).

53.4. 4-nji suratdan peýdalanyп, meseläni çözüň. Onda,

a) $PC = 5 \text{ dm}$, $OD = 7 \text{ dm}$, $AB = 2 \text{ dm}$, $PA = ?$

b) $PA = 5 \text{ dm}$, $AB = 4 \text{ dm}$, $PC = 3 \text{ dm}$, $OD = ?$

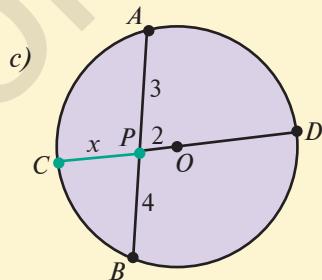
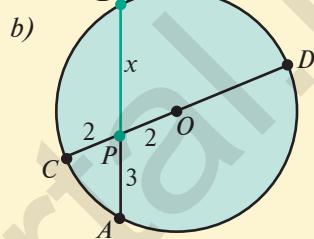
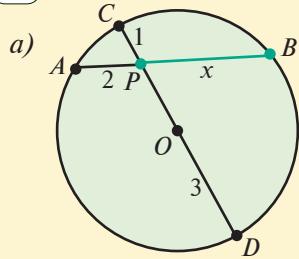
53.5. Töweregij $AB = 7 \text{ cm}$ we $CD = 5 \text{ cm}$ hordalary P nokatda kesişyär. Eger $CP : PD = 2 : 3$ bolsa, P nokat AB hordany nähili gatnaşykda bölýär?

53.6. Töweregij C nokadyndan AB diametre CD perpendikulýar geçirilen. Eger $AD = 2 \text{ cm}$, $DB = 18 \text{ cm}$ bolsa, CD kesimi tapyň.

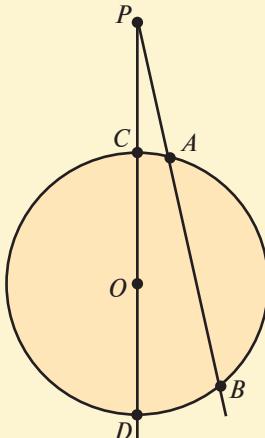
53.7*. Töweregij içinden çyzyylan $ABCD$ dörtburçluguň diagonallary K nokatda kesişyär. Eger $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = 3$ we $CK : KA = 1 : 2$ bolsa, AD kesimi tapyň.

53.8*. Töweregij içinden çyzyylan $ABCD$ dörtburçlukda $AB : DC = 1 : 2$ we $BD : AC = 2 : 3$ bolsa, $DA : BC$ gatnaşygy tapyň.

3



4



I. Testler

- Gönüburçly üçburçluguň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi barada nädogry tassyklamany görkeziň:**
 - Katetleriden kiçi;
 - Üçburçlugu iki meňzeş üçburçluklara bölýär;
 - Katetleriniň gipotenuzadaky proýeksiýalary arasynda orta proporsional;
 - Gipotenuzanyň ýarysyna deň.
- AB we CD hordalar O nokatda kesişyär. Nädogry tassyklamany tapyň:**
 - $\angle DAB = \angle DCB$;
 - AOD we COB üçburçluklar meňzeş;
 - $AO \cdot OB = CO \cdot OD$;
 - $AO = CO$.
- Dogry tassyklamany tapyň:**
 - Deň kesimleriň proýeksiýalary hem deň bolýar;
 - Uly kesimiň proýeksiýasy uly bolýar;
 - Bir gönü çyzykdaky deň kesimleriň proýeksiýalary deň bolýar;
 - Proýeksiýanyň uzynlygy proýesirlenýän kesimiň uzynlygyna deň bolýar.
- Gönüburçly üçburçluguň gipotenuzasyna geçirilen beýiklik ony iki üçburçluga bölýär. Bu üçburçluklar:**
 - Deň;
 - Deňdeş;
 - Meňzeş;
 - Deňyanly.
- Uzynlygy a we b bolan kesimleriň orta proporsionalı nämä deň?**
 - $a + b$;
 - \sqrt{ab} ;
 - $\frac{a+b}{2}$;
 - $a:b$.
- ABCD dörtburçluk O merkezli töweregiň içinden çyzylan. Nädogry tassyklamany görkeziň:**
 - $\Delta AOB \sim \Delta COD$;
 - $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
 - $AO \cdot OB = CO \cdot OD$;
 - $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

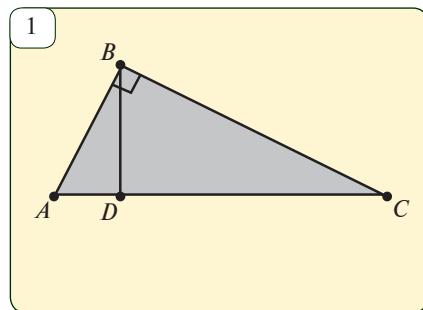
II. Meseleler.

- Gönüburçly üçburçluguň katetleriniň gatnaşygy 3:4-e deň. Bu üçburçluguň gipotenuzasy 50 cm . Üçburçluguň gönü burçunyň depesinden geçirilen beýikligi gipotenuzadan nähili uzynlykdaky kesimleri bölýär?
- Töweregiň AB we CD hordalary E nokatda kesişyär. Eger $AE = 5\text{ cm}$, $BE = 2\text{ cm}$ we $EC = 2,5\text{ cm}$ bolsa, ED-ni tapyň.
- Radiusy 6 m bolan töweregiň merkezinden 10 m uzaklykda K nokat alyndy we K nokatdan töwerege galtaşma geçirildi. Galtaşmanyň galtaşma nokady P bilen K nokadyň arasyndaky aralygy tapyň.
- ABC üçburçlukda $\angle C = 90^\circ$ we CD beýiklik $4,8\text{ dm}$. Eger $AD = 3,6\text{ dm}$ bolsa, AB tarapy tapyň.
- Töweregiň AB we CD hordalary O nokatda kesişyär. Eger $AO = 6$, $OB = 4$ we $CO = 3$ bolsa, OD kesimi tapyň.

6. Töwerekde A, B, C, D nokatlar belgilenen, BA we CD şöhleler O nokatda kesişyär. Eger $OA = 5$, $AB = 4$, $OD = 6$ bolsa, DC hordany tapyň.
7. Töwerege B nokatda galtaşýan goni çyzygyň üstünde A nokat alyndy. Eger $AB = 12$ we A nokatdan töwerege çenli bolan iň gysga aralyk 8 bolsa, töwereginiň radiusyny tapyň.
8. Ýarym töwerekdäki C nokatdan AB diametre geçirilen CD perpendikulýar AB kesimde 4 we 9-a deň kesimleri bölýär. CD kesimi tapyň.
9. Gönüburçly üçburçluguň beýikligi gipotenuzany 3 dm we 12 dm -e deň kesimlere bölýär. Üçburçluguň meýdanyny tapyň.
10. Radiusy 5 cm bolan O merkezli töwereginiň AB hordasynda D nokat alnan. Eger $AD = 2 \text{ cm}$, $DB = 4,5 \text{ cm}$ bolsa, OD kesimi tapyň.
11. Radiusy 5 m bolan O merkezli töweregini A we B nokatlarda kesiji goni çyzykda P nokat alyndy. Eger $PA = 5 \text{ m}$, $AB = 2,8 \text{ m}$ bolsa, OP aralygy tapyň.
12. Dört parallel goni çyzyk berlen. Olar burç taraplaryny A we A_1 , B we B_1 , C we C_1 hem-de D we D_1 nokatlarda kesýär. Munda A, B, C, D nokatlar burcuň bir tarapynda ýatýár. Eger $AB = 8$, $CD = 12$ we $C_1D_1 = 9$ bolsa, A_1B_1 kesimi tapyň.
13. Töwerek burcuň içinden çyzylan. Eger burcuň depesinden töwerege çenli bolan aralyk radiusa deň bolsa, burcuň ululygyny tapyň.
14. Töwerege AB diametriň B ujundan BC galtaşma we AC kesiji geçirilen. AC töwerek bilen D nokatda kesişyär. Eger $AD = DC$ bolsa, CBD burçy tapyň.
15. Gönüburçly üçburçluguň katetleriniň gatnaşygy 2:3 ýaly. Üçburçluguň gipotenuzasyna geçirilen beýiklik ony iki üçburçluga bölýär. Olar meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

1. Töwereginiň daşarsyndaky nokatdan töwerege galtaşma geçirilen. Bu nokatdan töwerege çenli bolan iň gysga aralyk 2 cm -e, galtaşma nokadyna çenli bolan aralyk bolsa 6 cm -e deň. Töwereginiň radiusyny tapyň.
2. ΔABC gönüburçly, $AD = 9 \text{ dm}$, $DC = 16 \text{ dm}$ bolsa, şu üçburçluguň içinden çyzylan töwereginiň radiusyny hasaplaň.(1-nji surat)
3. Nokatdan goni çyzyga iki gyşarma geçirilen. Eger gyşarmalar 1:2 gatnaşykda bolup, olaryň proýeksiýalary 1 m we 7 m bolsa, gyşarmalaryny uzynlyklaryny tapyň.
- 4.* (Goşmaça mesele) PQ we ondan uzyn ET kesimler berlen. $AB = BC = PQ$; $BD = ET$ bolup,



diagonallary kesişyän O nokat üçin $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ deňlik dogry bolar ýaly $ABCD$ dörburçluk guruň.



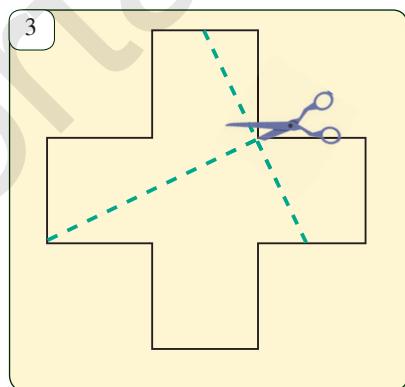
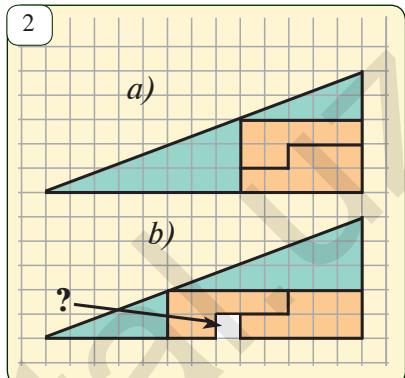
Gzykly mesele

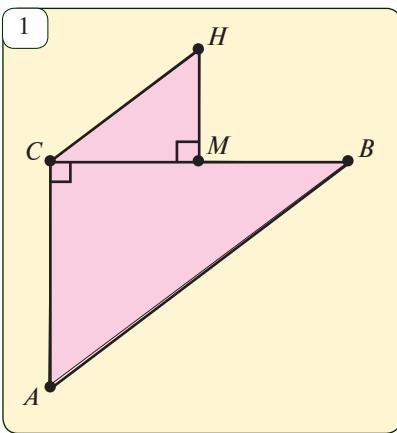
Üçburçluk 2-nji a suratda görkezilişi ýaly edip dört bölege bölünen we 2-nji b suratda görkezilişi ýaly edip gaýtadan gurnalan. Hany, aýdyň, artykmaç kwadrat nireden peýda bolupdyr?

Grek haçy

Miladydan öňki 500-nji ýyllarda peýda bolan bu şekili (3-nji surat) ýasaýsyň simwoly hökmünde çöregiň üstüne çyzypdyrlar.

Bu şekili galyň kagyza çyzyp alyp, ony suratda görkezilen çyzyklar boýunça gyrkyň. Emele gelen böleklerden kwadrat gurmak mümkünligine göz yetiriň.





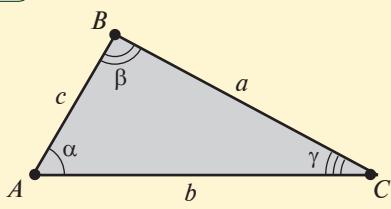
- I. Nusga barlag işi**
1. $ABCD$ parallelogramda $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$. Parallelogramyň AB tarapynyň dowamyna $\angle PDA = 90^\circ$ -a deň bolýan BP kesim goýuldý. BC we PD kesimler T nokatda kesiýär, munda $PT : TD = 3 : 1$.
 - a) $\triangle BPT \sim \triangle CDT$ -ni subut ediň, bu üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
 - b) $ABCD$ parallelogramyň meýdanyны тапын.
 - ç) AB we TD kesimleriň ortalaryny utgaşdyryýan kesimiň uzynlygyny тапын.
 - d) \overline{AB} wektory \overline{CA} we \overline{TB} wektorlar arkaly aňladyň.
 - e) CAD burcuň sinusyny тапын.
 2. (Goşmaça) 1-nji suratda $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0,5AC$ bolsa, $AB \parallel CH$ bolýandygyny subut ediň.
- II. Barlag işi üçin nusga testler**
1. Eger gönüburçly üçburçlugyň beýikligi hipotenuzasyny 6 cm we 54 cm kesimlere bölse, şu üçburçlugyň meýdanyны тапын:
 - A) 648 cm^2 ; B) 324 cm^2 ; D) 1080 cm^2 ; E) 540 cm^2 .
 2. C nokatdan geçirilen bir kesiji töwerekleri A we B , ikinjisi bolsa D we E nokatlarda kesiýär. Eger $CA = 18\text{ cm}$, $CB = 8\text{ cm}$, $CD = 8\text{ cm}$ bolsa, DE kesimiň uzynlygyny тапын:
 - A) 17 cm ; B) 1 cm ; D) 9 cm ; E) dogry jogap görkezilmedik.
 3. Eger $A(-5; 2\sqrt{3})$, $B(-4; 2)$, $C(-2; \sqrt{3})$, $D(0; 2)$ bolsa, $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary arasyndaky burçy тапын:
 - A) 30° ; B) 60° ; D) 90° ; E) dogry jogap görkezilmedik.
 4. Eger parallelogramyň diagonallary 10 cm we $8\sqrt{2}\text{ cm}$ -e deň we olaryň arasyndaky burç 45° bolsa, parallelogramyň taraplaryny тапын:
 - A) $\sqrt{17}\text{ cm}$ we $\sqrt{97}\text{ cm}$; B) 5 cm we 6 cm ;
 - D) $\sqrt{34}\text{ cm}$ we $\sqrt{63}\text{ cm}$; E) dogry jogap görkezilmedik.
 5. Radiusy 8 cm bolan töwerekleriň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň meýdanyны тапын:
 - A) $48\sqrt{3}\text{ cm}^2$; B) $192\sqrt{3}\text{ cm}^2$; D) $96\sqrt{2}$; E) dogry jogap ýok.
 6. Merkezi burçy 140° , meýdany $31,5\pi\text{ cm}^2$ bolan tegelek sektoryň radiusyny anyklaň:

- A) 9 cm ; B) 18 cm ; D) $9\pi\text{ cm}$; E) dogry jogap görkezilmedik.
7. Esasynyň uzynlygy 15 cm bolan üçburçluk esasyňa parallel kesim geçirilen. Eger emele gelen trapesiýanyň meýdany üçburçlugyň meýdanynyň $\frac{3}{4}$ bölegini düzýändigi mälim bolsa, kesimiň uzynlygyny tapyň:
A) $6,5$; B) 7 ; D) $7,5$; E) 5 .
8. Gapdal tarapy $2\sqrt{39}\text{ cm}$ bolan deňyanly üçburçlugyň beýikliginiň esasyňa gatnaşygy $3:4$ -e deň bolsa, üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) 260 ; B) 245 ; D) 310 ; E) 72 .
9. $\bar{a}(4; 4\sqrt{3})$ we $\bar{b}(8\sqrt{3}; 8)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň:
A) 45° ; B) 90° ; D) 30° ; E) 60° .
10. Deňyanly trapesiýanyň esaslary 10 cm we 16 cm , gapdal tarapy bolsa 5 cm . Trapesiýanyň meýdanyny tapyň:
A) 45 ; B) 50 ; D) 48 ; E) 52 .
11. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 13 cm bolup, katetlerinden biri ikinjisinden 7 cm uly. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) 30 cm^2 ; B) 25 cm^2 ; D) 45 cm^2 ; E) 40 cm^2 .
12. Tarapy 5 cm bolan rombuň bir diagonaly 6 cm -e deň. Rombuň meýdanyny tapyň:
A) 24 cm^2 ; B) 30 cm^2 ; D) 29 cm^2 ; E) 40 cm^2 .
13. Diagonaly $6\sqrt{2}\text{ cm}$ bolan kwadratyň içinden çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň:
A) 10π ; B) 8π ; D) 9π ; E) 6π .
14. Tarapy $6\sqrt{2}\text{ cm}$ bolan kwadratyň daşyndan çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň:
A) 9π ; B) 12π ; D) 15π ; E) 18π .
15. Beýiklikleri 4 cm we 6 cm bolan parallelogramyň meýdany 36 cm^2 -a deň. Onuň perimetrini tapyň:
A) 26 cm ; B) 30 cm ; D) 29 cm ; E) 36 cm .
16. Perimetri 30 cm bolan parallelogramyň taraplary $2:3$ gatnaşykda. Eger parallelogramyň ýiti burçy 30° bolsa, onuň meýdanyny tapyň:
A) 26 cm^2 ; B) 27 cm^2 ; D) 29 cm^2 ; E) 30 cm^2 .
17. Eger ABC üçburçlukda $AB=6\sqrt{3}\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$ we $\angle C=60^\circ$ bolsa, üçburçlugyň A burçuny tapyň:
A) 45° ; B) 90° ; D) 30° ; E) 60° .

PLANIMETRIЯ DEGIŞLİ ESASY DÜŞÜNJELER WE MAGLUMATLAR

1

ÜÇBURÇLUKLAR



1°. Esasy düşünjeler

Tekizlikde bir goni çyzykda ýatmaýan üç nokat berlen bolsun. Şu nokatlaryň ikisini-de kesimler bilen utgaşdyryarys. Emele gelen şekile üçburçluk diýilýär. Nokatlara üçburçlugyň depeleri, kesimlere bolsa taraplary diýilýär. Belgilenişi: A, B, C – depeler, a, b, c – taraplar (*1-nji surat*).

Üçburçluk üç içki burça eýe: $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$. Belgilenişi: α, β, γ .

Mediana — üçburçlugyň depesini onuň garşysyndaky tarapyň ortasy bilen utgaşdyryán kesim. Üçburçlukda 3 mediana bolup, olar m_a, m_b, m_c ýaly belgilenýär.

Bissektrisa — üçburçlugyň depesini onuň garşysyndaky tarap bilen utgaşdyryán we şu depedäki burcuň bissektrisasynda ýatýan kesim. Üçburçlukda üç bissektrisa bolup, olar l_a, l_b, l_c ýaly belgilenýär.

Beýiklik — üçburçlugyň depesinden onuň garşysyndaky tarap ýatýan goni çyzyga geçirilen perpendikulýär.

Üçburçlukda üç beýiklik bolup, olar h_a, h_b, h_c ýaly belgilenýär.

Orta çyzyk — iki tarapyň ortalaryny utgaşdyryán kesim.

Orta çyzyklar sany hem 3.

Perimetru — üç tarapyň uzynlyklarynyň jemi. Belgilenişi: P .

Üçburçluklar taraplaryna garap görnüşe bölünýär:

- deň taraply ($a=b=c$); b) deňyanly (a, b, c -leriň haýsydyr ikisi deň);
ç) dürli taraply (a, b, c -leriň hiç haýsy ikisi deň däl).

Üçburçlugyň üç tarapyna-da galtaşyp geçýän töwerege onuň içinden çyzylan töwerek diýilýär (şeyle töwerek bar we ýeke-täk). İçinden çyzylan töweregىň radiusy r arkaly belgilenýär.

Üçburçlugyň üç depesinden geçýän töwerege onuň *daşyndan çyzylan töwerek* diýilýär we onuň radiusy R arkaly belgilenýär (şeyle töwerek bar we ýeke-täk).

2°. Esasy gatnaşyklar

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Üçburçlugyň içki burchlarynyň jemi 180° -a deň.

2) Üç mediana bir nokatda kesişyär. Bu nokat medianany 2:1 gatnaşykda bölýär. Medianalar uzynlyklary $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

formulalardan tapylyar.

3) Üç bissektrisa bir nokatda kesişyär. Bu nokat içinden çyzylan töweregىň merkezi bolýär. Bissektrisa özi geçirilen tarapy galan taraplara proporsional bölekllere bölýär (*2-nji surat*).

BD bissektrisa bolsa, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}; \quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \sqrt{p(p-c)}, \quad p = (a+b+c)$$

Bissektrisanyň uzynlyklaryny şu formulalardan tapmak mümkün.

4) Üçburçluguň beýiklikleri ýa-da olaryň dowamlary bir nokatda kesişyär.

Beýikligiň uzynlyklaryny

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

formulalardan tapmak mümkün. Bu ýerde

S — üçburçluguň meýdany.

5) Üçburçluk taraplarynyň orta perpendikuláry bir nokatda kesişyär. Bu nokat üçburçluguň *daşyndan çyzyylan töweregiň merkezi* bolýar.

6) Üçburçluguň *orta çyzygy* üçünji tarapa parallel we onuň ýarysyna deň.

7) Sinuslar teoremasy: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

8) Kosinuslar teoremasy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

9. Üçburçluguň meýdanyny hasaplamak formulalary:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta;$$

10. Geron formulasy:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr.$$

3°. Möhüm hususy ýagdaýlar

a) *Gönüburçly üçburçluk (3-nji surat).*

$\angle\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, AC we BC — katetler, AB — gipotenuza. Pifagoryň teoremasы: $a^2 + b^2 = c^2$.

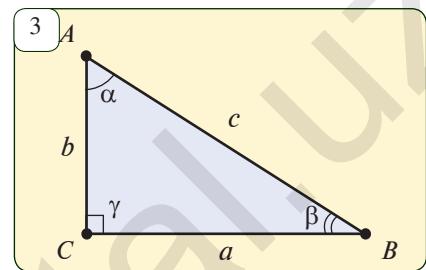
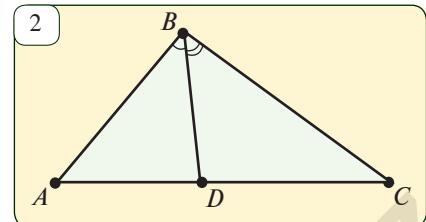
$$S = \frac{1}{2} ab; \quad R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{a}{c} = \cos\beta; \quad \frac{b}{c} = \sin\beta; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha.$$

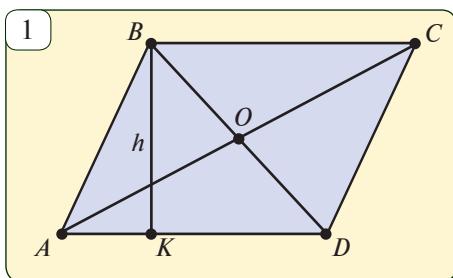
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta.$$

b) *Deň taraply üçburçluk*

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



DÖRTBURÇLUKLAR



1°. Parallelogram

Garşylykly taraplary parallel bolan dörtburçluga *parallelogram* diýilýär (*1-nji surat*).

Goňşy bolmadık depeleri utgaşdyrýan kesime *diagonal* diýilýär.

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$ parallel taraplar;
 BD we AC diagonallar.

Esasy häsiyetler we gatnaşyklar

- 1) Diagonallaryň kesişme nokady parallelogramyň simmetriýa merkezi bolýar.
- 2) Garşylykly taraplaryň uzynlyklary özara deň:

$$AB = CD \text{ we } AD = BC.$$

- 3) Parallelogramyň garşylykly burçlary özara deň:

$$\angle BAD = \angle BCD \text{ we } \angle ABC = \angle ADC.$$

- 4) Goňşy burçlar jemi 180° -a deň.

5) Diagonallar kesişme nokadynda deň ikä bölünýär: $BO = OD$ we $AO = OC$

6) Taraplaryň kwadratlarynyň jemi diagonallaryň kwadratlarynyň jemine deň:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 \quad \text{ýa-da} \quad 2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$$

- 7) Parallelogramyň meydany: a) $S = ah_a$, bu ýerde: $a = AD$ tarap, $h_a = BK$ — beýiklik; b) $S = ab \sin \alpha$, bu ýerde: $b = AB$ — tarap, $\alpha = \angle BAD$ — AB we AD taraplaryň arasyndaky burç.

2°. Romb

Ähli taraplary özara deň bolan parallelograma *romb* diýilýär.

Parallelogram üçin ýerlikli bolan ähli häsiyetler romb üçin hem ýerlikli.

Rombuň goşmaça häsiyetleri.

- 1) Rombuň diagonallary özara perpendikulýar.
- 2) Rombuň diagonallary içki burçlaryň bissektrisalary bolýar.
- 3) Rombuň meydany $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, bu ýerde: d_1, d_2 — rombuň diagonallary.

3°. Gönüburçluk

Ähli burçlary 90° -a deň bolan parallelograma *gönüburçluk* diýilýär.

- 1) Gönüburçlugyň diagonallary özara deň.
- 2) Gönüburçlugyň meydany $S = ab$, bu ýerde: a we b — gönüburçlugyň goňşy taraplary.

4°. Kwadrat

Ähli taraplary özara deň bolan gönüburçluga *kwadrat* diýilýär.

Romb we gönüburçluklar üçin dogry bolan ähli häsiyetler kwadrat üçin hem dogry.

Eger a — kwadrat tarapy, d bolsa diagonaly bolsa: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Trapesiýa

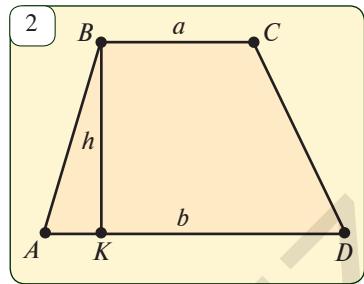
Esaslar diýilýän iki tarapy özara parallel we gapdal taraplar diýilýän, galan iki tarapy bolsa parallel bolmadyk dörtburçluga *trapesiýa* diýilýär.

Gapdal taraplaryň ortalalaryny utgaşdyrýan kesime trapesiýanyň *orta çyzygy* diýilýär.

Esasy häsiýetler

1) Trapesiýanyň orta çyzygy esaslara parallel we esaslaryň jeminiň ýarysyna deň bolýar.

2) Trapesiýanyň meýdany $S = \frac{a+b}{2} h$, bu ýerde a we b — esaslar, h bolsa beýiklik (2-nji surat).



TÖWEREK, TEGELEK

1°. Položitel san R we tekizlikde O nokat berlen bolsun. O nokatdan R aralykda ýerleşýän nokatlardan ybarat şekile töwerek diýilýär. O nokat töweregiň *merkezi*, merkez bilen töwerekdäki nokady utgaşdyrýan kesime *radius*, R sana bolsa *radius uzynlygy* diýilýär. Töwerekdäki iki nokady utgaşdyrýan kesime *horda*, merkezden geçýän horda bolsa *diametr* diýilýär.

Tekizligiň töwerek bilen çäklenen çäkli bölegi *tegelek* diýlip atlandyrylyär.

Esasy gatnaşyklar

1) $D=2R$, bu ýerde: D — diametriň uzynlygy.

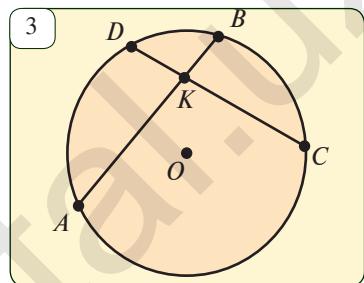
2) $l=2\pi R$ — töweregiň uzynlygy.

3) $S=\pi R^2$ — tegelegiň meýdany.

4) AB we CD hordalar K nokatda kesişse (3-nji surat), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ gatnaşyk ýerine ýetirilýär.

5) Hordany deň ikä bölýän diametr şu horda perpendikulýardır.

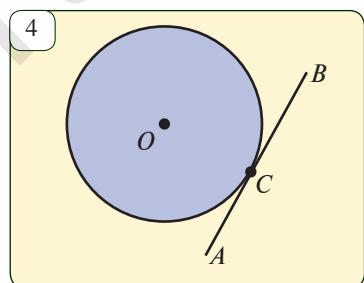
6) Deň hordalar merkezden deň aralyklarda ýerleşýär we, tersine, merkezden deň aralykda ýerleşýän hordalar özara deň.



2°. Galtaşma

Töwerek (ýa-da tegelek) bilen ýeke-täk umumy nokada eýe bolan goni çyzyga *galtaşma* diýilýär. Nokada bolsa *galtaşma nokady* diýilýär (4-nji surat).

Töwerek bilen 2 umumy nokada eýe bolan goni çyzyga *kesiji* diýilýär.



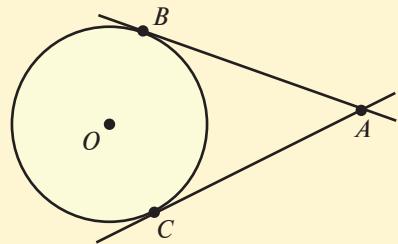
Galtaşmanyň häsiýetleri

1) Galtaşma nokadyna geçirilen radius galtaşma perpendikulýardyr.

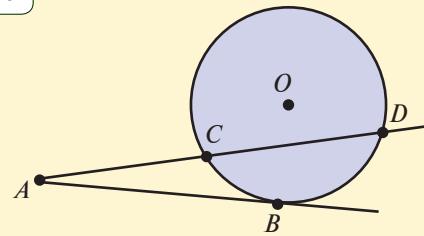
2) Tegelegiň daşarsyndaky nokatdan şu tegelege iki galtaşma geçirilmek mümkün. Bu galtaşmalaryň kesimleri özara deň (5-nji surat): $AB=AC$.

3) Eger AC kesiji bolup, töweregi C we D nokatlarda kesip geçse, AB bolsa galtaşma bolsa, $AB^2=AD \cdot AC$ deňlik dogry (6-njy surat).

5



6



3°. Merkezi we içinden çizylan burçlar

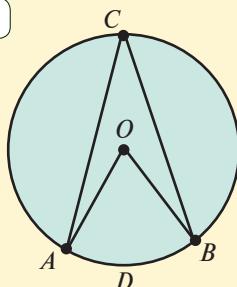
Töwerekdäki iki nokadyň kömeginde töwerek iki bölege bölünýär. Bu bölekler dugalar diýlip atlandyrylyar. Belgilenişi: $ADB; ACB$.

AOB burç ADB duga direlyän *merkezi burç* (7-nji surat), ACB burç bolsa ADB duga direlyän we töwereginiň *içinden çizylan burç* diýilýär. Bu burçlaryň arasında

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

gatnaşyk ýerlikli.

7



Hususan-da, ýarym töwerege direlyän içki burç goni burç bolýar (8-nji surat). Bir duga direlyän töwereginiň içinden çizylan burçlar özara deň bolýar.

4°. Sektor we segment

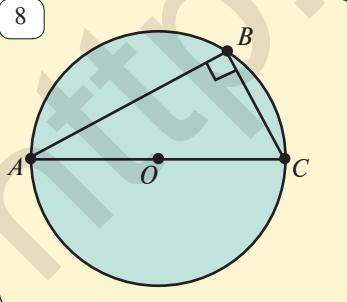
Tegelegiň iki radius bilen çäklenen bölegine *sektor* diýilýär (9-njy surat). Sektoryň dugasynyň uzynlygy:

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}, \text{ bu ýerde } \alpha \text{ — merkezi burcuň gradus ölçegi.}$$

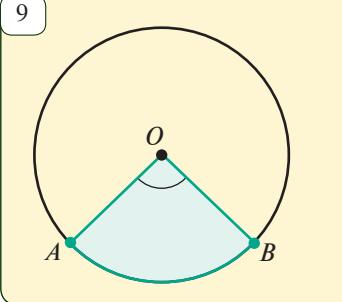
$$\text{Sektor meýdany: } S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}; S = \frac{1}{2} R l.$$

Segment — tegelegiň horda we şu horda direlyän duga bilen çäklenen bölegi (10-njy surat).

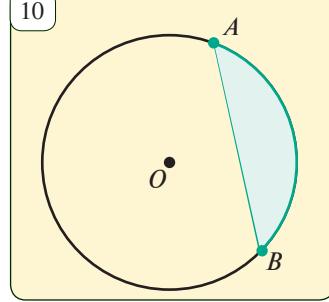
8



9



10



$$\text{Segmentiň meýdany: } S = S_{\text{sektor}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

DOGRY KÖPBURÇLUKLAR

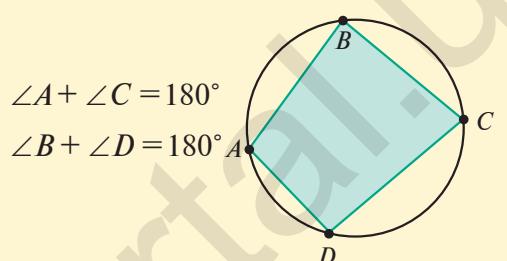
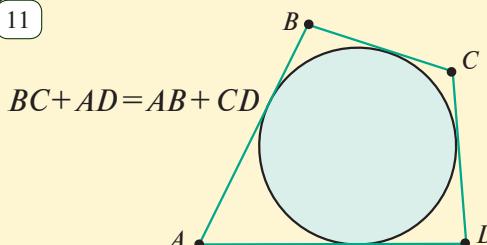
Dogry n burçluguň tarapy a_n , perimetri P_n , meýdany S_n , içinden çyzylan töweregىň radiusy r_n , daşyndan çyzylan töweregىň radiusy R_n , içki burçy α_n bolsa,

$$P_n = n a_n, \quad S_n = \frac{1}{2} P_n r_n = \frac{1}{2} n a_n r_n, \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Töweregىň daşyndan we içinden çyzylan dörtburçluklar (11-nji surat).

11



**10-dan 99-a čenli bolan natural sanlar
kwadratlarynyň jedweli**

<i>onluk birlik</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Käbir ululyklaryň jedweli

$\pi \approx 3,1416$ $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,7320$ $\sqrt{5} \approx 2,2360$ $\sqrt{6} \approx 2,4495$ $\sqrt{7} \approx 2,6457$	$\sqrt{8} \approx 2,8284$ $\sqrt{10} \approx 3,1623$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$ $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,3183$
---	--

Trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli									
α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	46	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	47	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	48	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	49	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	50	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	51	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	52	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	53	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	54	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	55	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	56	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	57	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	58	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	59	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	60	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	61	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	62	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	63	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0,326	0,946	0,344	2,904	64	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	65	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	66	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	67	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	68	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	69	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	70	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	71	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	72	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	73	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	74	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	75	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	76	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	77	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	78	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	79	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	80	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	81	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	82	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	83	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	84	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	85	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	86	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	87	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	88	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	89	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	90	1,000	0,0000	-	0,0000

JOGAPLAR WE GÖRKEZMELER

1-nji tema. 5. $50^\circ; 130^\circ; 133^\circ; 97^\circ$. 6. $65^\circ; 70^\circ; 45^\circ$. 7. $105^\circ; 130^\circ; 125^\circ$. 8. $35^\circ; 35^\circ; 110^\circ$.

9. $94^\circ; 56^\circ; 30^\circ$. 10. $110^\circ; 130^\circ; 120^\circ$. 11. *Görkezme*: dört üçburçluguň her biriniň taraplary ilkinji üçburçluguň degişli taraplarynyň ýarysyyna deň. 12. *Görkezme*: DF kesim ABH üçburçluguň hem, CEB üçburçluguň hem orta çyzygy bolýar. 13. *Görkezme*: ANC we CKA üçburçluklaryň hem-de içki atanak burçlaryň denligiden peýdalanyň.

2-nji tema. 2. a) $\sqrt{34}$ ýá-da $\approx 5,8 \text{ cm}$; b) $14\sqrt{2} \text{ m}$; ç) $\approx 21,5 \text{ cm}$; d) $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$; e) $\sqrt{2} \text{ cm}$; ä) $\sqrt{13} \text{ cm}$.

4. a) $\sqrt{21} \text{ cm}, \sqrt{5} \text{ cm}$; b) $\sqrt{21} \text{ cm}, \sqrt{22} \text{ cm}$; ç) $\sqrt{2} \text{ cm}, \sqrt{3} \text{ cm}$. 5. 12 cm . 6. a) $\sqrt{10} \text{ cm}$; b) $2\sqrt{5} \text{ cm}$; ç) $\sqrt{33} \text{ m}$. 8. b), d) we. ä) 9. hemmesi. 10. 225. 11. 5 cm.

12. $\sqrt{27} \text{ m}$. 14. b) $\approx 4,3 \text{ m}$; ç) $\approx 2,23$. 15. a) $8,62 \text{ m}$; b) $\approx 5,97 \text{ m}$.

16. $\approx 1,84 \text{ m}^2$. 17. $\approx 105,6 \text{ m}$. 18. $\approx 102,5 \text{ km}$. 19. $\approx 48,4 \text{ km}$.

3-nji tema. 1. a) $11,7 \text{ m}$; b) 35 mm ; ç) $6,2 \text{ km}$; d) 172 cm ; e) $4(x-1) \text{ cm}$; ä) $(4x+2) \text{ m}$; g) $(13x+2) \text{ km}$; f) $(6y-8) \text{ cm}$; g) $8x \text{ km}$. 2. a) $\approx 7,967 \text{ cm}$; b) $\approx 44,329 \text{ m}$; ç) $\approx 409,86 \text{ mm}$. 3. a) Hawa; b) Ýok; ç) Hawa; d) Hawa. 4. $0,8 \text{ m}; 24,64 \text{ m}^2; 21,12 \text{ m}^2$. 5. ≈ 50 gezek. 7. $17,5 \text{ cm}; 10,5 \text{ cm}; 38,1 \text{ cm}; 59,1 \text{ cm}$. 8. $91,5 \text{ m}$.

4-nji tema. 1. c. 2. a) C; b) A ; 3. 8 sany , 2,4m. 5. $\approx 53,4 \text{ m}$. 6. $\approx 19,25 \text{ m}^2$. 9. 12 sany 10. Birinjisinde. 11. 80 sany. 12. 7 dm^2 . 14. a) 180 dm^3 ; b) 105 cm^3 ç) 1364 cm^3 .

15. $1,8 \text{ m}^3$. 16. a) 22 cm ; b) 20 cm we 24 cm^2 ; c) 96 cm^3 . 20. a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{21}$; ç) $h=2\sqrt{7}$. 21. a) $(384+80\sqrt{5}) \text{ cm}^2, 640 \text{ cm}^3$; b) $84 \text{ cm}^2, 36 \text{ cm}^3$. ç) $(12\sqrt{34}+156)\text{m}^2, 180 \text{ m}^3$. d) $36564+306\sqrt{97} \text{ cm}^2, 404838 \text{ cm}^3$.

6-nji tema. 2. Üçburçluklar meňzeş. 4. 5; $8;\frac{1}{2}$. 5. 72; 162; 90.

7-nji tema. 3. 12 m . 4. $7,5 \text{ cm}; 12,5 \text{ cm}; 15 \text{ cm}$. 6. $73,5 \text{ m}^2; 37,5 \text{ m}^2$. 7. Üçburçluklar meňzeş.

8-nji tema. 3. a) 4,5; b) 10,5; ç) 4,5. 4. a) 10; b) 6; c) 4,5. 5. a) $5 \text{ cm}, 3,5 \text{ cm}$; b) $5\frac{5}{7} \text{ cm}, 2\frac{2}{7} \text{ cm}$. 6. a) 8; b) 3,5; ç) 12,5. 8. 12 cm.

9-nji tema. 3. a) hawa; b) ýok; ç) ýok. 4. $2\frac{1}{3} \text{ cm}$, 9. 5. a) $15 \text{ cm}; 20 \text{ cm}$; b) 24 cm ; 18 cm; ç) $144 \text{ cm}^2; 256 \text{ cm}^2$.

10-nji tema. 2. hawa. 3. a) we ç); d) we e). 4. 108 cm^2 . 5. $4 \text{ cm}; 6 \text{ cm}$. 7. $4,8 \text{ cm}$. 9. 12.

11-nji tema. 1. a) we d); b) we e); g) we ä). 2. 36 m ýá-da $20,25 \text{ m}$. 3. $12 \text{ cm}; 14 \text{ cm}$.

5. $\frac{5}{11} \text{ m}$. 7. 4 m . 8. 16 m . 9. $8,4 \text{ m}$.

12-nji tema. 3. a) 15; b) $3\frac{2}{11}$ ç) $3\frac{5}{17}$. 4. $18 \text{ cm}; 6 \text{ cm}$. 5. 29 dm^2 . 6. 6 dm . 7. m:n. 10. Hawa.

13-nji tema. 1. $3\frac{3}{17} \text{ m}; 13,6 \text{ cm}$. 7. n:m. 8. a) $S:4$; b) $S:2$; ç) $S:4$. 9. 30. 10. 57,75.

14-nji tema. II. 1. 12 cm^2 . 2. 8,4. 3. 2,4. 4. 24. 5. 8. 6. 1,6. 7. 18 mm . 8. a) 4; b) 10; ç) 32. 9.

Hawa. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň 2-nji nyşanyna görä. 10. 16. 11. Hawa, k=2.

12. 24 mm . 13. a) 36 cm^2 ; b) 54 mm^2 . 14. a) ; b) . 15. a) 7; b) 7. 16. 6m. 17. 12 m.

15-nji tema. 1. a)(1;-1); b)(-2;3); ç)(0;-4). 2. (-1;5). 4.(0;-3). 5. (-1;-8). 6. Hawa. 7. Ýok. 8. BB_1 ga.

16-njy tema. 1. a) Ox okuna görä simmetriýada: (1;-2), (0;-2), (2;-2). b) Oy okuna görä simmetriýada: (-1;2), (0;2), (-2;2). 2. Ox okuna görä. 4. Degişlilikde: 2 sany, 4 sany, 2 sany, 1sany, 1sany. 8. BAP, MUM

17-nji tema. 1. (8;3). 3. (2;-5), (-2;-2), (6;-12). 6. Gönüburçluk, kwadrat, parallelogramyň simmetriýa merkezi - diagnallarynyň kesişme nokadynda, goni çyzygyň simmetriýa merkezi - onuň erkin nokadynda.

12. a) oka görä simmetriýa (bir).

b) merkezi simmetriýa, oka görä simmetriýa (4 sany).

ç) merkezi simmetriýa.

d) oka görä simmetriýa (5 sany).

e) merkezi simmetriýa, oka görä simmetriýa (6 sany)

13. a) oka görä simmetriýa:

M, X, V, T, Y, V, W, D, B, H, K, C, I, E, A. b) merkezi simmetriýa: N, S, Z, X, H, I.

14. a) 180° -a; b) Ýok; ç) Ýok; d) 90° -a; e) Ýok; ä) 120° -a.

15. a) $\frac{360^\circ}{7}$; b) 60° ; c) 360° . 17. 15

18-nji tema. 5. 1 km 750 m. 8. 7,2 cm. 9. $k=\frac{1}{2}$ ýa-da $k=2$.

19-njy tema. 4. $k=2$. 5. 6 cm^2 ; 24 cm^2 . 6. 104 cm^2 . 7. İki ýagdaýda-da $k=1$. 8. $1,2 \text{ m}^2$. 9. 16 cm, 32 cm.

20-nji tema. 4. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$. 5. X_1X we Y_1Y şöhleleriň kesişme nokady gomotetiýa merkezidir.

6. $OX_1=2\cdot OX$. 7. *Görkezme*: Temada çözülen meseleden peýdalanyň.

21-nji tema. 4. a) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; b) $S_1=12$, $k=2$; d) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; e) $P_1=10$, $S_2=216$.

22-nji tema. 1. $\approx 6,94 \text{ m}$. 2. 300 m. 3. $\approx 72 \text{ m}$. 4. 6,6 m.

23-nji tema. 1. 9. 2. $P_2=39 \text{ dm}$. 3. 8 m. 4. 24 dm^2 . 6. *Görkezme*: ABC üçburçluk çyzyň, köpburçluklar gurmak temasyndaky 1-nji meseleden peýdalanylý, çyzyylan üçburçlugyň tarapalaryndan üç esse kiçi üçburçluk guruň.

9. 72° ; 72° ; 36° . 11. 12 cm^2 . 12. $150\ 000\ 000 \text{ km}$. 13. a) Hawa; b) Hawa. 15. 6 cm, 12 cm, 18 cm. 16. 84 m.

24-nji tema. II. 1. 8 cm. 2. $4\frac{4}{9} \text{ cm}$. 3. 48 m. 4. 4 cm; $0,5 \text{ cm}^2$. 5. $5\frac{1}{3} \text{ m}$. 6. 867 km. III. 7. 7,5 m. 8. 6 cm. 9. a) 7,5 cm; b) 6 cm; d) 16,2 cm. *Gyzykly meseleler*: 1. Üýtgemeýär. 2.

a) Hawa; b) Ýok. 3. *Görkezme*: Çyzgyç bilen her bir gurjagyň boýunu ölçäň we olaryň gatnaşygyny tapyň.

25-nji tema. 1. $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$. 5. a) 1; b) 1; d) 1. 6. $3,5 \text{ cm}$. 7. a) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; b) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; d) 0. 8*. a) 30° ; b) 135° ; d) 150° .

26-njy tema. 2. 36 cm^2 . 3. 24 cm. 4. a) $6\sqrt{3}$; b) 30; d) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. 5. $(24+4\sqrt{3}) \text{ cm}$; $(24+8\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 6. $10\sqrt{3} \text{ cm}$. 7. a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $\approx 807 \text{ m}^2$. 9. $\approx 88 \text{ m}$.

- 10.** 1000, 37° . **12.** 2° . **13.** 34° . **14.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **15.** $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$; $BO = 6\sqrt{3}$. **16.** 5 cm . **17.** 12, $24\sqrt{3}$. **18.** 20 cm, 200 cm^2 . **19.** 4, $16\sqrt{3}$. **20.** 30° ; 60° . **22.** 12 cm; $4\sqrt{3} \text{ cm}$; $8\sqrt{3} \text{ cm}$. **23.** 32 cm^2 .

27-nji tema. **2.** a) 6 cm^2 ; b) $73,5 \text{ cm}^2$; d) 6 cm^2 . **3.** 36 cm^2 . **4.** $49\sqrt{2} \text{ cm}^2$. **5.** $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

$$\mathbf{6.} 2\frac{2}{3}\text{cm}; 4,5\sqrt{2} \text{ cm}. \mathbf{7.} S = \frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha} \quad \mathbf{8.} 4,8\sqrt{3} \text{ cm}.$$

28-nji tema. **2.** a) $BC = 6$; b) $AB = 8\sqrt{2}$; d) $AC = 7\sqrt{2}$. **3.** a) $\sin C = \frac{1}{3}$; b) $\sin A = \frac{7}{16}$; d) $\sin B = \frac{2}{3}$.

- 4.** 4,8 dm. **5.** 30° ýa-da 150° . **6.** Mümkün. **7.** $AB \approx 21,1 \text{ m}$; $\angle B \approx 37^\circ$, $\angle C \approx 76^\circ$.
8. 76° ; 26,1 cm; 23,8 cm.

29-njy tema. **2.** a) $\sqrt{13} \text{ cm}$; b) 4 m; d) $\sqrt{283} \text{ dm}$. **3.** $\frac{1}{5}; \frac{19}{35}, \frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13} \text{ cm}$ ýa-da $2\sqrt{109} \text{ cm}$. **5.** $\sqrt{31} \text{ cm}$, $\sqrt{91} \text{ cm}$. **6.** $\sqrt{109} \text{ cm}$, $\sqrt{39} \text{ cm}$.

7. Görkezme: ADB we BDC üçburçluklara kosinuslar teoremasyny ulanyp, a^2 we c^2 -y tapyň, soňra bu deňlikleri agzama-agza goşuň. **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2} \text{ cm}$;
 $\frac{\sqrt{151}}{2} \text{ cm}$; $\frac{\sqrt{190}}{2} \text{ cm}$.

30-njy tema. **1.** $\angle B$ we $\angle C$. **2.** AB we BC . **3.** a) ýiti burçly; b) gönüburçly;

- d) kütek burçly. **4.** a) $8\frac{1}{8}$; b) $8\frac{1}{8}$; d) $24\frac{1}{6}$; e) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6. Görkezme:** Sinuslar teoremasyndan peýdalanyň. **7. Görkezme:** 6-njy meselä meňzeş çözülyär.

8. Görkezme: Sinuslar teoremasyndan peýdalanyň.

31-nji tema. **1.** a) $10\sqrt{3}$; b) $28\sqrt{2}$; d) 12; e) $\approx 0,3064$. **2.** a) —2; b) 0; d) 2. **3.** a) 8; b) 24; d) 8; e) 0. **5.** a) —7,5; d) 0. **6.** $a \perp b$, $c \perp d$.

32-nji tema. **1.** a) $\alpha=90^\circ$, $c=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. b) $\gamma \approx 45^\circ$; $a \approx 27,3$, $b \approx 24,5$; d) $\alpha=20^\circ$; $b \approx 65,8$; $c \approx 88,6$; e) $\gamma=119^\circ$; $a \approx 8,1$; $b \approx 5,8$. **2.** a) $c \approx 5,29$; $\alpha \approx 79^\circ 6'$; $\beta \approx 138^\circ 21'$; b) $c \approx 53,09$; $\alpha \approx 11^\circ 39'$; $\beta \approx 38^\circ 21'$; d) $a \approx 19,9$; $\beta \approx 58^\circ 19'$; $\gamma \approx 936^\circ 41'$; e) $a \approx 22,9$; $\beta \approx 21^\circ$; $\gamma \approx 15^\circ$. **3.** a) $\alpha \approx 29^\circ$; $\beta \approx 47^\circ$; $\gamma \approx 104^\circ$; b) $\alpha \approx 54^\circ$; $\beta \approx 13^\circ$; $\gamma \approx 113^\circ$; d) $\alpha \approx 34^\circ$; $\beta \approx 44^\circ$; $\gamma \approx 102^\circ$; e) $\alpha \approx 39^\circ$; $\beta \approx 93^\circ$; $\gamma \approx 48^\circ$.

33-nji tema. **1.** a) $2\sqrt{3} \text{ cm}$; b) 16 cm; d) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **2.** $4\sqrt{2} \text{ m}$; 8 m we $4+4\sqrt{3} \text{ m}$. **3.** $50\sqrt{3} \text{ kg}$.

- 4.** 14 cm. **5.** $2\sqrt{14} \text{ cm}$. **6.** $6\sqrt{3} \text{ cm}$. **7.** 50 cm.

34-nji tema. **1.** $\approx 10,8 \text{ m}$. **2.** $\approx 15 \text{ m}$. **3.** $\approx 43,4 \text{ m}$. **4.** $\approx 35^\circ$. **5.** $\approx 73,2 \text{ m}$. **6.** $\approx 49 \text{ m}$. **7.** Asfalt ýoldan.

35-nji tema. **II.** **1.** $3\sqrt{6}, 3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}; 0,89; -0,65$. **3.** $2\sqrt{7} \text{ cm}; \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$. **4.** $30\frac{1}{30} \text{ cm}$. **5.** 28 cm. **6.** 8 cm^2 ; $(4+4\sqrt{5}) \text{ cm}$; $h_a = 4 \text{ cm}$, $h_b = 0,8\sqrt{5} \text{ cm}$. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** a) ýiti burçly; b) gönüburçly, d) kütek burçly. **9.** 63 cm^2 . **10.** $\approx 3,7 \text{ cm}$. **11.** 7 cm. **12.** 6. **13.** 0. **14.** —9. **15.** 135° . **16.** $OC \approx 9,6$. **17.** $(24+24\sqrt{3}) \text{ cm}$. **18.** 5. **III.** **1.** $\approx 109^\circ$. **2.** $\gamma = 100^\circ$, $a \approx 3,25$; $c \approx 6,43$. **3.** 6,25; 14,76.

36-njy tema. **2.** a) Islendik üçburçluk töweregineinden çyzylmagy mümkün; b) Garşylykly burçlary jemi 180° bolan dörtburçluklar. **3.** Bir duga direlyän burçlar deň. **4.** 10 cm. **5.** 672 cm^2 . **6.** a) $10\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $10\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $10\sqrt{2} \text{ cm}$; $10\sqrt{2} \text{ cm}$; 20 cm. **7.** $8\frac{1}{3} \text{ cm}$. **8.** ΔABF -da, $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$, $\angle ABF = 90^\circ$. Diýmek, AF – diametr. **9.** Garşylykly burçlary jemi 180° , ýagny töwerege

ıçki çyzmak mümkün. **10. Görkezme:** Bir esas we bir gapdal tarapyň orta perpendicularityary kesişen nokat töweregىň merkezi bolýar.

37-nji tema. **2.** $7,2 \text{ cm}$. **3.** a) 16,6; b) 22; d) 22,6. **4.** a) 2,5; b) 3,5; d) 2. **8.** 6 cm .

38-nji tema. **3.** a) 60° ; b) 108° ; d) 120° ; e) 144° ; ä) 160° . **4.** a) 120° ; b) 72° ; d) 120° ; e) 36° ; f) 30° . **5.** a) 3; b) 4; d) 8; e) 12.

39-njy tema. **1.** 3 cm we $3\sqrt{2} \text{ cm}$. **2.** $\sqrt{3}$ we $2\sqrt{3}$. **7.** a) 6; b) 12; d) 10; e) 20; ä) 5.

40-njy tema. **3.** 8 cm ; $8\sqrt{2} \text{ cm}$; $8\sqrt{3} \text{ cm}$; $8\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ cm}$; 16 cm .

$$\frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}; \quad \textbf{5. a)} 20\sqrt{2} \text{ cm}; \quad \textbf{b)} 40 \text{ cm}. \quad \textbf{6. } \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

41-nji tema. **I.** **1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** E; **7.** E. **III.** **1.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **2.** $3:4:3$. a) $\approx 5,780 \text{ cm}$; b) $\approx 4,142 \text{ cm}$; d) $\approx 2,679 \text{ cm}$. **4.** $S = \sqrt{2R^2}$. **5.** 24 cm^2 . **IV.** **1.** 4 cm ; 13 cm . **2.** a) 80 cm ; b) $20\sqrt{2}-\sqrt{3} \text{ cm}$; $40\sqrt{2}-\sqrt{3} \text{ cm}$; d) 200 cm^2 . **3.** $4\sqrt{3} \text{ cm}$; 8 cm . **4.** $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

42-nji tema. **2.** a) 3 esse artýar; b) $6\pi \text{ cm}$ -e artýar; d) 3 esse kemelýär; e) $6\pi \text{ cm}$ -e kemelýär.

$$\textbf{3. } 6369 \text{ km}. \quad \textbf{4. a)} \frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}; \quad \textbf{b)} \pi\sqrt{a^2+b^2}; \quad \textbf{d)} \frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}. \quad \textbf{5. a)} \pi a;$$

$$\textbf{b)} \pi c(\sqrt{2}-1); \quad \textbf{d)} \pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1). \quad \textbf{6. } 1,5 \text{ m}. \quad \textbf{7. } 66348 \text{ esse.}$$

43-nji tema. **1.** a) $\pi \text{ cm}$; b) $1,5\pi \text{ cm}$; d) $3\pi \text{ cm}$; e) $4\pi \text{ cm}$. **2.** a) $\frac{2\pi}{9}$; b) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** a) $\approx 69^\circ$; b) 120° ; d) 150° . **4.** a) $\frac{5\pi}{8} \text{ cm}$; b) $2\pi \text{ cm}$; d) $\frac{15\pi}{4} \text{ cm}$; **5.** a) 4π ; b) 16π . **7.** 2.

44-nji tema. **3.** k^2 esse artdy; b) k^2 esse kemeldi. **4.** $6,25\pi \text{ cm}^2$; $12,5\pi \text{ cm}^2$. **5.** $2,25\pi \text{ cm}^2$; $9\pi \text{ cm}^2$. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** $21,25 \pi \text{ cm}^2$. **8.** $18,75 \text{ cm}^2$.

45-nji tema. **3.** a) $\frac{49}{12}\pi \text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-3)}{12} \text{ cm}^2$; b) $6,125\pi \text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8} \text{ cm}^2$; d) $\frac{49\pi}{3} \text{ cm}^2$; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2$; e) $\frac{49\pi}{4} \text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-2)}{4} \text{ cm}^2$. **4.** a) $a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right)$; b) $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$; d) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2} a^2$; **5.** $\pi \text{ cm}^2$; $3\pi \text{ cm}^2$; $5\pi \text{ cm}^2$; $7\pi \text{ cm}^2$. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2$; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2$; **7.** $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2$. **8.** $S_1 < S < S_2$; $300 \text{ cm}^2 < 314 \text{ cm}^2 < 321,48 \text{ cm}^2$.

46-njy tema. **1.** Tegelegiňki uly. **2.** $\frac{160}{3}\pi \text{ cm}^2$. **3.** $5,76\pi \text{ cm}^2$. **4.** $8(\pi-2) \text{ cm}^2$. **6.** $6\pi \text{ cm}^2$; $10\pi \text{ cm}$.

47-nji tema. **II.** **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3} \text{ dm}$. **3.** 30 cm . **4.** 90° . **5.** 3. **6.** π we $6,25\pi$. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$.

$$\textbf{8. } \frac{2\sqrt{3}}{\pi 0} \cdot 9 \cdot \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6} a^2. \quad \textbf{10. } 1,5\pi. \quad \textbf{11. } 7. \quad \textbf{12. } \approx 9\pi - 26,04. \quad \textbf{13. } \pi. \quad \textbf{14. } 54\sqrt{3} - 24\pi. \quad \textbf{15. } \frac{3\pi}{8}. \quad \textbf{III. } \textbf{2. } 8\sqrt{3} \text{ cm}. \quad \textbf{3. a)} \frac{18}{\pi} \text{ cm}; \quad \textbf{b)} \frac{216}{\pi} \text{ cm}^2; \quad \textbf{d)} \frac{216\pi+81\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ cm}^2.$$

48-nji tema. **3.** $5\sqrt{2} \text{ cm}$. **4.** 12 cm . **5.** $44 \text{ m}, 60 \text{ m}$. **7.** $1:7$. **8.** $AB \cos\alpha$.

49-njy tema. **1.** a) $30 \text{ cm}, 12 \text{ cm}$; b) $9 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 21 \text{ cm}$; d) $3 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 3 \text{ cm}, 21 \text{ cm}$. **3.** 6 cm ; $10,5 \text{ cm}$. **4.** $9 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 18 \text{ cm}$. **5.** 60° . **6.** 21 cm . **7.** 20 cm .

50-nji tema. **1.** **Görkezme:** $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$. **2.** $25 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 20 \text{ cm}$. **3.** $9\frac{3}{5} \text{ cm}$.

$$\textbf{4. a)} 5, 4; \quad \textbf{b)} 24, 25; \quad \textbf{d)} 8, 10. \quad \textbf{5. } 16:25. \quad \textbf{6. } 56, 16 \text{ cm}^2. \quad \textbf{7. } 60 \text{ cm}^2. \quad \textbf{8. } \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}.$$

51-nji tema. **2.** **Görkezme:** a) katetleri a we b bolan gönüburçly üçburçluk guruň; b) hipotenuzasy a , bir kateti b bolan gönüburçly üçburçluk guruň. **3.** **Görkezme:** Katetleri $AB = BC = 1$ bolan ΔABC guruň. Soň kateti

$CC_1=1$ we $\angle C_1=90^\circ$ bolan ΔBCC_1 guruň we başgalar. **4.** a) 20; b) 45; d) 37,5.
5. $225\pi \text{ cm}^2$. **6.** 180 cm^2 . **7.** 25:9. **9.** $OC \geq OD$ bolany üçin deňsizlik hemise dogry.

52-nji tema. **1.** a) 6,25; b) 12; d) 0,25. **2.** a) 8 cm; b) 2,5 cm; d) 0,9 cm. **3.** a) 4 dm; b) 4 dm.
4. 8 cm. **6.** 9 dm; 16 dm.

53-nji tema. **1.** 10 cm. **2.** 2 cm. **3.** a) 2,5; b) 4; d) 2. **4.** a) $4\sqrt{6}-1$ cm; b) 6 cm. **5.** 1:6.
6. 6 cm. **7.** 3. **8.** 1:4.

54-nji tema. II. **1.** 18 cm; 32 cm. **2.** 4 cm; **3.** 8 cm; **4.** 6,4 dm. **5.** 8 cm. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 dm². **10.** 4 cm. **11.** 8 cm. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9.

III. **1.** 8 cm. **2.** 5 dm. **3.** 4 cm; 8 cm.

55-nji tema. 1. a) 9; b) 4 cm²; d) 3,5 cm; e) $\frac{1}{2} TB - CA$; ä) 0,2. **2.** $\Delta CMH \sim \Delta BCA$.

*Dersligi düzmekde peýdalanylan we goşmaça öwrenmek maslahat berilýän
okuw edebiýatlary we elektron resurslar*

1. A'zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. «O'qituvchi», 1993.
2. Александров А.Д. "Геометрия -9", учебник, Москва. Просвещение", 2013.
3. Атанасян С. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. Просвещение", 2002.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Вежа", 2007
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9" учебник, Киев, Освіта, 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9" учебник, Харьков, Гимназия, 2008.
8. Перельман Я.И. Қизықарлы геометрия, Ташкент. Ўқитувчи, 1981.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. Просвещение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. Наука, 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. <http://www.uzedu.uz> - Xalq ta'limi vazirligining axbarot ta'lim portalı.
15. <http://www.eduportal.uz> - Multimedia merkezi axbarot ta'lim portalı.
16. <http://www.matematika.uz> - Masofadan turib o'qitish sayti (uzbek tilida).
17. <http://www.problems.ru> / Matematikadan meseleler izlash tizimi (rus tilida).
18. <http://www.ixl.com> - Masofadan turib o'qitish sayti (ingliz tilida).
19. <http://www.mathkang.ru> - "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
20. <http://www.khanakademy.org> - "Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (engliz tilida)
21. <http://www.brilliant.org> – Matematikadan masofaviy ta'lim sayti (engliz tilida).
22. <http://www.merkez.tdi.uz> - Ta'lim sifatini baholash bo'yicha halkara tadqiqotlarni amalga oshirish milliy merkezi sayti.
23. <http://www.oecd.org/pisa> - Iqtisodiy hamkorlik va taraqqiyot tashkiloti sayti, PISA – tadqiqotlarning ochiq materiallari.

Haýdarow Bahadir Kaýumowiç

Geometriýa: 9-njy synp üçin derslik/B.K.Haýdarow, E.S.Sarykow, A.Ş.Koçkarow.—D.:, 2019.—160 s.

X 18

K. Haýdarow, Bahadir.

ISBN 978-9943-5875-9-5

UDK 514.1(075)

BBK 22.151ýa7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,

Atamurod Shamuratovich Qo‘chqorov

GEOMETRIYA 9-sinp uchun darslik

To‘rtinchi nashri
(Turkman tilida)

Original-maket "Huquq va Jamiyat" nashriyoti tomonidan tayyorlandi.

Terjime eden *K. Hallyýew*

Redaktor *J.Metýakubow*

Çepeç redaktor *A.Umarowa*

Baş dizayýner *H&J dizayýn topary*

Korrektor *J.Metýakubow*

Sahaplaýjy *D.Iskandarbekow*

Litsenziya AI №022, 27.10.2018 yil.

Çap etmäge 2019-njy ýylyň 5-nji awgustynda rugsat edildi. Möçberi 70×100^1 ₁₆.

Tayms garniturasy. Kegli 10. Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 11,7.

Neşir listi 11,83. 1030 nusgada çap edildi. Buýurma № 19-20.

"Huquq va Jamiyat" nashriyotining matbaa bo‘limi

Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko‘chasi.

Guvochnoma №10-2750, 13.06.2017 yil

Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylan-daky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanyllyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütin, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparyladyk, sahypalarynda ýazgylar we çzyzklar ýok.
Kanagatlanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çzyylan, gyralary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çzyylan.
Kanagatlanarsyz	Kitabyň daşy çzyylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çzyzlyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.